

# Opća svojstva konveksnog četverokuta

---

Žužul, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:727802>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marija Žužul

**OPĆA SVOJSTVA KONVEKSNOG**  
**ČETVEROKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Mario Krnić  
Suvoditelj:  
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, studeni, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se prof. dr. sc. Mariu Krniću na vodstvu, strpljenju i korisnim diskusijama pri nastajanju ovog rada.*

*Najveće hvala majci Divni na bezuvjetnoj vjeri i podršci koju mi je pružala od prvog dana i bez koje ne bih bila tu gdje jesam. Hvala bratu Ivanu na svim šalama kojima mi je olakšao stresna razdoblja.*

*Također, hvala mojim curama na motivaciji i lijepim uspomenama. Zahvaljujem se i svim prijateljima i obitelji koji su bili uz mene tijekom studiranja.*

*Posebno hvala dečku Antoniu na bezuvjetnoj ljubavi i strpljenju. Hvala ti što si me uvijek gurao, vjerovao u mene i bio moj najveći navijač.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Temeljni pojmovi i činjenice</b>	<b>2</b>
1.1 Konveksni i nekonveksni četverokut . . . . .	2
1.2 Podjela četverokuta . . . . .	6
<b>2 Metričke relacije u konveksnom četverokutu</b>	<b>15</b>
2.1 Eulerov teorem za četverokut . . . . .	15
2.2 Površina konveksnog četverokuta . . . . .	20
2.3 Teorem o kosinusu. Stewartsov teorem . . . . .	23
2.4 Bretschneiderova formula . . . . .	27
2.5 Zadaci . . . . .	30
<b>3 Neke osobite točke u konveksnom četverokutu</b>	<b>32</b>
3.1 Konveksni četverokut i točka . . . . .	32
3.2 Varignonov teorem i srodni rezultati . . . . .	35
3.3 Težište i težišnice četverokuta . . . . .	38
3.4 Zadaci . . . . .	41
<b>Bibliografija</b>	<b>45</b>

# Uvod

Opće su poznata svojstva pravilnih konveksnih četverokuta kao što su kvadrat, romob, pravokutnik, trapez i paralelogram. Manje su poznata svojstva općeg četverokuta. U ovom radu dajemo svojstva općeg konveksnog četverokuta. U prvom poglavlju dajemo osnovnu podjelu skupova i četverokuta, te temeljne pojmove i činjenice koje će nam biti potrebne u daljnjem radu. U drugom poglavlju bavimo se metričkim relacijama u konveksnom četverokutu. Dajemo formulu za površinu općeg četverokuta, neke posebne jednakosti i nejednakosti, te još neke važne teoreme. Uočavamo i da su mnoga svojstva analogoni svojstava trokuta. U zadnjem poglavlju bavimo se karakterističnim točkama u četverokutu. Također uočavamo poveznicu s trokutom i njegovim karakterističnim točkama. Prikazat ćemo i nekoliko karakterističnih primjera zadataka.

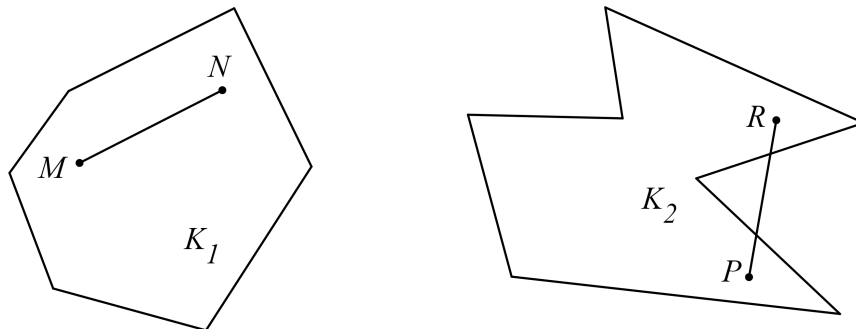
# Poglavlje 1

## Temeljni pojmovi i činjenice

### 1.1 Konveksni i nekonveksni četverokut

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove i činjenice, te dati osnovnu podjelu četverokuta.

Pogledajmo skupove točaka  $K_1$  i  $K_2$  na Slici 1.1. Uzmemo li bilo koje dvije točke  $M$  i  $N$  skupa  $K_1$ , vidimo da se i dužina  $\overline{MN}$  nalazi u skupu  $K_1$ . S druge strane, u skupu  $K_2$  možemo pronaći dvije točke  $P$  i  $R$ , takve da dužina  $\overline{PR}$  ne pripada tom skupu.

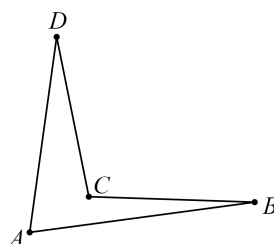


Slika 1.1:

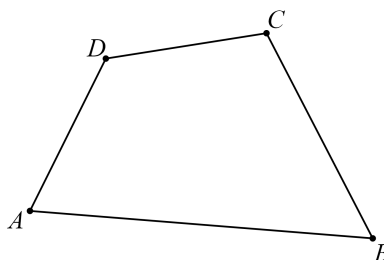
**Definicija 1.1.1.** *Ako se za bilo koje dvije točke  $M$  i  $N$  skupa  $K$  i dužina  $\overline{MN}$  nalazi u tom skupu, kažemo da je skup  $K$  konveksan. Inače je nekonveksan.*

Matematičkim simbolima to možemo napisati na idući način: skup  $K$  je konveksan ako:  $(\forall M)(\forall N)(M, N \in K \Rightarrow \overline{MN} \subset K)$ .

Tako su, na primjer, trokut, krug, pravokutnik ravninski konveksni skupovi, a piramida, kocka i kugla prostorni konveksni skupovi.



Slika 1.2:

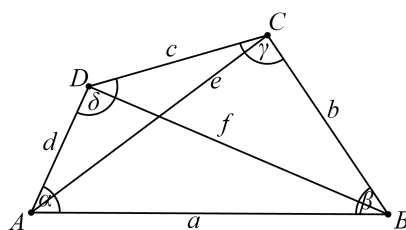


Slika 1.3:

Promatramo u ravnini četiri točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ , tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dio ravnine kojeg omeđuju dužine  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$  zovemo četverokut. Četverokut na Slici 1.3 je konveksan, a na Slici 1.2 nekonveksan. U ovom radu baviti ćemo se konveksnim četverokutima i njihovim općim svojstvima.

Definirajmo na početku osnovne elemente četverokuta. Promotrimo četverokut na Slici 1.4. Vrhovi četverokuta su točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ , a stranice četverokuta su dužine  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ . Duljine stranica označavat ćemo na sljedeći način:  $a = |AB|$ ,  $b = |BC|$ ,  $c = |CD|$ ,  $d = |DA|$ . Unutarnje kutove četverokuta označavat ćemo s  $\alpha = \angle DAB$ ,  $\beta = \angle ABC$ ,  $\gamma = \angle BCD$ ,  $\delta = \angle CDA$ . Duljine dijagonala označavat ćemo s  $e = |AC|$ ,  $f = |BD|$ . Opseg četverokuta je zbroj duljina njegovih stranica i označavat ćemo ga s  $2p$ , tj  $a + b + c + d = 2p$ .

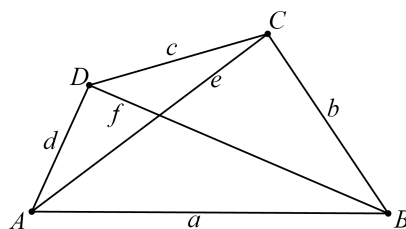




Slika 1.4:

Sada ćemo navesti nekoliko osnovnih svojstava o odnosu stranica i kutova četverokuta.

**Teorem 1.1.2.** *Duljina jedne stranice četverokuta manja je od zbroja duljina preostalih triju stranica četverokuta. Razlika duljina dviju stranica četverokuta manja je od zbroja duljina dviju preostalih stranica.*

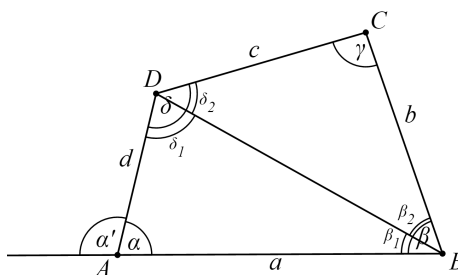


Slika 1.5:

*Dokaz.* Promotrimo četverokut na Slici 1.5. Primjenom nejednakosti trokuta slijedi:  $a < b + e$ ,  $e < c + d$ , iz čega slijedi  $a < b + c + d$ . Iz posljednje nejednakosti neposredno slijedi:  $a - b < c + d$ . Analogno se dokazuju i preostale permutacije dokazane nejednakosti.  $\square$

**Teorem 1.1.3.** *Zbroj unutarnjih kutova četverokuta je  $360^\circ$ . Zbroj vanjskih kutova četverokuta je  $360^\circ$ .*

*Dokaz.* Prvo ćemo dokazati da je zbroj unutarnjih kutova četverokuta  $360^\circ$ . Promotrimo Sliku 1.6. Dijagonala  $\overline{BD}$  četverokuta  $ABCD$  dijeli kutove  $\angle ABC$  i  $\angle CDA$  na dva dijela, tako da je  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  i  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ . Znamo da za zbrojeve unutarnjih kutova trokuta  $ABC$



Slika 1.6:

i  $BCD$  vrijedi:  $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ$ ,  $\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180^\circ$ . Stoga je zbroj unutarnjih kutova četverokuta  $ABCD$  jednak

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + \delta &= \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 \\ &= (\alpha + \beta_1 + \delta_1) + (\gamma + \beta_2 + \delta_2) \\ &= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.\end{aligned}$$

Preostaje nam dokazati da je zbroj vanjskih kutova četverokuta  $360^\circ$ . Vanjski kut četverokuta je kut što ga određuje jedna stranica, kojoj je to jedan vrh, s produžetkom druge stranice preko toga vrha. Vanjski kut četverokuta  $ABCD$  (Slika 1.6) pri vrhu  $A$  je označen  $\alpha'$ . Očito vrijedi  $\alpha' + \alpha = 180^\circ$ . Isto vrijedi i za ostale kutove tj.  $\beta' + \beta = 180^\circ$ ,  $\gamma' + \gamma = 180^\circ$  i  $\delta' + \delta = 180^\circ$ . Zato je zbroj vanjskih kutova četverokuta

$$\begin{aligned}\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' &= 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma + 180^\circ - \delta \\ &= 4 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ &= 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ,\end{aligned}$$

čime je i druga tvrdnja dokazana. □

**Teorem 1.1.4.** Zbroj duljina dijagonala manji je od opsega četverokuta.

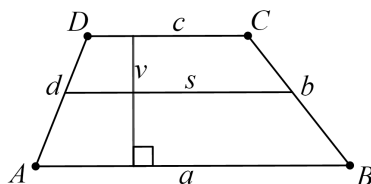
*Dokaz.* Iz trokuta  $ABC$  (Slika 1.5) imamo  $e < a + b$ , a iz trokuta  $ACD$  je  $e < c + d$ . Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo  $2e < a + b + c + d = 2p$ , odnosno  $e < p$ . Slično, iz trokuta  $ABD$  imamo  $f < a + d$ , a iz trokuta  $BCD$  je  $f < c + d$ . Zbrajanjem ovih nejednakosti, dobivamo:  $2f < a + b + c + d = 2p$ , odnosno  $f < p$ . Priborujemo li posljednjoj nejednakosti  $e < p$ , dobivamo  $e + f < 2p$ , što je i trebalo dokazati. □

## 1.2 Podjela četverokuta

U ovom odjeljku definirat ćemo neke osobite konveksne četverokute, te iskazati i dokazati neke važne teoreme.

### Trapez

**Definicija 1.2.1.** Četverokut kojemu su barem dvije nasuprotne stranice paralelne naziva se *trapez*. Paralelne stranice trapeza nazivaju se *osnovicama trapeza*, a preostale dvije *kracima trapeza*.

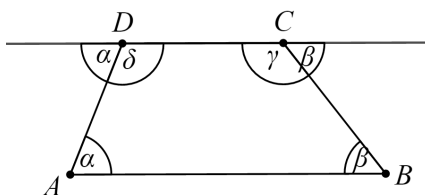


Slika 1.7:

Na Slici 1.7 prikazan je trapez. Duljine osnovica trapeza su  $a$  i  $c$ , a duljine krakova su  $b$  i  $d$ . Ako su duljine krakova jednake, trapez je jednakokrčan. Visinu trapeza definiramo kao udaljenost njegovih osnovica. Duljinu visine označavamo sa  $v$ . Spojnica polovišta krakova trapeza naziva se srednjica trapeza. Duljinu srednjice označavat ćemo sa  $s$ . Prisjetimo se sada osnovnih svojstava trapeza.

**Teorem 1.2.2.** Kutovi uz isti krak trapeza su suplementarni.

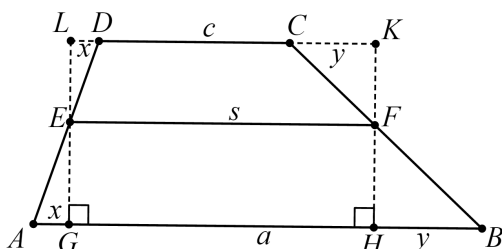
*Dokaz.* Produžimo osnovicu  $\overline{CD}$  trapeza  $ABCD$  preko vrhova  $C$  i  $D$  kao na Slici 1.8. Ku-



Slika 1.8:

tovi označeni istim oznakama su kutovi uz transversalu, pa znamo da su jednake veličine. Stoga zaključujemo da je  $\alpha + \gamma = 180^\circ$  i  $\beta + \delta = 180^\circ$ , što je i trebalo dokazati.  $\square$

**Teorem 1.2.3.** Srednjica trapeza paralelna je s osnovicama trapeza, a njena duljina jednaka je polovini zbroja duljina osnovica trapeza.



Slika 1.9:

*Dokaz.* Neka su  $E$  i  $F$  polovišta krakova  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$  trapeza  $ABCD$ , a  $G, H$  i  $K, L$  ortogonalne projekcije točaka  $E$  i  $F$  na pravce  $AB$ , odnosno  $CD$  (Slika 1.9). Budući da su točke  $E$  i  $F$  polovišta krakova  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$ , zaključujemo da je stranica  $\overline{AE}$  jednaka stranici  $\overline{DE}$ , odnosno stranica  $\overline{BF}$  jednaka je stranici  $\overline{CF}$ . Kutovi  $\angle AEG$  i  $\angle DEL$  su vršni kutovi pa su jednake mjere. Isto vrijedi i za kutove  $\angle HFB$  i  $\angle KFC$ . Kutovi  $\angle GAE$  i  $\angle LDE$  i  $\angle HBF$  i  $\angle KCF$  su kutovi uz transverzalu, pa su jednaki. Po  $K-S-K$  poučku zaključujemo da su trokuti  $AGE$  i  $DLE$  su sukladni, kao i trokuti  $HBF$  i  $KCF$ . Stoga su četverokuti  $GHFE$  i  $EFKL$  sukladni pravokutnici. Zbog toga je  $EF \parallel GH \parallel LK$ , odnosno  $EF \parallel AB \parallel DC$ . Označimo sada  $|AG| = |LD| = x$  i  $|HB| = |CK| = y$ . Slijedi:  $2s = 2|EF| = |GH| + |LK| = (a - x - y) + (c + x + y)$ . Odavde je  $s = \frac{a+c}{2}$  te smo time dokazali obje tvrdnje teorema.  $\square$

**Teorem 1.2.4.** Ako su  $a$  i  $c$  duljine osnovica, a  $v$  duljina visine trapeza  $ABCD$ , onda je njegova površina jednaka  $P = \frac{a+c}{2} \cdot v = sv$ , gdje je  $s$  srednjica trapeza.

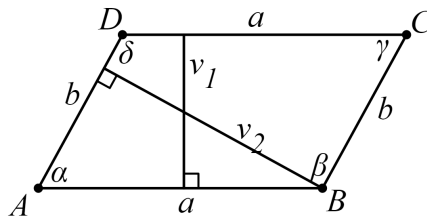
*Dokaz.* Prema Slici 1.9, zbog sukladnosti četverokuta  $GHFE$  i  $EFKL$  i trokuta  $AGE$  i  $DLE$ ,  $HBF$  i  $CKF$ , slijedi da je  $P_{ABCD} = P_{GHKL}$ . Zaključujemo da za površinu trapeza  $ABCD$  vrijedi:  $P = P_{ABCD} = P_{GHKL} = |GH| \cdot |GL| = |EF| \cdot |GL| = sv = \frac{a+c}{2} \cdot v$ .  $\square$

## Paralelogram

**Definicija 1.2.5.** Trapez kojem su kraci paralelni naziva se **paralelogram**.

Znamo da su nasuprotne stranice paralelograma jednake duljine, te ih označavamo kao na Slici 1.10. Također, iz definicije paralelograma, slijedi da su nasuprotni kutovi paralelograma jednaki, a susjedni kutovi suplementarni. Uz oznake kao na Slici 1.10 vrijedi:

$$\alpha = \gamma, \beta = \delta \text{ i } \alpha + \beta = 180^\circ.$$

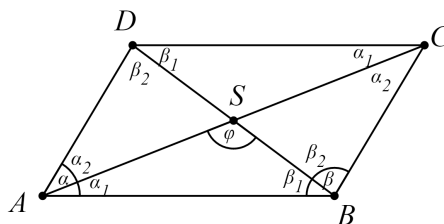


Slika 1.10:

Iz definicije visine trapeza možemo zaključiti da paralelogram ima dvije visine. Na Slici 1.10 to su visine  $v_1$  i  $v_2$ .

Paralelogram kojemu je jedan kut pravi zove se **pravokutnik**. Paralelogram kojem su duljine susjednih stranica jednake zove se **romb**. Paralelogram koji je i pravokutnik i romb je **kvadrat**.

**Teorem 1.2.6.** *Dijagonale paralelograma se raspolavljaju.*



Slika 1.11:

*Dokaz.* Označimo sjecište dijagonala paralelograma  $ABCD$  sa  $S$ . Trebamo dokazati da je  $|AS| = |SC|$  i  $|BS| = |SD|$ . Kutovi označeni istim oznakama na Slici 1.11 su kutovi uz transverzalu što znači da su jednake veličine. Stoga zaključujemo da su trokuti  $ABS$  i  $CDS$  sukladni. Zbog toga je  $|AS| = |SC|$  i  $|BS| = |SD|$ , čime smo dokazali tvrdnju.  $\square$

**Teorem 1.2.7.** *Dijagonale romba međusobno su okomite i raspolavljaju pripadne kutove romba.*

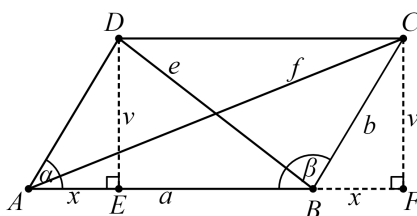
*Dokaz.* Prvo ćemo pokazati da je dijagonala romba ujedno i simetrala pripadajućeg unutarnjeg kuta romba. Promotrimo Sliku 1.11. Budući da je  $AB \parallel CD$  slijedi  $\angle CAB = \angle ACD = \alpha_1$  i  $\angle CAD = \angle ACB = \alpha_2$ . Kako je  $|AB| = |BC|$ , trokut  $ABC$  je jednakokratan, što znači

da je  $\angle CAB = \angle ACB$  tj.  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Time smo dokazali da dijagonala  $\overline{AC}$  zaista raspolavlja kutove  $\angle DAB$  i  $\angle BCD$ . Zato je  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ . Na isti način dijagonala  $\overline{BC}$  raspolavlja kut  $\beta$ , to jest  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\beta}{2}$ . Preostaje još dokazati da su dijagonale međusobno okomite. Kako je  $\alpha + \beta = 180^\circ$  slijedi da je  $\angle ASB = 180^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = 90^\circ$ , čime je dokaz gotov.  $\square$

Navedimo sada važnu relaciju koja povezuje duljine stranica i dijagonala paralelograma.

**Teorem 1.2.8.** Zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak je zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma, odnosno

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (1.1)$$



Slika 1.12:

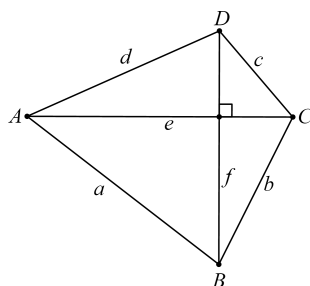
*Dokaz.* Neka su točke  $E$  i  $F$  ortogonalne projekcije vrhova  $D$  i  $C$  paralelograma  $ABCD$  na pravac  $AB$  (Slika 1.12). Tada su trokuti  $AED$  i  $BFC$  sukladni. Označimo  $|AE| = |BF| = x$  i  $|ED| = |FC| = v$ . Primjenimo li Pitagorin teorem na pravokutne trokute  $ACF$ ,  $BDE$  i  $CBF$ , imamo:  $e^2 = (a + x)^2 + v^2$ ,  $f^2 = (a - x)^2 + v^2$ ,  $b^2 = x^2 + v^2$ . Zbrajanjem dobivamo  $e^2 + f^2 = a^2 + 2ax + x^2 + v^2 + a^2 - 2ax + x^2 + v^2 = 2a^2 + 2(x^2 + v^2) = 2(a^2 + b^2)$ , što je i trebalo dokazati.  $\square$

Relaciju (1.1) nazivamo **relacija paralelograma**. U idućoj točki ćemo poopćiti ovu relaciju i pokazati da ona karakterizira paralelogram.

## Ortoid

**Definicija 1.2.9.** Četverokut čije su dijagonale međusobno okomite naziva se **ortoid** (Slika 1.13).

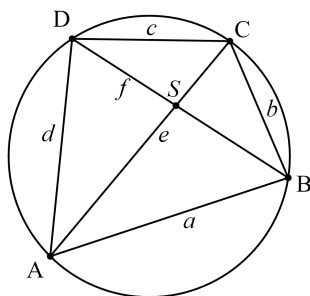
Ortoid kojemu su duljine dviju susjednih stranica jednake (što povlači jednakost duljina preostalih dviju stranica) zove se **deltoid**.



Slika 1.13:

### Tetivan četverokut

Znamo da se svakom trokutu može opisati kružnica. Očito, bilo kojem četverokutu ne možemo opisati kružnicu.



Slika 1.14:

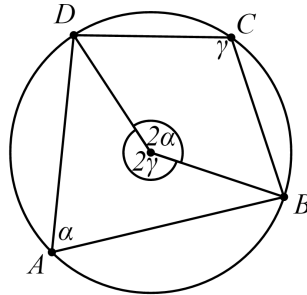
**Definicija 1.2.10.** Četverokut kojemu se može opisati kružnica naziva se *tetivan četverokut* (Slika 1.14).

Navedimo osnovna svojstva tetivnog četverokuta.

**Teorem 1.2.11.** Nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta su suplementarni.

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \text{ i } \beta + \delta = 180^\circ$$

*Dokaz.* Teorem je posljedica teorema o obodnom i središnjem kutu koji glasi: obodni kut jednak je polovici pripadnog središnjeg kuta. (Vidi [5]) Neka je  $ABCD$  tetivan četverokut, s oznakama kao na Slici 1.15. Pripadni središnji kutovi pridruženi obodnim kutovima  $\alpha$  i

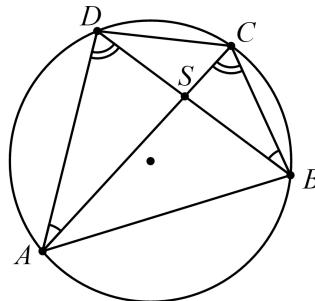


Slika 1.15:

$\gamma$  su  $2\alpha$ , odnosno  $2\gamma$ . Očito je  $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$ , iz čega slijedi  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Budući da je  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ , slijedi da je  $\beta + \delta = 180^\circ$ .  $\square$

**Teorem 1.2.12.** *Umnožak duljina odsječaka, što ih sjecište dijagonala tetivnog četverokuta čini na svakoj dijagonali, je stalan, odnosno vrijedi*

$$|AS| \cdot |SC| = |BS| \cdot |SD|.$$



Slika 1.16:

*Dokaz.* Neka se dijagonale  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  tetivnog četverokuta  $ABCD$  sijeku u točki  $S$  (Slika 1.16). Prema poučku o jednakosti obodnih kutova vrijedi:  $\angle DAS = \angle SBC$  i  $\angle SDA = \angle SCB$ , odakle slijedi da su trokuti  $SAD$  i  $SBC$  slični. Zato je  $|SA| : |SD| = |SB| : |SC|$  iz čega slijedi tvrdnja teorema.  $\square$

**Napomena 1.2.13.** *Ovaj teorem je poznatiji kao teorem o potenciji (unutarnje) točke s obzirom na kružnicu.*



**Teorem 1.2.14** (Ptolomejev teorem). *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nauprotnih stranica četverokuta.*

$$ef = ac + bd$$

Dokaz Ptolomejevog teorema čitatelj može pronaći u [6], a mi ćemo ga u idućem poglavlju izvesti u poopćenom obliku.

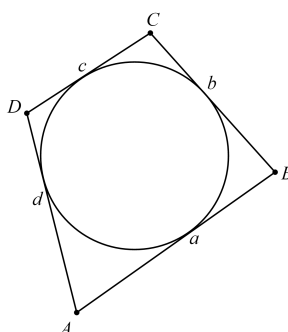
**Teorem 1.2.15** (Brahmaguptina formula). *Ako su  $a, b, c, d$  duljine stranica tetivnog četverokuta, a  $p$  njegovu poluopseg, tada je površina četverokuta*

$$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad (1.2)$$

Dokaz Teorema 1.2.15 čitatelj može pronaći u [6], a mi ćemo ga u idućem poglavlju izvesti u generaliziranom obliku.

### Tangencijalni četverokut

Kao što se svakom četverokutu ne može opisati kružnica, isto tako se svakom četverokutu ne može upisati kružnica.



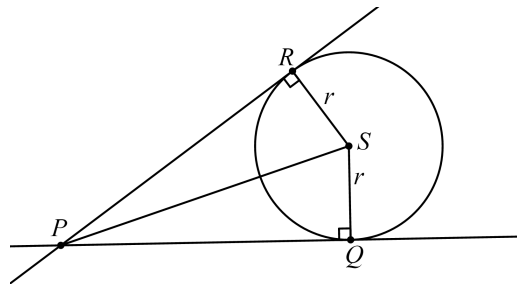
Slika 1.17:

**Definicija 1.2.16.** *Četverokut kojemu se može upisati kružnica naziva se **tangencijalni četverokut** (slika 1.17).*

Navedimo osnovna svojstva tangencijalnog četverokuta.

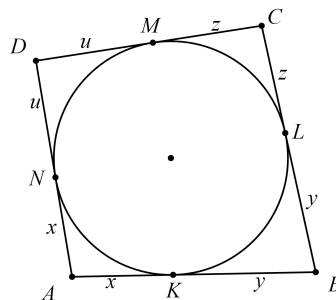
**Teorem 1.2.17.** *Zbroj duljina nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina preostalih dviju stranica, odnosno*

$$a + c = b + d.$$



Slika 1.18:

*Dokaz.* Dokažimo najprije pomoćnu tvrdnju: Ako su  $Q$  i  $R$  dirališta tangenti povučениh iz točke  $P$  na kružnicu  $k(S, r)$ , onda je  $|PQ| = |PR|$  (Slika 1.18). Trokuti  $PSQ$  i  $PSR$  su pravokutni, a kako je  $|SQ| = |SR| = r$ , slijedi da su ti trokuti sukladni, pa je  $|PQ| = |PR|$ . Neka je  $ABCD$  tangencijalni četverokut čije stranice diraju upisanu kružnicu, kao na Slici



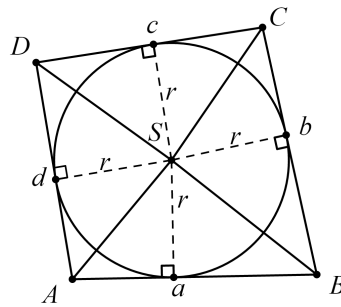
Slika 1.19:

1.19. Prema pomoćnoj tvrdnji vrijedi:  $|AK| = |AN| = x$ ,  $|BK| = |BL| = y$ ,  $|CL| = |CM| = z$ ,  $|DM| = |DN| = u$ . Vrijedi:  $a + c = |AB| + |CD| = (x + y) + (z + u) = (y + z) + (u + x) = |BC| + |DA| = b + d$ , to jest  $a + c = b + d$ .  $\square$

Vrijedi i obrat prethodnog teorema. Dokaz se može pronaći u [6].

**Teorem 1.2.18.** Površina tangencijalnog četverokuta, čije su duljine stranica jednake  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ , a radijus upisane kružnice  $r$ , jednaka je

$$P = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r = pr.$$



Slika 1.20:

*Dokaz.* Promotrimo Sliku 1.20. Imamo redom

$$\begin{aligned}
 P &= P_{ABCD} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CDS} + P_{DAS} \\
 &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr \\
 &= \frac{1}{2}(a + b + c + d) \cdot r = pr.
 \end{aligned}$$

□

## Poglavlje 2

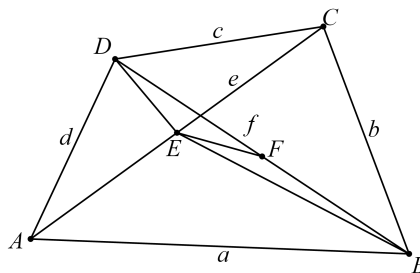
# Metričke relacije u konveksnom četverokutu

U ovom poglavlju bavimo se metričkim relacijama koje vrijede u proizvoljnom konveksnom četverokutu. Grubo govoreći, izvest ćemo neke relacije koje povezuju duljine stranica i dijagonala, te mjere kutova četverokuta. Radimo s konveksnim četverokutima iako mnoge tvrdnje koje ćemo dokazati, vrijede i za nekonveksne četverokute.

### 2.1 Eulerov teorem za četverokut

U ovoj točki dajemo poopćenje relacije paralelograma, karakterizaciju paralelograma i trapeza, te još neke metričke relacije povezane s Eulerovim teoremom.

Neka su  $E$  i  $F$  polovišta dijagonala  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  četverokuta  $ABCD$ .



Slika 2.1:

**Teorem 2.1.1** (Eulerov teorem). *Neka je  $ABCD$  četverokut, te neka je  $a = |AB|$ ,  $b = |BC|$ ,  $c = |CD|$ ,  $d = |DA|$ ,  $e = |AC|$  i  $f = |BD|$ . Tada vrijedi jednakost*

$$4|EF|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2. \quad (2.1)$$

*Dokaz.* Izrazimo duljine težišnica trokuta  $ACD$ ,  $ABC$ ,  $BED$ . Iz relacije (1.1) slijede jednakosti

$$|DE|^2 = \frac{|AD|^2 + |DC|^2}{2} - \frac{|AC|^2}{4},$$

$$|BE|^2 = \frac{|AB|^2 + |BC|^2}{2} - \frac{|AC|^2}{4}$$

i

$$|EF|^2 = \frac{|DE|^2 + |EB|^2}{2} - \frac{|DB|^2}{2}.$$

Uvrstimo li prve dvije jednakosti u treću, imamo

$$|EF|^2 = \frac{|AD|^2 + |DC|^2 + |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{4} - \frac{|DB|^2}{4},$$

tj.

$$|EF|^2 = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |DB|^2}{4},$$

odnosno

$$4|EF|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2,$$

što smo i trebali dokazati. □

Uočimo da je Eulerov teorem poopćenje relacije paralelograma.

**Korolar 2.1.2** (Relacija paralelograma). *Neka je  $ABCD$  četverokut. Slijedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) *četverokut  $ABCD$  je paralelogram;*

(ii) *vrijedi jednakost  $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$ .*

*Dokaz.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Ovaj smjer je zapravo relacija paralelograma, tj. Teorem 1.2.8 koji smo već dokazali.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Obratno, iz druge tvrdnje i Eulerovog teorema slijedi da je  $E \equiv F$ , što znači da se dijagonale četverokuta  $ABCD$  raspolavljaju. Zaključujemo da je četverokut  $ABCD$  paralelogram. □

**Korolar 2.1.3.** U četverokutu  $ABCD$  vrijedi nejednakost

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2.$$

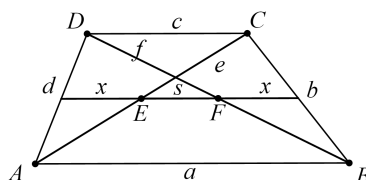
Jednakost vrijedi ako i samo ako je četverokut  $ABCD$  paralelogram.

*Dokaz.* Dokaz slijedi direktno iz Teorema 2.1.1, jer je  $|EF|^2 \geq 0$ . □

Promotrimo kakav oblik poprima Eulerova relacija (2.1) u slučaju trapeza.

**Korolar 2.1.4.** Ako je četverokut  $ABCD$  trapez, onda vrijedi jednakost

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac. \quad (2.2)$$



Slika 2.2:

*Dokaz.* Danu jednakost dokazat ćemo pomoću Eulerovog teorema.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4|EF|^2$$

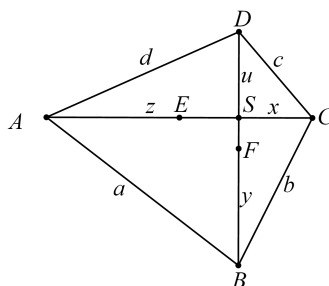
Primjetimo da se dužina  $\overline{EF}$  nalazi na srednjici trapeza (Slika 2.2) i da je  $x$  srednjica trokuta  $ACD$  i trokuta  $BCD$ . Stoga znamo da je  $x = \frac{c}{2}$ . Znamo da je duljina srednjice trapeza jednaka  $s = \frac{a+c}{2}$ . Zaključujemo da je  $|EF| = \frac{a+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a-c}{2}$ . Uvrstimo to u početnu jednakost i pojednostavnimo dobiveni izraz. Imamo redom

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + 4\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + (a-c)^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + a^2 + 2ac + c^2 \\ b^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + 2ac, \end{aligned}$$

što smo i trebali dokazati. □

**Korolar 2.1.5.** Za ortoid  $ABCD$  vrijedi jednakost:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$



Slika 2.3:

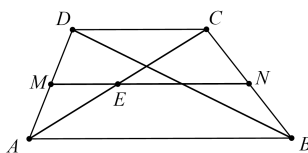
*Dokaz.* Danu jednakost dokazat ćemo pomoću Eulerovog teorema, slično kao u korolaru prije. Neka je  $S$  sjecište dijagonala ortoida  $ABCD$ . Znamo da je trokut  $SFE$  pravokutan te da je  $|EF|^2 = (\frac{u+y}{2} - u)^2 + (\frac{x+z}{2} - x)^2$ . Sređivanjem dane jednakosti dobivamo  $|EF|^2 = (\frac{y-u}{2})^2 + (\frac{z-x}{2})^2$ , odnosno  $4|EF|^2 = (y-u)^2 + (z-x)^2$ . Sa slike također vidimo da je  $e = x+z$  i  $f = y+u$ , te imamo  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4|EF|^2$ , odnosno  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (x+z)^2 + (y+u)^2 + (y-u)^2 + (z-x)^2$ . Daljnim sređivanjem jednakosti imamo redom

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yu + u^2 + y^2 - 2yu + u^2 + z^2 - 2zx + x^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 2x^2 + 2z^2 + 2y^2 + 2u^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 2(x^2 + u^2) + 2(y^2 + z^2) \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 2d^2 + 2b^2 \\ a^2 + c^2 &= d^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

Pokažimo sada da jednakost (2.2) karakterizira trapez. No, prije toga ćemo dokazati dvije pomoćne tvrdnje.

**Lema 2.1.6.** *Neka je  $ABCD$  četverokut i neka su  $M, N$  redom polovišta stranica  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$ . Tada je  $|MN| \leq \frac{|AB|+|CD|}{2}$ . Jednakost je ispunjena ako i samo ako je  $AB \parallel DC$ , tj. ako je*

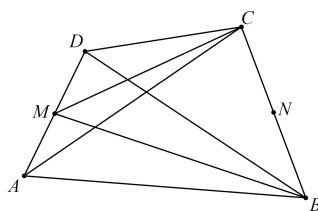


Slika 2.4:

*ABCD trapez.*

*Dokaz.* Kako su  $\overline{EM}$  i  $\overline{EN}$  srednjice trokuta  $DCA$  i  $ABC$  (Slika 2.4), vrijedi  $|EM| = \frac{|CD|}{2}$ ,  $EM \parallel CD$ ,  $|EN| = \frac{|AB|}{2}$  i  $EN \parallel AB$ . U trokutu  $MEN$  vrijedi  $|MN| \leq |EM| + |EN|$ . Jednakost vrijedi ako i samo ako  $E \in MN$  ili ekvivalentno  $AB \parallel MN$  i  $DC \parallel MN$ , odnosno  $AB \parallel DC$ .  $\square$

**Lema 2.1.7.** *Neka je  $ABCD$  četverokut. Ako su  $M, N$  redom polovišta stranica  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$ , onda vrijedi*



Slika 2.5:

$$4|MN|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 + |CD|^2 - |DA|^2 + |AC|^2 + |BD|^2.$$

*Dokaz.* Izrazimo duljine težišnica trokuta  $MCB$ ,  $ACD$  i  $ABD$  (Slika 2.5). Imamo redom:

$$\begin{aligned} |MN|^2 &= \frac{|MC|^2 + |MB|^2}{2} - \frac{|BC|^2}{4}, \\ |CM|^2 &= \frac{|DC|^2 + |AC|^2}{2} - \frac{|AD|^2}{4}, \\ |BM|^2 &= \frac{|AB|^2 + |BD|^2}{2} - \frac{|AD|^2}{4}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li drugu i treću jednakost u prvu, dobivamo,

$$4|MN|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 + |CD|^2 - |DA|^2 + |AC|^2 + |BD|^2,$$

što je i trebalo dokazati.  $\square$

**Teorem 2.1.8.** *Neka je  $ABCD$  četverokut. Tada vrijedi*

$$|AC|^2 + |BD|^2 \leq |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |CD|.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $AB \parallel CD$ .*



*Dokaz.* Iz Leme 2.1.6 i Leme 2.1.7 slijedi

$$|AB|^2 - |BC|^2 + |CD|^2 - |DA|^2 + |AC|^2 + |BD|^2 = 4|MN|^2 \leq 4\left(\frac{|AB| + |CD|}{2}\right)^2.$$

Sređivanjem izraza dobivamo

$$|AC|^2 + |BD|^2 \leq |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |CD|,$$

što je i trebalo dokazati. □

Iz prethodnog teorema slijedi zaključak da je  $ABCD$  trapez, odnosno  $AB \parallel CD$ , ako i samo ako vrijedi jednakost

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |CD|.$$

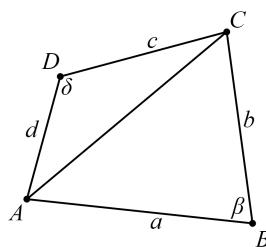
Prema tome, relacija (2.2) karakterizira trapez.

## 2.2 Površina konveksnog četverokuta

U ovoj točki izvest ćemo opću formulu za površinu proizvoljnog četverokuta koja će predstavljati generalizaciju Brahmaguptine formule (1.2), te još neke važne formule za površinu konveksnog četverokuta.

**Teorem 2.2.1.** *Površina  $P$  konveksnog četverokuta  $ABCD$  dana je formulom*

$$P^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cdot \cos^2 \frac{\beta + \delta}{2}. \quad (2.3)$$



Slika 2.6:

*Dokaz.* Sa Slike 2.6 vidimo da vrijedi

$$P(ABCD) = P(ABC) + P(ACD),$$

odnosno

$$2P = ab \sin \beta + cd \sin \delta.$$

Kvadriranjem prethodne relacije dobivamo

$$4P^2 = a^2b^2 \sin^2 \beta + c^2d^2 \sin^2 \delta + 2abcd \sin \beta \sin \delta. \quad (2.4)$$

S druge strane, primjenimo li teorem o kosinusu na trokute  $ABC$  i  $ADC$ , dobivamo

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta, \\ |AC|^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem prethodnih dviju relacija slijedi  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$ , tj.  $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta$ , odakle kvadriranjem dobivamo

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2 \beta + 4c^2d^2 \cos^2 \delta - 8abcd \cos \beta \cos \delta. \quad (2.5)$$

Pomnožimo (2.4) s 4 i zbrojimo s (2.5), pa imamo

$$\begin{aligned} 16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 &= 4^2b^2 \sin^2 \beta + 4a^2b^2 \cos^2 \beta + 4c^2d^2 \sin^2 \delta + 4c^2d^2 \cos^2 \delta \\ &\quad + 8abcd \sin \beta \sin \delta - 8abcd \cos \beta \cos \delta, \end{aligned}$$

odnosno  $16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4^2b^2(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + 4c^2d^2(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) + 8abcd(\sin \beta \sin \delta - \cos \beta \cos \delta)$ . Iskoristimo li adicijsku formulu  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$  i formulu  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , imamo  $16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(\beta + \delta)$ . Sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} 16P^2 &= 4^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd \cos(\beta + \delta) \\ &= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) \\ &= (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(2ab + cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \\ &\quad - 8abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) \\ &= ((c + d)^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - (c - d)^2) - 8abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) \\ &= (c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 8abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) \end{aligned}$$

Iskoristimo li formulu  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ , slijedi da je  $16P^2 = (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}$ . Daljnjim sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} 16P^2 &= 2\left(\frac{a+b+c+d}{2} - a\right)2\left(\frac{a+b+c+d}{2} - b\right)2\left(\frac{a+b+c+d}{2} - c\right)2\left(\frac{a+b+c+d}{2} - d\right) \\ &\quad - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2} \\ &= 2(s-a)2(s-b)2(s-c)2(s-d) - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2} \\ P^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}, \end{aligned}$$

čime je dokaz gotov.  $\square$

Specijalan slučaj formule (2.3) u slučaju tetivnog četverokuta je Brahmaguptina formula, koju smo iskazali u točki 1.2, (Teorem 1.2.15).

**Korolar 2.2.2.** *Površina tetivnog četverokuta ABCD dana je formulom*

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

*Dokaz.* Znamo da su nasuprotni kutovi u tetivnom četverokutu suplementarni, odnosno da vrijedi  $\beta + \delta = 180^\circ$ . Uvrstimo li to u formulu (2.3), imamo

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 90^\circ},$$

odnosno

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

budući da je  $\cos 90^\circ = 0$ .  $\square$

**Korolar 2.2.3.** *Površina tangencijalnog četverokuta ABCD dana je formulom*

$$P = \sqrt{abcd \cdot \sin^2 \left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

*Dokaz.* Znamo da je u tangencijalnom četverokutu zbroj duljina nasuprotnih stranica jednak zbroju duljina preostalih dviju stranica. Iz te jednakosti i  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$  vidimo da vrijedi  $p-a=c$ ,  $p-b=d$ ,  $p-c=a$  i  $p-d=b$ . Uvrštavanjem tih relacija u (2.3) dobivamo

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{abcd - abcd \cdot \cos^2 \left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)} = \sqrt{abcd \cdot (1 - \cos^2 \left(\frac{\beta+\delta}{2}\right))} \\ &= \sqrt{abcd \cdot \sin^2 \left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

$\square$

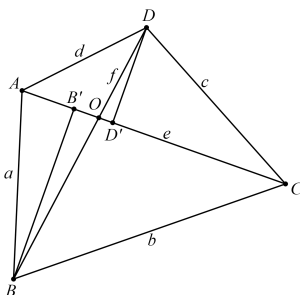
Navedimo još neke važne formule za površinu konveksnog četverokuta.

**Teorem 2.2.4.** U svakom četverokutu  $ABCD$  vrijedi:

$$(a) P = \frac{ef \sin \phi}{2},$$

$$(b) 16P^2 = 4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

gdje je  $\phi$  šiljasti kut između dijagonala  $e$  i  $f$ .



Slika 2.7:

*Dokaz.* Neka je  $AC \cap BD = \{O\}$  i  $\angle AOB = \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Tada je

$$\begin{aligned} P &= P(ABO) + P(BCO) + P(CDO) + P(DAO) \\ &= \frac{|OA| \cdot |OB| \sin \phi}{2} + \frac{|OB| \cdot |OC| \sin \phi}{2} + \frac{|OC| \cdot |OD| \sin \phi}{2} + \frac{|OD| \cdot |OA| \sin \phi}{2} \\ &= \frac{(|OA| + |OC|)(|OB| + |OD|) \sin \phi}{2}, \end{aligned}$$

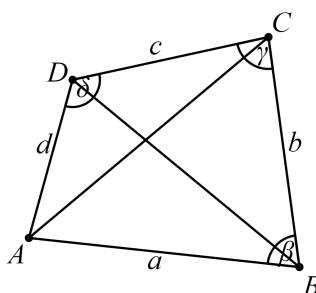
iz čega slijedi (a).

Neka je  $BB' \perp AC$ ,  $B' \in AC$ ,  $DD' \perp AC$ ,  $D' \in AC$  (Slika 2.7). Zato je  $|AC| = |AB'| + |B'D'| + |D'C|$ . Posljednja jednakost je ekvivalentna s  $f = a \cos \angle BAC + e \cos \phi + c \cos \angle ACD$  i kako je  $\cos \angle BAC = \frac{a^2 + f^2 - b^2}{2af}$ ,  $\cos \angle ACD = \frac{c^2 + f^2 - d^2}{2cf}$  slijedi  $2ef \cos \phi = -a^2 + b^2 - c^2 + d^2$ . Kvadriranjem formule (a) i uvrštavanjem  $16P^2 = 4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$ .  $\square$

### 2.3 Teorem o kosinusu. Stewartsov teorem

**Teorem 2.3.1.** Neka je  $ABCD$  četverokut. Tada vrijedi sljedeća jednakost:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta - 2bc \cos \gamma + 2bd \cos(\gamma + \delta). \quad (2.6)$$



Slika 2.8:

*Dokaz.* U trokutu  $ACD$  vrijedi

$$\cos(\angle ACD) = \frac{e^2 + c^2 - d^2}{2ec}.$$

Zamjenimo li  $e^2$  sa

$$e^2 = d^2 + c^2 - 2cd \cos \delta \quad (2.7)$$

imamo

$$\cos(\angle ACD) = \frac{d^2 + c^2 - 2cd \cos \delta + c^2 - d^2}{2ec},$$

odnosno,

$$\cos(\angle ACD) = \frac{c - d \cos \delta}{e}. \quad (2.8)$$

Primjenom teorema o sinusu slijedi

$$\sin(\angle ACD) = \frac{d \sin \delta}{e}, \quad (2.9)$$

a zbog teorema o kosinusu znamo da u trokutu  $ABC$  vrijedi  $a^2 = b^2 + e^2 - 2be \cos(\gamma - \angle ACD)$ , tj.  $a^2 = b^2 + e^2 - 2be \cos \gamma \cos \angle ACD + \sin \gamma \sin \angle ACD$ . Uvrstimo (2.7), (2.8) i (2.9) u prethodnu jednakost. Imamo:

$$a^2 = b^2 + d^2 + c^2 - 2dc \cos \delta - 2be \left( \cos \gamma \frac{c - d \cos \delta}{e} + \sin \gamma \frac{d \sin \delta}{e} \right),$$

tj.

$$a^2 = b^2 + d^2 + c^2 - 2dc \cos \delta - 2bc \cos \gamma + 2bd(\cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta),$$

iz čega slijedi

$$a^2 = b^2 + d^2 + c^2 - 2dc \cos \delta - 2bc \cos \gamma + 2bd \cos(\gamma + \delta).$$

□

Prethodni teorem je proširenje kosinusovog teorema s trokuta na četverokut. Uočimo, ako  $d \rightarrow 0$ , onda četverokut postaje trokut i u formuli gubimo članove u kojima se pojavljuje  $d$ . Ostaje nam  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$ , a to je teorem o kosinusu za trokute. Navedimo jednu važnu posljednicu Teorema 2.3.1.

**Korolar 2.3.2.** U četverokutu  $ABCD$  vrijedi

$$a^2 + c^2 = e^2 + f^2 + 2db \cos(\gamma + \delta). \quad (2.10)$$

*Dokaz.* U trokutima  $ADC$  i  $BCD$  vrijedi  $\cos \delta = \frac{d^2 + c^2 - e^2}{2d \cdot c}$  i  $\cos \gamma = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2b \cdot c}$ . Uvrstimo li prethodne jednakosti u (2.6), slijedi tvrdnja korolara.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + d^2 + c^2 - d^2 - c^2 + e^2 - b^2 - c^2 + f^2 + 2db \cos(\gamma + \delta) \\ a^2 + c^2 &= e^2 + f^2 + 2db \cos(\gamma + \delta) \end{aligned}$$

□

Pomoću prethodnog korolara još jednom ćemo izvesti karakterizaciju trapeza.

**Korolar 2.3.3.** U četverokutu  $ABCD$  vrijedi

$$2d \cdot b + a^2 + c^2 \geq e^2 + f^2. \quad (2.11)$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $AD \parallel BC$ , tj. ako je  $ABCD$  trapez.*

*Dokaz.* Budući da je  $\cos(\gamma + \delta) \geq -1$ , dokaz slijedi iz prethodne relacije (2.11). Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\cos(\gamma + \delta) = -1$ , odnosno  $\gamma + \delta = 180^\circ$ , tj.  $AD \parallel BC$ . □

Pomoću prethodnog korolara izvest ćemo još jednu karakterizaciju paralelograma.

**Korolar 2.3.4.** U četverokutu  $ABCD$  vrijedi nejednakost

$$(a + c)^2 + (d + b)^2 \geq 2(e^2 + f^2). \quad (2.12)$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je četverokut  $ABCD$  paralelogram.*

*Dokaz.* Dokaz provodimo pomoću prethodnog korolara. Znamo da, uz nejednakost iz prethodnog korolara, vrijedi i  $2ac + b^2 + d^2 \geq e^2 + f^2$ . Zbrajanjem dobivamo

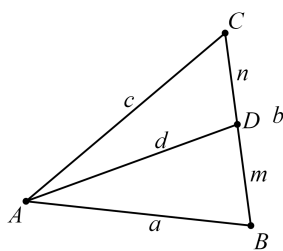
$$a^2 + 2ac + c^2 + d^2 + 2db + b^2 \geq 2e^2 + 2f^2.$$

Pretpostavimo da vrijedi jednakost u (2.12). Tada vrijedi jednakost u (2.11) te vrijedi  $2ac + b^2 + d^2 = e^2 + f^2$ . Jednakost u (2.11) povlači da je  $AD \parallel BC$ , a  $2ac + b^2 + d^2$  povlači da je  $AB \parallel CD$  tj.  $ABCD$  je paralelogram. □

Prisjetimo se Stewartsovog teorema za trokut.

**Teorem 2.3.5** (Stewartsov teorem). *Neka je  $ABC$  trokut sa stranicama duljina  $a$ ,  $b$  i  $c$ , neka je  $D$  točka na stranici  $\overline{BC}$ . Ako je  $|AD| = d$ ,  $|BD| = m$  i  $|CD| = n$ , onda vrijedi  $b^2m + c^2n = (d^2 + mn)a$ .*

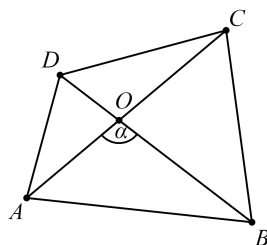
Dokaz Stewartsovog teorema čitatelj može pronaći u [5]. Sada dajemo poopćenje za četverokut.



Slika 2.9:

**Teorem 2.3.6.** *Ako se dijagonale četverokuta  $ABCD$  sijeku u točki  $O$ , onda vrijedi relacija*

$$\begin{aligned} |AB|^2 \cdot |OC| \cdot |OD| + |BC|^2 \cdot |OD| \cdot |OA| + |CD|^2 \cdot |OA| \cdot |OB| + |DA|^2 \cdot |OB| \cdot |OC| \\ = |AC| \cdot |BD| (|OA| \cdot |OC| + |OB| \cdot |OD|). \end{aligned} \quad (2.13)$$



Slika 2.10:

*Dokaz.* Neka je  $\alpha$  mjera kuta  $\angle AOB$  (Slika 2.10). Primjenimo kosinusov teorem na trokute  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  i  $DOA$ . Imamo redom:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cos \alpha, \\ |BC|^2 &= |OB|^2 + |OC|^2 - 2|OB| \cdot |OC| \cos(\pi - \alpha), \\ |CD|^2 &= |OC|^2 + |OD|^2 - 2|OC| \cdot |OD| \cos \alpha, \\ |DA|^2 &= |OD|^2 + |OA|^2 - 2|OD| \cdot |OA| \cos(\pi - \alpha). \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
 & \frac{|AB|^2}{|OA| \cdot |OB|} + \frac{|BC|^2}{|OB| \cdot |OC|} + \frac{|CD|^2}{|OC| \cdot |OA|} \\
 &= \left( \frac{|OA|}{|OB|} + \frac{|OB|}{|OA|} - 2 \cos \alpha \right) + \left( \frac{|OB|}{|OC|} + \frac{|OC|}{|OB|} + 2 \cos \alpha \right) \\
 & \quad + \left( \frac{|OC|}{|OD|} + \frac{|OD|}{|OC|} - 2 \cos \alpha \right) + \left( \frac{|OD|}{|OA|} + \frac{|OA|}{|OD|} + 2 \cos \alpha \right) \\
 &= \left( \frac{|OA|}{|OB|} + \frac{|OC|}{|OB|} \right) + \left( \frac{|OB|}{|OA|} + \frac{|OD|}{|OA|} \right) + \left( \frac{|OB|}{|OC|} + \frac{|OD|}{|OC|} \right) + \left( \frac{|OC|}{|OD|} + \frac{|OA|}{|OD|} \right) \\
 &= \frac{|AC|}{|OB|} + \frac{|BD|}{|OA|} + \frac{|BD|}{|OC|} + \frac{|AC|}{|OD|},
 \end{aligned}$$

iz čega slijedi (2.13). □

**Napomena 2.3.7.** *Relacija (2.13) ne vrijedi za nekonveksni četverokut. Postoji slična relacija za nekonveksni četverokut. Vidi [2].*

**Napomena 2.3.8.** *Relacija (2.13) je proširenje Stewartsovog teorema za četverokute.*

Uočimo da Teorem 2.3.5 također daje relaciju paralelograma (1.1).

**Korolar 2.3.9.** *Ako je četverokut  $ABCD$  paralelogram, onda vrijedi*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2. \quad (2.14)$$

*Dokaz.* U paralelogramu  $ABCD$  vrijedi  $|OA| = |OC| = \frac{|AC|}{2}$  i  $|OB| = |OD| = \frac{|BD|}{2}$ . Ako to uvrstimo u (2.13), dobivamo (2.14). □

## 2.4 Bretschneiderova formula

U ovoj točki dajemo iskaz i dokaz Bretschneiderovog teorema koji je zapravo poopćenje Ptolomejevog teorema za tetivan četverokut, kojeg smo spomenuli u Poglavlju 1.

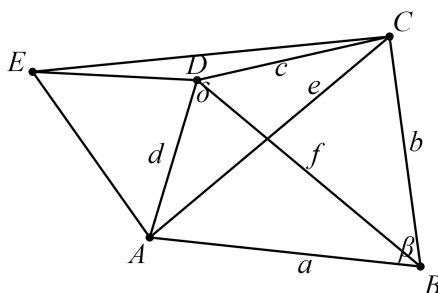
**Teorem 2.4.1** (Bretschneiderov teorem). *U četverokutu  $ABCD$  vrijedi relacija*

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos(\beta + \delta). \quad (2.15)$$

*Dokaz.* Konstruirajmo trokut  $ADE$  sličan trokutu  $ABC$  kao na Slici 2.11:  $\angle ABC = \angle ADE$  i  $\angle BAC = \angle DAE$ . Zbog sličnosti trokuta vrijedi  $\frac{d}{a} = \frac{|DE|}{b} = \frac{|AE|}{c}$ , iz čega slijedi

$$|DE| = \frac{b \cdot d}{a} \quad (2.16)$$





Slika 2.11:

i

$$\frac{d}{|AE|} = \frac{a}{e}.$$

Koristeći prethodne jednakosti i jednakost  $\angle EAC = \angle DAB$ , slijedi da je  $\triangle EAC \sim \triangle DAB$ . Stoga je  $\frac{e}{a} = \frac{|EC|}{f}$ , iz čega slijedi

$$|EC| = \frac{e \cdot f}{a}. \quad (2.17)$$

Primjenimo kosinusov teorem na trokut  $EDC$ . Vrijedi  $|EC|^2 = |ED|^2 + c^2 - 2c|ED| \cos(\beta + \delta)$ . Zamjenimo li  $|ED|$  i  $|EC|$  s (2.16) i (2.17) imamo

$$\left(\frac{e \cdot f}{a}\right)^2 = \left(\frac{b \cdot d}{a}\right)^2 + c^2 - 2c \frac{b \cdot d}{a} \cos(\beta + \delta),$$

iz čega slijedi (2.15). □

Kao posljedicu Bretschneiderova teorema dobivamo Ptolomejevu nejednakost.

**Teorem 2.4.2** (Ptolomejeva nejednakost). *U četverokutu ABCD vrijedi*

$$e \cdot f \leq a \cdot c + d \cdot b. \quad (2.18)$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je četverokut ABCD tetivan.*

*Dokaz.* Bretschneiderovu formulu možemo zapisati i na sljedeći način

$$\begin{aligned} (ef)^2 &= (ac)^2 + (db)^2 + 2abcd - 2abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) \\ &= (ac + db)^2 - 4abcd \cos^2 \frac{\beta + \delta}{2}, \end{aligned}$$

odakle je  $(ef)^2 \leq (ac + db)^2$  pa (2.18) vrijedi. Jednakost vrijedi ako i samo ako  $\cos \frac{\beta + \delta}{2} = 0$ , odnosno  $\beta + \delta = 180^\circ$ , što znači da je četverokut tetivan. □

**Teorem 2.4.3** (Ptolomejev teorem). *Ako je  $ABCD$  tetivni četverokut, onda vrijedi*

$$e \cdot f = a \cdot c + d \cdot b.$$

*Dokaz.* Dokaz slijedi iz prethodnog teorema. □

**Korolar 2.4.4.** *Ako su nasuprotni kutovi u četverokutu  $ABCD$  komplementarni, onda vrijedi jednakost*

$$(e \cdot f)^2 = (a \cdot c)^2 + (b \cdot d)^2. \quad (2.19)$$

*Dokaz.* Dokaz slijedi iz (2.15). □

Teorem 2.4.1 je Bretschneiderova formula u produktom obliku, a sada ćemo izvesti sličnu formulu u kvocijentnom obliku.

**Teorem 2.4.5.** *U konveksnom četverokutu  $ABCD$  vrijede jednakosti*

$$\frac{f^2}{e^2} = \frac{(ad + bc)((ad + bc)(ac + bd) - 2abcd(\cos \beta + \cos \delta))}{(ab + cd)((ab + cd)(ac + bd) - 2abcd(\cos \alpha + \cos \gamma))} \quad (2.20)$$

*i*

$$\frac{f^2}{e^2} = \frac{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos \beta + \cos \delta)}{a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd(\cos \alpha + \cos \gamma)}. \quad (2.21)$$

*Dokaz.* Primjenimo li kosinsov poučak na trokute  $ABC$  i  $ADC$  imamo

$$\begin{aligned} \cos \beta + \cos \delta &= \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - f^2}{2cd} \\ &= \frac{(ad + bc)(ac + bd) - f^2(ab + cd)}{2abcd}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$f^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd) - 2abcd(\cos \beta + \cos \delta)}{ab + cd}. \quad (2.22)$$

Na sličan način dobijemo

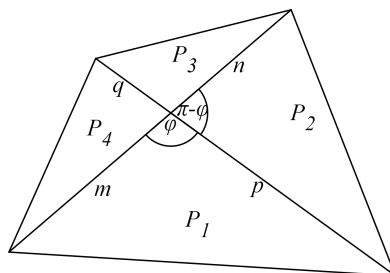
$$e^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd) - 2abcd(\cos \alpha + \cos \gamma)}{ad + bc}. \quad (2.23)$$

Jednakost (2.20) dobijemo iz (2.22) i (2.23). Slično dobivamo i jednakost (2.21). □

## 2.5 Zadaci

U ovom poglavlju riješiti ćemo nekoliko zadataka vezanih uz metričke relacije u konveksnom četverokutu.

**Primjer 2.5.1.** *Konveksan četverokut je dijagonalama podijeljen na četiri trokuta. Tri trokuta imaju površine 2, 3, 4. Kolika sve može biti površina četverokuta?*



Slika 2.12:

*Dokaz.* Prvo ćemo dokazati sljedeću tvrdnju: Ako je konveksan četverokut podijeljen dijagonalama na četiri trokuta, onda je umnožak površina dvaju trokuta koji nemaju zajedničke stranice jednak umnošku površina preostalih dvaju trokuta. To znači, da uz oznake kao na Slici 2.12 vrijedi  $P_1 P_3 = P_2 P_4$ . Kako je  $\sin(\varphi - \pi) = \sin \pi$ , vrijedi:  $2P_1 = mp \sin \varphi$ ,  $2P_2 = pn \sin \varphi$ ,  $2P_3 = nq \sin \varphi$ ,  $2P_4 = qm \sin \varphi$ . Dalje je  $2P_1 \cdot 2P_3 = mp \sin \varphi \cdot nq \sin \varphi = pn \sin \varphi \cdot qm \sin \varphi = 2P_2 \cdot 2P_4$ , tj.  $P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4$ . Budući da vrijede brojne jednakosti:  $2 \cdot 3 = 4 \cdot \frac{3}{2}$ ,  $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ ,  $4 \cdot 2 = 3 \cdot \frac{8}{3}$ , površina četvrtog trokuta može biti  $\frac{3}{2}$ , 6,  $\frac{8}{3}$ . Kako je površina polaznog četverokuta  $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ , slijedi da  $P$  može poprimiti vrijednosti  $\frac{21}{2}$ , 15,  $\frac{35}{3}$ .  $\square$

**Primjer 2.5.2.** *Kolika je najveća moguća površina konveksnog četverokuta sa stranicama 1, 4, 7 i 8?*

*Dokaz.* Znamo formulu (2.3) za površinu bilo kojeg konveksnog četverokuta. Očito je  $P \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ , gdje je jednakost ispunjena za  $\cos^2(\frac{\beta+\delta}{2}) = 0$ . To vrijedi samo kada je  $\beta + \delta = 180^\circ$ , što znači da je površina maksimalna za četverokut upisan u kružnicu, odnosno za tetivni četverokut. Odredimo  $s$ :  $s = \frac{1+4+7+8}{2} = 10$ . Uvrstimo li  $s$  u formulu te dobijemo da je maksimalna površina jednaka  $P = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2} = 18$ .  $\square$

**Primjer 2.5.3.** *Ako je četverokut istovremeno tetivan i tangencijalan, onda mu je površina jednaka korijenu umnoška duljina njegovih stranica, tj.*

$$P = \sqrt{abcd}.$$

*Dokaz.* Budući da je četverokut tetivan vrijedi formula  $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ , a budući da je i tangencijalan vrijedi da je  $a + c = b + d$ . Stoga je

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{1}{2}(c+d+b-a) \cdot \frac{1}{2}(c+d+a-b) \cdot \frac{1}{2}(a+b+d-c) \cdot \frac{1}{2}(a+b+c-d)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{2}c \cdot \frac{2}{2}d \cdot \frac{2}{2}a \cdot \frac{2}{2}b} = \sqrt{abcd}. \end{aligned}$$

Time je zadatak riješen.

□

## Poglavlje 3

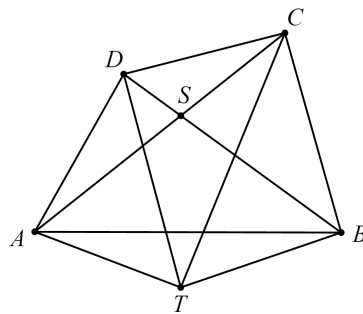
# Neke osobite točke u konveksnom četverokutu

U ovom poglavlju bavimo se osobitim točkama u četverokutu, po analogiji s trokutom.

### 3.1 Konveksni četverokut i točka

U ovom odjeljku promatramo neke posebne točke u četverokutu vezane za ekstermalne vrijednosti.

**Teorem 3.1.1.** *Sjecište dijagonala u četverokutu je točka u ravnini za koju je zbroj udaljenosti od vrhova četverokuta minimalan.*



Slika 3.1:

*Dokaz.* Neka je  $ABCD$  konveksni četverokut,  $AC \cap BD = \{S\}$  i  $T$  točka u ravnini različita od  $S$ ,  $T \neq S$ . (Slika 3.1) Promatrajmo trokute  $DTB$  i  $CTA$ . Vrijedi  $|DT| + |TB| \geq |BD| =$

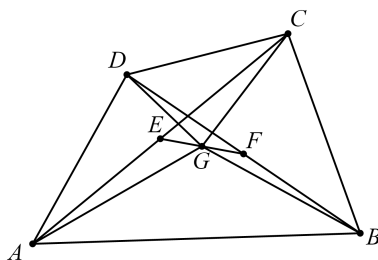
$|BS| + |SD|$  i  $|CT| + |CA| \geq |AC| = |AS| + |SC|$ . Kako je  $T \neq S$ , jednakost ne može vrijediti. Stoga je  $|TA| + |TB| + |TC| + |TD| > |SA| + |SB| + |SC| + |SD|$ , što znači da se najmanji zbroj udaljenosti do vrhova četverokuta postiže za točku  $S$ .  $\square$

Za dokaz sljedećeg teorema (Leibnizova relacija) potrebna nam je pomoćna lema koju ćemo sada iskazati i dokazati.

**Lema 3.1.2.** U četverokutu  $ABCD$  vrijedi jednakost

$$|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 + |GD|^2 = \frac{|AC|^2 + |BD|^2}{2} + |EF|^2 \quad (3.1)$$

gdje su redom  $E, F$  i  $G$  polovišta dužina  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  i  $\overline{EF}$ .



Slika 3.2:

*Dokaz.* Izrazimo duljine težišnica  $\overline{GE}$  i  $\overline{GF}$  trokutova  $AGC$  i  $BGD$ . Imamo:

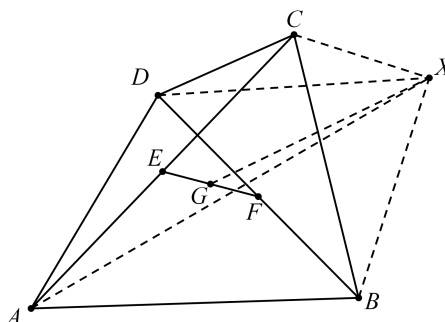
$$|GE|^2 = \frac{2(|GA|^2 + |GC|^2) - |AC|^2}{4},$$

$$|GF|^2 = \frac{2(|GB|^2 + |GD|^2) - |BD|^2}{4}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi (3.1).  $\square$

**Teorem 3.1.3** (Leibnizova relacija). *Ako je  $X$  proizvoljna točka u ravni četverokuta  $ABCD$ . Tada vrijedi jednakost*

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 + |XD|^2 = 4|XG|^2 + |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 + |GD|^2. \quad (3.2)$$



Slika 3.3:

*Dokaz.* Promotrimo trokute  $XAC$ ,  $XBD$  i  $XEFG$  kao na Slici 3.3. Vrijedi:

$$\begin{aligned} |XE|^2 &= \frac{2(|XA|^2 + |XC|^2) - |AC|^2}{4}, \\ |XF|^2 &= \frac{2(|XB|^2 + |XD|^2) - |BD|^2}{4}, \\ |XG|^2 &= \frac{2(|XE|^2 + |XF|^2) - |EF|^2}{4}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li izraze  $|XE|^2$  i  $|XF|^2$  u posljednju jednakost, te iskoristimo prethodnu lemu, dobivamo (3.2).  $\square$

Kao posljednicu prethodnog teorema dobivamo točku u ravnini četverokuta za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od vrhova četverokuta najmanji mogući.

**Korolar 3.1.4.** *Ako je  $X$  proizvoljna točka u ravnini četverokuta  $ABCD$  onda vrijedi*

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 + |XD|^2 - 4|XG|^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2), \quad (3.3)$$

odnosno

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 + |XD|^2 \geq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \quad (3.4)$$

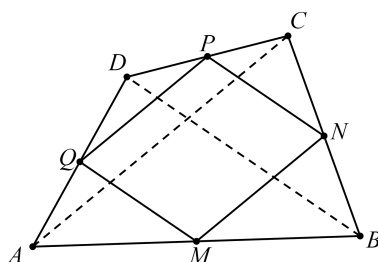
Prema tome, zbroj  $|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 + |XD|^2$  je minimalan ako i samo ako se  $X$  podudara s točkom  $G$ , gdje je  $G$  polovište dužine  $\overline{EF}$ .

*Dokaz.* Jednakost (3.3) slijedi iz (2.1), (3.1) i (3.2). Nejednakost (3.4) slijedi direktno iz (3.3).  $\square$

### 3.2 Varignonov teorem i srodni rezultati

U ovom odjeljku promatramo jednostavan teorem u četverokutu nazvan po francuskom matematičaru i fizičaru Pierreu Varignonu (1654. - 1722.).

**Teorem 3.2.1** (Varignonov teorem). *Četverokut kojem su vrhovi polovišta nasuprotnih stranica četverokuta  $ABCD$  je paralelogram.*

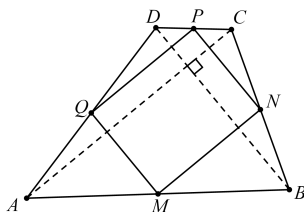


Slika 3.4:

*Dokaz.* Promotrimo Sliku 3.4. Budući da su  $\overline{MN}$  i  $\overline{PQ}$  srednjice trokutova  $ABC$  i  $ADC$ , vrijedi  $MN \parallel AC$ ,  $|MN| = \frac{|AC|}{2}$  i  $PQ \parallel AC$ ,  $|PQ| = \frac{|AC|}{2}$ . Slijedi da je  $|MN| = |PQ|$  i  $MN \parallel PQ$ , odnosno da je  $MNPQ$  je paralelogram.  $\square$

**Napomena 3.2.2** (Posljedice Varignonovog teorema).

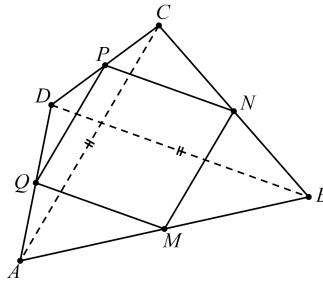
(i) *Ako su dijagonale četverokuta  $ABCD$  okomite, onda je četverokut kojemu su vrhovi polovišta nasuprotnih stranica od  $ABCD$  pravokutnik.*



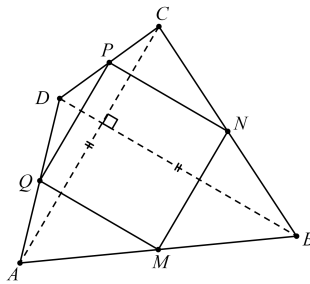
Slika 3.5:

(ii) *Ako su dijagonale četverokuta  $ABCD$  jednake duljine, onda je četverokut kojemu su vrhovi polovišta nasuprotnih stranica od  $ABCD$  romb.*





Slika 3.6:



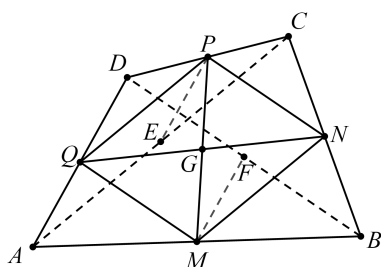
Slika 3.7:

(iii) Ako su dijagonale četverokuta  $ABCD$  okomite i jednake duljine, onda je četverokut kojemu su vrhovi polovišta nasuprotnih stranica od  $ABCD$  kvadrat.

Navedimo sada još nekoliko svojstava četverokuta koji su srodni Varignonovom teoremu.

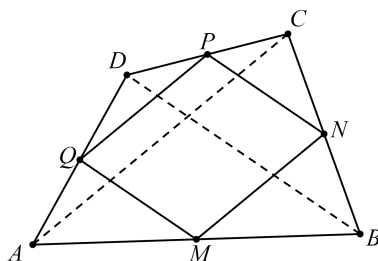
**Teorem 3.2.3.** Srednjice četverokuta  $ABCD$  sijeku se u točki  $G$  koja je polovište obiju srednjica.

*Dokaz.* Neka je  $G$  sjecište dijagonala  $\overline{MP}$  i  $\overline{QN}$ . Tada je  $G$  polovište tih dužina. Kako su  $\overline{MF}$  i  $\overline{PE}$  srednjice trokutova  $ABD$  i  $ACD$ ,  $MEPF$  je paralelogram s dijagonalama  $\overline{MP}$  i  $\overline{EF}$ . Stoga dijagonala  $\overline{EF}$  prolazi polovištem dužine  $\overline{MP}$ , tj. točkom  $G$ . Zaključujemo, srednjice četverokuta sijeku se u točki  $G$  koja je ujedno i polovište tih srednjica.  $\square$



Slika 3.8:

**Teorem 3.2.4.** Površina paralelograma  $MNPQ$  jednaka je polovini površine četverokuta  $ABCD$ , te je opseg paralelograma jednak zbroju duljina dijagonala četverokuta  $ABCD$ .



Slika 3.9:

*Dokaz.* Kako su  $\overline{QM}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{NP}$ ,  $\overline{PQ}$  odgovarajuće srednjice, slijedi  $P_{AMQ} = \frac{1}{4}P_{ABD}$ ,  $P_{CPN} = \frac{1}{4}P_{BCD}$ ,  $P_{MBN} = \frac{1}{4}P_{ABC}$ ,  $P_{QPD} = \frac{1}{4}P_{ACD}$ . Zbrajanjem prve dvije i druge dvije jednakosti dobvamo

$$P_{AMQ} + P_{CPN} = \frac{1}{4}P_{ABCD},$$

$$P_{MBN} + P_{QPD} = \frac{1}{4}P_{ABCD}.$$

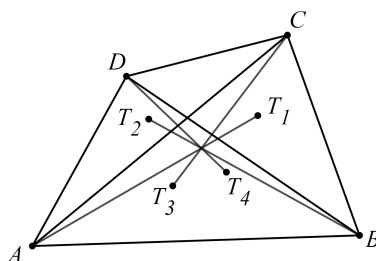
Dalje imamo

$$\begin{aligned} P_{AMQ} + P_{CPN} + P_{MBN} + P_{QPD} &= \frac{1}{2}P_{ABCD} \\ P_{MNPQ} &= P_{ABCD} - (P_{AMQ} + P_{CPN} + P_{MBN} + P_{QPD}) \\ &= P_{ABCD} - \frac{1}{2}P_{ABCD} \\ &= \frac{1}{2}P_{ABCD}. \end{aligned}$$

Također,  $|PQ| = \frac{1}{2}|AC| = |MN|$  i  $|QM| = \frac{1}{2}|BD| = |PN|$ . Zbog toga je opseg paralelograma jednak zbroju duljina dijagonala.  $\square$

### 3.3 Težište i težišnice četverokuta

**Definicija 3.3.1.** Neka je  $ABCD$  četverokut,  $T_1, T_2, T_3$  i  $T_4$  težišta trokuta redom  $BCD, CDA, DAB$  i  $ABC$ . Dužine  $\overline{AT_1}, \overline{BT_2}, \overline{CT_3}$  i  $\overline{DT_4}$  nazivaju se težišnice četverokuta  $ABCD$ . (Slika 3.10)



Slika 3.10:

U daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju iz prethodne definicije.

**Teorem 3.3.2.** Težišnice četverokuta sijeku se u jednoj točki - težištu četverokuta. Težište četverokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 3 : 1, mjereći od vrha četverokuta.

*Dokaz.* Težišta trokuta  $BCD, CDA, DAB$  i  $ABC$  označimo sa  $T_A, T_B, T_C$  i  $T_D$ . Ako su točke  $E$  i  $F$  polovišta dužina  $\overline{BD}$  i  $\overline{AD}$ , tada je  $|CT_A| = \frac{2}{3}|CE|$  i  $|CT_B| = \frac{2}{3}|CF|$ , zbog čega su trokuti  $CEF$  i  $CT_A T_B$  homotetični sa središtem homotetije u točki  $C$  i koeficijentom homotetije  $\frac{2}{3}$ . Zato je  $|T_A T_B| = \frac{2}{3}|EF|$  i  $T_A T_B \parallel EF$ . Dužina  $\overline{EF}$  je srednjica trokuta  $ABD$ , pa je  $|EF| = \frac{1}{2}|AB|$  i  $EF \parallel T_A T_B$ . Zaključujemo

$$|T_A T_B| = \frac{1}{3}|AB|, T_A T_B \parallel AB \quad (3.5)$$

Neka se težišnice  $\overline{AT_A}$  i  $\overline{BT_B}$  četverokuta  $ABCD$  sijeku u točki  $T_1$ , tada su, zbog (3.5), trokuti  $T_1 AB$  i  $T_1 T_A T_B$  homotetični sa središtem homotetije u točki  $T_1$  i koeficijentom  $\frac{1}{3}$ . Zato je

$$|T_1 T_A| = \frac{1}{3}|T_1 A|, |T_1 T_B| = \frac{1}{3}|T_1 B| \quad (3.6)$$

Ako se težišnice  $\overline{BT_B}$  i  $\overline{CT_C}$  sijeku u točki  $T_2$ , a težišnice  $\overline{CT_C}$  i  $\overline{DT_D}$  u točki  $T_3$ , na isti način se dokaže da je

$$|T_2T_B| = \frac{1}{3}|T_2B|, |T_2T_C| = \frac{1}{3}|T_2C| \quad (3.7)$$

odnosno

$$|T_3T_C| = \frac{1}{3}|T_3C|, |T_3T_D| = \frac{1}{3}|T_3D|. \quad (3.8)$$

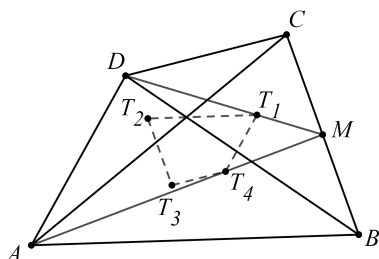
Iz (3.6), (3.7) i (3.8) zaključujemo da su točke  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$  ista točka, koju smo na slici označili s  $T$ . Time je dokazano da se težišnice četverokuta sijeku u istoj točki - težištu četverokuta. Iz (3.6), (3.7) i (3.8) također slijedi

$$|TA| : |TT_A| = |TB| : |TT_B| = |TC| : |TT_C| = |TD| : |TT_D| = 3 : 1$$

što je drugi dio teorema. □

**Teorem 3.3.3.** *Neka je  $ABCD$  četverokut i neka su  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$  redom težišta trokuta  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  i  $ABC$ . Tada vrijedi:*

- (a)  $T_1T_2 \parallel AB$ ,  $T_2T_3 \parallel BC$ ,  $T_3T_4 \parallel CD$  i  $T_1T_4 \parallel AD$ ;  
 (b)  $P_{ABCD} = 9P_{T_1T_2T_3T_4}$ .



Slika 3.11:

*Dokaz.* Neka je  $M$  polovište dužine  $\overline{BC}$ . Stoga je  $\overline{AM}$  težišnica trokuta  $ABC$  i točka  $T_1$  se nalazi na udaljenosti  $\frac{2}{3}$  između  $A$  i  $M$ ,  $|T_1M| = \frac{1}{3}|AM|$ .  $\overline{DM}$  je težišnica trokuta  $DCB$  i  $|DT_2| : |T_2M| = 2 : 1$ . U trokutu  $ADM$  imamo  $T_1T_4 \parallel AD$  i  $|T_1T_4| = \frac{1}{3}|AD|$ . Također,  $T_1T_2 \parallel AB$  i  $|T_1T_2| = \frac{1}{3}|AB|$ ,  $T_2T_3 \parallel BC$  i  $|T_2T_3| = \frac{1}{3}|BC|$ ,  $T_3T_4 \parallel CD$  i  $|T_3T_4| = \frac{1}{3}|CD|$ . Zaključujemo da je  $T_1T_2T_3T_4 \sim ABCD$  s koeficijentom sličnosti  $\frac{1}{3}$ , stoga je  $K_{ABCD} = 9K_{T_1T_2T_3T_4}$ . □

Navedimo sada nekoliko teorema vezanih uz težište četverokuta.

**Primjer 3.3.4.** Neka je  $ABCD$  konveksni četverokut i točke  $T_1, T_2, T_3$  i  $T_4$  težišta trokuta  $BCD, CDA, DAB$  i  $ABC$ . Dokažimo da su četverokuti  $ABCD$  i  $T_1T_2T_3T_4$  slični i odredimo omjer njihovih površina.

*Dokaz.* Neka je  $S$  sjecište dijagonala. Imamo  $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{ST_2} - \overrightarrow{ST_1} = \frac{\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SA}}{3} - \frac{\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}}{3} = \frac{\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}}{3} = \frac{\overrightarrow{BA}}{3}$ , pa je  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{T_1T_2}$  i analogno  $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{T_2T_3}$ ,  $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{T_3T_4}$ ,  $\overrightarrow{DA} = -3\overrightarrow{T_4T_1}$ ,  $\overrightarrow{BD} = -3\overrightarrow{T_2T_4}$ . Zaključujemo da je  $ABCD \sim T_1T_2T_3T_4$  i da je površina četverokuta  $ABCD$  devet puta veća od površine četverokuta  $T_1T_2T_3T_4$ .  $\square$

**Primjer 3.3.5.** Neka je  $ABCD$  konveksni četverokut,  $T_1$  težište trokuta  $BCD$  i  $\overline{AT_1}$  težišnica od  $ABCD$ . Na sličan način definiramo točke  $T_2, T_3, T_4$  i težišnice  $\overline{AT_2}, \overline{AT_3}, \overline{AT_4}$ . Pokažimo sljedeće:

(a)

$$|AT_1|^2 = \frac{3(a^2 + d^2 + e^2) - (b^2 + c^2 + f^2)}{9},$$

(b)

$$\sum_{i=1}^4 |AT_i|^2 = \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

*Dokaz.*

(a) Iz Teorema 3.3.2 znamo da se težišnice četverokuta sijeku u jednoj točki  $T$  i da vrijedi

$$\frac{|TT_A|}{|TA|} = \frac{|TT_B|}{|TB|} = \frac{|TT_C|}{|TC|} = \frac{|TT_D|}{|TD|} = \frac{1}{3}$$

Neka je  $M$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Iz Stewartovog teorema (Teorem 2.3.5) znamo da u trokutu  $AMD$  vrijedi  $|AM|^2 \cdot |T_AD| + |AD|^2 \cdot |MT_A| = |MT_A| \cdot |T_AD| \cdot |MD| + |AT_A|^2 \cdot |MD|$ . Ali  $|T_AD| = 2|T_AM|$  i  $|MD| = 3|T_AM|$ . Stoga je

$$2 \cdot |MA|^2 + |AD|^2 = \frac{2|MD|^2}{3} + 3|AT_1|^2.$$

Iz formule za dužinu težišnice dobijemo

$$3s^2 + 3e^2 - \frac{3b^2}{2} + 3d^2 = c^2 + f^2 - \frac{b^2}{2} + 9|AT_1|^2$$

pa je

$$|AT_1|^2 = \frac{3(a^2 + d^2 + e^2) - (b^2 + c^2 + f^2)}{9}.$$

(b) Analogno zapišemo formule za kvadrate ostalih težišnica  $|AT_2|^2, |AT_3|^2$  i  $|AT_4|^2$ . Zbrojimo ih i dobijemo traženu sumu.  $\square$

### 3.4 Zadaci

Sada ćemo riješiti nekoliko zadataka vezanih uz osobite točke u konveksnom četverokutu.

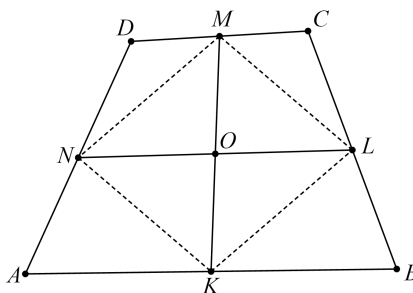
**Primjer 3.4.1.** Vrhovi četverokuta su točke  $A(-2, 5)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(4, -1)$  i  $D(-1, -4)$ . Izračunajte koordinate težišta i duljinu težišnice četverokuta povučene iz vrha  $A$ .

*Dokaz.* Trebamo izračunati udaljenost  $t_A = |AT_A|$ , gdje je  $T_A$  težište trokuta  $BCD$ . Kako je  $T_A = (\frac{x_B+x_C+x_D}{3}, \frac{y_B+y_C+y_D}{3})$ , tj.  $T_A = (\frac{3+4-1}{3}, \frac{4-1-4}{3})$ ,  $T_A = (2, -\frac{1}{3})$ , slijedi da je

$$\begin{aligned} t_A &= \sqrt{(2+2)^2 + (-\frac{1}{3}-5)^2} = \sqrt{16 + \frac{16^2}{9}} \\ &= \sqrt{16(1 + \frac{16}{9})} = \sqrt{16 \cdot \frac{25}{9}}, \end{aligned}$$

tj.  $t_A = \frac{20}{3}$ . □

**Primjer 3.4.2.** Srednjice konveksnog četverokuta dijele taj četverokut na četiri četverokuta. Površine triju od njih su 8, 16, 20. Kolika je površina četvrtog četverokuta?



Slika 3.12:

*Dokaz.* Pogledajmo Sliku 3.12. Znamo da je  $KLMN$  paralelogram, pri čemu je  $P_{ONAK} + P_{OLCM} = P_{OKBL} + P_{OMDN} = \frac{1}{2}P$  i

$$P_{ONK} = P_{OKL} = P_{OLM} = P_{OMN} = \frac{1}{8}P \quad (3.9)$$

$P$  je površina promatranog četverokuta  $ABCD$ . Označimo li zadane površine  $P_1 = 8$ ,  $P_2 = 16$ ,  $P_3 = 20$  i nepoznatu s  $P_4$ , moguća su tri slučaja

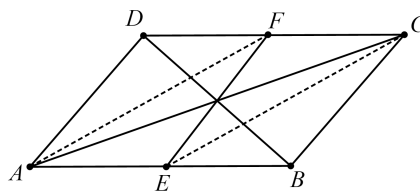
1)  $P_1 + P_4 = P_2 + P_3 \Rightarrow P_4 = 28 \Rightarrow P = 72$ ,

2)  $P_2 + P_4 = P_1 + P_3 \Rightarrow P_4 = 12 \Rightarrow P = 56,$

3)  $P_3 + P_4 = P_1 + P_2 \Rightarrow P_4 = 4 \Rightarrow P = 48.$

Razmatrajući svaki od tih slučajeva, a zbog (3.9), mora biti  $P_i > \frac{1}{8}P$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), zaključujemo da je moguće samo  $P_4 = 12$ .  $\square$

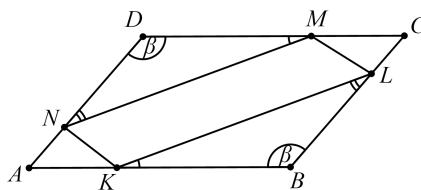
**Primjer 3.4.3.** Na stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  paralelograma  $ABCD$  odabrane su točke  $E$  i  $F$  tako da je  $|AE| = |CF|$ . Dokažite da dužina  $\overline{EF}$  prolazi sjecištem dijagonala promatranog paralelograma.



Slika 3.13:

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati da dužina  $\overline{EF}$  raspolavlja dijagonalu  $\overline{AC}$ . Kako je  $|AE| = |FC|$  i  $AE \parallel FC$ , slijedi da je četverokut  $AEFC$  paralelogram, zbog čega se njegove dijagonale  $\overline{EF}$  i  $\overline{AC}$  raspolavljaju. Time je tvrdnja zadatka dokazana.  $\square$

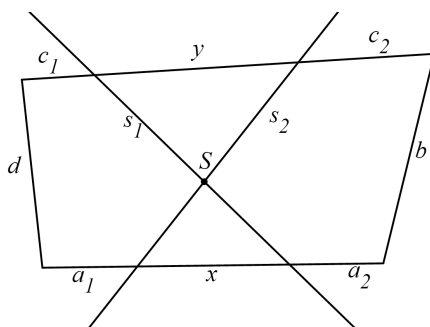
**Primjer 3.4.4.** Paralelogramu  $ABCD$  upisan je paralelogram  $KLMN$ , tako da se na svakoj stranici polaznog paralelograma nalazi jedan vrh upisanog paralelograma. Dokažite da ti paralelogrami imaju zajedničko sjecište dijagonala.



Slika 3.14:

*Dokaz.* Neka su vrhovi paralelograma  $KLMN$  na stranicama paralelograma  $ABCD$  kao na Slici 3.14. Kako je  $KL \parallel NM$  i  $|KL| = |MN|$ , slijedi da su trokuti  $KBL$  i  $MDN$  sukladni ( $K - S - K$  poučak). Zato je  $|BK| = |MD|$ , odnosno  $|AK| = |MC|$ . Iz posljednje jednakosti, prema prethodnom zadatku slijedi tvrdnja zadatka.  $\square$

**Primjer 3.4.5.** *Unutar konveksnog četverokuta postoji takva točka da svaki pravac koji njome prolazi dijeli četverokut na dva dijela jednakih opsega. Dokažite da je taj četverokut paralelogram.*



Slika 3.15:

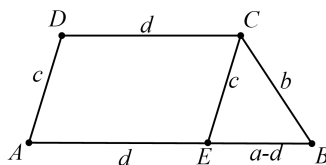
*Dokaz.* Neka je  $S$  točka koja ispunjava uvjete zadatka. neka dva pravca tom točkom sijeku nasuprotne stranice kao na Slici 3.15. Uz oznake kao na slici vrijedi:

$$a_1 + d + c_1 + y + s_2 = x + a_2 + b + c_2 + s_2$$

$$x + a_1 + d + c_1 + s_1 = a_2 + b + c_2 + y + s_1$$

Oduzmemo li ove dvije jednakosti, dobijemo  $y - x = x - y$ , odnosno  $x = y$ . Vidimo da bilo koja dva takva pravca točkom  $S$  odsjecaju na drugim dvama pravcima jednake odsječke. To je moguće samo ako su ta druga dva pravca usporedna i ako je točka  $S$  jednako udaljena od njih. Ako pravci točkom  $S$  sijeku drugi par nasuprotnih stranica, tada istim postupkom zaključujemo da su i te stranice usporedne. Na temelju svega zaključujemo da je četverokut paralelogram, a točka  $S$  je sjecište njegovih dijagonala.  $\square$

**Primjer 3.4.6.** *Dokažite da se od stranica bilo kojeg četverokuta može napraviti trapez.*



Slika 3.16:



*Dokaz.* Označimo duljine stranica četverokuta s  $a, b, c$  i  $d$  te neka je  $a \leq b \leq c \leq d$ . Kako je  $b + d + c > a$ , slijedi da je

$$b + c > a - d \quad (3.10)$$

Ako je  $a - d = 0$ , tada su prema postavljenim uvjetima duljine svih stranica jednake, pa je četverokut romb, a time i trapez. Promatramo sada slučaj  $a - d > 0$ . Zbog (3.10) postoji trokut čije su duljine stranica  $b, c$  i  $a - d$ . Neka je to trokut  $BCE$ , kao na Slici 3.16. Produžimo dužinu  $\overline{BE}$  preko  $E$  do točke  $A$ , tako da je  $|AE| = d$ . Konstruirajmo točku  $D$ , tako da je četverokut  $AECD$  paralelogram. Četverokut  $ABCD$  je trapez čije su duljine osnovica  $a$  i  $d$ , a duljine krakova  $b$  i  $c$ .  $\square$

# Bibliografija

- [1] B. Pritsker, *Chapter 5, The Area of a Quadrilateral*, Geometrical Kaleidoscope, 45–56, <https://www.doverpublications.com/mathsci/ms17w38/812413.pdf>, 2017.
- [2] *Quadrilateral Geometry*, <http://www.ms.uky.edu/~droyster/courses/fall111/MA341/Classnotes/Lecture%2019.pdf>, studeni, 2011.
- [3] N. Altshiller-Court, *College Geometry, An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*, Barnes and Noble, 1952.
- [4] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.
- [5] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija - skripta*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf>.
- [6] A. Marić, *Četverokut, definicije, poučci, formule, primjeri, zadaci*, Element, Zagreb, 2006.
- [7] O.T. Pop, N. Minculete i M. Bencze, *An introduction to quadrilateral geometry*, Editura Didactica Si Pedagogica, R. A., 2013.
- [8] D. Veljan, B. Pavković, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
- [9] ———, *Elementarna matematika 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

# Sažetak

Na početku rada prisjećamo se osnovne podjele četverokuta, temeljnih pojmova i činjenica potrebnih za ostatak rada. U drugom poglavlju bavimo se Eulerovim teoremom koji je poopćenje relacije paralelograma, dajemo formulu za površinu općeg konveksnog četverokuta i proširenje Teorema o kosinusu. Dajemo i poopćenje dobro poznatog Ptolomejevog teorema. U trećem poglavlju definiramo težište i težišnice četverokuta, dajemo iskaz i dokaz Varignonovog teorema i njegove posljedice, te se bavimo drugim osobitim točkama u četverokutu.

# Summary

At the beginning of the paper, we recall the basic classification of the quadrilateral, the basic concepts and facts needed for the rest of the paper. In the second chapter we deal with the Euler's theorem which is a generalization of the relation of parallelograms, we give a formula for the surface of a general convex quadrilateral and an extension of the cosine theorem. We also give a generalization of the well-known Ptolemy's theorem. In the third chapter, we define the centroids and the medians of the quadrilateral, give a statement and proof of Varignon's theorem and its consequences, and deal with other significant points in the quadrilateral.

# Životopis

Rođena sam 20.08.1993. godine u Splitu. Godine 2000. krenula sam u prvi razred Osnovne škole Tina Ujevića u Krivodolu. Osmi razred osnovne škole završila sam 2008. godine u Metkoviću i te iste godine upisala sam jezičnu gimnaziju, također u Metkoviću. Nakon završetka jezične gimnazije 2012. godine, upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom Fakultetu u Zagrebu. 2016. godine stječem zvanje univ. bacc. educ. math, a te godine nastavljam i školovanje na diplomskom studiju istog smjera.