Konstruktibilni brojevi

Živković, Paula

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:352976

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Paula Živković

KONSTRUKTIBILNI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, studeni, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem svojim roditeljima, obitelji, prijateljima i mentoru
na pomoći i podršci

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Konstruktibilne točke **3**
1.1 Pravci i kružnice 3
1.2 Određenost točke skupom 5
1.3 Konstruktibilnost točke iz skupa 10

2 Kvadratni radikali **15**
2.1 Grupe, prsteni i polja 15
2.2 Prsten $B[x_0]$ 21
2.3 Kvadratni radikali 29

3 Algebarska svojstva konstruktibilnih brojeva **35**
3.1 Jednadžba pravca i kvadratni radikali 35
3.2 Konstruktibilni brojevi i kvadratni radikali 41
3.3 Polinomi 46
3.4 Polinomi i kvadratni radikali 52
3.5 Problem duplikacije kocke 57

4 Karakterizacija konstruktibilnih brojeva **59**
4.1 Točke s konstruktibilnim koordinatama 59
4.2 Zbroj, produkt i kvocijent konstruktibilnih brojeva 71
4.3 Karakterizacija konstruktibilnih brojeva 74

Bibliografija **77**

Uvod

U ovom diplomskom radu bavimo se problemom konstruktibilnosti točaka i brojeva.

U prvom poglavlju proučavamo pravce i kružnice te određenost točaka danim skupom. Nadalje, definiramo kada za neku točku kažemo da se može konstruirati iz danog skupa.

U drugom poglavlju uvodimo pojam kvadratnog radikala i proučavamo svojstva kvadratnih radikala. U tu svrhu promatramo grupe, prstene i polja te proširenja prstena jednim elementom.

U trećem poglavlju dokazujemo da je svaki konstruktibilan broj kvadratni radikal. Nadalje, dajemo kriterij da polinom trećeg stupnja s racionalnim koeficijentima nema rješenje koje je kvadratni radikal. Koristeći navedeni kriterij dajemo negativan odgovor na klasični problem duplikacije kocke.

U posljednjem poglavlju pomoću točaka s konstruktibilnim koordinatama proučavamo zbroj, produkt i kvocijent konstruktibilnih brojeva. Potom dokazujemo da je svaki kvadratni radikal konstruktibilan broj.

Poglavlje 1

Konstruktibilne točke

1.1 Pravci i kružnice

Definicija 1.1.1. *Neka je* $p \subseteq \mathbb{R}^2$. *Za* p *kažemo da je pravac ako postoje* $T_0 \in \mathbb{R}^2$ *i* $v \in \mathbb{R}^2, v \neq (0,0)$ *takvi da je* $p = \{T_0 + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Lema 1.1.2. *Neka su* $T_0, v \in \mathbb{R}^2, v \neq (0,0)$ *te neka je* $p = \{T_0 + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Neka je* $T_1 \in p$. *Tada je* $p = \{T_1 + s \cdot v \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Dokaz. Iz $T_1 \in p$ slijedi da postoji $t_1 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$T_1 = T_0 + t_1 \cdot v. \tag{*}$$

Neka je $T \in p$. Tada postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $T = T_0 + t \cdot v$. Želimo dokazati da postoji $s \in \mathbb{R}$ takav da je $T = T_1 + s \cdot v$. Prema (*) vrijedi

$$T_0 = T_1 - t_1 \cdot v.$$

Imamo

$$T = T_0 + t \cdot v = (T_1 - t_1 \cdot v) + t \cdot v = T_1 + (t - t_1) \cdot v.$$

Dakle,

$$T = T_1 + (t - t_1) \cdot v,$$

iz čega slijedi da postoji $s \in \mathbb{R}$ takav da je $T = T_1 + s \cdot v$. Dakle, $T \in \{T_1 + s \cdot v \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Obratno, neka je $T \in \{T_1 + s \cdot v \mid s \in \mathbb{R}\}$. Tada postoji $s \in \mathbb{R}$ takav da je $T = T_1 + s \cdot v$. Koristeći (*) dobivamo da je

$$T = (T_0 + t_1 \cdot v) + s \cdot v = T_0 + (t_1 + s) \cdot v$$

iz čega slijedi da postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $T = T_0 + t \cdot v$. Prema tome $T \in p$. Time je lema dokazana.

□

Lema 1.1.3. *Neka su $T_0, v \in \mathbb{R}^2, v \neq (0,0)$ te neka je $p = \{T_0 + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$. Neka je $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ te neka je $w = \lambda \cdot v$. Tada je*

$$p = \{T_0 + s \cdot w \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Dokaz. Neka je $T \in p$. Tada je $T = T_0 + t \cdot v$, za neki $t \in \mathbb{R}$. Kako je $w = \lambda \cdot v$, slijedi da je $v = \frac{1}{\lambda} \cdot w$. Stoga je

$$T = T_0 + t \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot w\right) = T_0 + \left(t \cdot \frac{1}{\lambda}\right) \cdot w,$$

iz čega slijedi $T \in \{T_0 + s \cdot w \mid w \in \mathbb{R}\}$.

Obratno, neka je $T \in \{T_0 + s \cdot w \mid s \in \mathbb{R}\}$. Tada je $T = T_0 + s \cdot w$, za neki $s \in \mathbb{R}$. Iz $w = \lambda \cdot v$ slijedi da je

$$T = T_0 + s \cdot (\lambda \cdot v) = T_0 + (s \cdot \lambda) \cdot v.$$

Slijedi da je $T \in p$, čime je lema dokazana. □

Propozicija 1.1.4. *Neka su $A, B \in \mathbb{R}^2$ takvi da $A \neq B$. Tada postoji jedinstveni pravac p takav da su $A, B \in p$.*

Dokaz. Neka je $v = B - A$. Očito je $v \neq (0,0)$. Definirajmo $p = \{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$. Očito je p pravac. Vrijedi $A = A + 0 \cdot v$ pa je $A \in p$.

Iz

$$B = A + (B - A) = A + 1 \cdot v$$

slijedi $B \in p$. Dakle, p je pravac takav da su $A, B \in p$. Neka je q pravac takav da vrijedi $A, B \in q$. Dokažimo da je $p = q$.
Budući da je q pravac, postoje $T_0, w \in \mathbb{R}^2, w \neq (0,0)$ takvi da je $q = \{T_0 + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$. Iz $A \in q$ i leme 1.1.2 slijedi

$$q = \{A + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}. \qquad (\triangle)$$

Kako je $B \in q$ slijedi da je $B = A + t \cdot w$, za neki $t \in \mathbb{R}$. Uočimo da je $t \neq 0$ (u suprotnom bi slijedilo da je $B = A$, što je u suprotnosti s pretpostavkom propozicije). Slijedi $B - A = t \cdot w$ tj. $v = t \cdot w$. Vrijedi $w = \frac{1}{t} \cdot v$.
Zbog leme 1.1.3 vrijedi $p = \{A + s \cdot w \mid s \in \mathbb{R}\}$. Iz ovoga i $(\triangle)$ slijedi $p = q$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 1.1.5. *Za $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A \neq B$, prema propoziciji 1.1.4 postoji jedinstveni pravac p takav da $A, B \in p$. Taj pravac označavamo s AB.*

Napomena 1.1.6. *Prema dokazu propozicije 1.1.4 slijedi $AB = \{A + t \cdot (B - A) \mid t \in \mathbb{R}\}$.*

Napomena 1.1.7. *Neka su p i q pravci takvi da je $p \neq q$ i $p \cap q \neq \emptyset$. Tada je $p \cap q$ jednočlan skup.*
Naime, pretpostavimo da postoje $A, B \in p \cap q$ takvi da je $A \neq B$. Slijedi $A, B \in p$ i $A, B \in q$, što je nemoguće prema propoziciji 1.1.4 jer je $p \neq q$. Stoga je $p \cap q$ jednočlan skup.

Definicija 1.1.8. *Za $A, B \in \mathbb{R}^2, A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ definiramo*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Za $d(A, B)$ kažemo da je udaljenost točaka A i B.

Definicija 1.1.9. *Neka su $T_0 \in \mathbb{R}^2$ i $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Definiramo skup*

$$K(T_0, r) = \{T \in \mathbb{R}^2 \mid d(T_0, T) = r\}.$$

Za $K(T_0, r)$ kažemo da je kružnica sa središtem u točki T_0 radijusa r.

1.2 Određenost točke skupom

Definicija 1.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je p pravac. Kažemo da je p pravac određen skupom S ako postoje $A, B \in S, A \neq B$, takvi da je $p = AB$.*

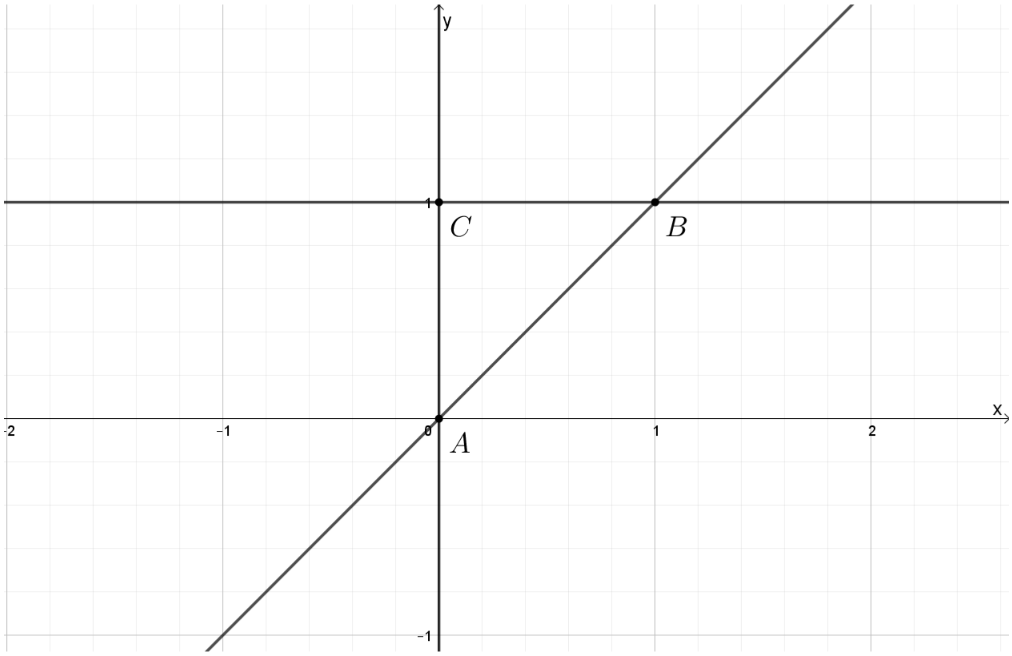
Primjer 1.2.2. *Neka je $S = \{A, B, C\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gdje su $A = (0, 0),\ B = (1, 1),\ C = (0, 1)$. Tada su AB, BC i AC svi pravci određeni skupom S. Prema napomeni 1.1.6 vrijedi*

$$AC = \{A + t \cdot (C - A) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0) + t \cdot (0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Iz ovoga je očito da $B \notin AC$. No, $B \in AB$ pa zaključujemo $AB \neq AC$. Također, $BC \neq AC$. Vrijedi

$$AB = \{A + t \cdot (B - A) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0) + t \cdot (1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

pa je očito da $C \notin AB$ odnosno $BC \neq AB$.



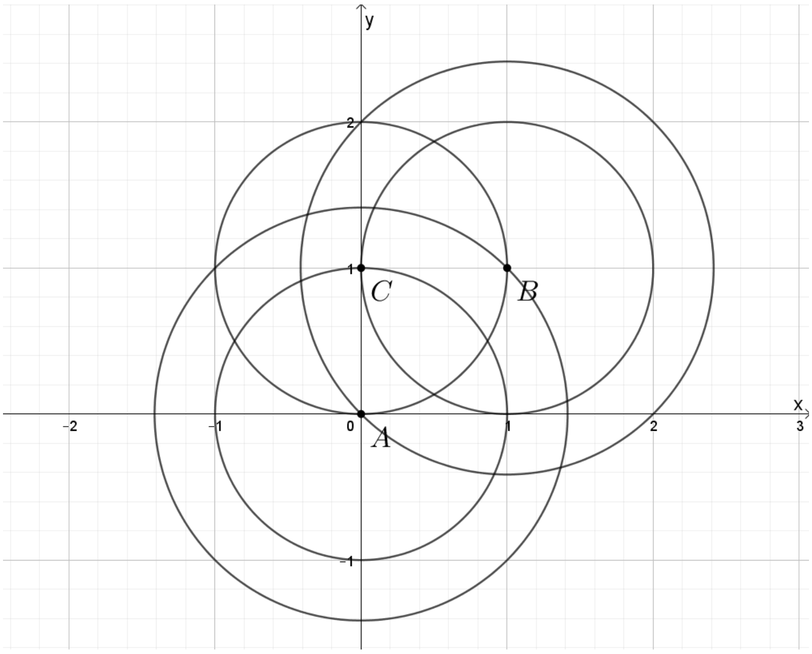
Slika 1.1: Pravci određeni skupom S

Definicija 1.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je k kružnica. Kažemo da je k kružnica određena skupom S ako postoje $A, B \in S, A \neq B$ takvi da je $k = K(A, d(A, B))$.*

Primjer 1.2.4. *Neka je $S = \{A, B, C\} \subseteq \mathbb{R}^2$, gdje su $A = (0, 0), B = (1, 1), C = (0, 1)$. Tada su*

$$K(A, d(A, C)) = K(A, 1),$$
$$K(A, d(A, B) = K(A, \sqrt{2}),$$
$$K(B, d(B, C)) = K(B, 1),$$
$$K(B, d(B, A)) = K(B, \sqrt{2}),$$
$$K(C, d(C, A)) = K(C, 1) = K(C, d(C, B)),$$

sve kružnice određene skupom S.



Slika 1.2: Kružnice određene skupom S

Definicija 1.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $T \in \mathbb{R}^2$. Kažemo da je T točka određena skupom S ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

1. *Postoje pravci p_1 i p_2 određeni skupom S takvi da je $p_1 \neq p_2$ i $T \in p_1 \cap p_2$.*

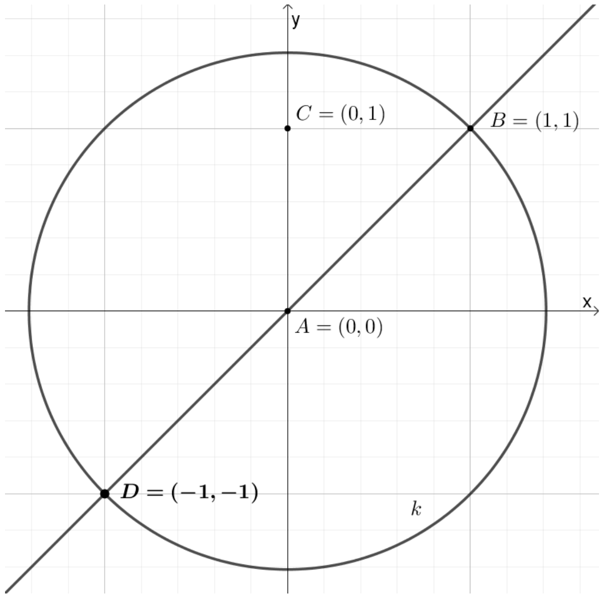
2. *Postoji pravac p određen skupom S te postoji kružnica k određena skupom S tako da je $T \in p \cap k$.*

3. *Postoje kružnice k_1 i k_2 određene skupom S takve da $k_1 \neq k_2$ i $T \in k_1 \cap k_2$.*

Primjer 1.2.6. *Neka je $S = \{A, B, C\} \subseteq \mathbb{R}^2$, gdje su $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$.*

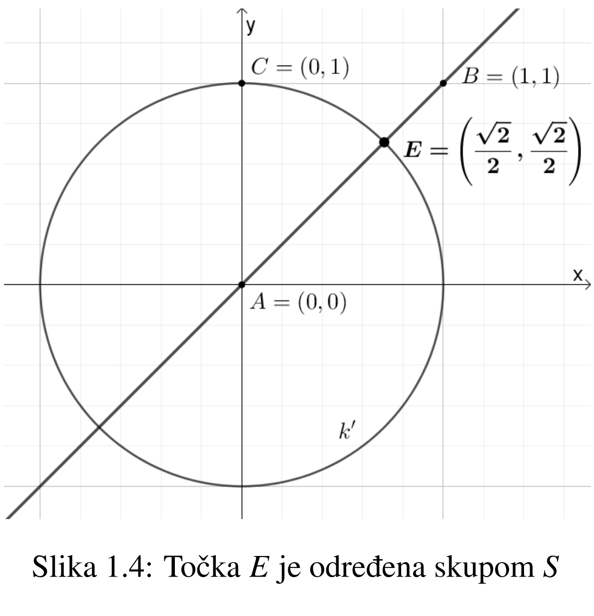
1. *Imamo $A \in AB \cap AC$ i $AB \neq AC$ (prema primjeru 1.2.2). Stoga je A točka određena skupom S (prema definiciji 1.2.5). Analogno zaključujemo da su točke B i C određene skupom S.*

2. *Neka je $k = K(A, d(A, B))$. Očito je k kružnica određena skupom S.*
   Vrijedi $d(A, B) = \sqrt{2}$. Dakle, $k = K(A, \sqrt{2})$. Neka je $D = (-1, -1)$. Vrijedi $d(A, D) = \sqrt{2}$ pa je $D \in k$. Prema primjeru 1.2.2 vrijedi $AB = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Stoga je $D \in AB$. Dakle, $D \in k \cap AB$ pa slijedi da je D točka određena skupom S.



Slika 1.3: Točka D je određena skupom S

3. *Kružnica $k' = K(A, d(A, C))$ također je određena skupom S.*
   Vrijedi da je $d(A, C) = 1$. Dakle, $k' = K(A, 1)$. Neka je $E = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Vrijedi $d(A, E) = 1$ pa je $E \in k'$. Očito je $E \in AB$. Dakle, $E \in k' \cap AB$ pa slijedi da je E točka određena skupm S.

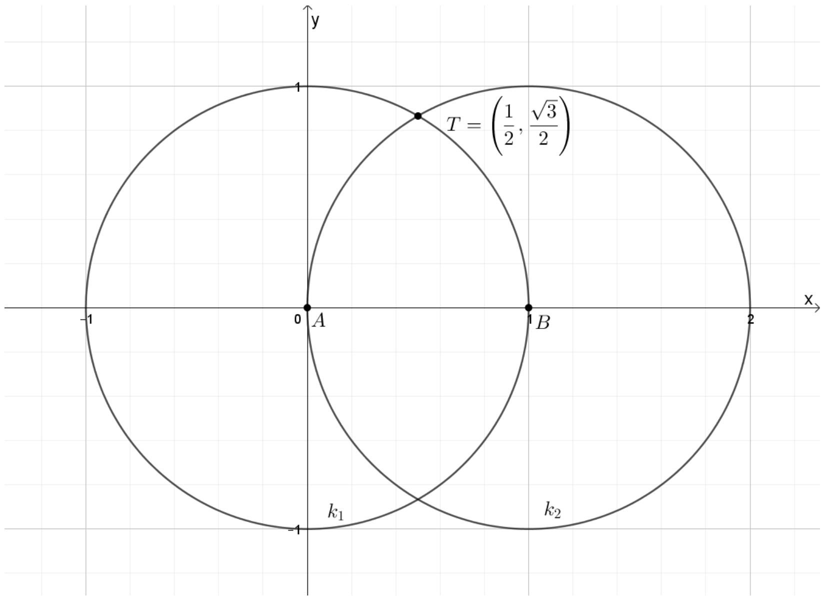


Slika 1.4: Točka E je određena skupom S

Primjer 1.2.7. *Neka su $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$ te neka je $S = \{A, B\}$.*
Neka je $k_1 = K(A, d(A, B))$ i $k_2 = K(B, d(A, B))$. Prema definiciji 1.2.3 te kružnice određene su skupom S. Vrijedi $d(A, B) = 1$. Neka je $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Vrijedi

$$d(A, T) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \;\; i \;\; d(B, T) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

tj. $T \in K(A, 1)$ i $T \in K(B, 1)$. Dakle, $T \in k_1$ i $T \in k_2$ pa je $T \in k_1 \cap k_2$. Očito je $k_1 \neq k_2$. Prema tome, T je točka određena skupom S.



Slika 1.5: Točka T je određena skupom S

Napomena 1.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ takav da S ima barem 2 točke. Tada je svaka točka skupa S određena skupom S. Naime, neka je $A \in S$. Odaberimo neki $B \in S, B \neq A$. Prema definiciji 1.2.3 vrijedi da je $K(B, d(A, B))$ kružnica određena skupom S, a očito je $A \in K(B, d(A, B))$. Nadalje, AB je pravac određen skupom S i vrijedi $A \in AB$. Dakle, $A \in K(B, d(A, B)) \cap AB$ pa zaključujemo da je A točka određena skupom S.*

Napomena 1.2.9. *Ako je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ jednočlan skup ili $S = \emptyset$, onda ne postoji točka određena skupom S. Naime, za takav skup S vrijedi da ne postoje pravci i kružnice određene skupom S.*

Napomena 1.2.10. *Neka su T i S podskupovi od $\mathbb{R}^2$ takvi da je $T \subseteq S$. Pretpostavimo da je p pravac određen skupom T. Tada postoje $A, B \in T, A \neq B, p = AB$. Zbog $T \subseteq S$ imamo $A, B \in S$ pa zaključujemo da je pravac p određen skupom S. Dakle, svaki pravac određen skupom T određen je i skupom S. Pretpostavimo da je k kružnica određena skupom T. Tada postoje $A, B \in T, A \neq B$, takvi da je $k = K(A, d(A, B))$. Kako je $T \subseteq S$ vrijedi $A, B \in S$ pa zaključujemo da je kružnica k određena skupom S. Dakle, svaka kružnica određena skupom T određena je i skupom S. Slijedi da je svaka točka određena skupom T određena i skupom S.*

1.3 Konstruktibilnost točke iz skupa

Definicija 1.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Definiramo skupove $S^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0$ induktivno na sljedeći način.*
Neka je $S^{(0)} = S$.
Pretpostavimo da smo definirali $S^{(n)}$ za neki $n \in \mathbb{N}_0$.
Definiramo $S^{(n+1)} = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid A$ određena skupom $S^{(n)}\}$.

Definicija 1.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $A \in \mathbb{R}^2$. Kažemo da se točka A može konstruirati iz skupa S ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A \in S^{(n)}$.*

Napomena 1.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ i pretpostavimo da S ima barem dva elementa. Dokažimo indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi sljedeće: $S^{(n)}$ ima barem dva elementa i $S^{(n)} \subseteq S^{(n+1)}$.*

Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi jer je $S^{(0)} = S$ pa iz napomene 1.2.8 slijedi da je svaka točka iz $S^{(0)}$ određena skupom $S^{(0)}$, dakle $S^{(0)} \subseteq S^{(1)}$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0$. Dakle, $S^{(n)}$ ima barem dva elementa i vrijedi $S^{(n)} \subseteq S^{(n+1)}$. Iz toga slijedi da $S^{(n+1)}$ ima barem dva elementa pa prema napomeni 1.2.8 slijedi $S^{(n+1)} \subseteq S^{(n+2)}$.
Time smo dokazali da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Primjer 1.3.4. *Neka je $S = \{A, B\}$, gdje je $A = (0, 0), B = (1, 0)$. Neka je $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Tvrdimo da se točka P može konstruirati iz skupa S.*

Neka je $T_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $T_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. U primjeru 1.2.7 smo vidjeli da je T_1 točka određena skupom S, a na isti način možemo zaključiti da je T_2 točka određena skupom S. Prema napomeni 1.2.8 točke A i B su određene skupom S. Budući da je $S^{(1)}$ skup svih točaka određenih skupom $S^{(0)} = S$, slijedi da su $A, B, T_1, T_2 \in S^{(1)}$. Promotrimo pravce AB i T_1T_2. Znamo da je $AB = \{A + t \cdot (B - A) \mid t \in \mathbb{R}\}$ odnosno

$$AB = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{$\star$}$$

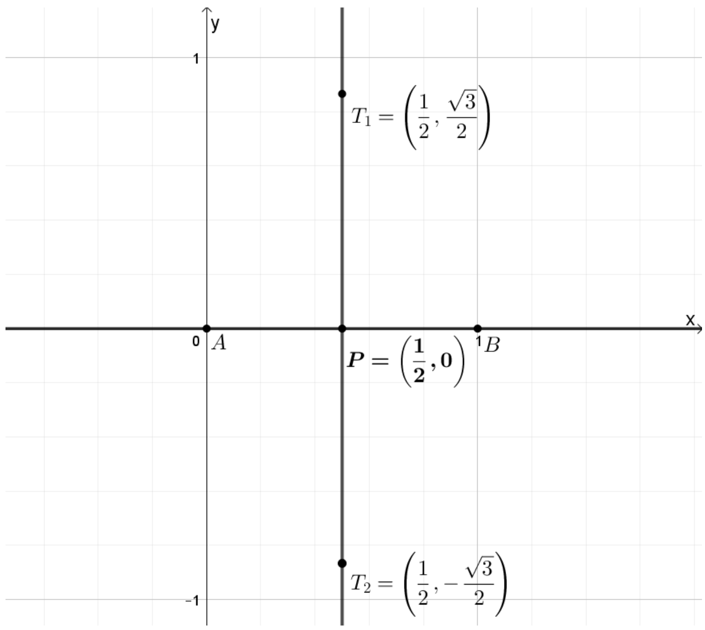
Nadalje,

$$T_1T_2 = \{T_1 + t \cdot (T_2 - T_1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

tj.

$$T_1T_2 = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - t \cdot \sqrt{3}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}. \qquad (\star\star)$$

Očito je da $A \notin T_1T_2$ *pa slijedi* $AB \neq T_1T_2$.
Iz $(\star)$ *slijedi da je* $P \in AB$ $\left(za\ t = \frac{1}{2}\right)$, *a iz* $(\star\star)$ *slijedi da je* $P \in T_1T_2$ $\left(za\ t = \frac{1}{2}\right)$.
Dakle, $P \in AB \cap T_1T_2$, *a pravci* AB *i* T_1T_2 *su određeni skupom* $S^{(1)}$ *i međusobno su različiti pa zaključujemo da je* P *točka određena skupom* $S^{(1)}$. *Slijedi* $P \in S^{(2)}$. *Time smo dokazali da se točka* P *može konstruirati iz skupa* S.



Slika 1.6: Konstrukcija točke P iz skupa S

Napomena 1.3.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}^2$ *skup koji ima barem dvije točke. Tada se svaka točka* $A \in S$ *može konstruirati iz* S. *Naime, neka je* $A \in S$. *Znamo da je* $S^{(0)} = S$, *a iz toga slijedi da* $S^{(0)}$ *ima barem dvije točke te da je* $A \in S^{(0)}$. *Iz napomene 1.2.8 zaključujemo da je* A *točka određena skupom* $S^{(0)}$. *Dakle,* $A \in S^{(1)}$. *Prema tome postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $A \in S^{(n)}$, *što znači da se* A *može konstruirati iz skupa* S.

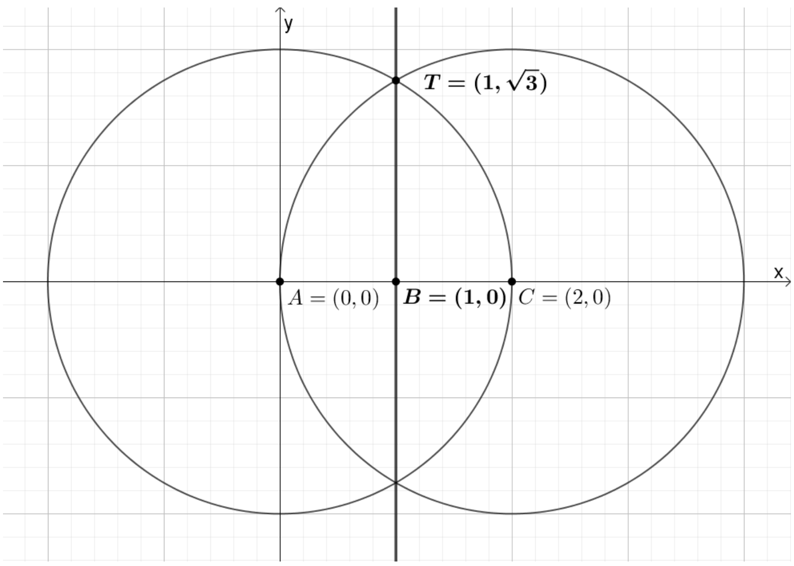
Napomena 1.3.6. *Neka je $A \in \mathbb{R}^2$ te neka je $S = \{A\}$. Tada ne postoji točka koja se može konstruirati iz skupa S. Naime, iz $S^{(0)} = S$ slijedi da je $S^{(0)}$ jednočlan skup, pa prema napomeni 1.2.9 slijedi da ne postoji točka određena skupom $S^{(0)}$. Stoga je $S^{(1)} = \emptyset$. Indukcijom, koristeći napomenu 1.2.9, dobivamo da je $S^{(n)} = \emptyset$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ne postoji točka koja se može konstruirati iz skupa S.*

Definicija 1.3.7. *Neka je $T \in \mathbb{R}^2$. Kažemo da je T konstruktibilna točka ako se T može konstruirati iz skupa $\{(0,0),(1,0)\}$.*

Iz napomene 1.3.5 slijedi da su točke $(0,0)$ i $(1,0)$ konstruktibilne.
Prema primjeru 1.3.4 točka $\left(\frac{1}{2},0\right)$ je konstruktibilna.

Primjer 1.3.8. *Neka su $A = (0,0)$ i $B = (1,0)$. Neka je $S = \{A, B\}$. Neka je $C = (2,0)$.
Vrijedi $AB = \{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ pa je očito $C \in AB$.
Nadalje, vrijedi $d(C,B) = 1$ pa je očito $C \in K(B,1)$. Stoga je $C \in AB \cap K(B,1)$.
Budući da je AB pravac određen skupom S te da je $K(B,1)$ kružnica određena skupom S, slijedi da je C točka određena skupom S. Dakle, $C \in S^{(1)}$. Uočimo da su $A, C \in S^{(1)}$ te da je $d(A,C) = 2$. Stoga su $K(A,2)$ i $K(C,2)$ kružnice određene skupom $S^{(1)}$.*

Neka je $T = \left(1, \sqrt{3}\right)$. Vrijedi $d(T,A) = 2$ i $d(T,C) = 2$, stoga je $T \in K(A,2) \cap K(C,2)$. Prema tome, točka T je određena skupom $S^{(1)}$ tj. $T \in S^{(2)}$. Prema napomeni 1.3.3 vrijedi $B \in S^{(2)}$. Stoga je BT pravac određen skupom $S^{(2)}$.



Slika 1.7: Pravac BT je određen skupom $S^{(2)}$

Vrijedi

$$BT = \{B + t \cdot (T - B) \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\{(1,0) + t \cdot \left(0, \sqrt{3}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(1, t \cdot \sqrt{3}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

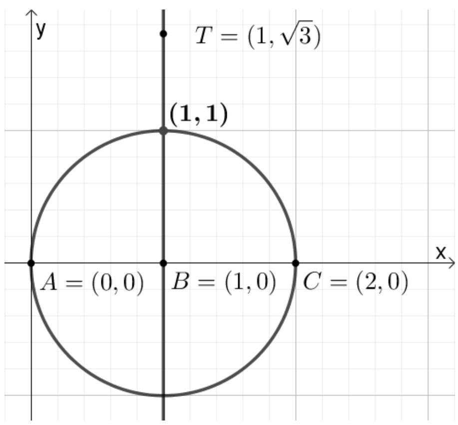
Uočimo da za $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *vrijedi*

$$\left(1, t \cdot \sqrt{3}\right) = (1,1).$$

Dakle, $(1,1) \in BT$. *Vrijedi* $d((1,1), B) = 1$ *pa je* $(1,1) \in K(B, d(A,B))$. *Dakle,*

$$(1,1) \in BT \cap K(B, d(A,B)). \qquad (\Diamond)$$

Prema napomeni 1.3.3 slijedi da su $A, B \in S^{(2)}$. *Stoga je kružnica* $K(B, d(A,B))$ *određena skupom* $S^{(2)}$. *Iz* $(\Diamond)$ *slijedi da je točka* $(1,1)$ *određena skupom* $S^{(2)}$. *Prema tome,* $(1,1) \in S^{(3)}$. *Zaključujemo da se točka* $(1,1)$ *može konstruirati iz skupa* S, *što znači da je* $(1,1)$ *konstruktibilna točka.*



Slika 1.8: Točka $(1,1)$ je konstruktibilna točka

Definicija 1.3.9. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je* x *konstruktibilan broj ako postoje konstruktibilna točka* $T \in \mathbb{R}^2$ *i* $a \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $T = (a, x)$ *ili* $T = (x, a)$.

Poglavlje 2

Kvadratni radikali

2.1 Grupe, prsteni i polja

Definicija 2.1.1. *Neka je S neprazan skup te neka je $* : S \times S \longrightarrow S$. Tada za $*$ kažemo da je binarna operacija na skupu S. U tom slučaju, za $x, y \in S$ umjesto $*(x, y)$ obično pišemo $x * y$.*

Definicija 2.1.2. *Neka je $*$ binarna operacija na S. Kažemo da je $*$ asocijativna binarna operacija na S ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

Definicija 2.1.3. *Neka je $*$ binarna operacija na S te neka je $e \in S$. Kažemo da je e neutralni element za $*$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x * e = e * x = x$.*

Napomena 2.1.4. *Neka je $*$ binarna operacija na S. Pretpostavimo da su $e_1, e_2 \in S$ neutralni elementi za $*$. Tada je $e_1 = e_2$. Naime, budući da je e_1 neutralni element, vrijedi $e_1 * e_2 = e_2$, a budući da je e_2 neutralni element, vrijedi $e_1 * e_2 = e_1$. Dakle, $e_1 = e_2$.*

Definicija 2.1.5. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu S. Za uređeni par $(S, *)$ kažemo da je monoid ako je $*$ asocijativna binarna operacija te ako postoji neutralni element za $*$.*

Definicija 2.1.6. *Neka je $(S, *)$ monoid te neka je e neutralni element za $*$. Neka je $x \in S$. Za $y \in S$ kažemo da je inverzni element od x u monoidu $(S, *)$ ako je $x * y = y * x = e$.*

Napomena 2.1.7. *Neka je $(S, *)$ monoid te neka je $x \in S$. Pretpostavimo da su $y_1, y_2 \in S$ inverzni elementi od x. Tada je $y_1 = y_2$. Naime, neka je e neutralni element za $*$. Vrijedi*

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2.$$

Dakle, $y_1 = y_2$.

Definicija 2.1.8. *Neka je* $(S, *)$ *monoid. Pretpostavimo da za svaki* $x \in S$ *postoji inverzni element od* x *u* $(S, *)$. *Tada za* $(S, *)$ *kažemo da je grupa.*

Definicija 2.1.9. *Neka je* $*$ *binarna operacija na* S. *Kažemo da je* $*$ *komutativna binarna operacija ako za sve* $x, y \in S$ *vrijedi* $x * y = y * x$.

Ako je $(S, *)$ *monoid takav da je* $*$ *komutativna binarna operacija, onda za* $(S, *)$ *kažemo da je komutativan monoid.*

Ako je $(S, *)$ *grupa takva da je* $*$ *komutativna binarna operacija, onda za* $(S, *)$ *kažemo da je komutativna ili Abelova grupa.*

Napomena 2.1.10. *Neka je* $(S, *)$ *grupa, neka je* e *neutralni element za* $*$ *te neka je* $x \in S$ *takav da je* $x * x = x$. *Tada je* $x = e$.
Neka je y *inverzni element od* x. *Slijedi* $y * (x * x) = y * x$ *pa je* $(y * x) * x = e$. *Dakle,* $e * x = e$ *tj.* $x = e$.

Definicija 2.1.11. *Neka je* P *skup te neka su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije na* P. *Kažemo da je* $(P, +, \cdot)$ *prsten ako vrijedi:*

1. $(P, +)$ *Abelova grupa*

2. *operacija* $\cdot$ *je asocijativna*

3. *za sve* $x, y, z \in P$ *vrijedi*

    - $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
    - $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$

Definicija 2.1.12. *Ako je* $(P, +, \cdot)$ *prsten, onda za neutralni element za operaciju* $+$ *kažemo da je nula u prstenu* $(P, +, \cdot)$ *i označavamo ga s* 0.

Napomena 2.1.13. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten. Tada za svaki* $x \in P$ *vrijedi* $0 \cdot x = 0$ *i* $x \cdot 0 = 0$. *Naime, imamo* $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. *Dakle,* $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. *Iz napomene 2.1.10 slijedi* $0 \cdot x = 0$. *Analogno dobivamo da je* $x \cdot 0 = 0$.

Napomena 2.1.14. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten takav da skup* P *ima barem dva elementa. Tada* $(P, \cdot)$ *nije grupa.*

Pretpostavimo suprotno. Neka je e *neutralni element za operaciju* $\cdot$. *Budući da je* $(P, \cdot)$ *grupa, postoji* $x \in P$ *takav da je* $0 \cdot x = e$. *Iz prethodne napomene slijedi da je* $e = 0$. *Sada za svaki* $x \in P$ *vrijedi* $x = x \cdot e = x \cdot 0 = 0$. *Iz ovoga slijedi da je* 0 *jedini element skupa* P, *što je u kontradikciji s tim da* P *ima barem 2 elementa.*

Definicija 2.1.15. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Pretpostavimo da je e neutralni element za operaciju $\cdot$. Tada za e kažemo da je jedinica u prstenu $(P, +, \cdot)$. Za prsten $(P, +, \cdot)$ takav da postoji neutralni element za operaciju $\cdot$ kažemo da je prsten s jedinicom. Jedinicu u prstenu $(P, +, \cdot)$ obično označavamo s* 1.

Definicija 2.1.16. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten takav da je operacija $\cdot$ komutativna. Tada za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je komutativan prsten.*

Definicija 2.1.17. *Neka je $(P, +, \cdot)$ komutativan prsten s jedinicom takav da P ima barem dva elementa. Pretpostavimo da svaki $x \in P$, takav da je $x \neq 0$, ima inverzni element u $(P, \cdot)$. Tada za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je polje.*

Napomena 2.1.18. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje. Tada je* $0 \neq 1$.

Pretpostavimo suprotno tj. $0 = 1$. *Neka je $x \in P$. Tada je $x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Dakle, $x = 0$. Prema tome, $P = \{0\}$, što je u kontradikciji s definicijom polja.*

Definicija 2.1.19. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten i $A \subseteq P$. Kažemo da je A potprsten od $(P, +, \cdot)$ ako postoje binarne operacije $+_A$ i $\cdot_A$ na A takve da je $(A, +_A, \cdot_A)$ prsten te da je $x +_A y = x + y$ i $x \cdot_A y = x \cdot y$, za sve $x, y \in A$.*

Napomena 2.1.20. *Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten onda za $x \in P$ s $-x$ označavamo inverzni (tj. suprotni) element od x u $(P, +)$. Dakle, $x + (-x) = 0$ za svaki $x \in P$. Nadalje, za $x, y \in P$ definiramo $x - y = x + (-y)$.*

Propozicija 2.1.21. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je A neprazan podskup od P. Tada je A potprsten od $(P, +, \cdot)$ ako i samo ako za sve $x, y \in A$ vrijedi $x - y \in A$ i $x \cdot y \in A$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A potprsten od $(P, +, \cdot)$. Tada postoje binarne operacije $+_A$ i $\cdot_A$ na A takve da je $(A, +_A, \cdot_A)$ prsten i da je $x +_A y = x + y$ i $x \cdot_A y = x \cdot y$, za sve $x, y \in A$.

Neka je 0_A nula u prstenu $(A, +_A, \cdot_A)$. Vrijedi $0_A +_A 0_A = 0_A$ tj. $0_A + 0_A = 0_A$ pa iz napomene 2.1.10 slijedi $0_A = 0$.
Neka je $x \in A$. Neka je y inverzni element od x u $(A, +_A)$. Tada je $x +_A y = 0_A$ pa je $x + y = 0$. Stoga je

$$(-x) + (x + y) = (-x) + 0$$

tj.

$$[(-x) + x] + y = -x.$$

Dobivamo $0 + y = -x$ odnosno $y = -x$. Zaključujemo da je $-x \in A$, za svaki $x \in A$.
Neka su $x, y \in A$. Tada je $-y \in A$ pa imamo

$$x - y = x + (-y) = x +_A (-y) \in A.$$

Dakle, $x - y \in A$.
Nadalje, $x \cdot y = x \cdot_A y$ pa je očito $x \cdot y \in A$ za sve $x, y \in A$.

Obratno, pretpostavimo da za sve $x, y \in A$ vrijedi $x - y \in A$ i $x \cdot y \in A$. Odaberimo neki $x_0 \in A$ (to možemo jer je A neprazan skup).
Prema pretpostavci vrijedi $x_0 - x_0 \in A$ tj. $0 \in A$.
Nadalje, neka je $x \in A$. Imamo $0, x \in A$ pa je prema pretpostavci $0 - x \in A$ tj. $-x \in A$, za svaki $x \in A$.
Neka su $x, y \in A$. Pokažimo da je $x + y \in A$. Imamo $x, -y \in A$ pa je $x - (-y) \in A$ odnosno $x + y \in A$.
Nadalje, za sve $x, y \in A$ prema pretpostavci vrijedi $x \cdot y \in A$.
Definirajmo binarne operacije $+_A$ i $\cdot_A$ na A na sljedeći način:

$$x +_A y = x + y,$$

$$x \cdot_A y = x \cdot y.$$

Tvrdimo da je $(A, +_A, \cdot_A)$ prsten.
Neka su $x, y, z \in A$. Koristeći činjenicu da je $+$ asocijativna binarna operacija na P dobivamo

$$(x +_A y) +_A z = (x + y) + z = x + (y + z) = x +_A (y +_A z).$$

Dakle,

$$(x +_A y) +_A z = x +_A (y +_A z)$$

tj. operacija $+_A$ je asocijativna na A. Analogno dobivamo da je $+_A$ komutativna binarna operacija.
Budući da je $0 \in A$ slijedi $x +_A 0 = x + 0 = x$ za svaki $x \in A$. Dakle, 0 je neutralni element za $+_A$.
Neka je $x \in A$. Znamo da je $-x \in A$. Imamo $x +_A (-x) = x + (-x) = 0$. Prema tome, $-x$ je inverzni element od x u $(A, +_A)$.
Time smo dokazali da je $(A, +_A)$ Abelova grupa.

Nadalje, na sličan način dobivamo da je $\cdot_A$ asocijativna binarna operacija te da za sve $x, y, z \in A$ vrijedi

$$(x +_A y) \cdot_A z = x \cdot_A z +_A y \cdot_A z,$$

$$z \cdot_A (x +_A y) = z \cdot_A x +_A z \cdot_A y.$$

Time je dokazano da je $(A, +_A, \cdot_A)$ prsten. Stoga je A potprsten od $(P, +, \cdot)$.

$\square$

Propozicija 2.1.22. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $\mathcal{A}$ neprazna familija potprstena od $(P, +, \cdot)$. Tada je $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ potprsten od $(P, +, \cdot)$.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{A}$. Tada je A potprsten od $(P, +, \cdot)$. Stoga je $A \neq \emptyset$ pa postoji $x \in A$. Iz propozicije 2.1.21 slijedi da je $x - x \in A$ tj. $0 \in A$. Dakle, za svaki $A \in \mathcal{A}$ vrijedi da je $0 \in A$. Stoga je $0 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ tj. $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ je neprazan skup.

Neka su $x, y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Neka je $A \in \mathcal{A}$. Tada su $x, y \in A$. Budući da je A potprsten od $(P, +, \cdot)$, iz propozicije 2.1.21 slijedi da je $x - y \in A$ i $x \cdot y \in A$. Kako je $x - y \in A$ i $x \cdot y \in A$, za svaki $A \in \mathcal{A}$, slijedi da je $x - y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ i $x \cdot y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Iz propozicije 2.1.21 slijedi da je $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ potprsten od $(P, +, \cdot)$.

$\square$

Definicija 2.1.23. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $S \subseteq P$. Definiramo*

$$[S] = \bigcap_{\substack{A \text{ potprsten od } (P,+,\cdot) \\ S \subseteq A}} A.$$

Uočimo da je $[S]$ potprsten od $(P, +, \cdot)$. Naime, to slijedi iz propozicije 2.1.22 i činjenice da je $[S] = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, gdje je $\mathcal{A} = \{A \mid A \text{ potprsten od } (P, +, \cdot), S \subseteq A\}$ ($\mathcal{A} \neq \emptyset$ jer je $P \in \mathcal{A}$). Kažemo da je $[S]$ potprsten od $(P, +, \cdot)$ generiran sa S.

Napomena 2.1.24. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te $S \subseteq P$.*

1. *Prema definiciji $[S]$ je presjek svih potprstenova od $(P, +, \cdot)$ koji sadrže S. Stoga i njihov presjek sadrži S tj. $S \subseteq [S]$.*

2. *Neka je A_0 potprsten od $(P, +, \cdot)$ takav da je $S \subseteq A_0$. Tada je $[S] \subseteq A_0$. Naime, neka je $\mathcal{A} = \{A \mid A \text{ potprsten od } (P, +, \cdot), S \subseteq A\}$. Tada je $A_0 \in \mathcal{A}$ pa je $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq A_0$. Stoga je $[S] = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq A_0$ tj. $[S] \subseteq A_0$.*

3. *Vrijedi $S = [S]$ ako i samo ako je S potprsten od $(P, +, \cdot)$. Naime, ako je $S = [S]$, onda je očito S potprsten od $(P, +, \cdot)$. Obratno, pretpostavimo da je S potprsten od $(P, +, \cdot)$. Definirajmo $A_0 = S$. Očito je $S \subseteq A_0$ pa iz (2) slijedi da je $[S] \subseteq A_0$ tj. $[S] \subseteq S$. S druge strane, prema (1) slijedi da je $S \subseteq [S]$. Stoga je $S = [S]$.*

Napomena 2.1.25. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Za $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ i $x_1, \ldots, x_n \in P$ definiramo induktivno $x_1 + \cdots + x_n$ na sljedeći način:*

$$x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = (x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}, \ n \geq 2.$$

Ako su $x, y \in P$ onda je $-(x+y) = -x+(-y)$. Naime, to slijedi iz $(x+y)+[-x + (-y)] = 0$. Indukcijom se lako dobiva da za sve $x_1, \ldots, x_n \in P$ vrijedi

$$-(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}) = (-x_1) + \cdots + (-x_n).$$

Naime, ako pretpostavimo da ova tvrdnja vrijedi za neki n ($n \geq 2$), tada imamo

$$\begin{aligned} -(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}) &= -[(x_1 + ... + x_n) + x_{n+1}] \\ &= -(x_1 + \cdots + x_n) + (-x_{n+1}) \\ &= [(-x_1) + \cdots + (-x_n)] + (-x_{n+1}) \\ &= (-x_1) + \cdots + (-x_n) + (-x_{n+1}) \end{aligned}$$

Indukcijom također dobivamo da za sve $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in P$ vrijedi

$$(x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n)$$

te da za svaki $c \in P$ vrijedi

$$c \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = c \cdot x_1 + \cdots + c \cdot x_n.$$

Propozicija 2.1.26. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Neka su $x, y \in P$. Tada vrijedi:*

1. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$
2. $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$
3. $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$

Dokaz.

1. Vrijedi $(-x) \cdot y + x \cdot y = [(-x) + x] \cdot y = 0 \cdot y = 0$. Dakle,

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

2. Dokaz ide analogno kao pod (1).
3. Koristeći (1) i (2) dobivamo

$$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y.$$

□

2.2 Prsten $B[x_0]$

Definicija 2.2.1. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Neka je B potprsten od $(P, +, \cdot)$ te neka je $x_0 \in P$. Definiramo $B[x_0]$ kao potprsten od $(P, +, \cdot)$ generiran s $B \cup \{x_0\}$. Dakle, $B[x_0] = [B \cup \{x_0\}]$.*

Napomena 2.2.2. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $x \in P$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo x^n induktivno na sljedeći način:*

$$x^1 = x$$
$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \tag{$\circledast$}$$

Dokažimo to indukcijom po n.
Za $n = 1$ ($\circledast$) vrijedi po definiciji.
Pretpostavimo da ($\circledast$) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} = x^{m+n} \cdot x = (x^m \cdot x^n) \cdot x = x^m \cdot (x^n \cdot x) = x^m \cdot x^{n+1}.$$

Dakle, $x^{m+(n+1)} = x^m \cdot x^{n+1}$. Prema tome, ($\circledast$) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 2.2.3. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je B potprsten od $(P, +, \cdot)$. Neka su $x_1, \dots, x_n \in B$. Tada je $x_1 + \cdots + x_n \in B$. To slijedi indukcijom po n. Nadalje, neka su $x \in B$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada je $x^n \in B$, što također slijedi indukcijom po n.*

Korolar 2.2.4. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka su $x, y, c \in P$. Tada vrijedi*

$$c \cdot (x - y) = c \cdot x - c \cdot y,$$

$$(x - y) \cdot c = x \cdot c - y \cdot c.$$

Dokaz. Koristeći propoziciju 2.1.26 slijedi da je

$$c \cdot (x - y) = c \cdot [x + (-y)] = c \cdot x + c \cdot (-y) = c \cdot x + (-c \cdot y) = c \cdot x - c \cdot y.$$

Dakle, $c \cdot (x - y) = c \cdot x - c \cdot y$.
Analogno se dokazuje $(x - y) \cdot c = x \cdot c - y \cdot c$. □

Propozicija 2.2.5. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *komutativan prsten te neka je* B *potprsten od* $(P, +, \cdot)$ *te* $x_0 \in P$. *Definirajmo*

$$R = \{b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 \mid b_n, \ldots, b_0 \in B\}.$$

Tada je R *potprsten od* $(P, +, \cdot)$.

Dokaz. Neka su $x, y \in R$. Tada postoje $b_m, \ldots, b_0, c_n, \ldots, c_0 \in B$ takvi da je

$$x = b_m x_0^m + \cdots + b_1 x_0 + b_0,$$

$$y = c_n x_0^n + \cdots + c_1 x_0 + c_0.$$

Bez smanjenja općenitosti neka je $n \leq m$ (pri tome su $m, n \in \mathbb{N}_0$). Za svaki $i \in \{n+1, ..., m\}$ definiramo $c_i = 0$. Slijedi $c_0, \ldots, c_m \in B$ i

$$y = c_m x_0^m +, \ldots, + c_{n+1} x_0^{n+1} + c_n x_0^n + \cdots + c_1 x_0 + c_0.$$

Koristeći napomenu 2.1.25, propoziciju 2.1.26 i korolar 2.2.4 dobivamo

$$x - y = x + (-y) =$$

$$= \left(b_m x_0^m + b_{m-1} x_0^{m-1} + \cdots + b_1 x_0 + b_0\right) + \left[(-c_m x_0^m) + \left(-c_{m-1} x_0^{m-1}\right) + \cdots + (-c_1 x_0) + (-c_0)\right]$$

$$= (b_m x_0^m - c_m x_0^m) + \left(b_{m-1} x_0^{m-1} - c_{m-1} x_0^{m-1}\right) + ... + (b_1 x_0 - c_1 x_0) + (b_0 - c_0)$$

$$= (b_m - c_m) x_0^m + (b_{m-1} - c_{m-1}) x_0^{m-1} + \cdots + (b_1 - c_1) x_0 + (b_0 - c_0).$$

Vrijedi $b_m - c_m, b_{m-1} - c_{m-1}, \ldots, b_1 - c_1, b_0 - c_0 \in B$ jer je B potprsten pa slijedi $x - y \in R$.
Analogno zaključujemo da je $x + y \in R$.
Iz ovoga zaključujemo da za sve $x_1, \ldots, x_n \in R$ vrijedi $x_1 + \cdots + x_n \in R$.

Neka su $b \in B$ i $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $b x_0^i \cdot y \in R$ za svaki $y \in R$.
Neka je $y \in R$. Tada postoje $c_m, \ldots, c_0 \in B$ takvi da je $y = c_m x_0^m + \cdots + c_0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} b x_0^i \cdot y &= b x_0^i \left(c_m x_0^m + c_{m-1} x_0^{m-1} + \cdots + c_1 x_0 + c_0\right) \\ &= \left(b x_0^i\right)(c_m x_0^m) + \left(b x_0^i\right)\left(c_{m-1} x_0^{m-1}\right) + \cdots + \left(b x_0^i\right)(c_1 x_0) + \left(b x_0^i\right) c_0 \\ &= (b c_m) x_0^{m+i} + (b c_{m-1}) x_0^{i+m-1} + \cdots + (b c_1) x_0^{i+1} + (b c_0) x_0^i \end{aligned}$$

Dakle, $bx_0^i \cdot y \in R$ za svaki $y \in R$.

Neka su $x, y \in R$. Tada postoje $b_n, \ldots, b_0 \in B$ takvi da je $x = b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(b_n x_0^n + b_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + b_1 x_0 + b_0\right) \cdot y \\ &= (b_n x_0^n) \cdot y + \left(b_{n-1} x_0^{n-1}\right) \cdot y + \cdots + (b_1 x_0) \cdot y + b_0 \cdot y \end{aligned}$$

Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ prema dokazanom vrijedi $\left(b_i x_0^i\right) \cdot y \in R$. Dakle, $x \cdot y \in R$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana.

$\square$

Propozicija 2.2.6. *Neka je $(P, +, \cdot)$ komutativan prsten s jedinicom. Neka je B potprsten od $(P, +, \cdot)$ takav da je $1 \in B$ te neka je $x_0 \in P$. Tada je*

$$B[x_0] = \{b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 \mid b_n, \ldots, b_0 \in B\}.$$

Dokaz. Neka je $R = \left\{b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 \mid b_n, \ldots, b_0 \in B\right\}$. Želimo dokazati $B[x_0] = R$.

Dokažimo prvo $B[x_0] \subseteq R$. Prema propoziciji 2.2.5 R je potprsten od $(P, +, \cdot)$. Nadalje, $B[x_0] = [B \cup \{x_0\}]$. Stoga je dovoljno dokazati $B \cup \{x_0\} \subseteq R$ jer će tada prema drugoj točki napomene 2.1.24 slijediti $[B \cup \{x_0\}] \subseteq R$ tj. $B[x_0] \subseteq R$.

Za svaki $x \in B$ vrijedi $x \in R$ jer možemo uzeti $n = 0$ i $b_0 = x$. Prema tome, $B \subseteq R$.
Nadalje, $x_0 = 1 \cdot x_0 + 0$, pa zbog $1 \in B$ (također je i $0 \in B$, što slijedi iz propozicije 2.1.21) slijedi da je $x_0 \in R$, odnosno $\{x_0\} \subseteq R$. Dakle, $B \cup \{x_0\} \subseteq R$. Time smo dokazali $B[x_0] \subseteq R$.

Dokažimo sada $R \subseteq B[x_0]$. Neka je $r \in R$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}_0$ i $b_n, \ldots, b_0 \in B$ takvi da je $r = b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0$. Znamo da je $B[x_0]$ potprsten od $(P, +, \cdot)$.
Iz $B \cup \{x_0\} \subseteq [B \cup \{x_0\}]$ slijedi $B \cup \{x_0\} \subseteq B[x_0]$. To znači da su $b_n, \ldots, b_0, x_0 \in B[x_0]$.
Iz napomene 2.2.3 slijedi da su $x_0, x_0^2, \ldots, x_0^n \in B[x_0]$. Slijedi da su $b_1 x_0, b_2 x_0^2, \ldots, b_n x_0^n \in B[x_0]$ pa iz napomene 2.2.3 slijedi $b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 \in B[x_0]$ tj. $r \in B[x_0]$. Time smo dokazali $R \subseteq B[x_0]$. Dakle, $R = B[x_0]$. $\square$

Definicija 2.2.7. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje te neka je $A \subseteq P$. Pretpostavimo da postoje binarne operacije $+_A, \cdot_A$ na A takve da je $x +_A y = x + y$ i $x \cdot_A y = x \cdot y$, za sve $x, y \in A$ te takve da je $(A, +_A, \cdot_A)$ polje. Tada kažemo da je A potpolje od $(P, +, \cdot)$.*

Napomena 2.2.8. *Ako je* $(P, +, \cdot)$ *polje, onda za* $x \in P, x \neq 0$, *s* x^{-1} *označavamo inverzni element od* x *u monoidu* $(P, \cdot)$. *Dakle,*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Propozicija 2.2.9. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *polje te* $A \subseteq P$ *takav da* A *ima barem dva elementa. Onda je:*

$$\begin{aligned} A \text{ potpolje od } (P, +, \cdot) \Leftrightarrow\ & \text{za sve } x, y \in A \text{ vrijedi } x - y \in A, x \cdot y \in A, \\ & \text{za svaki } x \in A, x \neq 0 \text{ vrijedi } x^{-1} \in A. \end{aligned}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je A potpolje od $(P, +, \cdot)$. Tada postoje binarne operacije $+_A, \cdot_A$ na A takve da $x +_A y = x + y$ i $x \cdot_A y = x \cdot y$, za sve $x, y \in A$ te takve da je $(A, +_A, \cdot_A)$ polje. Zaključujemo da je A potprsten od $(P, +, \cdot)$ pa iz propozicije 2.1.21 slijedi da za sve $x, y \in A$ vrijedi $x - y \in A$ i $x \cdot y \in A$.

Neka je 0_A neutralni element za operaciju $+_A$. U dokazu propozicije 2.1.21 smo vidjeli da je $0_A = 0$.

Neka je 1_A neutralni element za operaciju $\cdot_A$. Odaberimo $x \in A$ takav da $x \neq 0$ (znamo da takav postoji jer A ima barem dva elementa). Vrijedi $x \cdot_A 1_A = x$ tj.

$$x \cdot 1_A = x.$$

Množenjem prethodne jednakosti s x^{-1} dobivamo

$$x^{-1} \cdot (x \cdot 1_A) = x^{-1} \cdot x$$

pa je

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot 1_A = x^{-1} \cdot x.$$

Slijedi $1 \cdot 1_A = 1$. Budući da je 1 neutralni element za množenje u $(P, +, \cdot)$, slijedi $1 = 1_A$.

Neka je $x \in A, x \neq 0$. Tada je $x \neq 0_A$. Budući da je $(A, +_A, \cdot_A)$ polje, postoji neutralni element y od x u monoidu $(A, \cdot_A)$. Prema tome, $x \cdot_A y = 1_A$, što je ekvivalentno s $x \cdot y = 1$. Množenjem prethodne jednakosti s x^{-1} dobivamo da je $y = x^{-1}$. Prema tome, $x^{-1} \in A$.

Obratno, pretpostavimo da za sve $x, y \in A$ vrijedi $x - y \in A$, $x \cdot y \in A$ te za svaki $x \in A, x \neq A$, vrijedi $x^{-1} \in A$.
Iz propozicije 2.1.21 slijedi da je A potprsten od $(P, +, \cdot)$. Stoga postoje binarne operacije $+_A$ i $\cdot_A$ na A takve da je $(A, +_A, \cdot_A)$ prsten te da je za sve $x, y \in A$

$$x \cdot_A y = x \cdot y \tag{♠}$$

$$x +_A y = x + y$$

Želimo dokazati da je $(A, +_A, \cdot_A)$ polje. Znamo da je binarna operacija $\cdot$ komutativna jer je $(P, +, \cdot)$ polje pa iz (♠) slijedi da je $\cdot_A$ komutativna binarna operacija.

Nadalje, odaberimo $x \in A, x \neq 0$. Tada je prema pretpostavci $x^{-1} \in A$ pa je ponovno prema pretpostavci $x \cdot x^{-1} \in A$ tj. $1 \in A$.
Zaključujemo da je zbog (♠) 1 neutralni element za $\cdot_A$.
Dakle, $(A, +_A, \cdot_A)$ je komutativan prsten s jedinicom.

Neka je 0_A nula u prstenu $(A, +_A, \cdot_A)$. U dokazu propozicije 2.1.21 smo vidjeli da je $0_A = 0$.

Neka je $x \in A, x \neq 0_A$. Tada je $x \neq 0$. Prema pretpostavci vrijedi $x^{-1} \in A$. Imamo

$$x \cdot_A x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

Dakle, $x \cdot_A x^{-1} = 1$, a također vrijedi $x^{-1} \cdot_A x = 1$ (jer je $\cdot_A$ komutativna binarna operacija).
Dakle, x^{-1} je inverzni element od x u monoidu $(A, \cdot_A)$.
Time smo dokazali da je $(A, +_A, \cdot_A)$ polje, odnosno A je potpolje od $(P, +, \cdot)$. □

Napomena 2.2.10. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten i neka je $x \in P$. Tada za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(x^m)^n = x^{mn}.$$

Dokažimo to indukcijom po n (za fiksirani m).
Za $n = 1$ tvrdnja je dokazana.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ tj. $(x^m)^n = x^{mn}$.
Provjerimo za $n + 1 \in \mathbb{N}$:

$$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot x^m = x^{mn} \cdot x^m = x^{mn+m} = x^{m(n+1)}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

Lema 2.2.11. *Neka je $(P, +, \cdot)$. polje. Neka su $u, v \in P$.*
Tada vrijedi:

1. $(u - v)(u + v) = u^2 - v^2$

2. *Ako je $u \neq 0$ i $v \neq 0$, onda je $u \cdot v \neq 0$ i $(u \cdot v)^{-1} = u^{-1} \cdot v^{-1}$.*

Dokaz.

1. Koristeći korolar 2.2.4 dobivamo:

$$\begin{aligned}(u-v)(u+v) &= (u-v)\cdot u + (u-v)\cdot v\\ &= (u\cdot u - v\cdot u) + (u\cdot v - v\cdot v)\\ &= u^2 - v^2\end{aligned}$$

2. Pretpostavimo da je $u \neq 0$ i $v \neq 0$. Imamo

$$(u\cdot v)\cdot(u^{-1}\cdot v^{-1}) = (u\cdot v)\cdot(v^{-1}\cdot u^{-1}) = u\cdot u^{-1} = 1.$$

Dakle,

$$(u\cdot v)\cdot(u^{-1}\cdot v^{-1}) = 1 \qquad (\blacktriangle)$$

Kada bi vrijedilo $u\cdot v = 0$, onda bismo imali $(u\cdot v)\cdot(u^{-1}\cdot v^{-1}) = 0$ pa bi iz $(\blacktriangle)$ slijedilo $1 = 0$, što je nemoguće prema napomeni 2.1.18. Dakle, $u\cdot v \neq 0$.

Kada jednakost $(\blacktriangle)$ pomnožimo s $(u\cdot v)^{-1}$ dobivamo

$$(u\cdot v)^{-1}\cdot\left[(u\cdot v)\cdot\left(u^{-1}\cdot v^{-1}\right)\right] = (u\cdot v)^{-1}$$

pa je $u^{-1}\cdot v^{-1} = (u\cdot v)^{-1}$.

Time je lema dokazana. □

Propozicija 2.2.12. *Neka je $(P,+,\cdot)$ polje te neka je B potpolje od $(P,+,\cdot)$. Neka je $x_0 \in P$ takav da je $x_0^2 \in B$. Tada je $B[x_0]$ potpolje od $(P,+,\cdot)$ i vrijedi $B[x_0] = \{a+b\cdot x_0 \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.*

Dokaz. Znamo da je $B[x_0]$ potprsten od $(P,+,\cdot)$. Prema propoziciji 2.1.21 za sve $x,y\in B[x_0]$ vrijedi $x-y\in B[x_0]$ i $x\cdot y\in B[x_0]$. Ostaje pokazati da za svaki $x\in B[x_0], x\neq 0$ vrijedi $x^{-1}\in B[x_0]$.

Očito je $(P,+,\cdot)$ komutativan prsten s jedinicom. Nadalje, odaberimo neki $z\in B$. Prema propoziciji 2.2.9 vrijedi $z^{-1}\in B$, pa prema istoj propoziciji vrijedi $z\cdot z^{-1}\in B$ tj. $1\in B$.

Prema propoziciji 2.2.6 vrijedi $B[x_0] = \left\{b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 \mid b_n,\ldots,b_0\in B\right\}$. Tvrdimo da za svaki $n\in\mathbb{N}_0$ i sve $b_n,\ldots,b_0\in B$ postoje $a,b\in B$ takvi da je

$$b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 = a + b\cdot x_0.$$

Dokažimo to indukcijom po n.
Za $n = 0, n = 1$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $b_{n+1}, \ldots, b_0 \in B$. Prema induktivnoj pretpostavci postoje $a, b \in B$ takvi da je

$$b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 = a + b \cdot x_0.$$

Vrijedi

$$b_{n+1}x_0^{n+1} + b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0 = b_{n+1}x_0^{n+1} + \left(b_n x_0^n + \cdots + b_1 x_0 + b_0\right) = b_{n+1}x_0^{n+1} + (a + b \cdot x_0).$$

Promotrimo dva moguća slučaja:

1. slučaj: $n + 1$ je paran.
Tada je $n + 1 = 2k, k \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$b_{n+1}x_0^{n+1} = b_{n+1}x_0^{2k} = b_{n+1}\left(x_0^2\right)^k,$$

pa iz pretpostavke propozicije i napomene 2.2.3 slijedi $b_{n+1}x_0^{n+1} \in B$.
Stoga je

$$b_{n+1}x_0^{n+1} + a + b \cdot x_0 = a' + b \cdot x_0,$$

gdje je $a' \in B$.

2. slučaj: $n + 1$ je neparan.
Tada je $n + 1 = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$b_{n+1}x_0^{n+1} = b_{n+1}x_0^{2k+1} = b_{n+1}x_0^{2k} \cdot x_0.$$

Prema prethodnom slučaju zaključujemo da je $b_{n+1}x_0^{2k} \in B$ tj.

$$b_{n+1}x_0^{2k} \cdot x_0 = b' \cdot x_0,$$

gdje je $b' \in B$. Dakle,

$$b_{n+1}x_0^{n+1} + a + b \cdot x_0 = a + (b + b') \cdot x_0.$$

U oba slučaja smo dobili da postoje $c, d \in B$ takvi da je

$$b_{n+1}x_0^{n+1} + b_n x_0^n + \cdots + b_0 = c + d \cdot x_0.$$

Time je tvrdnja dokazana.

Uočimo da iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi $B[x_0] = \{a + b \cdot x_0 \mid a, b \in B\}$.

Neka je $x \in B[x_0], x \neq 0$. Tada postoje $a, b \in B$ takvi da je $x = a + b \cdot x_0$. Tvrdimo da je $x^{-1} \in B[x_0]$.

1. slučaj: $a = b \cdot x_0$.
Tada je očito $b \cdot x_0 \in B$ pa je $a + b \cdot x_0 \in B$ tj. $x \in B$.
Budući da je B potpolje od $(P, +, \cdot)$, vrijedi $x^{-1} \in B$ pa je očito $x^{-1} \in B[x_0]$.

2. slučaj: $a \neq b \cdot x_0$.
Tada je $a - b \cdot x_0 \neq 0$. Koristeći prethodnu lemu dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
x^{-1} = (a + b \cdot x_0)^{-1} = (a + b \cdot x_0)^{-1} \cdot 1 = (a + b \cdot x_0)^{-1} \cdot \left[(a - b \cdot x_0)^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0)\right] &= \\
= \left[(a + b \cdot x_0)^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0)^{-1}\right] \cdot (a - b \cdot x_0)& \\
= [(a + b \cdot x_0) \cdot (a - b \cdot x_0)]^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0)& \\
= \left[a^2 - (b \cdot x_0)^2\right]^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0)& \\
= \left(a^2 - b^2 \cdot x_0^2\right)^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0).&
\end{aligned}$$

Dakle, $x^{-1} = \left(a^2 - b^2 \cdot x_0^2\right)^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0)$.
Iz pretpostavke znamo da je $x_0^2 \in B$ pa je $a^2 - b^2 \cdot x_0^2 \in B$ te je $\left(a^2 - b^2 \cdot x_0^2\right)^{-1} \in B$.

Dakle, $\left(a^2 - b^2 \cdot x_0^2\right)^{-1} \in B[x_0]$, a očito je $a - b \cdot x_0 \in B[x_0]$. Zaključujemo da je

$$\left(a^2 - b^2 \cdot x_0^2\right)^{-1} \cdot (a - b \cdot x_0) \in B[x_0]$$

tj. $x^{-1} \in B[x_0]$.
Time smo dokazali da je $B[x_0]$ potpolje od $(P, +, \cdot)$.

□

2.3 Kvadratni radikali

Napomena 2.3.1. *Neka su* $+$ *i* $\cdot$ *standardne operacije na* $\mathbb{R}$*. Znamo da je* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *polje te da je* $\mathbb{Q}$ *potpolje od* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*.*

Definicija 2.3.2. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *i* $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *definiramo induktivno* $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ *na sljedeći način.*

Za $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ *neka je*

$$\mathbb{Q}[x_0, x_1] = (\mathbb{Q}[x_0])[x_1].$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ *te da smo za sve* $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *definirali* $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$*.*
Za $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ *definiramo*

$$\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n])[x_{n+1}].$$

Definicija 2.3.3. *Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$ *te neka su* $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $x_0^2 \in \mathbb{Q}$ *te* $x_{i+1}^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_i]$*, za svaki* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$*. Tada za konačan niz* $x_0, \ldots, x_n$ *kažemo da je* ***korijenski niz****.*

Propozicija 2.3.4. *Ako je* $x_0, \ldots, x_n$ *korijenski niz, tada je* $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ *potpolje od* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju indukcijom po n.
Ako je $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $x_0^2 \in \mathbb{Q}$, onda je $\mathbb{Q}[x_0]$ potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ prema propoziciji 2.2.12. Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 0$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0$.
Neka je $x_0, \ldots, x_{n+1}$ korijenski niz. Uočimo da je $x_0, \ldots, x_n$ korijenski niz pa iz pretpostavke indukcije slijedi da je $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Nadalje, prema definiciji korijenskog niza vrijedi $x_{n+1}^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$. Stoga iz propozicije 2.2.12 slijedi da je $(\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n])[x_{n+1}]$ potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Iz $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n])[x_{n+1}]$ zaključujemo da je $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 2.3.5. *Neka je* $z \in \mathbb{R}$*. Kažemo da je* z ***kvadratni radikal*** *ako postoji korijenski niz* $x_0, \ldots, x_n$ *takav da je* $z \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$*.*

Napomena 2.3.6. *Svaki racionalni broj je kvadratni radikal. Naime, po definiciji je* $\mathbb{Q}[1] = [\mathbb{Q} \cup \{1\}]$ *pa je* $\mathbb{Q}[1] = [\mathbb{Q}]$*, no* $[\mathbb{Q}] = \mathbb{Q}$ *prema napomeni 2.1.24. Dakle,* $\mathbb{Q}[1] = \mathbb{Q}$*. Očito je konačan niz* $x_0 = 1$ *korijenski niz, pa zaključujemo da je svaki racionalan broj kvadratni radikal.*

Napomena 2.3.7. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $S \subseteq T$. Tada je $[S] \subseteq [T]$.*
Naime, iz $T \subseteq [T]$ slijedi $S \subseteq [T]$. Iz napomene 2.1.24 i činjenice da je $[T]$ potprsten od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, slijedi $[S] \subseteq [T]$.

Lema 2.3.8. *Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n],$$

$$x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n].$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Pretpostavimo da je $x_0 \in \mathbb{R}$. Vrijedi $\mathbb{Q}[x_0] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0\}]$ pa iz

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q} \cup \{x_0\} \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0\}],$$

$$x_0 \in \mathbb{Q} \cup \{x_0\} \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0\}]$$

slijedi da je $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x_0]$ i $x_0 \in \mathbb{Q}[x_0]$. Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 0$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0$.
Neka su $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Koristeći induktivnu pretpostavku dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \cup \{x_{n+1}\} \subseteq [\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \cup \{x_{n+1}\}] &= (\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n])[x_{n+1}] \\ &= \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}].\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}]$.
Uočimo da smo dokazali da je $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}]$.
Prema induktivnoj pretpostavci vrijedi $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$. Stoga je $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}]$. Nadalje, također smo pokazali da je $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \cup \{x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}]$.
Iz toga očito slijedi da je $x_{n+1} \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}]$. Prema tome, $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}]$.
Time smo dokazali da tvrdnja vrijedi za $n + 1$ pa je lema dokazana. □

Propozicija 2.3.9. *Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \dots, x_n\}].$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 0$ tvrdnja slijedi iz definicije 2.2.1.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0$.
Neka su $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je

$$\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{n+1}] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \dots, x_{n+1}\}]. \qquad (\bigstar)$$

Koristeći induktivnu pretpostavku i napomenu 2.3.7 dobivamo

$$\mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_n] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_n\}] \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,.$$

Dakle,

$$\mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_n] \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,. \tag{$\diamond$}$$

Nadalje, vrijedi $x_{n+1} \in \mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]$.

Dakle,

$$x_{n+1} \in [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,. \tag{$\diamond\diamond$}$$

Iz ($\diamond$) i ($\diamond\diamond$) slijedi

$$\mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_n] \cup \{x_{n+1}\} \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,.$$

Prema napomeni 2.1.24 slijedi

$$[\mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_n] \cup \{x_{n+1}\}] \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,,$$

tj.

$$(\mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_n])\,[x_{n+1}] \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,.$$

Dakle,

$$\mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_{n+1}] \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}]\,. \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

S druge strane, prema lemi 2.3.8 vrijedi

$$\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_{n+1}]\,.$$

Prema napomeni 2.1.24 vrijedi

$$[\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}] \subseteq \mathbb{Q}\,[x_0, \ldots, x_{n+1}]\,. \tag{$\bigstar\bigstar\bigstar$}$$

Iz ($\bigstar\bigstar$) i ($\bigstar\bigstar\bigstar$) slijedi ($\bigstar$).
Time je tvrdnja propozicije dokazana.

$\square$

Propozicija 2.3.10. *Skup svih kvadratnih radikala je potpolje od* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Dokaz. Neka su a i b kvadratni radikali. Tada postoje korijenski nizovi $x_0, \dots, x_n$ i $y_0, \dots, y_m$ takvi da je $a \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$ i $b \in \mathbb{Q}[y_0, \dots, y_m]$.

Tvrdimo da je $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m$ korijenski niz.
Očito je $x_0^2 \in \mathbb{Q}$ odnosno $x_{i+1}^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_i]$ za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$.
Znamo da je $y_0^2 \in \mathbb{Q}$ pa iz leme 2.3.8 slijedi da je $y_0^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$.
Neka je $i \in \{0, \dots, , m-1\}$. Koristeći propoziciju 2.3.9 i napomenu 2.3.7 dobivamo

$$\begin{aligned} y_{i+1}^2 \in \mathbb{Q}[y_0, \dots, y_i] = [\mathbb{Q} \cup \{y_0, \dots, y_i\}] &\subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_i\}] \\ &= \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_i] \,. \end{aligned}$$

Dakle, $y_{i+1}^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_i]$. Prema tome, $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m$ je korijenski niz.

Iz propozicije 2.3.9 i napomene 2.3.7 slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \dots, x_n\}] &\subseteq [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\}] \\ &= \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m] \,. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$.
Analogno dobivamo $\mathbb{Q}[y_0, \dots, y_m] \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$.
Iz prethodnih dviju inkluzija slijedi $a, b \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$.

Budući da je $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ potprsten od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $a - b \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ i $a \cdot b \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$. Stoga su $a - b$ i $a \cdot b$ kvadratni radikali.

Pretpostavimo da je a kvadratni radikal te da je $a \neq 0$. Tada postoji korijenski niz $x_0, \dots, x_n$ takav da je $a \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$. Prema propoziciji 2.3.4 $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$ je potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Iz propozicije 2.2.9 slijedi da je $a^{-1} \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$. Stoga je a^{-1} kvadratni radikal.

Prema napomeni 2.3.6 skup $\mathbb{Q}$ je skup kvadratnih radikala. Stoga skup svih kvadratnih radikala ima barem dva elementa.
Iz propozicije 2.2.9 slijedi tvrdnja propozicije.

□

Propozicija 2.3.11. *Neka je a kvadratni radikal, $a \geq 0$. Tada je $\sqrt{a}$ kvadratni radikal.*

Dokaz. Budući da je a kvadratni radikal, postoji korijenski niz $x_0, \dots, x_n$ takav da je

$$a \in \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n] \,.$$

Vrijedi $x_0^2 \in \mathbb{Q}$, $x_{i+1}^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_i]$, za svaki $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ i $\left(\sqrt{a}\right)^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ jer je $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Prema tome, $x_0, \ldots, x_n, \sqrt{a}$ je korijenski niz.
Prema lemi 2.3.8 vrijedi $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}\left[x_0, \ldots, x_n, \sqrt{a}\right]$, iz čega zaključujemo da je $\sqrt{a}$ kvadratni radikal. $\square$

Poglavlje 3

Algebarska svojstva konstruktibilnih brojeva

3.1 Jednadžba pravca i kvadratni radikali

Propozicija 3.1.1. *Neka je p pravac. Tada postoje $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ili $b \neq 0$, takvi da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$(x, y) \text{ je element pravca } p \text{ ako i samo ako vrijedi } ax + by + c = 0.$$

Dokaz. Postoje $T, v \in \mathbb{R}^2, v \neq (0, 0)$ takvi da je $p = \{T + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Imamo $T = (t_1, t_2)$ i $v = (v_1, v_2)$, gdje su $t_1, t_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Slijedi $p = \{(t_1, t_2) + \lambda \cdot (v_1, v_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Dakle,

$$p = \{(t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{$\boxplus$}$$

1. slučaj: $v_1 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $(x, y) \in p$. Tada prema ($\boxplus$) postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2)$$

tj.

$$x = t_1 + \lambda \cdot v_1,$$
$$y = t_2 + \lambda \cdot v_2.$$

Slijedi

$$\lambda = \frac{x - t_1}{v_1} \text{ i } \lambda = \frac{y - t_2}{v_2},$$

pa je

$$\frac{x - t_1}{v_1} = \frac{y - t_2}{v_2}. \tag{1}$$

Stoga je

$$v_2 x - v_2 t_1 = v_1 y - v_1 t_2 \tag{2}$$

iz čega slijedi

$$v_2 x - v_1 y - v_2 t_1 + v_1 t_2 = 0. \tag{3}$$

Dakle, ako je $(x, y) \in p$, onda vrijedi (3).

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (3). Tada vrijedi (2), pa i (1).
Definirajmo $\lambda \in \mathbb{R}$ s $\lambda = \frac{x-t_1}{v_1}$. Iz (1) slijedi

$$\lambda = \frac{x - t_1}{v_1} \ \text{ i } \ \lambda = \frac{y - t_2}{v_2}$$

pa je

$$\begin{aligned} x &= t_1 + \lambda \cdot v_1, \\ y &= t_2 + \lambda \cdot v_2. \end{aligned}$$

Dakle, $(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2)$. Iz (⊞) slijedi da je $(x, y) \in p$.

Dakle, dokazali smo sljedeće:

$(x, y) \in p$ ako i samo vrijedi (3). Ako stavimo

$$\begin{aligned} a &= v_2, \\ b &= -v_1, \\ c &= -v_2 t_1 + v_1 t_2, \end{aligned}$$

onda imamo da je $(x, y) \in p$ ako i samo ako vrijedi $ax + by + c = 0$.

2. slučaj: $v_1 = 0$.
Tada je $v_2 \neq 0$ jer je $v \neq (0, 0)$.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $(x, y) \in p$. Tada prema (⊞) postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2)$$

tj.

$$\begin{aligned} x &= t_1, \\ y &= t_2 + \lambda \cdot v_2. \end{aligned}$$

Dakle, ako je $(x, y) \in p$ onda je $x = t_1$.

Obratno, pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x = t_1$.
Definirajmo $\lambda \in \mathbb{R}$ s $\lambda = \frac{y - t_2}{v_2}$. Tada je $y = t_2 + \lambda \cdot v_2$ pa je

$$\begin{aligned} (x, y) &= (t_1, t_2 + \lambda \cdot v_2) \text{ tj.} \\ (x, y) &= (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2). \end{aligned}$$

Iz (⊞) slijedi da je $(x, y) \in p$.
Prema tome, $(x, y) \in p$ ako i samo ako je $x = t_1$.
Definirajmo

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= 0, \\ c &= -t_1. \end{aligned}$$

Tada je $x = t_1$ ako i samo ako je $ax + by + c = 0$.
Prema tome, $(x, y) \in p$ ako i samo ako $ax + by + c = 0$.

3. slučaj: $v_2 = 0$.
Tada je $v_1 \neq 0$ jer je $v \neq (0, 0)$.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $(x, y) \in p$. Tada prema (⊞) postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2)$$

tj.

$$\begin{aligned} x &= t_1 + \lambda \cdot v_1, \\ y &= t_2. \end{aligned}$$

Dakle, ako je $(x, y) \in p$ onda je $y = t_2$.

Obratno, pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $y = t_2$.
Definirajmo $\lambda \in \mathbb{R}$ s $\lambda = \frac{x - t_1}{v_1}$. Tada je $x = t_1 + \lambda \cdot v_1$ pa je

$$\begin{aligned} (x, y) &= (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2) \text{ tj.} \\ (x, y) &= (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2). \end{aligned}$$

Iz (⊞) slijedi da je $(x, y) \in p$.
Prema tome, $(x, y) \in p$ ako i samo ako je $y = t_2$.
Definirajmo

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ b &= 1, \\ c &= -t_2. \end{aligned}$$

Tada je $(x, y) \in p$ ako i samo ako $ax + by + c = 0$.

Time je propozicija dokazana.

□

Napomena 3.1.2. *Neka su $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A \neq B$, takvi da su $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, gdje su x_1, y_1, x_2, y_2 kvadratni radikali. Tada postoje kvadratni radikali a, b, c takvi da je $ax + by + c = 0$ jednadžba pravca AB tj. takvi da je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$ te za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi $ax + by + c = 0$.*

Prema napomeni 1.1.6 vrijedi

$$AB = \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Označimo $T = A$ i $v = B - A$.
Imamo $T = (t_1, t_2)$, $v = (v_1, v_2)$ iz čega slijedi da su

$$t_1 = x_1, \ t_2 = y_1,$$
$$v_1 = x_2 - x_1, \ v_2 = y_2 - y_1.$$

Očito su t_1, t_2 kvadratni radikali, a iz propozicije 2.3.10 slijedi da su i v_1, v_2 kvadratni radikali.

Znamo da je $AB = \{A + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Iz dokaza propozicije 3.1.1 slijedi da postoje $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $ax + by + c = 0$ jednadžba pravca AB, pri čemu se a, b, c mogu izraziti kao zbroj i produkt brojeva t_1, t_2, v_1, v_2.

Iz propozicije 2.3.10 slijedi da su a, b, c kvadratni radikali.

Propozicija 3.1.3. *Neka su p_1, p_2 pravci takvi da je $p_1 \neq p_2$ i $p_1 \cap p_2 \neq \emptyset$. Neka je $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ jednadžba pravca p_1, a $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ jednadžba pravca p_2. Tada je $a_1 \neq 0$ ili $a_2 \neq 0$ te je $b_1 a_2 - a_1 b_2 \neq 0$.*

Dokaz. Odaberimo $T \in p_1 \cap p_2$. Imamo $T = (x_0, y_0)$.
Uočimo da ne postoji $T' \neq T$ takav da je $T' \in p_1 \cap p_2$. U suprotnom bi p_1, p_2 bili različiti pravci koji bi sadržavali točke T i T', što je nemoguće prema propoziciji 1.1.4.

Pretpostavimo da su $a_1 = 0$ i $a_2 = 0$.
Tada su $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$ te je

$$b_1 y + c_1 = 0 \text{ jednadžba pravca } p_1,$$

$$b_2 y + c_2 = 0 \text{ jednadžba pravca } p_2.$$

Dakle,

$$y = -\frac{c_1}{b_1} \text{ je jednadžba pravca } p_1,$$

$$y = -\frac{c_2}{b_2} \text{ je jednadžba pravca } p_2.$$

Iz činjenice da je $T \in p_1$ i $T \in p_2$ slijedi

$$y_0 = -\frac{c_1}{b_1} \text{ i } y_0 = -\frac{c_2}{b_2}$$

pa je

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}.$$

Slijedi da je $p_1 = p_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Prema tome, $a_1 \neq 0$ ili $a_2 \neq 0$.

Pretpostavimo da je $a_1 = 0$.
Tada je $b_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$ pa je $b_1 a_2 - a_1 b_2 = b_1 a_2 \neq 0$.
Analogno dobivamo da je $b_1 a_2 - a_1 b_2 = -a_1 b_2 \neq 0$ ako je $a_2 = 0$.

Pretpostavimo da je $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.
Iz $T \in p_1$ i $T \in p_2$ slijedi

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0,$$

$$a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0.$$

Množenjem prve jednakosti s a_1, a druge jednakosti s a_2 te oduzimanjem dobivamo

$$(b_1 a_2 - a_1 b_2) y_0 + c_1 a_2 - a_1 c_2 = 0. \tag{$\oplus$}$$

Pretpostavimo da je

$$b_1a_2 - a_1b_2 = 0. \tag{$\oplus\oplus$}$$

Iz ($\oplus$) slijedi da je

$$c_1a_2 - a_1c_2 = 0. \tag{$\oplus\oplus\oplus$}$$

Odaberimo $y_1 \in \mathbb{R}$ takav da je $y_1 \neq y_0$.
Iz ($\oplus\oplus$) i ($\oplus\oplus\oplus$) slijedi da je

$$(b_1a_2 - a_1b_2)y_1 + c_1a_2 - a_1c_2 = 0.$$

Množenjem prethodne jednakosti s -1 i sređivanjem dobivamo

$$-b_1a_2y_1 + a_1b_2y_1 - c_1a_2 + a_1c_2 = 0. \tag{$\blacklozenge$}$$

Definirajmo $x_1 = \dfrac{-(b_1y_1 + c_1)}{a_1}$.
Tada vrijedi

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \tag{$\blacklozenge\blacklozenge$}$$

Stoga je $(x_1, y_1) \in p_1$. Tvrdimo da je $(x_1, y_1) \in p_2$.
Množenjem jednakosti ($\blacklozenge\blacklozenge$) s a_2 dobivamo

$$a_1a_2x_1 + b_1a_2y_1 + c_1a_2 = 0. \tag{$\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$}$$

Zbrajanjem ($\blacklozenge$) i ($\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$) dobivamo

$$a_1a_2x_1 + a_1b_2y_1 + a_1c_2 = 0.$$

Dijeljenjem prethodne jednakosti s a_1 dobivamo

$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0.$$

Dakle, $(x_1, y_1) \in p_2$.
Prema tome, $(x_1, y_1) \in p_1 \cap p_2$, a očito je $(x_1, y_1) \neq T$ (jer je $y_1 \neq y_0$), no kao što smo vidjeli, to je nemoguće.
Zaključak: $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$. $\square$

3.2 Konstruktibilni brojevi i kvadratni radikali

Lema 3.2.1. *Neka su a, b, c kvadratni radikali takvi da je $a \neq 0$. Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $ax^2 + bx + c = 0$. Tada je x kvadratni radikal.*

Dokaz. Budući da je x rješenje kvadratne jednadžbe, mora vrijediti

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ili

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

U oba slučaja, zbog propozicija 2.3.10 i 2.3.11, vrijedi da je x kvadratni radikal. □

Teorem 3.2.2. *Svaki konstruktibilan broj je kvadratni radikal.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati sljedeće:
ako je T konstruktibilna točka, onda su koordinate točke T kvadratni radikali.

Neka je $S = \{(0,0), (1,0)\}$. Ako je T konstruktibilna točka, onda se T može konstruirati iz skupa S, dakle postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $T \in S^{(n)}$.

Stoga je dovoljno dokazati sljedeće:
za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ i za svaki $T \in S^{(n)}$ koordinate točke T su kvadratni radikali.

Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 0$ tvrdnja je jasna jer su brojevi 0 i 1 kvadratni radikali (prema napomeni 2.3.6).
Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}_0$ te da su koordinate svake točke $T \in S^{(n)}$ kvadratni radikali.
Neka je $T \in S^{(n+1)}$. Tvrdimo da su koordinate točke T kvadratni radikali. Iz $T \in S^{(n+1)}$ slijedi da je T točka određena skupom $S^{(n)}$.

Imamo tri slučaja:

1. postoje pravci p_1, p_2 određeni skupom $S^{(n)}$ takvi da je $p_1 \neq p_2$ te $T \in p_1 \cap p_2$,
2. postoje pravac p i kružnica k određeni skupom $S^{(n)}$ takvi da je $T \in p \cap k$,
3. postoje kružnice k_1, k_2 određene skupom $S^{(n)}$ takve da je $k_1 \neq k_2$ i $T \in k_1 \cap k_2$.

Promotrimo prvi slučaj.
Imamo $p_1 = AB$, gdje su $A, B \in S^{(n)}, A \neq B$.
Prema induktivnoj pretpostavci koordinate točaka A i B su kvadratni radikali. Iz napomene 3.1.2 slijedi da postoje kvadratni radikali a_1, b_1, c_1 takvi da je $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ jednadžba pravca p_1.
Analogno postoje kvadratni radikali a_2, b_2, c_2 takvi da je $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ jednadžba pravca p_2.

Imamo $T = (x_0, y_0)$, gdje su $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
S obzirom da je $T \in p_1 \cap p_2$ slijedi da vrijedi

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0,$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

Množenjem prve jednakosti s a_2, a druge s a_1, te oduzimanjem druge od prve dobivamo

$$b_1a_2y_0 - a_1b_2y_0 + c_1a_2 - a_1c_2 = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$(b_1a_2 - a_1b_2)y_0 + c_1a_2 - a_1c_2 = 0.$$

Prema propoziciji 3.1.3 znamo da je $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$.
Slijedi

$$y_0 = (c_1a_2 - a_1c_2)(b_1a_2 - a_1b_2)^{-1}.$$

Prema propoziciji 2.3.10 slijedi da je y_0 kvadratni radikal.

Iz propozicije 3.1.3 slijedi da je $a_1 \neq 0$ ili $a_2 \neq 0$. Ako je $a_1 \neq 0$, onda iz $a_1x_0+b_1y_0+c_1 = 0$ slijedi da je

$$x_0 = (-b_1y_0 - c_1) \cdot a_1^{-1},$$

što povlači da je x_0 kvadratni radikal.

Ako je $a_2 \neq 0$, onda iz $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$ slijedi da je

$$x_0 = (-b_2y_0 - c_2) \cdot a_2^{-1},$$

što znači da je x_0 kvadratni radikal.
Dakle, koordinate točke T su kvadratni radikali.

Promotrimo sada drugi slučaj.
Analogno kao u prethodnom slučaju zaključujemo da postoje kvadratni radikali a, b, c takvi da je $ax + by + c = 0$ jednadžba pravca p.
Budući da je k kružnica određena sa $S^{(n)}$, postoje $R, T_1 \in S^{(n)}$ takvi da je $k = K(R, d(R, T_1))$.
Prema induktivnoj pretpostavci postoje kvadratni radikali u, v, u_1, v_1 takvi da je

$$R = (u, v),\ T_1 = (u_1, v_1).$$

Označimo $r = d(R, T_1)$. Vrijedi $r = \sqrt{(u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2}$. Iz propozicija 2.3.10 i 2.3.11 slijedi da je r kvadratni radikal.

Imamo $T = (x_0, y_0)$ gdje su $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
Iz $k = K(R, r)$ i $T \in k$ slijedi da je $d(T, R) = r$ tj.

$$\sqrt{(u - x_0)^2 + (v - y_0)^2} = r.$$

Dakle,

$$(u - x_0)^2 + (v - y_0)^2 = r^2. \tag{$\star\star$}$$

S druge strane, iz $T \in p$ slijedi

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \tag{$\star$}$$

Znamo da je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$.
Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Tada iz $(\star)$ slijedi da je

$$x_0 = \frac{-by_0 - c}{a}. \tag{$\triangle$}$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u $(\star\star)$ dobivamo

$$\left[u - \left(\frac{-by_0 - c}{a}\right)\right]^2 + (v - y_0)^2 = r^2,$$

što je ekvivalentno

$$\left[\frac{b}{a}y_0 + \left(u + \frac{c}{a}\right)\right]^2 + (v - y_0)^2 = r^2.$$

Slijedi

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 y_0^2 + 2\frac{b}{a}\left(u + \frac{c}{a}\right)y_0 + \left(u + \frac{c}{a}\right)^2 + v^2 - 2vy_0 + y_0^2 = r^2$$

tj.

$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right] y_0^2 + \left[2\frac{b}{a}\left(u + \frac{c}{a}\right) - 2v\right] y_0 + \left(u + \frac{c}{a}\right)^2 + v^2 - r^2 = 0.$$

Označimo

$$A = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1,$$

$$B = 2\frac{b}{a}\left(u + \frac{c}{a}\right) - 2v,$$

$$C = \left(u + \frac{c}{a}\right)^2 + v^2 - r^2.$$

Prema propoziciji 2.3.10 slijedi da su A, B, C kvadratni radikali.
Očito je $A \neq 0$ pa iz leme 3.2.1 slijedi da je y_0 kvadratni radikal.
Iz ($\triangle$) slijedi da je x_0 kvadratni radikal.

Zaključujemo da su koordinate točke T kvadratni radikali.
Do ovog zaključka dolazimo na isti način i u slučaju $b \neq 0$.

Promotrimo sada treći slučaj.
Kao u prethodnom slučaju zaključujemo da postoje kvadratni radikali $u_1, v_1, u_2, v_2, r_1, r_2$ takvi da je $r_1 > 0, r_2 > 0$ i

$$k_1 = K((u_1, v_1), r_1),$$

$$k_2 = K((u_2, v_2), r_2).$$

Tvrdimo da je

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \tag{$\triangleleft$}$$

Pretpostavimo suprotno tj. $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$.
Iz $T \in k_1$ slijedi da je

$$d(T, (u_1, v_1)) = r_1,$$

a iz $T \in k_2$ da je

$$d(T, (u_2, v_2)) = r_2.$$

Stoga je $r_1 = r_2$ pa je $k_1 = k_2$, što je nemoguće jer je $k_1 \neq k_2$.
Prema tome je $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$.

Imamo $T = (x_0, y_0)$, gdje su $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
Iz $T \in k_1$ slijedi da je $d(T, (u_1, v_1)) = r_1$, pa je

$$\sqrt{(u_1 - x_0)^2 + (v_1 - y_0)^2} = r_1,$$

tj.

$$(u_1 - x_0)^2 + (v_1 - y_0)^2 = r_1^2. \tag{1}$$

Iz $T \in k_2$ analogno slijedi

$$(u_2 - x_0)^2 + (v_2 - y_0)^2 = r_2^2. \tag{2}$$

Kvadriranjem (1) i (2) dobivamo

$$u_1^2 - 2u_1x_0 + x_0^2 + v_1^2 - 2v_1y_0 + y_0^2 = r_1^2,$$
$$u_2^2 - 2u_2x_0 + x_0^2 + v_2^2 - 2v_2y_0 + y_0^2 = r_2^2.$$

Oduzimanjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$(2u_2 - 2u_1)x_0 + u_1^2 - u_2^2 + (2v_2 - 2v_1)y_0 + v_1^2 - v_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Označimo

$$a = 2u_2 - 2u_1,$$
$$b = 2v_2 - 2v_1,$$
$$c = u_1^2 - u_2^2 + v_1^2 - v_2^2 - (r_1^2 - r_2^2).$$

Tada je

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \tag{3}$$

Uočimo da su a, b, c kvadratni radikali.
Iz $(\triangleleft)$ slijedi da je $u_1 \neq u_2$ ili $v_1 \neq v_2$ pa je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$.
Sada iz (3) i (1), na isti način kao i u prethodnom slučaju, dobivamo da su x_0 i y_0 kvadratni radikali. Dakle, koordinate točke T su kvadratni radikali.

Zaključak: koordinate svake točke iz $S^{(n+1)}$ su kvadratni radikali.
Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

3.3 Polinomi

Definicija 3.3.1. *Za funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je polinom ako postoje $n \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Teorem 3.3.2. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0. \tag{◀}$$

Dokaz. Za $x = 0$ dobivamo

$$0 = f(0) = a_n 0^n + \cdots + a_1 0 + a_0,$$

iz čega slijedi $a_0 = 0$.

Pretpostavimo sada da (◀) ne vrijedi tj. da postoji $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $a_i \neq 0$. Neka je $p = \min\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \neq 0\}$. Tada je $a_p \neq 0$ i $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$. Stoga je

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_p x^p, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}. \tag{▽}$$

Uočimo da je $p < n$. Naime, u suprotnom bi za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedilo $f(x) = a_p x^p$ pa bismo posebno za $x = 1$ dobili $0 = f(1) = a_p$, što je u kontradikciji s $a_p \neq 0$.

Neka je $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Koristeći (▽) dobivamo

$$\begin{aligned} 0 = f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_p x^p \\ &= x^p \left(a_n x^{n-p} + \cdots + a_p\right). \end{aligned}$$

Dakle, $x^p \left(a_n x^{n-p} + \cdots + a_p\right) = 0$, pa zbog $x^p \neq 0$ slijedi da je

$$a_n x^{n-p} + \cdots + a_p = 0.$$

Dakle, $a_n x^{n-p} + \cdots + a_{p+1} x + a_p = 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Iz prethodne jednakosti slijedi

$$\left(a_n x^{n-p-1} + \cdots + a_{p+2} x + a_{p+1}\right) x = -a_p, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, x \neq 0. \tag{▽▽}$$

Uočimo da iz prethodne jednakosti i $a_p \neq 0$ slijedi da ne mogu svi brojevi $a_n, \dots, a_{p+1}$ biti jednaki 0.

Definirajmo $M = |a_n| + \cdots + |a_{p+1}|$. Uočimo da je $M > 0$.
Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < x < \min\left\{\frac{|a_p|}{2M}, 1\right\}.$$

Iz $x < \frac{|a_p|}{2M}$ slijedi $M \cdot x < \frac{|a_p|}{2}$.

Koristeći ovo, $x < 1$ i $|x| = x$ (jer je $x > 0$) dobivamo

$$\begin{aligned}
\left|\left(a_n x^{n-p-1} + \cdots + a_{p+2}x + a_{p+1}\right)x\right| &= |a_n x^{n-p-1} + \cdots + a_{p+2}x + a_{p+1}| \cdot |x| \\
&\leq \left(|a_n x^{n-p-1}| + \cdots + |a_{p+2}x| + |a_{p+1}|\right) \cdot |x| \\
&= \left(|a_n| \cdot |x^{n-p-1}| + \cdots + |a_{p+2}| \cdot |x| + |a_{p+1}|\right) \cdot |x| \\
&\leq \left(|a_n| + \cdots + |a_{p+2}| + |a_{p+1}|\right) \cdot |x| \\
&= M \cdot x < \frac{|a_p|}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left|\left(a_n x^{n-p-1} + \cdots + a_{p+2}x + a_{p+1}\right)x\right| < \frac{|a_p|}{2}.$$

No, iz $(\triangledown\triangledown)$ slijedi

$$\left|\left(a_n x^{n-p-1} + \cdots + a_{p+2}x + a_{p+1}\right)x\right| = |a_p|,$$

što je u kontradikciji s prethodnom nejednakošću.
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Korolar 3.3.3. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}_0$ te neka su $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_m \neq 0$ i $b_n \neq 0$. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0. \tag{$\therefore$}$$

Tada je $m = n$ i $a_i = b_i$, za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $m > n$.
Iz $(\therefore)$ slijedi

$$a_m x^m + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Iz teorema 3.3.2 slijedi da je $a_m = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom korolara.
Na isti način vidimo da pretpostavka da je $m < n$ također vodi do kontradikcije.
Dakle, $m = n$.

Sada iz (∴) slijedi

$$(a_m - b_m)x^m + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Iz teorema 3.3.2 slijedi

$$a_m - b_m = \cdots = a_1 - b_1 = a_0 - b_0 = 0.$$

Stoga je $a_m = b_m, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$. □

Definicija 3.3.4. *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Takvu funkciju nazivamo nulpolinom.*

Uočimo da je nulpolinom zaista polinom zato što možemo uzeti bilo koji $n \in \mathbb{N}_0$ i $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

Uočimo da iz korolara 3.3.3 slijedi da za svaki polinom f, različit od nulpolinoma, postoje jedinstveni $n \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$a_n \neq 0 \ \text{ i } \ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Naime, ako je f različit od nulpolinoma, onda po definiciji polinoma postoje $k \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $n = \max\{i \in \{0, \ldots, k\} \mid a_i \neq 0\}$ (uočimo da je ova definicija dobra jer sigurno postoji $i \in \{0, \ldots, k\}$ takav da je $a_i \neq 0$, što slijedi iz činjenice da f nije nulpolinom).

Tada je

$$a_n \neq 0 \ \text{ i } \ a_{n+1} = \cdots = a_k = 0.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Uočimo da ustvari vrijedi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Time smo pokazali da postoje $n \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$, takvi da je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, a jedinstvenost slijedi iz korolara 3.3.3.

Za n kažemo da je stupanj polinoma f. Za $a_0, \ldots, a_n$ kažemo da su koeficijenti polinoma f. Za a_0 kažemo da je slobodni koeficijent, a za a_n da je vodeći koeficijent polinoma f. Uočimo da smo ove pojmove definirali za polinom f koji je različit od nulpolinoma.

Napomena 3.3.5. *Uočimo da smo dokazali sljedeće:*
ako je f polinom stupnja n te $k \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, onda je $n \leq k$.

Teorem 3.3.6. *Neka je f polinom stupnja n, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada postoje polinom g stupnja $n - 1$ i $r \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + r, \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ postoje $a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ a_1 \neq 0$ takvi da je

$$f(x) = a_1 x + a_0.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = a_1 x - a_1\alpha + a_1\alpha + a_0 = a_1(x - \alpha) + r,$$

gdje je $r = a_1\alpha + a_0$.

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s $g(x) = a_1$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Očito je g polinom stupnja 0. Vrijedi

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + r, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, tvrdnja teorema vrijedi ako je stupanj polinoma f jednak 1.
Pretpostavimo sada da je $n \in \mathbb{N}$ te da tvrdnja teorema vrijedi ako je f stupnja n ili stupnja manjeg od n.
Pretpostavimo da je f polinom stupnja $n+1$. Tada postoje $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R},\ a_{n+1} \neq 0$, takvi da je

$$f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n+1}x^{n+1} - a_{n+1}\alpha x^n + a_{n+1}\alpha x^n + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_{n+1}x^n(x - \alpha) + (a_{n+1}\alpha + a_n)\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Definirajmo $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s

$$h(x) = (a_{n+1}\alpha + a_n)\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Uočimo da je h polinom. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = a_{n+1}x^n(x - \alpha) + h(x). \tag{⋒}$$

Definirajmo $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s $g(x) = a_{n+1}x^n$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Imamo tri slučaja.

1. slučaj: h je nulpolinom.
Definirajmo $r = 0$. Očito je g polinom stupnja n. Iz (⋒) slijedi da je

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + r, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

2. slučaj: h je polinom stupnja 0.
Tada postoji $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ takav da je $h(x) = r$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz (⋒) slijedi da je

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + r, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

3. slučaj: h je polinom stupnja većeg od 0.
Iz napomene 3.3.5 slijedi da je stupanj polinoma h manji ili jednak n. Iz induktivne pretpostavke slijedi da postoje $r \in \mathbb{R}$ i h' polinom stupnja manjeg ili jednakog $n - 1$ takvi da je

$$h(x) = (x - \alpha) \cdot h'(x) + r, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Iz (⋒) slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n+1}x^n(x - \alpha) + (x - \alpha) \cdot h'(x) + r, \\ &= (x - \alpha)\left[a_{n+1}x^n + h'(x)\right] + r. \end{aligned}$$

Definirajmo $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s

$$k(x) = a_{n+1}x^n + h'(x).$$

Uočimo da je k polinom stupnja n (jer je $a_{n+1} \neq 0$).
Dakle,

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot k(x) + r, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Definicija 3.3.7. *Neka je f polinom te neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = 0$. Tada kažemo da je x nultočka polinoma f.*

Korolar 3.3.8. *Neka je f polinom stupnja $n, n \geq 1$. Pretpostavimo da je x_0 nultočka od f. Tada postoji polinom g stupnja $n-1$ takav da je $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Prema teoremu 3.3.6 postoje polinom g stupnja $n-1$ i $r \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) + r$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Uočimo da za $x = x_0$ dobivamo $f(x_0) = r$ tj. $0 = r$ (jer je x_0 nultočka polinoma f).
Slijedi da je $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Propozicija 3.3.9. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ te neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Pretpostavimo da su x_1, x_2 nultočke od f, $x_1 \neq x_2$. Tada je $-(x_1 + x_2) - a$ također nultočka od f.

Dokaz. Prema korolaru 3.3.8 postoji polinom g stupnja 2 takav da je $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za $x = x_2$ dobivamo $f(x_2) = (x_2 - x_1) \cdot g(x_2)$.
Vrijedi $f(x_2) = 0$ i $x_2 - x_1 \neq 0$ pa je $g(x_2) = 0$, tj. x_2 je nultočka polinoma g.

Prema korolaru 3.3.8 postoji polinom h stupnja 1 takav da je $g(x) = (x - x_2) \cdot h(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot h(x), \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}. \tag{$\boxminus$}$$

Budući da je h polinom stupnja 1, postoje koeficijenti $u, v \in \mathbb{R}$ takvi da je $u \neq 0$ i

$$h(x) = ux + v, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdot h(x) \\
&= (x - x_1)(x - x_2)(ux + v) \\
&= \left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right](ux + v) \\
&= ux^3 - u(x_1 + x_2)x^2 + x_1x_2ux + vx^2 - v(x_1 + x_2)x + x_1x_2v.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x) = ux^3 + [v - u(x_1 + x_2)]\, x^2 + [x_1x_2u - v(x_1 + x_2)]\, x + x_1x_2v.$$

Iz definicije funkcije f za svaki $x \in \mathbb{R}$ slijedi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = ux^3 + [v - u(x_1 + x_2)]\, x^2 + [x_1 x_2 u - v(x_1 + x_2)]\, x + x_1 x_2 v.$$

Prema korolaru 3.3.3 vrijedi

$$u = 1,$$

$$v - u(x_1 + x_2) = a.$$

Slijedi da je $v - (x_1 + x_2) = a$ tj. $v = (x_1 + x_2) + a$.

Nadalje, zbog $u = 1$ vrijedi

$$h(x) = x + v, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R},$$

pa je posebno

$$h(-v) = 0.$$

Uočimo da iz (⊟) slijedi da je $-v$ nultočka od f. No, $-v = -(x_1 + x_2) - a$.
Dakle, $-(x_1 + x_2) - a$ je nultočka od f. □

3.4 Polinomi i kvadratni radikali

Napomena 3.4.1. *Neka je α kvadratni radikal. Tada postoje $n \in \mathbb{N}_0$ i korijenski niz $x_0, \ldots, x_n$ takvi da je $\alpha \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$.*

No, $x_0, \ldots, x_n$ nije jedini korijenski niz s tim svojstvom. Naime, ako uzmemo bilo koji $q \in \mathbb{Q}$, onda je $x_0, \ldots, x_n, q$ također korijenski niz (jer je $q^2 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ prema lemi 2.3.8) te vrijedi $\alpha \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n, q]$ jer je prema propoziciji 2.3.9

$$\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n, q] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_n, q\}] = [\mathbb{Q} \cup \{x_0, \ldots, x_n\}] = \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n].$$

Definicija 3.4.2. *Neka je α kvadratni radikal te neka je*

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{postoji korijenski niz } x_0, \ldots, x_n \text{ takav da je } \alpha \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]\}.$$

Očito je $S \subseteq \mathbb{N}_0$, a vrijedi da je $S \neq \emptyset$ jer je α kvadratni radikal.
*Neka je $k = \min S$. Tada za k kažemo da je **stupanj kvadratnog radikala** α.*

Napomena 3.4.3. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten te neka je* R *potprsten od* $(P, +, \cdot)$*. Neka je* $x_0 \in R$*. Tada je* $R[x_0] = R$*. Naime, vrijedi*

$$R[x_0] = [R \cup \{x_0\}] = [R] = R.$$

Teorem 3.4.4. *Neka su* $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$, $a_3 \neq 0$*. Neka je* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$*, za svaki* $x \in \mathbb{R}$*. Tada vrijedi:*

ako f *ima nultočku koja je kvadratni radikal, onda* f *ima nultočku koja je racionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji kvadratni radikal koji je nultočka od f.
Pretpostavimo da f nema nultočku koja je racionalan broj.

Neka je A skup svih $n \in \mathbb{N}_0$ takvi da postoji kvadratni radikal x takav da je n stupanj kvadratnog radikala x i x je nultočka od f. Skup A je neprazan prema pretpostavci s početka dokaza. Očito je $A \subseteq \mathbb{N}_0$.

Neka je $m = \min A$. Zbog $m \in A$ postoji kvadratni radikal x takav da je m stupanj kvadratnog radikala x i x je nultočka od f.
Iz činjenice da je m stupanj kvadratnog radikala x slijedi da postoji korijenski niz $x_0, \ldots, x_m$ takav da je

$$x \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_m] \qquad (\divideontimes)$$

Imamo dvije mogućnosti: $m = 0$ i $m > 0$.

Pretpostavimo da je $m = 0$
Tada je $x \in \mathbb{Q}[x_0]$. Vrijedi $x_0^2 \in \mathbb{Q}$. Iz propozicije 2.2.12 slijedi da postoje $a, b \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x = a + bx_0$.
S obzirom da je x nultočka od f, slijedi

$$f(a + bx_0) = 0$$

odnosno

$$a_3(a + bx_0)^3 + a_2(a + bx_0)^2 + a_1(a + bx_0) + a_0 = 0.$$

Kvadriranjem i kubiranjem dobivamo

$$a_3(a^3 + 3a^2bx_0 + 3ab^2x_0^2 + b^3x_0^3) + a_2(a^2 + 2abx_0 + b^2x_0^2) + a_1(a + bx_0) + a_0 = 0.$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobivamo

$$a_3a^3 + a_33ab^2x_0^2 + a_2a^2 + a_2b^2x_0^2 + a_1a + a_0 + (a_33a^2b + a_3b^3x_0^2 + a_22ab + a_1b)x_0 = 0.$$

Označimo

$$C = a_3a^3 + a_33ab^2x_0^2 + a_2a^2 + a_2b^2x_0^2 + a_1a + a_0$$
$$D = a_33a^2b + a_3b^3x_0^2 + a_22ab + a_1b.$$

Dakle,

$$C + Dx_0 = 0.$$

Uočimo da su $C, D \in \mathbb{Q}$. Vrijedi $x_0 \notin \mathbb{Q}$ (u suprotnom bi prema napomeni 3.4.3 vrijedilo $\mathbb{Q}[x_0] = \mathbb{Q}$, pa bi iz $x \in \mathbb{Q}[x_0]$ slijedilo $x \in \mathbb{Q}$, što je nemoguće jer f nema racionalnu nultočku). Posebno, $x_0 \neq 0$.

Kada bi vrijedilo $D \neq 0$, onda bi iz

$$C + Dx_0 = 0$$

slijedilo da je

$$x_0 = -\frac{C}{D},$$

tj. imali bismo da je $x_0 \in \mathbb{Q}$, a to je nemoguće.
Dakle, $D = 0$, pa iz $C + Dx_0 = 0$ slijedi da je i $C = 0$.

Tvrdimo da je $a - bx_0$ također nultočka od f. Vrijedi

$$\begin{aligned} f(a - bx_0) &= a_3(a - bx_0)^3 + a_2(a - bx_0)^2 + a_1(a - bx_0) + a_0 \\ &= a_3(a^3 - 3a^2bx_0 + 3ab^2x_0^2 - b^3x_0^3) + a_2(a^2 - 2abx_0 + b^2x_0^2) + a_1a - a_1bx_0 + a_0 \\ &= a_3a^3 + a_33ab^2x_0^2 + a_2a^2 + a_2b^2x_0^2 + a_1a + a_0 - (a_33a^2b + a_3b^3x_0^2 + a_22ab + a_1b)x_0 \\ &= C - Dx_0 \\ &= 0 - 0 \cdot x_0 = 0 \end{aligned}$$

Dakle, $f(a - bx_0) = 0$ tj. $a - bx_0$ je nultočka od f

Pretpostavimo da je $a + bx_0 = a - bx_0$.
Tada je $2bx_0 = 0$, a iz $x_0 \neq 0$ slijedi $b = 0$. Iz $x = a + bx_0$ slijedi $x = a$, tj $x \in \mathbb{Q}$, što je nemoguće.
Dakle, $a + bx_0 \neq a - bx_0$.

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s

$$g(x) = x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3}, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Iz činjenice da je $a_3 \cdot g(x) = f(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je svaka nultočka od f ujedno i nultočka od g, i obratno.

Znamo da su $a + bx_0$ i $a - bx_0$ dvije različite nultočke od f, pa su i dvije različite nultočke od g. Iz propozicije 3.3.9 slijedi da je i

$$-\left[(a + bx_0) + (a - bx_0)\right] - \frac{a_2}{a_3}$$

također nultočka od g.
Dakle, $-2a - \frac{a_2}{a_3}$ je nultočka od g, pa i od f. No, to je nemoguće jer je $-2a - \frac{a_2}{a_3} \in \mathbb{Q}$.

Zaključak: $m \neq 0$ tj. $m > 0$.

Budući da je $x_0, \ldots, x_m$ korijenski niz, $x_0, \ldots, x_{m-1}$ je također korijenski niz.
Iz propozicije 2.3.4 slijedi da je $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Po definiciji vrijedi

$$\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_m] = (\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}])[x_m]$$

pa iz (⋇) slijedi $x \in (\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}])[x_m]$.

Iz činjenice da je $x_m^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ i propozicije 2.2.12, slijedi da postoje $a, b \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ takvi da je

$$x = a + bx_m.$$

Budući da je x nultočka od f vrijedi $f(a + bx_m) = 0$ pa je

$$a_3(a + bx_m)^3 + a_2(a + bx_m)^2 + a_1(a + bx_m) + a_0 = 0.$$

Kubiranjem, kvadriranjem i sređivanjem izraza, kao u prethodnom dijelu dokaza, dobivamo

$$C + Dx_m = 0,$$

gdje su

$$C = a_3a^3 + a_3 3ab^2x_m^2 + a_2a^2 + a_2b^2x_m^2 + a_1a + a_0$$

$$D = a_3 3a^2b + a_3b^3x_m^2 + a_2 2ab + a_1b.$$

S obzirom da je $x_m^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$, da je $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ potpolje od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ te da je prema lemi 2.3.8 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$, slijedi da su $C, D \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$.

Pretpostavimo da je $D \neq 0$. Tada je

$$x_m = -\frac{C}{D}$$

pa slijedi da je $x_m \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$. Sada iz $x = a + bx_m$ slijedi da je $x \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$. To je u kontradikciji sa činjenicom da je m stupanj kvadratnog radikala x.
Dakle, $D = 0$ pa iz $C + Dx_m = 0$ slijedi da je i $C = 0$.

Kao i u prethodnom dijelu dokaza dobivamo da je

$$f(a - bx_m) = C - Dx_m.$$

Stoga je $f(a - bx_m) = 0$, tj. $a - bx_m$ je nultočka od f.

Tvrdimo da je $a + bx_m \neq a - bx_m$.
Pretpostavimo suprotno. Tada iz $a + bx_m = a - bx_m$ slijedi

$$2bx_m = 0 \ \text{ tj. } bx_m = 0.$$

Imamo $x = a + bx_m = a$, pa je $x \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$, kontradikcija!
Prema tome, $a + bx_m$ i $a - bx_m$ su dvije različite nultočke od f, pa i od g, gdje je $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$g(x) = x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3}, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Iz propozicije 3.3.9 slijedi da je

$$-[(a + bx_m) + (a - bx_m)] - \frac{a_2}{a_3}$$

nultočka od g. Dakle, $-2a - \frac{a_2}{a_3}$ je nultočka od g, pa i od f.
Označimo

$$y = -2a - \frac{a_2}{a_3}.$$

Imamo da je y nultočka od f i $y \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{m-1}]$. Očito je y kvadratni radikal. Neka je k stupanj kvadratnog radikala y. Iz definicije 3.4.2 slijedi da je $k \leq m - 1$. Iz definicije skupa A slijedi da je $k \in A$. No, budući da je $m = \min A$, mora vrijediti $m \leq k$. Ovo je u kontradikciji s $k \leq m - 1$.

Time smo dokazali da f ima racionalnu nultočku. $\square$

3.5 Problem duplikacije kocke

Promotrimo sada jednu preciznu formulaciju, izraženu terminologijom ovog rada, klasičnog problema duplikacije kocke.
Pitanje je sljedeće: *Je li moguće za sve $A, B \in \mathbb{R}^2$, iz skupa $\{A, B\}$, konstruirati točke C i D takve da je kocka, kojoj je dužina $\overline{CD}$ brid, dvostruko većeg volumena od kocke s bridom $\overline{AB}$?*

Pretpostavimo da je odgovor na prethodno pitanje potvrdan.
Neka su $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$. Tada postoje točke $C, D \in \mathbb{R}^2$ koje se mogu konstruirati iz skupa $\{A, B\}$ te takve da kocka s bridom $\overline{CD}$ ima dvostruko veći volumen od kocke s bridom $\overline{AB}$. Slijedi

$$(d(C, D))^3 = 2(d(A, B))^3.$$

No, $d(A, B) = 1$ pa je

$$d(C, D) = \sqrt[3]{2}.$$

Uočimo da su prema definiciji, C i D konstruktibilne točke.

Neka su $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$C = (c_1, c_2), \quad D = (d_1, d_2).$$

Prema definiciji 1.3.9 slijedi da su c_1, c_2, d_1, d_2 konstruktibilni brojevi.
Nadalje, prema teoremu 3.2.2 slijedi da su c_1, c_2, d_1, d_2 kvadratni radikali.
Znamo da je

$$d(C, D) = \sqrt{(d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2}.$$

Iz propozicija 2.3.10 i 2.3.11 slijedi da je $d(C, D)$ kvadratni radikal.
Dakle, $\sqrt[3]{2}$ je kvadratni radikal.

Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polinom oblika

$$f(x) = x^3 - 2.$$

Očito je $\sqrt[3]{2}$ nultočka od f. Iz teorema 3.4.4 slijedi da postoji $x_0 \in \mathbb{Q}$ takav da je x_0 nultočka od f.

Neka su $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi takvi da je

$$x_0 = \frac{p}{q}.$$

Iz $f(x) = 0$ slijedi
$$\frac{p^3}{q^3} - 2 = 0,$$
što je ekvivalentno s
$$\frac{p^3}{q^3} = 2$$
tj.
$$p^3 = 2q^3. \tag{$\Subset$}$$
Iz ovoga vidimo da je p^3 paran broj, odnosno da je p paran broj. Slijedi da je $p = 2k$, za neki $k \in \mathbb{Z}$.
Uvrštavanjem prethodne jednakosti u ($\Subset$) slijedi da je
$$(2k)^3 = 2q^3$$
tj.
$$8k^3 = 2q^3.$$
Prema tome, $4k^3 = q^3$.
Sada slijedi da je q^3 paran broj pa je i q paran broj. Ovo je nemoguće jer su p i q relativno prosti.

Time smo dokazali da nije moguće za sve $A, B \in \mathbb{R}^2$ iz skupa $\{A, B\}$ konstruirati točke C, D takve da kocka s bridom $\overline{CD}$ ima dvostruko veći volumen od kocke s bridom $\overline{AB}$. Drugim riječima, duplikacija kocke nije moguća.

Poglavlje 4

Karakterizacija konstruktibilnih brojeva

4.1 Točke s konstruktibilnim koordinatama

Napomena 4.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ skup koji ima barem dva elementa. Tada za sve $m, n \in \mathbb{N}$, takve da je $n \leq m$, vrijedi $S^{(n)} \subseteq S^{(m)}$.*

Dokažimo to.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dovoljno je dokazati da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$S^{(n)} \subseteq S^{(n+k)}. \tag{$\because$}$$

Dokažimo zadnju tvrdnju indukcijom po k.
Za $k = 1$ tvrdnja slijedi iz napomene 1.3.3.
Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$S^{(n)} \subseteq S^{(n+k)}.$$

Prema napomeni 1.3.3 slijedi

$$S^{(n+k)} \subseteq S^{(n+k+1)}.$$

Stoga je $S^{(n)} \subseteq S^{(n+k+1)}$.
Time smo dokazali da ($\because$) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Propozicija 4.1.2. *Neka su A, B, C, D konstruktibilne točke, $A \neq B$, $C \neq D$.*

1. *Pretpostavimo da je $AB \neq CD$ te da je $T \in AB \cap CD$.*
   Tada je T konstruktibilna točka.

2. *Pretpostavimo da je* $T \in K(A, d(A, B)) \cap CD$
   Tada je T *konstruktibilna točka.*

3. *Pretpostavimo da su kružnice* $K(A, d(A, B))$ *i* $K(C, d(C, D))$ *različite te da je točka* T *u njihovom presjeku.*
   Tada je T *konstruktibilna točka.*

Dokaz. Neka je $S = \{(0, 0), (1, 0)\}$. Budući da je A konstruktibilna točka vrijedi da se A može konstruirati iz skupa S odnosno da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $A \in S^{(n_1)}$. Iz istog razloga postoje $n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $B \in S^{(n_2)}, C \in S^{(n_3)}, D \in S^{(n_4)}$.

Neka je $n = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.
Očito je $n_1 \leq n,\ n_2 \leq n,\ n_3 \leq n,\ n_4 \leq n$ pa iz napomene 4.1.1 slijedi da su

$$S^{(n_1)} \subseteq S^{(n)},\ S^{(n_2)} \subseteq S^{(n)},\ S^{(n_3)} \subseteq S^{(n)},\ S^{(n_4)} \subseteq S^{(n)}.$$

Stoga su $A, B, C, D \in S^{(n)}$.
Slijedi da su pravci AB i CD određeni skupom $S^{(n)}$ te da su kružnice $K(A, d(A, B))$ i $K(C, d(C, D))$ također određene skupom $S^{(n)}$.

1. Očito je T točka određena skupom $S^{(n)}$. Dakle, $T \in S^{(n+1)}$. Slijedi po definiciji da je T konstruktibilna točka.

2. Također zaključujemo da je T određena skupom $S^{(n)}$ tj. $T \in S^{(n+1)}$. Dakle, T je konstruktibilna točka.

3. Analogno kao u prethodnim slučajevima se pokaže da je T konstruktibilna točka.

□

Lema 4.1.3. *Neka je x konstruktibilan broj. Tada su točke* $(x, 0),\ (0, x),\ (-x, 0)$ *i* $(0, -x)$ *konstruktibilne.*

Dokaz. Budući da je x konstruktibilan broj, postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je (x, y) konstruktibilna točka ili je (y, x) konstruktibilna točka.

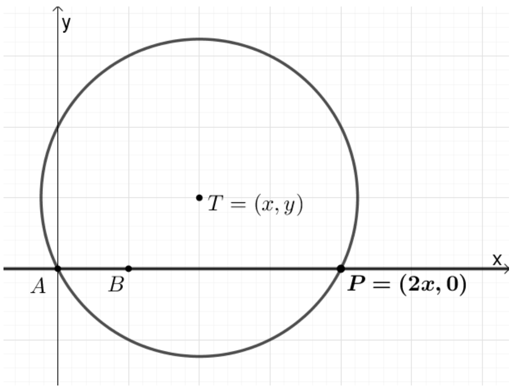
1. slučaj: (x, y) *je konstruktibilna točka.*
Dokažimo da je $(x, 0)$ konstruktibilna točka. To je jasno ako je $y = 0$.
Za $x = 0$ je točka $(x, 0)$ također konstruktibilna (konstruktibilnost točke $(0, 0)$ slijedi direktno iz definicije 1.3.7).

Pretpostavimo da su $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Označimo $T = (x, y)$, $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$. Točke T, A i B su konstruktibilne te je $T \neq A$ i $A \neq B$.

Neka je $P = (2x, 0)$. Prema napomeni 1.1.6 vrijedi $AB = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Stoga je $P \in AB$. Nadalje, imamo

$$d(P, T) = \sqrt{x^2 + y^2} = d(A, T).$$

Stoga je $P \in K(T, d(A, T))$. Dakle, $P \in AB \cap K(T, d(A, T))$, pa iz drugog dijela propozicije 4.1.2 slijedi da je P konstruktibilna točka.



Slika 4.1: Točka P je konstruktibilna točka

Neka je $T' = (x, -y)$. Vrijedi

$$d(T', A) = \sqrt{x^2 + y^2} = d(A, T),$$

$$d(T', P) = \sqrt{x^2 + y^2} = d(P, T),$$

iz čega zaključujemo da je

$$T' \in K(A, d(A, T)) \cap K(P, d(P, T)). \qquad (\trianglelefteq)$$

Kružnice $K(A, d(A, T))$ i $K(P, d(P, T))$ su različite jer za točku $F = \left(0, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ vrijedi

$$F \in K(A, d(A, T))$$

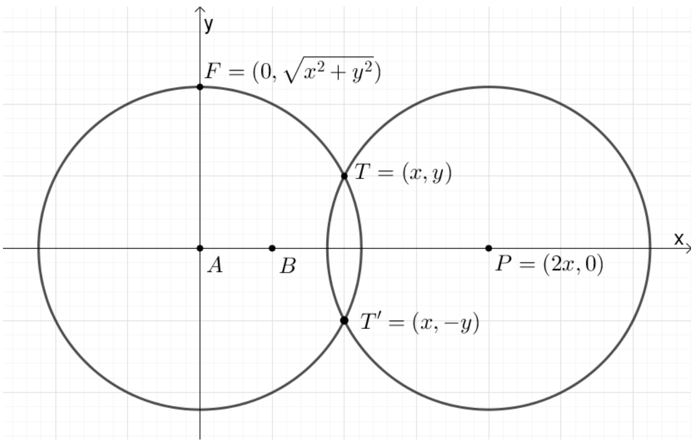
$$\text{jer je } d(F, A) = \sqrt{(0-0)^2 + (0 - \sqrt{x^2 + y^2})^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

te

$$F \notin K(P, d(P, T))$$

jer je $d(F,P) = \sqrt{(2x-0)^2 + (0-\sqrt{x^2+y^2})^2} = \sqrt{(2x)^2 + x^2 + y^2} > \sqrt{x^2+y^2} = d(P,T)$.

Iz ($\trianglelefteq$) i propozicije 4.1.2 slijedi da je T' konstruktibilna točka. Uočimo da je $T' \neq T$ (jer je $y \neq 0$).



Slika 4.2: Točka T' je konstruktibilna točka

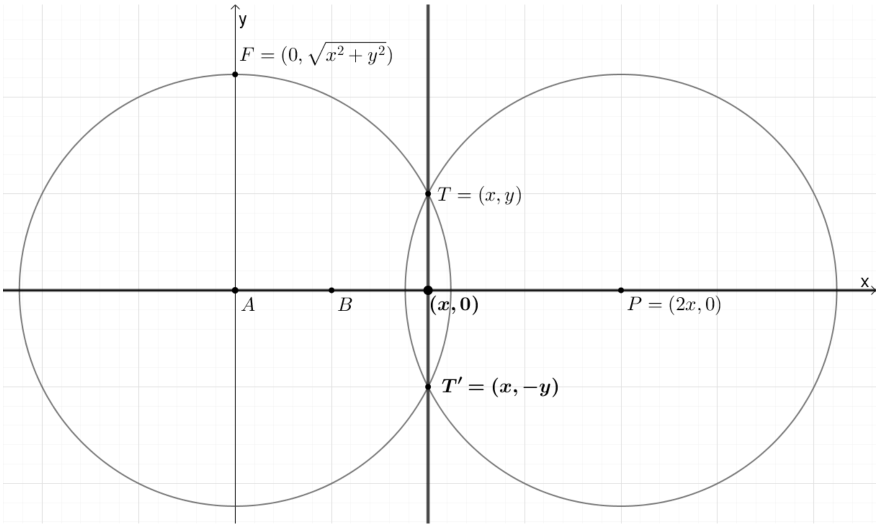
Prema napomeni 1.1.6 vrijedi

$$\begin{aligned} T'T &= \{T' + t \cdot (T - T') \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, -y) + t \cdot (0, 2y) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, -y + t \cdot 2y) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Uočimo da je za $t = \frac{1}{2}$

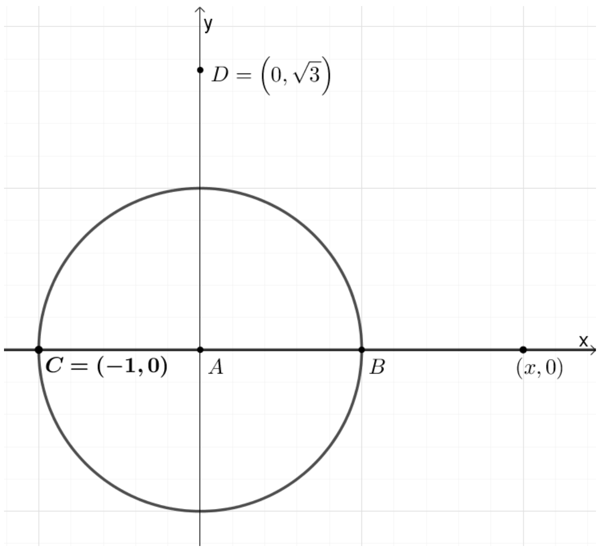
$$(x, -y + t \cdot 2y) = (x, 0).$$

Dakle, $(x,0) \in T'T$. Očito je $(x,0) \in AB$. Stoga je $(x,0) \in T'T \cap AB$.
Pravci AB i $T'T$ su različiti (jer $A \in AB$ i $A \notin T'T$.) Iz propozicije 4.1.2 slijedi da je $(x,0)$ konstruktibilna točka.



Slika 4.3: Točka $(x, 0)$ je konstruktibilna točka

Neka su $C = (-1, 0)$ i $D = \left(0, \sqrt{3}\right)$. Vrijedi $C \in AB \cap K(A, d(A, B))$, što znači da je C konstruktibilna točka (prema propoziciji 4.1.2).

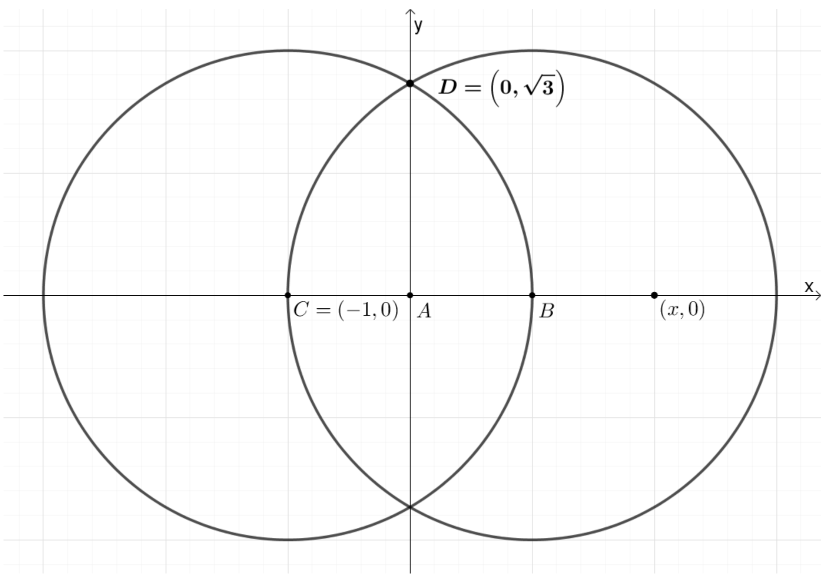


Slika 4.4: Točka C je konstruktibilna točka

Imamo

$$d(C, D) = 2 = d(B, C).$$

Stoga je $D \in K(C, d(B, C))$. Isto tako vrijedi $D \in K(B, d(B, C))$.
Očito je da su kružnice $K(C, d(B, C))$ i $K(B, d(B, C))$ različite. Iz činjenice da se točka D nalazi u presjeku tih dviju kružnica, slijedi da je D konstruktibilna točka (prema propoziciji 4.1.2).



Slika 4.5: Točka D je konstruktibilna točka

Prema napomeni 1.1.6 vrijedi

$$\begin{aligned} AD &= \{A + \lambda \cdot (D - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\lambda(0, \sqrt{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(0, \lambda\sqrt{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

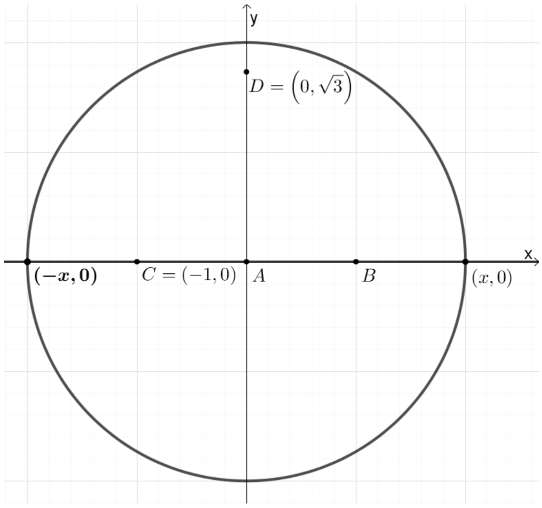
Svaki realan broj t se može napisati u obliku $t = \lambda\sqrt{3}$ $\left(\text{uzmemo } \lambda = \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$.

Stoga je

$$\left\{\left(0, \lambda\sqrt{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

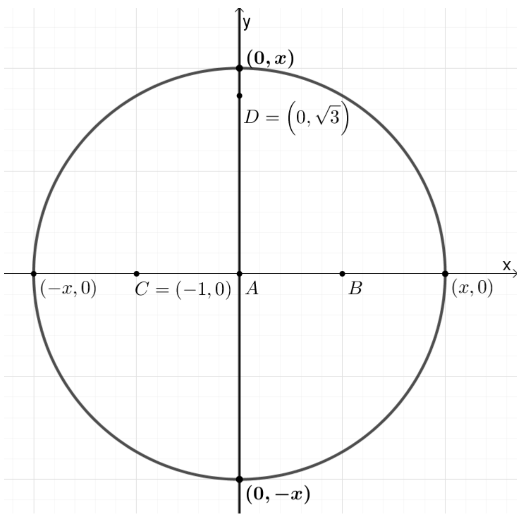
Dakle, $AD = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Promotrimo $AB \cap K(A, d(A, (x, 0)))$.
Uočimo da je $(-x, 0) \in AB \cap K(A, d(A, (x, 0)))$. Iz činjenice da su točke $A, B, (x, 0)$ konstruktibilne, zaključujemo da je točka $(-x, 0)$ konstruktibilna (prema propoziciji 4.1.2).



Slika 4.6: Točka $(-x, 0)$ je konstruktibilna točka

Nadalje, $(0, x) \in AD$ pa iz $(0, x) \in AD \cap K(A, d(A, (x, 0)))$ slijedi da je $(0, x)$ konstruktibilna točka (prema propoziciji 4.1.2).
Analogno zaključujemo da je $(0, -x)$ konstruktibilna točka.



Slika 4.7: Točke $(0, x)$ i $(0, -x)$ su konstruktibilne točke

2. slučaj: (y, x) je konstruktibilna točka.
Dokažimo da je $(0, x)$ konstruktibilna točka. To je jasno ako je $x = 0$ ili $y = 0$. Stoga možemo pretpostaviti da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

Neka su A, B i D točke kao u prvom slučaju te neka je $M = (y, x)$. Neka je $R = (0, 2x)$. Očito je $R \in AD \cap K(M, d(A, M))$. Iz propozicije 4.1.2 slijedi da je R konstruktibilna točka.

Označimo $M' = (-y, x)$. Vrijedi $M' \in K(A, d(A, M)) \cap K(R, d(R, M))$, a ove su kružnice različite jer je

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}, 0\right) \in K(A, d(A, M)), \quad \text{a}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}, 0\right) \notin K(R, d(R, M)).$$

Iz propozicije 4.1.2 slijedi da je M' konstruktibilna točka.

Vrijedi

$$\begin{aligned} M'M &= \{M' + t \cdot (M - M') \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-y, x) + t \cdot (2y, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Za $t = \frac{1}{2}$ imamo

$$(-y, x) + t \cdot (2y, 0) = (0, x).$$

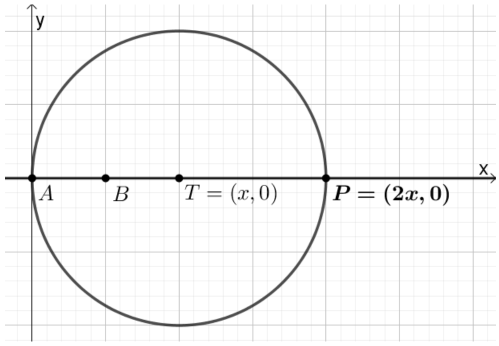
Stoga je $(0, x) \in M'M$. Očito je $(0, x) \in AD$, a pravci AD i $M'M$ su različiti (jer je $M \in M'M$, a $M \notin AD$). Dakle, $(0, x) \in M'M \cap AD$ pa prema propoziciji 4.1.2 slijedi da je $(0, x)$ konstruktibilna točka.

Sada analogno, kao u prethodnom slučaju, dobivamo da su $(0, -x), (x, 0)$ i $(-x, 0)$ konstruktibilne točke. $\square$

Propozicija 4.1.4. *Neka su x i y konstruktibilni brojevi. Tada je (x, y) konstruktibilna točka.*

Dokaz. Prema lemi 4.1.3 su točke $(x, 0)$ i $(0, y)$ konstruktibilne. Stoga, da bismo dokazali da je (x, y) konstruktibilna točka, možemo pretpostaviti da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$.
Uvedimo oznake:

$$A = (0, 0), \; B = (1, 0), \; T = (x, 0), \; P = (2x, 0).$$



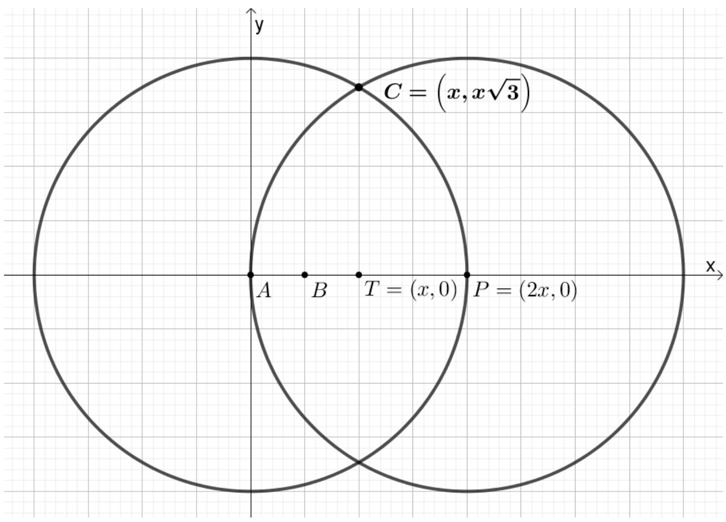
Slika 4.8: Točka P je konstruktibilna točka

Vrijedi $P \in AB \cap K(T, d(T, A))$ pa iz propozicije 4.1.2 slijedi da je P konstruktibilna točka.

Promotrimo točku $C = \left(x, x\sqrt{3}\right)$. Uočimo da je

$$C \in K(P, d(P, A)) \cap K(A, d(A, P))$$

(navedene kružnice su različite jer je $A \in K(P, d(P, A))$, a $A \notin K(A, d(A, P))$).
Dakle, C je konstruktibilna točka.

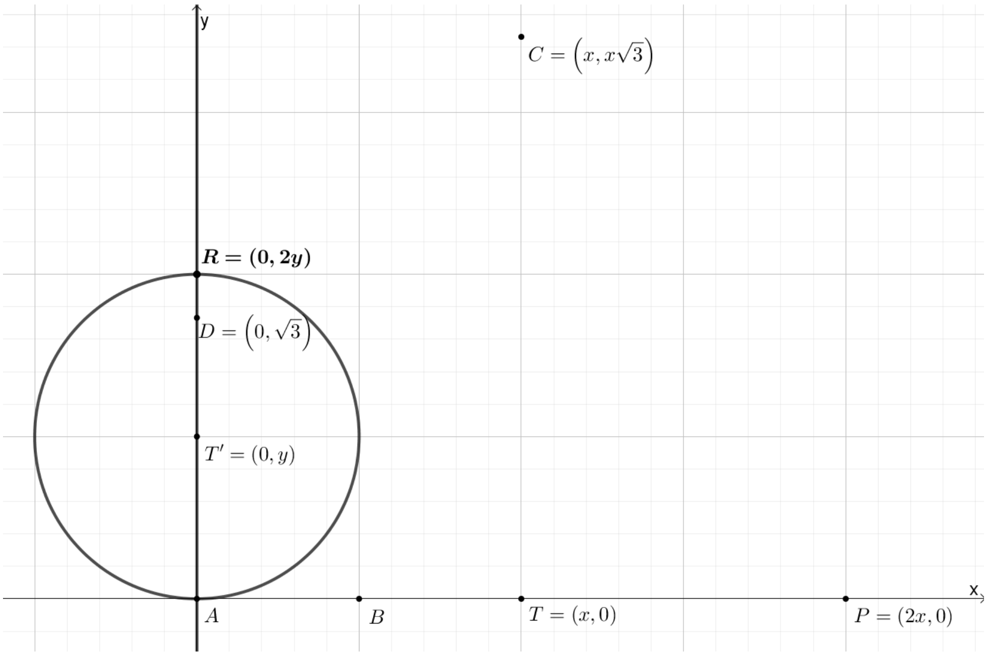


Slika 4.9: Točka C je konstruktibilna točka

Neka je $D = \left(0,\ \sqrt{3}\right)$.
U dokazu prethodne leme smo vidjeli da je D konstruktibilna točka te da je

$$AD = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Za točke $T' = (0, y)$ i $R = (0, 2y)$ vrijedi $R \in AD \cap K(T', d(T', A))$. Stoga je R konstruktibilna točka.

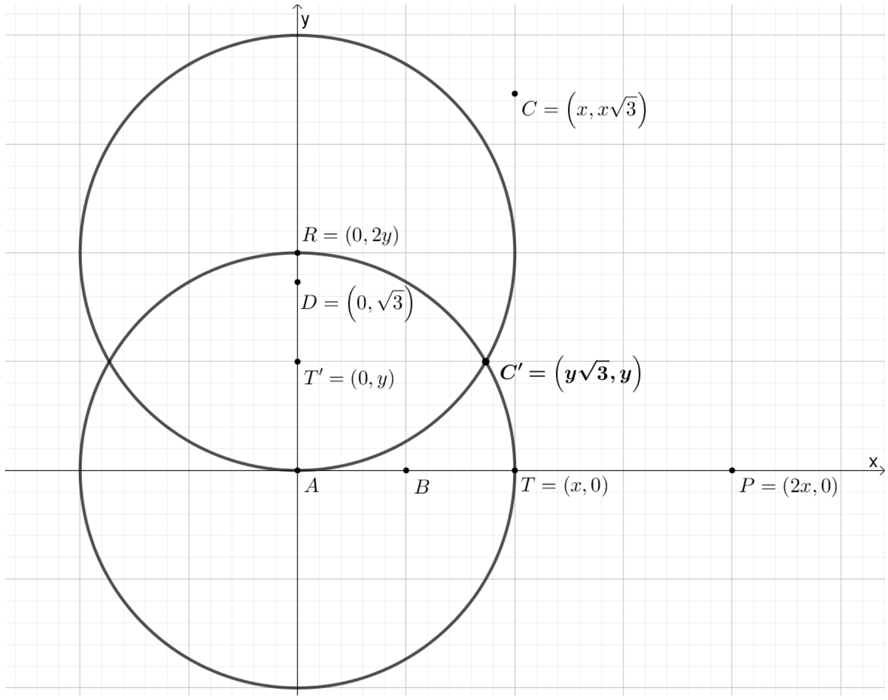


Slika 4.10: Točka R je konstruktibilna točka

Promotrimo točku $C' = \left(y\sqrt{3}, y\right)$.
Vrijedi

$$C' \in K(A, d(A, R)) \cap K(R, d(R, A))$$

(navedene kružnice su različite jer je $R \in K(A, d(A, R))$, a $R \notin K(R, d(A, R))$).
Stoga je C' konstruktibilna točka.



Slika 4.11: Točka C' je konstruktibilna točka

Promotrimo pravce TC i $T'C'$.

$$
\begin{aligned}
TC &= \{T + \lambda(C - T) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{(x, 0) + \lambda\left(0, x\sqrt{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\left(x, \lambda x\sqrt{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}
$$

Za $\lambda = \frac{y}{x\sqrt{3}}$ dobivamo

$$
\left(x, \lambda x\sqrt{3}\right) = (x, y).
$$

Dakle, $(x, y) \in TC$.

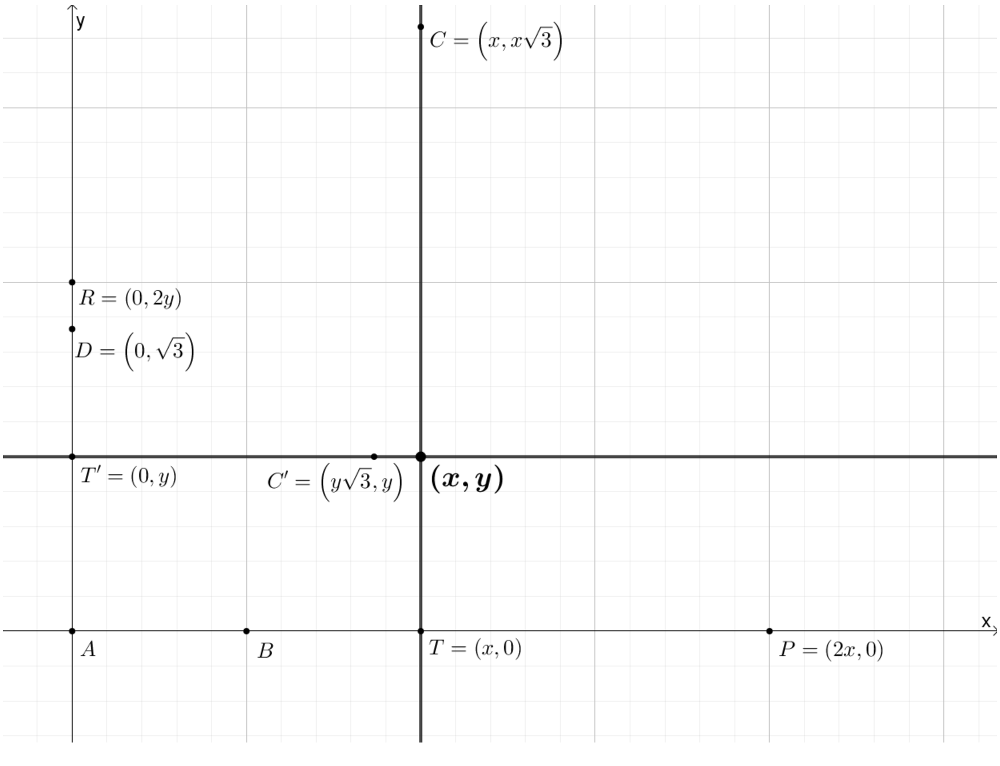
$$\begin{aligned} T'C' &= \{T' + \mu\,(C' - T') \mid \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{(0, y) + \mu\left(y\sqrt{3}, 0\right) \mid \mu \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(\mu y\sqrt{3}, y\right) \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Za $\mu = \frac{x}{y\sqrt{3}}$ dobivamo

$$\left(\mu y\sqrt{3}, y\right) = (x, y).$$

Dakle, $(x, y) \in T'C'$.

Uočimo da su pravci TC i $T'C'$ različiti (jer $T' \notin TC$, a $T' \in T'C'$).
Vrijedi $(x, y) \in TC \cap T'C'$ pa prema propoziciji 4.1.2 slijedi da je (x, y) konstruktibilna točka.



Slika 4.12: Točka (x, y) je konstruktibilna točka

Time je propozicija dokazana. □

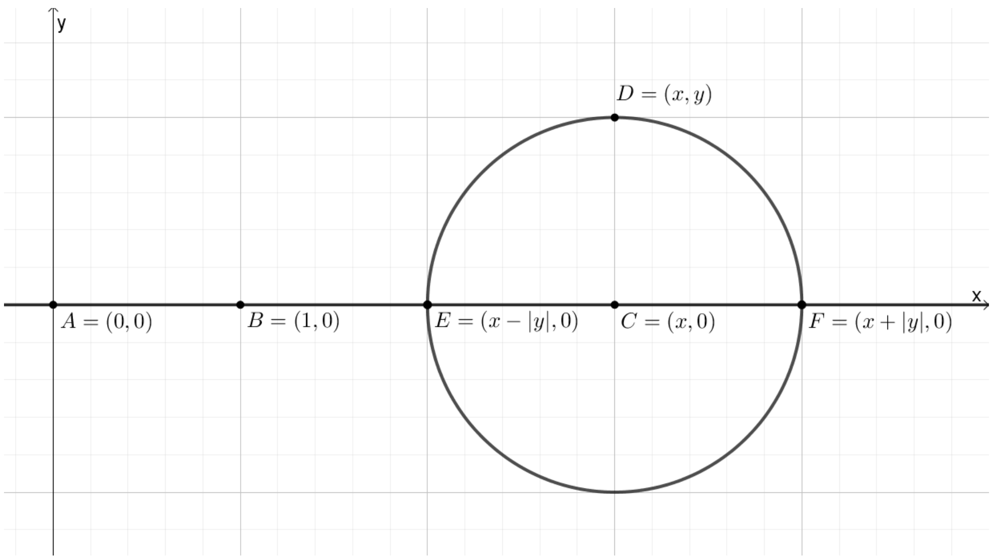
4.2 Zbroj, produkt i kvocijent konstruktibilnih brojeva

Propozicija 4.2.1. *Neka su x i y konstruktibilni brojevi. Tada je:*

1. *$-x$ konstruktibilan broj,*
2. *$x + y$ konstruktibilan broj.*

Dokaz.

1. Prema lemi 4.1.3 točka $(-x, 0)$ je konstruktibilna. Prema tome, $-x$ je konstruktibilan broj.
2. Neka su $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (x, 0)$ i $D = (x, y)$. Možemo pretpostaviti da je $y \neq 0$.
   Prema lemi 4.1.3 i propoziciji 4.1.4 slijedi da su točke C i D konstruktibilne.
   Nadalje, za točke $E = (x - |y|, 0)$ i $F = (x + |y|, 0)$ vrijedi
   $$E, F \in AB \cap K(C, d(C, D)).$$
   Prema propoziciji 4.1.2 slijedi da su E i F konstruktibilne točke.
   Slijedi da su brojevi $x - |y|$ i $x + |y|$ konstruktibilni. Jedan od ta dva broja je jednak broju $x + y$ pa je time druga tvrdnja propozicije dokazana.



Slika 4.13: Točke E i F su konstruktibilne točke

□

Propozicija 4.2.2. *Neka su x i y konstruktibilni brojevi.*

1. *Broj $x \cdot y$ je konstruktibilan.*
2. *Pretpostavimo da je $y \neq 0$. Tada je $\frac{x}{y}$ konstruktibilan broj.*

Dokaz.

1. Možemo pretpostaviti da su $x \neq 0$ i $y \neq 0$.
   Neka su $A = (0, 0)$, $C = (x, 1)$, $D = (0, y)$ i $E = (1, y)$. Prema propoziciji 4.1.4 točke C, D i E su konstruktibilne.

   Vrijedi

   $$\begin{aligned} AC &= \{\lambda C \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda x, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

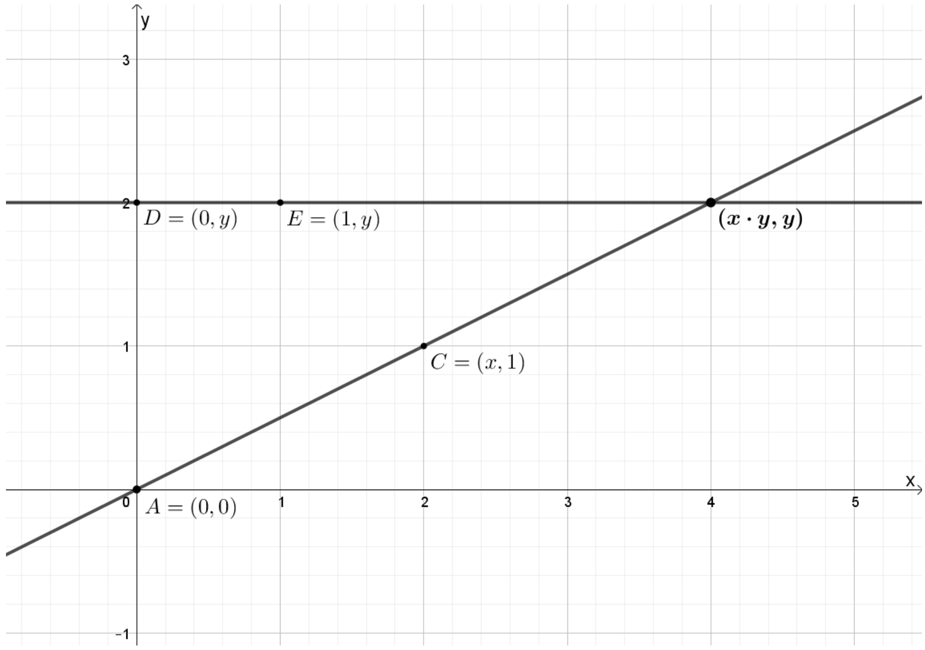
   i

   $$\begin{aligned} DE &= \{D + \mu(1, 0) \mid \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\mu, y) \mid \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Uočimo da su pravci AC i DE različiti (jer je $A \in AC$, a $A \notin DE$).
   Pogledajmo što se nalazi u presjeku pravaca AC i DE. Tražimo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi

   $$(\lambda x, \lambda) = (\mu, y).$$

   Za $\lambda = y$ i $\mu = x \cdot y$ navedena jednakost vrijedi.
   Zaključujemo da se točka $(x \cdot y, y)$ nalazi u presjeku pravaca AC i DE. Dakle, $(x \cdot y, y)$ je konstruktibilna točka tj. $x \cdot y$ je konstruktibilan broj.



Slika 4.14: Točka $(x \cdot y, y)$ je konstruktibilna točka

2. Možemo pretpostaviti da je $x \neq 0$.
   Neka su $A = (0, 0),\ C = (y, 1),\ D = (x, 0)$ i $E = (x, 1)$.

   Vrijedi

$$\begin{aligned} AC &= \{\lambda(y, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda y, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

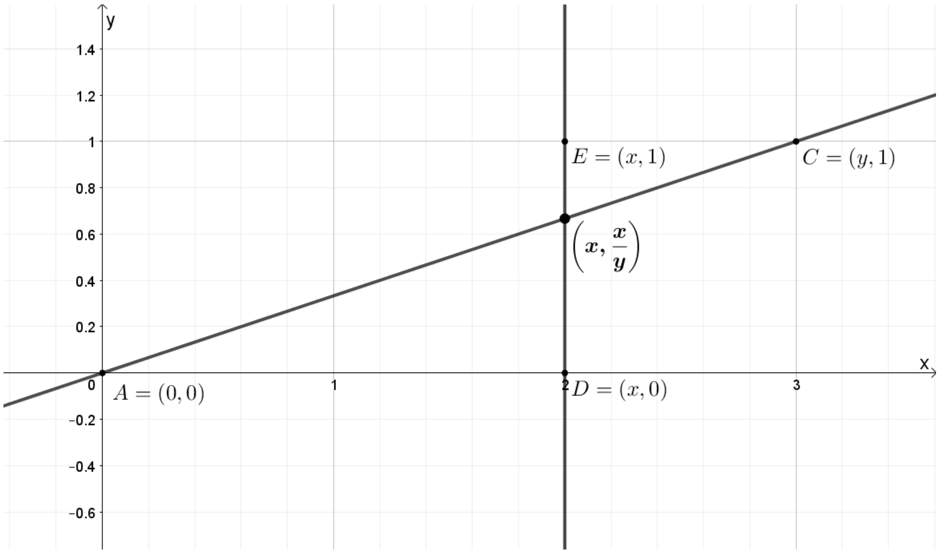
   i

$$\begin{aligned} DE &= \{D + \mu(0, 1) \mid \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, \mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Pravci AC i DE su različiti jer je $A \in AC$ i $A \notin DE$.
   Uočimo da se točka $\left(x, \frac{x}{y}\right)$ nalazi u presjeku pravaca AC i DE $\left(\text{za } \lambda = \mu = \frac{x}{y}\right)$.

   Prema propoziciji 4.1.4 točke C, D i E su konstruktibilne pa slijedi da je točka $\left(x, \frac{x}{y}\right)$ konstruktibilna.
   Dakle, $\frac{x}{y}$ je konstruktibilan broj.

□



Slika 4.15: Točka $\left(x, \frac{x}{y}\right)$ je konstruktibilna točka

4.3 Karakterizacija konstruktibilnih brojeva

Propozicija 4.3.1. *Neka je x konstruktibilan broj, $x \geq 0$. Tada je $\sqrt{x}$ konstruktibilan broj.*

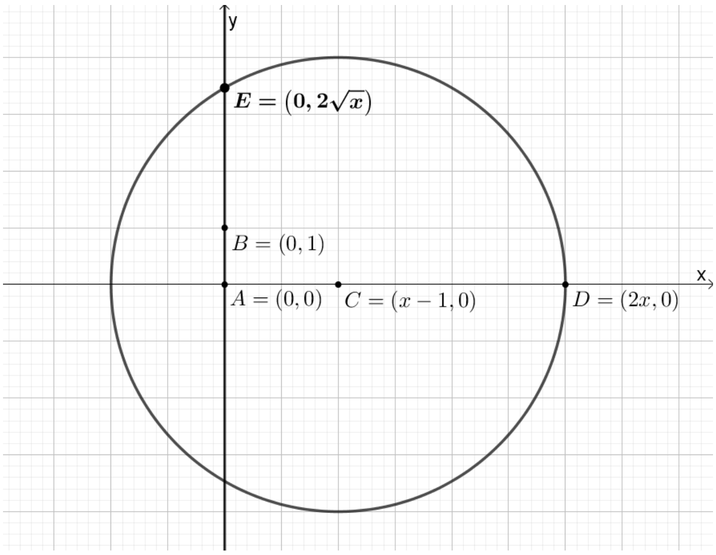
Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $x > 0$.
Neka su $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (x - 1, 0)$, $D = (2x, 0)$ i $E = \left(0, 2\sqrt{x}\right)$.
Prema propozicijama 4.2.1 i 4.2.2 brojevi $x - 1$ i $2x$ su konstruktibilni pa su prema propoziciji 4.1.4 točke C i D konstruktibilne.
Nadalje, A i B su konstruktibilne, a vrijedi $AB = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Imamo

$$\begin{aligned} d(C, E) &= \sqrt{(x-1)^2 + \left(2\sqrt{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4x} \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 1} \\ &= \sqrt{(x+1)^2} \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

Također, $d(C, D) = x + 1$. Stoga je

$$E \in AB \cap K(C, d(C, D)).$$



Slika 4.16: Točka E je konstruktibilna točka

Zaključujemo da je E konstruktibilna točka. Stoga je $2\sqrt{x}$ konstruktibilan broj.
Iz drugog dijela propozicije 4.2.2 slijedi da je $\frac{2\sqrt{x}}{2}$ konstruktibilan broj.
Dakle, $\sqrt{x}$ je konstruktibilan broj.

□

Propozicija 4.3.2. *Svaki racionalan broj je konstruktibilan.*

Dokaz. Znamo da je 1 konstruktibilan broj pa iz drugog dijela propozicije 4.2.1 lako indukcijom dobivamo da je svaki prirodan broj konstruktibilan.

Iz $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i prvog dijela propozicije 4.2.1 slijedi da je svaki cijeli broj konstruktibilan.

Svaki racionalnan broj q se može napisati u obliku $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, pa iz drugog dijela propozicije 4.2.2 slijedi da je svaki racionalan broj konstruktibilan. □

Propozicija 4.3.3. *Ako je $x_0, \ldots, x_n$ korijenski niz, onda je svaki element od $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ konstruktibilan broj.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.
Za $n = 0$ imamo $x_0^2 \in \mathbb{Q}$ i

$$\mathbb{Q}[x_0] = \{a + b \cdot x_0 \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{∇}$$

(prema propoziciji 2.2.12).

Označimo $x_0^2 = r$. Prema propoziciji 4.3.2 slijedi da je r konstruktibilan broj.
Budući da je

$$x_0 = \sqrt{r} \;\text{ ili }\; x_0 = -\sqrt{r},$$

iz propozicija 4.3.1 i 4.2.1 slijedi da je x_0 konstruktibilan broj.
Iz (∇) i propozicija 4.2.2, 4.2.1 i 4.3.2 slijedi da je svaki element od $\mathbb{Q}[x_0]$ konstruktibilan broj.

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}_0$ te da tvrdnja vrijedi za svaki korijenski niz $x_0, \ldots, x_n$.

Neka je $x_0, \ldots, x_{n+1}$ korijenski niz.
Imamo $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n])[x_{n+1}]$. Vrijedi $x_{n+1}^2 \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ te prema propoziciji 2.2.12 vrijedi

$$\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \{a + b \cdot x_{n+1} \mid a, b \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]\}.$$

Prema induktivnoj pretpostavci svaki element od $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ je konstruktibilan broj.
Na isti način kao i prije dolazimo do zaključka da je x_{n+1} konstruktibilan broj, odnosno da je svaki element od $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ konstruktibilan broj.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 4.3.4. *Svaki kvadratni radikal je konstruktibilan broj.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije i definicije kvadratnog radikala. □

Korolar 4.3.5. *Realan broj je konstruktibilan ako i samo ako je kvadratni radikal.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara i teorema 3.2.2. □

Bibliografija

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley, New York, 1969.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo proučavali konstruktibilnost brojeva i točaka. Glavni cilj bio je pokazati kada je realni broj konstruktibilan. Rad smo podijelili na četiri poglavlja u kojima smo pomoću poznatih pojmova poput pravca, kružnice, grupe, prstena, polja, polinoma, ali i nekih *novih* pojmova, objasnili što znači da se točka može konstruirati iz danog skupa, što je konstruktibilna točka te naposljetku, što je konstruktibilan broj. Kroz prikazanu terminologiju i teoriju dokazali smo koji uvjet realni broj treba ispuniti da bi bio konstruktibilan.

Summary

In this thesis we were studying the constructibility of numbers and points. The main goal was to show when a real number is constructible. We divided the paper into four chapters in which we explained, using known concepts such as a line, a circle, a group, a ring, a field, a polynomial, and some *new* ones, what does it mean that a point can be constructed from a given set, what is a constructible point, and finally, what is a constructible number. Through the terminology and theory presented, we have proved which condition a real number must fullfill in order to be constructible.

Životopis

Rođena sam 21. travnja 1994. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Tina Ujevića u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Drugu gimnaziju, također u Zagrebu. Maturirala sam 2013. godine te iste godine započela svoje fakultetsko obrazovanje upisom na preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Na istom fakultetu sam 2017. godine upisala diplomski studij Matematika; smjer: nastavnički.