Slučajne šetnje na grafovima

Barišin, Tin

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tin Barišin

SLUČAJNE ŠETNJE NA GRAFOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc
Zoran Vondraček

Zagreb, veljača 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji i prijateljima koji su bili uz mene tijekom studija.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Slučajne šetnje na grafovima i grube izometrije **3**
1.1 Općenito o grafovima 3
1.2 Koncept slučajne šetnje na grafovima 6
1.3 Grube izometrije 9

2 Prijelazne gustoće i Dirichlet-ova forma **11**
2.1 Prijelazne gustoće i Laplacian 11
2.2 Dirichlet-ova ili energijska forma 13

3 Teorija električnih mreža **17**
3.1 Koncept električnih mreža na grafovima 17
3.2 Prolaznost i povratnost 21

4 Energijski i varijacijski problemi **25**
4.1 Varijacijski problem 1 25
4.2 Varijacijski problem 2 32
4.3 Otpor u beskonačnost 34
4.4 Dokazi prolaznosti/povratnosti 39

5 Stabilnost nad grubim izometrijama **41**

Bibliografija **45**

Uvod

Graf s težinama se prirodno može interpretirati kao slučajni proces te kao takvog ima smisla koristiti teoriju slučajnih procesa i Markovljevih lanaca za opisivanje strukture grafa. Naime, vrhove grafa možemo smatrati stanjima slučajnog procesa, a težine grafa određuju vjerojatnosti prijelaza iz jednog stanja u drugo. Svojstvo prolaznosti odnosno povratnosti je jedno od temeljnih svojstava slučajnog procesa koje ćemo proučavati u ovom diplomskom radu. Cilj diplomskog rada je promatrati stabilnost navedenih svojstava s obzirom na određene perturbacije grafa. Struktura diplomskog rada je sljedeća:

U prvom poglavlju se prisjećamo osnovnih definicija i svojstava grafova i slučajnih šetnji koji će nam biti korisni u radu te definiramo grubu izometriju. Gruba izometrija će se pokazati kao preslikavanje koje dovoljno dobro "čuva" strukturu grafa kako bi se zadržalo jedno od temeljnih svojstava slučajnog procesa.

U drugom poglavlju uvodimo nove pojmove vezane u grafove: Laplacian i energijsku formu koje će nam kroz niz rezultata omogućiti da bolje opišemo strukturu i svojstva grafa.

U trećem poglavlju razvijamo teoriju električnih mreža. Graf se također može interpretirati i kao električna mreža. Na električnoj mreži se prirodno pojavljuje koncept efektivnog otpora za koji ćemo pokazati da predstavlja zgodnu interpretaciju prolaznosti i povratnosti grafa.

U četvrtom poglavlju proučavamo varijacijske probleme koji će nam biti korisni za dokazivanje kako se svojstva prolaznost i povratnosti ponašaju nad grubim izometrijama. Varijacijski problemi predstavljaju nadogradnju na teoriju električnih mreža. Poglavlje završavamo dokazom prolaznosti i povratnosti nekih primjera koje smo naveli kroz rad koristeći tehnike koje smo dokazali u prethodnim poglavljima.

Peto poglavlje nam dokazuje osnovni rezultat diplomskog rada: prolaznost i povratnost grafova s težinama je stabilna nad grubim izometrijama.

Poglavlje 1

Koncept slučajne šetnje na grafovima i grube izometrije

1.1 Općenito o grafovima

Podsjetimo se formalne definicije grafa: graf je uređeni par $\Gamma = (\mathbb{V}, E)$, pri čemu je skup vrhova $\mathbb{V}$ konačan ili prebrojiv, a skup bridova E podskup skupa $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$. Za skup $A \subseteq \mathbb{V}$ označavamo s $|A|$ broj elemenata u A, odnosno kardinalitet skupa A.
Uvodimo neke pojmove vezano uz grafove koje ćemo koristiti kroz rad:

- Koristimo oznaku $x \sim y$ za $x, y \in \mathbb{V}$ i kažemo da su x i y *susjedi* ako je $\{x, y\} \in E$. Pretpostavljamo da za nijedna dva ista vrha ne postoji brid u E koji ih povezuje te da ne postoji više bridova koji povezuju isti par vrhova.

- Put γ u Γ je niz $x_0, x_1, ..., x_n$ takvih da je $x_{i-1} \sim x_i$ za sve $1 \leq i \leq n$. Duljina puta γ je broj bridova u γ. Kažemo da je put γ *ciklus* ili *petlja* ako je $x_0 = x_n$. Kažemo da je put *jednostavan* ako su svi vrhova u putu različiti.

- Prirodno se uvodi **metrika**[1] na grafu: $d(x, y)$ je dužina najkraćeg puta između x i y. Ako ne postoji takav put, stavljamo $d(x, y) = +\infty$. Sada je lako proširi definicija od d za $x \in \mathbb{V}$ i $A \subset \mathbb{V}$:
$$d(x, A) = min\{d(x, y) : y \in A\}.$$

[1] Podsjetimo se definicije metrike: metrika $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to [0, +\infty\rangle$ je funkcija za koju vrijedi:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- Kažemo da je graf Γ **povezan** ako vrijedi $d(x, y) < \infty$ za sve x, y.
- Kažemo da je graf Γ *lokalno konačan* ako je $N(x) := \{y : y \sim x\}$ je konačan za svaki $x \in \mathbb{V}$, odnosno ako svaki vrh ima konačan broj susjeda. Također, kažemo da je graf Γ *konačne geometrije* ako vrijedi $\sup_x |N(x)| < \infty$.
- Koristeći metriku d definiramo kugle na grafu kao:

  $$B(x, r) = \{y : d(x, y) \leq r\},\ x \in \mathbb{V},\ r \in [0, +\infty\rangle\,.$$

  Uočimo da naša metrika d poprima vrijednosti u $\mathbb{N}$, ali nam to ne stvara problem za $r \in \mathbb{R}$.
- Za skup $A \subset \mathbb{V}$ se lako definira **vanjski rub** od A:

  $$\partial A = \{y \in A^c : \text{postoji } x \in A\ t.d.\ x \sim y\}$$

  Slično se definiraju zatvarač i interior:
  $\partial_i A = \partial(A^c) = \{y \in A : \ posto ji\ x \in A^c\ t.d.\ x \sim y\}$
  $\bar{A} = A \cup \partial iA$
  $A^0 = A \setminus \partial_i A$

Kroz teoreme i ostale tvrdnje koje ćemo dokazivati pretpostavljati ćemo da je graf povezan i lokalno konačan osim ako nije naglašeno drukčije.
Sada prelazimo na definiciju grafa s težinama.

Definicija 1.1.1. *Pretpostavimo da postoje težine (ili provodljivosti) $\mu_{xy}, x, y \in \mathbb{V}$, koje zadovoljavaju:*

(i) $\mu_{xy} = \mu_{yx}$,

(ii) $\mu_{xy} \geq 0$ *za sve* $x, y \in \mathbb{V}$,

(iii) ako je $x \neq y$, tada je $\mu_{xy} > 0 \iff x \sim y$.

Tada (Γ, μ) *zovemo* ***grafom s težinama***

Prirodne težine na Γ su dane s:

$$\mu_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \sim y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada definiramo sumu svih težina vrha $x \in \mathbb{V}$ kao: $\mu_x = \mu(x) = \sum_y \mu_{xy}$. Definicija se prirodno proširuje na skup $A \subset \mathbb{V}$ kao: $\mu(A) = \sum_x \mu_x$.
Ako je graf Γ lokalno konačan, tada vrijedi:

(i) $|B(x,r)| < \infty$ za sve x i r

(ii) $\mu(A) < \infty$ za svaki konačan $A \subset \mathbb{V}$.

Težine mogu imati neka svojstva koja nam mogu biti korisna u dokazivanju nekih tvrdnji:

Definicija 1.1.2. *Kažemo da graf (Γ, μ) ima **ograničene težine** ako postoji $C_1 < \infty$ takav da $C_1^{-1} \leq \mu_e \leq C_1$ za svaki $e \in E$ i $\mu_{xx} \leq C_1$ za sve $x \in \mathbb{V}$.*
*Kažemo da graf (Γ, μ) ima **kontrolirane težine** ako postoji $C_2 < \infty$ takav da vrijedi*

$$\frac{\mu_{xy}}{\mu_x} \geq \frac{1}{C_2} \text{ za } x \sim y.$$

Primjer 1.1.3. *Neki primjeri grafova koje ćemo proučavati:*

(i) *Euklidska rešetka $\mathbb{Z}^d$. U ovom slučaju je $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^d$, te vrijedi: $x \sim y \iff |x-y| = 1$. U kasnijim poglavljima proučavat ćemo povratnost i prolaznost ovisno o d.*

(ii) *d-narno stablo je jedinstveno beskonačno stablo takvo $N(x) = d+1$ bez ciklusa.*

(iii) *Zanimljiv primjer je i tzv. 'ukorijenjenog binarnog stabla' $\mathbb{B}$ koje se konstruira po razinama. Prvo, stavimo $\mathbb{B}_0 = \{o\}$ i za $n \geq 1$ imamo $\mathbb{B}_n = \{0,1\}^n$. Tada je skup vrhova dan s $\mathbb{V} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{B}_n$. Za $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{B}$ za $n \geq 2$ definiramo $a(x) = (x_1, ..., x_{n-1})$ kao prethodnika od x. (Posebno stavimo $a(z) = o$ za $z \in \mathbb{B}_1$.) Tada je skup bridova dan sa:*

$$E(\mathbb{B}) = \{\{x, a(x)\} : x \in \mathbb{B} - \mathbb{B}_0\}.$$

Ovo je binarno stablo jer svaki vrh ima dvoje djece koje dobije dodavanjem zadnje koordinate (0 ili 1).

(iv) *Proučimo jedan naizgled drukčiji primjer grafa. Neka je $(\zeta, \cdot)$[2] konačno generirana grupa i $\Lambda = \{g_1, ..., g_n\}$ skup generatora (ne nužno minimalan). Neka je $\Lambda^* = \{g_1, ..., g_n, g_1^{-1}, ..., g_n^{-1}\}$. Neka je $\mathbb{V} = \zeta$ te $\{g,h\} \in E \iff g^{-1}h \in \Lambda^*$. Tada se (ζ, E) se naziva **Cayley-jevim grafom** grupe ζ generirane s Λ.*

---

[2] Definicija grupe $(\zeta, \cdot)$:
(a) a,b $\in \zeta \rightarrow a \cdot b \in \zeta$
(b) $a, b, c \in \zeta \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(c) Postoji neutralni element $e \in \zeta$ tj. za svaki $a \in \zeta$ vrijedi $a \cdot e = e \cdot a = a$
(d) Za svaki $a \in \zeta$ postoji inverz $b \in \zeta$ takav da $a \cdot b = b \cdot a = e$

Može se pokazati da je $\mathbb{Z}^d$ Cayley-jev graf grupe $\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}$ s generatorima g_k, $1 \leq k \leq d$; pri čemu g_k ima 1 na k-tom mjestu, a ostalo 0. S obzirom da drukčiji skup generatora daje drugi Cayley-jev graf. općenito za grupu ζ (s pripadnom operacijom) možemo imati mnogo različitih Cayley-jevih grafova. Isto tako, d-narno stablo je Cayley-jev graf grupe generirane s $\Gamma = \{x_1, ..., x_{d+1}\}$ za koju vrijedi $x_1^2 = \cdots = x_{d+1}^2 = 1$.

Uvodimo neke operacije s grafovima koje bi nam mogle biti korisne za dokazivanje tvrdnji.

Definicija 1.1.4. *Za (Γ, μ) graf s težinama.*

(1) ***Podgraf*** *Za $H \subset \mathbb{V}$, podgraf induciran s H je graf s težinama sa skupom vrhova H, te skupom bridova:*

$$E_H = \Big\{\{x, y\} \in E : x, y \in H\Big\},$$

te pripadnim težinama:

$$\mu^H_{xy} = \mu_{xy}, \quad x, y \in H.$$

Analogno viđenom se na grafu definira μ^H_x te očito vrijedi $\mu^H_x \leq \mu_x$. Naravno (H, E_H) ne mora biti povezan čak i ako je Γ povezan.

(2) ***Zamjena skupa točkom*** *Za $A \subset \mathbb{V}$. Graf dobiven zamjenom skupa A točkom a ($a \notin \mathbb{V}$) je graf $(\mathbb{V}', E')$ zadan s:*

$$\mathbb{V}' = (\mathbb{V} - A) \cup \{a\},$$

$$E' = \Big\{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{V} - A\Big\} \cup \Big\{\{x, a\} : x \in \partial A\Big\}.$$

Težine na $(\mathbb{V}', E')$ postavljamo $\mu'_{xy} = \mu_{xy}$ ako $x, y \in \mathbb{V} - A$ i

$$\mu'_{xa} = \sum_{b \in A} \mu_{xb}, \, x \in \mathbb{V} - A.$$

Vidi se da vrijedi $\mu'_{xa} \leq \mu_x < \infty$ te da je naš novi graf povezan ako je Γ povezan.

1.2 Koncept slučajne šetnje na grafovima

U ovom poglavlju povezujemo slučajne šetnje s grafovima, te uvodimo pojam povratnosti i prolaznosti. Prvo definiramo:

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{\mu_{xy}}{\mu_x}. \tag{1.1}$$

Neka je X diskretan Markovljev lanac $X = (X_n, n \geq 0, P^x, x \in \mathbb{V})$ s prijelaznom matricom $(\mathcal{P}(x, y))$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Ovdje je s P^x dan zakon razdiobe lanca s početnim stanje $X_0 = x$ i prijelaznim vjerojatnostima:

$$P^x(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathcal{P}(x, y).$$

X nazivamo **jednostavnom slučajnom šetnjom** na grafu (Γ, μ) i prijelaznom matricom $(\mathcal{P}(x,y))$. Motivacija za ovakvu definiciju prijelaznih vjerojatnosti je proporcionalnost težina. Što vrh ima vezu s većom težinom sa susjedom relativno s obzirom na ukupnu težinu vrha, to je veća vjerojatnost prelaska u taj susjedni vrh. Prethodna definicija nam daje novi način proučavanja grafova s težinama kao slučajnu šetnju čiji skup stanja predstavljaju vrhovi grafa, a prijelaze između stanja određuju težine grafa.

Uočimo da je $(\mathcal{P}(x,y))$ μ-simetričan[3]. Naime, uvrštavanjem iz definicije slijedi:

$$\mu_x \mathcal{P}(x,y) = \mu_y \mathcal{P}(y,x) = \mu_{xy}.$$

Uvodimo *prijelaznu vjerojatnost u n koraka*:

$$\mu_x \mathcal{P}_n(x,y) = P^x(X_n = y).$$

Lema 1.2.1. *Za $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{V}$ vrijedi:*

$$\mu_{x_0} P^{x_0}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mu_{x_n} P^{x_n}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Dokaz. Dokaz slijedi korištenjem Markovljevog svojstva[4], μ-simetričnosti od $\mathcal{P}$ i definicije uvjetne vjerojatnosti[5]. □

Definicija 1.2.2. ***Vrijeme dolaska u skup** A: Za $A \subset \mathbb{V}$ definiramo vremena dolaska u skup A :*

$$T_A = min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

$$T_A^+ = min\{n \geq 1 : X_n \in A\}$$

uz konvenciju min= ∞, odnosno $T_A = \infty \iff X$ nikad "pogađa" A. Isto tako, ako $X_0 \notin A$, tada je $T_A = T_A^+$.

Preko vremena dolaska se može definirati i vrijeme prvog izlaska iz skupa A:

$$\tau_A = T_{A^c} = min\{n \geq 0 : X_n \notin A\}.$$

Sljedeći teorem se dokazuje u teoriji Markovljevih lanaca i opisuje osnovno svojstvo koje ćemo kod slučajnih šetnji promatrati:

Teorem 1.2.3. *Neka je graf Γ povezan, lokalno konačan i beskonačan.*
***(T)** Sljedećih 5 uvjeta su ekvivalentni:*

---

[3] To svojstvo pokazuje da je lanac X reverzibilan.
[4] $P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_1 = x_1) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$
[5] $P(X = x | Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$

(a) Postoji $x \in \mathbb{V}$ *takav da je* $P\left(T_x^+ < \infty\right) < 1$.

(b) Za svaki $x \in \mathbb{V}$ *vrijedi* $P\left(T_x^+ < \infty\right) < 1$.

(c) Za svaki $x \in \mathbb{V}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(x,x) < \infty.$$

(d) Za sve $x, y \in \mathbb{V}$ *takvi da* $x \neq y$ *vrijedi ili* $P^x\left(T_y < \infty\right) < 1$ *ili* $P^y\left(T_x < \infty\right) < 1$.

(e) Za sve $x, y \in \mathbb{V}$,

$$P^x\left(X \text{ ''pogađa'' } y \textbf{ konačno} \text{ mnogo puta}\right) = P^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{(X_n=y)} < \infty\right) = 1.$$

***(R)** Sljedećih 5 uvjeta su ekvivalentni:*

(a) Postoji $x \in \mathbb{V}$ *takav da je* $P\left(T_x^+ < \infty\right) = 1$.

(b) Za svaki $x \in \mathbb{V}$ *vrijedi* $P\left(T_x^+ < \infty\right) = 1$.

(c) Za svaki $x \in \mathbb{V}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(x,x) = \infty.$$

(d) Za sve $x, y \in \mathbb{V}$ *vrijedi* $P^x\left(T_y < \infty\right) = 1$.

(e) Za sve $x, y \in \mathbb{V}$,

$$P^x\left(X \text{ ''pogađa'' } y \textbf{ beskonačno} \text{ mnogo puta}\right) = P^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{(X_n=y)} = \infty\right) = 1.$$

Ako lanac X (ili graf Γ) ima bar jedno od svojstava (T)(a)-(e) iz prethodnog teorema kažemo da je X ili Γ **prolazan**. Ako pak vrijedi jedno od svojstava (R)(a)-(e) iz prethodnog teorema kažemo da je X ili Γ **povratan**. Ovo su ključna svojstva lanca (grafa) koja ćemo dalje proučavati. Cilj nam je razvijati metode i tehnike za dokazivanje ovih svojstava.

Idući teorem povezuje pojmove prolaznosti/povratnosti s jednim od naših primjera.

Teorem 1.2.4. $\mathbb{Z}^d$ *je povratan za* $d \leq 2$ *i prolazan za* $d \geq 3$.

Postoje razni dokazi teorema od kojih je najčešći kombinatorni dokaz. Mi ćemo ovaj teorem kasnije dokazati koristeći teoriju električnih mreža.

1.3 Grube izometrije

Zanima nas kako je geometrija grafa Γ povezana s dugoročnim ponašanjem (ili svojstvima) lanca X. Želimo razviti tehnike koje su *stabilne* na određene perturbacije grafa.
Zato definiramo pojmove poput stabilnosti na perturbacije i izometrija.

Definicija 1.3.1. *Neka je P neko svojstvo grafa s težinama (Γ, μ) ili lanca X. Kažemo da je P* ***stabilno na ograničene perturbacije težina*** *ako za svaki graf (Γ, μ) koji zadovoljava svojstvo P i za μ' težine na Γ za koje vrijedi:*

$$c^{-1}\mu_{xy} \leq \mu'_{xy} \leq c\mu_{xy}, \quad x, y \in \mathbb{V},$$

tada (Γ, μ') ima svojstvo P.
Kažemo tada da su težine μ i μ' ekvivalentne.

Definicija 1.3.2 (Gruba izometrija između metričkih prostora)**.** *Neka su $(X_i, d_i), i = 1, 2$ metrički prostori. Preslikavanje $\varphi : X_1 \to X_2$ je* ***gruba izometrija*** *ako postoje konstante C_1, C_2 takve da vrijedi:*

$$C_1^{-1}(d_1(x, y) - C_2) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C_1(d_1(x, y) + C_2), \tag{1.2}$$

$$\cup_{x\in X_1} B_{d_2}(\varphi(x), C_2) = X_2. \tag{1.3}$$

Gruba izometrija između dva prostora implicira da ti prostori imaju istu makroskopsku strukturu. Međutim, kako bismo mogli iskorisiti grubu izometričnost, trebaju nam neka od svojstava lokalne regularnosti, primjerice ograničene težine. Za grafove s težinama pokazati će se da je svojstvo kontroliranih težina dovoljno svojstvo koje nam je potrebno.

Lema 1.3.3. *Pretpostavimo da graf s težinama (Γ, μ) ima svojstvo* ***kontroliranih težina*** *(Definicija 1.1.2) s konstantom C_2. Tada graf ima ograničenu geometriju (pogledaj u Poglavlje 1.1) i vrijedi za $n \geq 0, |B(x, n)| \leq 2C_2^n,\ \mu(B(x, n)) \leq 2C_2^n\mu_x$.*

Dokaz. Svojstvo kontroliranih težina nam daje: $\mu_{xy} \geq \frac{\mu_x}{C_2}$ ako je $x \sim y$. Koristeći to svojstvo imamo: $\mu_x = \sum_{x\sim y}\mu_{xy} \geq |N(x)|\frac{\mu_x}{C_2}$, a to povlači $|N(x)| \leq C_2$, odnosno svojstvo ograničene geometrije.
Mora vrijediti $C_2 \geq 2$ osim ako nije $|\mathbb{V}| \leq 2$. Tada definiramo $S(x, n) = \{y : d(x, y) = n\}$ te vrijedi (koristeći ograničenu geometriju grafa):

$$|S(x, n)| \leq \sum_{y\in S(x,n-1)} N(y) \leq C_2|S(x, n-1)| \leq (induktivno) \leq C_2^n|S(x, 0)| = C_2^n,$$

$$|B(x, n)| = \sum_{k=0}^{n} S(x, k) \leq \sum_{k=0}^{n} C_2^k = \frac{C_2^{n+1} - 1}{C_2 - 1} \leq 2C_2^n,$$

jer je $C_2 \geq 2$. Dalje imamo:

$$\mu(B(x,1)) = \mu(N(x)) = \sum_{y \sim x} \mu_y \leq C_2 \sum_{y \sim x} \mu_{xy} = C_2 \mu_x.$$

Sada indukcijom slijedi zadnja tvrdnja leme. $\square$

Definicija 1.3.4. *(Gruba izometrija između grafova) Neka su* $(\Gamma_i, \mu_i), i = 1, 2$ *grafovi s težinama koji imaju svojstvo kontroliranih težine (1.1.2). Preslikavanje* $\varphi : X_1 \to X_2$ *je* ***gruba izometrija*** *između grafova ako:*

(1) φ *je gruba izometrija između metričkih prostora* $(\mathbb{V}_1, d_{\Gamma_1})$ *i* $(\mathbb{V}_2, d_{\Gamma_2})$ *s konstantama* C_1 *i* C_2.

(2) postoji $C_3 < \infty$ *takav da za svaki* $x \in \mathbb{V}_1$ *vrijedi:*

$$C_3^{-1} \mu_1(x) \leq \mu_2(\varphi(x)) \leq C_3 \mu_1(x). \tag{1.4}$$

Koristeći prethodnu lemu i definiciju grube izometrije na grafovima, možemo odrediti odnose mjera kugli na dvama grafovima.
Kažemo da su dva grafa *grubo izometrična* ako postoji gruba izometrija između njih. Sada možemo definirati **stabilnost svojstva P s obzirom na grube izometrije** slično kao u Definiciji 1.3.1.

Poglavlje 2

Prijelazne gustoće, Laplacian i Dirichlet-ova forma

2.1 Prijelazne gustoće i Laplacian

Definiramo prijelaznu gustoću lanca X s obzirom na mjeru μ ili toplinsku jezgru grafa Γ:

$$p_n(x,y) = \frac{\mathcal{P}_n(x,y)}{\mu_y} = \frac{P_n^x(X_n = y)}{\mu_y}.$$

Uočimo da je $p_0(x,y) = \frac{1_x(y)}{\mu_x}$ i $p(x,y) = p_1(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{\mu_x \mu_y}$. Prijelazne gustoće predstavljaju prijelazne vjerojatnosti normirane s težinom vrha u koji prelazimo. Sada navodimo neka svojstva prijelaznih gustoća:

Lema 2.1.1. *(i)* $p_{n+m}(x,y) = \sum_z p_n(x,z)\, p_m(z,y)\mu_z$,

(ii) $p_1(x,y) = p_1(y,x)$,

(iii) $\sum_y p_n(x,y)\,\mu_y = \sum_x p_n(x,y)\,\mu_x = 1$.

Napomena 2.1.2. *Dajemo skicu dokaza leme:*
(i) korištenjem sljedećeg svojstva prijelaznih vjerojatnosti Markovljevih lanaca: $\mathcal{P}_{n+m}(x,y) = \sum_z \mathcal{P}_n(x,z)\mathcal{P}_m(z,y)$.
(ii) slijedi iz definicije prijelaznih vjerojatnosti: $\mathcal{P}_n(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{\mu_x}$.
(iii) slijedi iz $\sum_y \mathcal{P}_n(x,y) = 1$ *te korištenjem definicije prijelazne gustoće.*

Definiramo prostora funkcija koje ćemo promatrati:

- $C(\mathbb{V}) = \mathbb{R}^{\mathbb{V}} = \{f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}\}$

- $C_0(\mathbb{V}) = \mathbb{R}^{\mathbb{V}} = \{f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}, f \textit{ ima konačan nosač}\}$
  pri čemu je $supp(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$.
- $C_+(\mathbb{V}) = \{f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_+\}$
- $C_{0,+} = C_0 \cap C_+$

Sada se prirodno uvodi pojam **norme** na $C(\mathbb{V})$ za $p \in [1, \infty\rangle$:

$$\|f\|_p^p = \sum_{x \in \mathbb{V}} |f(x)|^p \mu_x,$$

$$L^p(\mathbb{V}, \mu) = \{f \in C(\mathbb{V}) : \|f\|_p < \infty\}.$$

Napomena 2.1.3. *Dobro je uočiti da je $L^p(\mathbb{V}, \mu)$ "klasični" L^p prostor uz mjeru μ.*

Dalje možemo definirati **skalarni produkt** na $L^2(\mathbb{V}, \mu)$:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathbb{V}} f(x) g(x) \mu_x.$$

Praktično je i definirati niz operatora:

$$P_n f(x) = \sum_{y \in \mathbb{V}} \mathcal{P}_n(x, y) f(y) = \sum_{y \in \mathbb{V}} p_n(x, y) f(y) \mu_y = E^x f(X_n). \tag{2.1}$$

Lema 2.1.1 nam daje $P_n = P^n$.

Vjerojatnosni Laplacian[1] Δ je definiran na $C(\mathbb{V})$ s:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\mu_x} \sum_{x \in \mathbb{V}} \mu_{xy} (f(y) - f(x)) = \sum_y p(x, y)(f(y) - f(x)) \mu_y = E^x f(X_1) - f(x). \tag{2.2}$$

U operatorskom zapisu vrijedi: $\Delta = P - I$. S $\|A\|_{p \to p'}$ označavamo normu operatora s L^p u $L^{p'}$: $\|A\|_{p \to p'} = sup\{\|Af\|_{p'} : \|f\|_p \leq 1\}$.
Na vjerojatnosnim prostorima vrijedi $L^{p_2} \subset L^{p_1}$ ako je $p_2 > p_1$. Na diskretnim prostorima poput Γ vrijedi obratno uz uvjet da je μ_x omeđen odozdo.

Lema 2.1.4. *Uz pretpostavku $\mu_x \geq a > 0$ za svaki $x \in \mathbb{V}$, za $f \in C(\mathbb{V})$ i $p_2 > p_1$, tada vrijedi:*

$$\|f\|_{p_2} \leq a^{1/p_2 - 1} \|f\|_{p_1}.$$

[1] Postoji i kombinatorni Laplacian definiran kao: $\Delta_{Com} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{V}} \mu_{xy} (f(y) - f(x))$.

Dokaz. Zamjenom f s $\frac{f}{\|f\|_{p_1}}$, možemo pretpostaviti da je $\|f\|_{p_1} = 1$.

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = 1 = \sum_{x \in \mathbb{V}} |f(x)|^{p_1} \mu_x \implies |f(x)|^{p_1} \leq 1 \implies |f(x)|^{p_1} \mu_x \leq \frac{1}{\mu_x} \leq \frac{1}{a} \implies |f(x)| \leq a^{-\frac{1}{p_1}}.$$

$$\|f\|_{p_2}^{p_2} = \sum_x |f(x)|^{p_1} |f(x)|^{p_2 - p_1} \mu_x \leq \sum_x |f(x)|^{p_1} a^{-(p_2 - p_1)/p_1} \mu_x \leq a^{1 - p_2/p_1} \|f\|_{p_1}^{p_1} = a^{1 - p_2/p_1}.$$

□

Ako stavimo $p_n^x(\cdot) = p_n(x, \cdot)$, tada jednakosti iz Leme 2.1.1 možemo zapisati:

- $p_{n+m}(x, y) = \langle p_n^x, p_m^y \rangle$,
- $P p_n^x(y) = p_{n+1}^x(y)$
- $\Delta_n^x p(y) = (P - I) p_n^x(y) = p_{n+1}^x(y) - p_n^x(y)$.

2.2 Dirichlet-ova ili energijska forma

Za $f, g \in C(\mathbb{V})$ definiramo formu:

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{V}} \sum_{y \in \mathbb{V}} \mu_{xy} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)), \tag{2.3}$$

kad suma konvergira apsolutno, te prostor

$$H^2(\mathbb{V}, \mu) = H^2(\mathbb{V}) = H^2 = \{f \in C(\mathbb{V}) : \mathcal{E}(f, f) < \infty\}. \tag{2.4}$$

Ako odaberemo baznu točku $o \in \mathbb{V}$, možemo definirati:

$$\|f\|_{H^2}^2 = \mathcal{E}(f, f) + f(o)^2.$$

Sljedeća propozicija nam daje neka svojstva energijske forme:

Propozicija 2.2.1. *Neka je* $f \in H^2(\mathbb{V}, \mu)$.

(a) Ako za $x, y \in \mathbb{V}$ *vrijedi* $x \sim y$*, tada:*

$$|f(x) - f(y)| \leq \mu_{xy}^{-1/2} \mathcal{E}(f, f)^{1/2}.$$

(b) $\mathcal{E}(f, f) = 0 \iff f = const.$

(c) Ako je $f \in L^2$, tada

$$\mathcal{E}(f,f) \leq 2\|f\|_2^2,$$

što povlači $L^2 \subset H^2$.

Dokaz. (a)

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{x'\in\mathbb{V}}\sum_{y'\in\mathbb{V}} \mu_{x'y'}\left(f(x') - f(y')\right)^2 \geq \frac{1}{2}\mu_{yx}\left(f(x) - f(y)\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_{yx}\left(f(y) - f(x)\right)^2$$
$$= \mu_{xy}\left(f(x) - f(y)\right)^2$$

Sada lako slijedi prva tvrdnja.

(b) Ako je $\mathcal{E}(f,f) = 0$, iz prethodnog dijela slijedi da ako $x \sim y$, tada je $f(x) = f(y)$. S obzirom da je Γ povezan, slijedi da je f konstantna na $\mathbb{V}$.
Obratna tvrdnja se dobije trivijalnim uvrštavanjem $f = c$ za neki $c \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{x'\in\mathbb{V}}\sum_{y'\in\mathbb{V}} \mu_{x'y'}\left(f(x') - f(y')\right)^2$$
$$\leq \sum_{x'\in\mathbb{V}}\sum_{y'\in\mathbb{V}} \mu_{x'y'}\left(f(x')\right)^2 + \left(f(y')\right)^2 = 2\|f\|_2^2.$$

□

Sljedeća propozicija povezuje povezuje Laplacian i Dirichlet-ovu formu, te zapravo preslikava veći prostor H^2 u L^2.

Propozicija 2.2.2. *Neka je $f \in H^2$. Tada je $\Delta f \in L^2$ i vrijedi:*

$$\|\Delta f\|_2^2 \leq 2\mathcal{E}(f,f) \leq 4\|f\|_{H^2}^2. \tag{2.5}$$

Dokaz.

$$\|\Delta f\|_2^2 = \sum_x |\Delta f(x)|^2 \mu_x$$
$$= \sum_x \mu_x^{-1}\Big(\sum_y \left(f(y) - f(x)\right)\mu_{xy}\Big)^2$$
$$\leq \sum_x \mu_x^{-1}\Big(\sum_y \left(f(y) - f(x)\right)^2 \mu_{xy}\Big)\Big(\sum_y \mu_{xy}\Big)$$
$$= \sum_x \sum_y \left(f(y) - f(x)\right)^2 \mu_{xy} = 2\mathcal{E}(f,f).$$

Desna nejednakost se dobije primjenom Propozicije 2.2.1. □

Teorem 2.2.3 (Diskretni Gauss-Green-ov teorem)**.** *Neka $f, g \in C(\mathbb{V})$ zadovoljavaju:*

$$\sum_{x\in\mathbb{V}}\sum_{y\in\mathbb{V}} |g(x)||f(x)-f(y)|\mu_{xy} < \infty. \tag{2.6}$$

Tada vrijedi:

$$\mathcal{E}(f,g) = -\sum_x (\Delta f(x))\, g(x)\, \mu_x, \tag{2.7}$$

i suma u (2.2) konvergira apsolutno. Isto vrijedi i ako je $f \in H^2$ i $g \in L^2$, ili ako je bar jedan od f, g u $C_0(\mathbb{V})$ (konačan nosač).

Dokaz. Uvjet (2.6) nam daje apsolutnu konvergenciju obe strane jednakosti (2.2). Naime, imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f,g) = &\frac{1}{2}\sum_x\sum_y (f(y)-f(x))\, g(y)\, \mu_{xy}\\ &-\frac{1}{2}\sum_x\sum_y (f(y)-f(x))\, g(x)\, \mu_{xy}.\end{aligned}$$

te obe sume na desnoj strani konvergiraju apsolutno zbog (2.6). Dalje, zamjenom indeksa x i y u drugoj sumi te koristeći simetriju težina na grafu $\mu_{xy} = \mu_{yx}$ imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f,g) &= -\sum_x\sum_y (f(y)-f(x))\, g(x)\, \mu_{xy} = -\sum_x g(x)\sum_y (f(y)-f(x))\, \mu_{xy}\\ &= -\sum_x g(x)\, \Delta f(x)\, \mu_x.\end{aligned}$$

□

Jednakost možemo zapisati i u ovom obliku: $\mathcal{E}(x,y) = \langle -\Delta f, g\rangle$.
Primjenimo to na p_n^x, p_m^y (jer imaju konačan nosač):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(p_n^x, p_m^y) &= \langle \Delta p_n^x, p_m^y\rangle = \langle p_n^x - p_{n+1}^x, p_m^y\rangle\\ &= p_{n+m}(x,y) - p_{n+m+1}(x,y).\end{aligned}$$

$\mathcal{E}(f,f)$ se može smatrati **energijom funkcije** f.

Poglavlje 3

Teorija električnih mreža

3.1 Koncept električnih mreža na grafovima

Neformalno, električna mreža je skup žica i čvorova. Graf s težinama $\Gamma(\mathbb{V}, E, \mu)$ možemo prirodno interpretirati kao električnu mrežu: vrhovi su 'čvorovi', a brid $\{x, y\}$ možemo shvatiti kao žicu između čvorova x i y s provodljivošću μ_{xy}.

Definicija 3.1.1. *Tok na grafu Γ je preslikavanje $I : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ takvo da je:*

$$\begin{aligned} I_{xy} &= 0 \text{ ako } x \nsim y, \\ I_{xy} &= -I_{yx} \text{ za sve } x, y. \end{aligned}$$

Za brid $\{x, y\}$ uzimamo *otpor* jednak μ_{xy}^{-1} (zato težine μ_{xy} zovemo provodljivostima). Ako vrhovi x, y imaju **potencijale** $f(x), f(y)$ respektivno, tada Ohm-ov zakon daje jakost električne struje kao:

$$I_{xy} = \mu_{xy} (f(y) - f(x)) \tag{3.1}$$

te osipanje snage kao:

$$\mu_{xy} (f(y) - f(x))^2 . \tag{3.2}$$

Uočimo da zbrajanjem (3.2) po svim bridova dobijemo $\mathcal{E}(f, f)$.
U našem razmatranju teorije električnih mreža uzimamo potencijal f kao naš polazni objekt i iz njega izvodimo jakost električne struje. Moguća je i obratna konstrukcija.

Definicija 3.1.2. *(a) Neka je $f \in C(\mathbb{V})$. Definiramo tok ∇f kao:*

$$(\nabla f)_{xy} = \mu_{xy} (f(y) - f(x)) . \tag{3.3}$$

(b) Za dani tok I definiramo:

$$Div\, I(x) = \sum_{x \sim y} I_{xy}; \tag{3.4}$$

$$div\, I(x) = \frac{Div\, I(x)}{\mu_x}. \tag{3.5}$$

$Div\, I(x)$ zovemo ukupnim tokom kroz x, a $div\, I(x)$ gustoćom od Div s obzirom na μ. Za tok I i $A \subset \mathbb{V}$ možemo definirati ukupni tok kroz skup A kao:

$$Flux(I; A) = \sum_{x \in A} Div\, I(x). \tag{3.6}$$

Sljedeća lema povezuje prethodnu definiciju s Laplacianom:

Lema 3.1.3. *Za $f \in C(\mathbb{V})$ vrijedi $div \nabla f(x) = \Delta f(x)$.*

Dokaz. Koristeći (3.3) i (3.4) te prisjećajući se (2.2) imamo:

$$div \nabla f(x) = \mu_x^{-1} \sum_{y \sim x} (\nabla f)_{xy} = \mu_x^{-1} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} (f(y) - f(x)) = \Delta f(x).$$

□

Ponašanje toka u mreži je opisano dvama Kirchoff-ovim zakonima.
Prvi Kirchoff-ov zakon kaže da za $x \in \mathbb{V}$, uz pretpostavku da ne postoje drugi tokovi koji ulaze ili izlaze iz x, vrijedi:

$$Div\, I(x) = \sum_{x \sim y} I_{xy} = 0. \tag{3.7}$$

Drugi Kirchoff-ov zakon kaže da za ciklus $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ u $\mathbb{V}$ vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{x_{i-1},x_i}^{-1} I_{x_{i-1},x_i} = 0. \tag{3.8}$$

Napomena 3.1.4. *Uočimo da za proizvoljan tok struje I iz Kirchoff-ovih zakona slijedi* ***egzistencija potencijala*** *f na $\mathbb{V}$ takvog da je $I = \nabla f$. Potencijal f je jedinstven do na aditivnu konstantu.*
Dokaz ide induktivno na sljedeći način: neka je $x_0 \in \mathbb{V}$, postavimo $f(x_0) = 0$. Pretpostavimo da smo f definirali na $A \subset \mathbb{V}$. Ako je $x \in A$ i $y \sim x$ za $y \in A^c$, definiramo $f(y) = f(x) + \mu_{xy}^{-1} I_{xy}$. Uvjet (3.8) nam osigurava da je f dobro definirana.

Za stvaranje struje u električnoj mreži potreban je izvor struje. Pošto nam je cilj iskoristiti teoriju električnih mreža za proučavanje svojstava grafa Γ, fiksiramo graf Γ kao pasivnu mrežu i dopuštamo postojanje vanjskih izvora struje na razne načine.
Neka je $D \subset \mathbb{V}$. Pretpostavljamo da postoji potencijal f_0 na $\mathbb{V} - D$ (dodavanjem vanjskog izvora struje) i puštamo da struja teče kroz D prema Kirchoff-ovim zakonima. Neka je $f \in C(\mathbb{V})$ rezultirajući potencijal. Prema Ohm-ovom zakonu struja od x prema y je $(\nabla f)_{xy}$. Za $x \in D$, očuvanje struje nam daje:

$$div \nabla f(x) = 0.$$

Lema 3.1.3 nam daje $\Delta f(x) = 0$[1]. Stoga je funkcija f rješenje **Dirichlet-ovog problema**:

$$f(x) = f_0(x) \text{ na } \mathbb{V} - D, \tag{3.9}$$

$$\Delta f(x) = 0 \text{ na } D. \tag{3.10}$$

Lema 3.1.5. *Neka je f proizvoljno rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9). Tada $I = \nabla f$ zadovoljava Kirchoff-ove zakone (3.7) i (3.8).*

Dokaz. S obzirom da je I gradijent funkcije, za ciklus $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ u $\mathbb{V}$ vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^{-1}_{x_{i-1},x_i} I_{x_{i-1},x_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu^{-1}_{x_{i-1},x_i} (\nabla f)_{x_{i-1},x_i} = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = 0,$$

odnosno vrijedi (3.8). Dalje, iz Leme 2.1.1 za $x \in D$ vrijedi:

$$Div\, I(x) = \mu_x div\, I(x) = \mu_x div\, \nabla f(x) = \mu_x \Delta f(x) = 0.$$

$\square$

Pretpostavimo da je f_0 ograničena funkcija i prisjetimo se vremena izlaska iz skupa D τ_D iz Definicije 1.2.2. Tada definiramo:

$$\varphi(x) = E^x(f_0(X_{\tau_D}) 1_{\{\tau_D < \infty\}}). \tag{3.11}$$

Teorem 3.1.6. *Neka su D i φ definirani kao gore. Tada vrijedi:*

(a) φ je rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9).

(b) Ako je D konačan, tada je φ je ***jedinstveno*** *rješenje problema (3.9).*

(c) Ako je $P^x(\tau_D < \infty) = 1$ za sve $x \in \mathbb{V}$, tada je φ jedinstveno ograničeno rješenje problema (3.9).

[1] Za funkciju f za koju vrijedi $\Delta f(x) = 0$ za svaki x, kažemo da je *harmonijska*.

Dokaz. (a) Ako je $x \in D$ iz Markovljevog svojstva te definicije operatora (2.1) slijedi:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= E^x(f_0(X_{\tau_D})\, 1_{\{\tau_D<\infty\}}) = \sum_y E^x(f_0(X_{\tau_D})\,; X_1 = y, \tau_D < \infty) \\ &= \sum_y \mathcal{P}(x,y)\, E^y(f_0(X_{\tau_D}), \tau_D < \infty) = \sum_y \mathcal{P}(x,y)\,\varphi(y) = P\varphi(x).\end{aligned}$$

Sada s obzirom da vrijedi: $\Delta = P - I$, slijedi $\Delta\varphi(x) = (P - I)\,\varphi(x) = 0$.
(b) Neka je φ' još jedno rješenje Dirichlet-ovog problema, tada definiramo $h := \varphi - \varphi'$. Na skupu D vrijedi $\Delta h = \Delta\varphi - \Delta\varphi' = 0$, a na $\mathbb{V} - D$ je $h = 0$. Preostalo nam je pokazati da je $h = 0$ i na D.
Kako je $h \in C_0(\mathbb{V})$, primjenimo diskretni Gauss-Green-ov teorem (Teorem 2.2.3):

$$\mathcal{E}(h,h) = -\sum_x (\Delta h(x))\, h(x)\, \mu_x = 0.$$

Propozicija 2.2.1 daje da je h konstanta, pa nužno mora biti $h = 0$ jer već znamo da je $h = 0$ na $\mathbb{V} - D$.
(c) Budući da je f_0 ograničena, tada su φ i φ' ograničena rješenja Dirichlet-ove zadaće. Naravno, tada je i $h = \varphi - \varphi'$ ograničena funkcija. Stoga je $M_n = h(X_n)$ ograničen martingal, te po teoremu o opcionalnom zaustavljanju vrijedi:

$$h(x) = E^x M_0 = E^x M_{\tau_D} = 0,$$

pa je $h = 0$. □

Napomena 3.1.7. *Ako je $\mathbb{V}$ prolazan i D beskonačan, tada je može vrijediti: $h_D(x) = P^x(\tau_D = \infty) > 0$ za neke $x \in D$. U tom slučaju nemamo jedinstvenost rješenja problema (3.9) jer je za svaki λ, funckija $\varphi + \lambda h_D$ također rješenje problema (3.9). Stoga, za jedinstveno rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9) nije dovoljno odrediti potencijal f i tok I koji slijede iz potencijala f_0 na ∂D.*

Lema 3.1.8. *Neka je I tok struje na $\mathbb{V}$ s konačnim nosačem. Tada je:*

$$\sum_{x\in\mathbb{V}} Div\, I(x) = 0.$$

Dokaz. Neka je A skup vrhova x takav da je $I_{xy} \neq 0$ za neki $y \sim x$. Kako je A konačan (zbog konačnog nosača),

$$\sum_{x\in\mathbb{V}} Div\, I(x) = \sum_{x\in A} Div\, I(x) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in A} I_{xy} = -\sum_{x\in A}\sum_{y\in A} I_{yx} = -\sum_{y\in A} Div\, I(y) = -\sum_{y\in\mathbb{V}} Div\, I(y).$$

□

Napomena 3.1.9. *U dokazu leme možemo zamijeniti poredak suma jer je nosač konačan. Kad nemamo konačan nosač, zamjena poretka suma ne mora nužno vrijediti. Primjerice, za graf $\mathbb{N}$ s tokom $I_{n,n+1} = 1$ za sve n; $Div\, I(n) = 0$ za sve $n \geq 2$, ali $Div\, I(1) = 1$.*

3.2 Prolaznost i povratnost

Neka su B_0, B_1 dva neprazna disjunktna podskupa od $\mathbb{V}$ i pretpostavimo da je $D = V - (B_0 \cup B_1)$ konačan. Neka je $f_0 = 1_{B_1}$ i neka je φ jedinstveno rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9), dano s (3.11). Neka je $V - D = B_0 \cup B_1$ (uz $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, $f_0 = 0$ na B_0 i $f_0 = 1$ na B_1). Tada je:

$$\varphi(x) = P^x(T_{B_1} < T_{B_0}). \tag{3.12}$$

Neka je $I = \nabla\varphi$ pripadni tok struje. Kako je $0 \le \varphi \le 1$ te prema Lemi 3.1.3 vrijedi $Div\, I(x) = \mu_x \Delta\varphi(x)$, imamo:

$$x \in B_0 \implies \varphi(x) = 0 \implies Div\, I(x) = \sum_{y\sim x} I_{xy} = \sum_{y\sim x} \mu_{xy}(\varphi(y) - \varphi(x)) \ge 0,$$
$$y \in B_1 \implies \varphi(y) = 1 \implies Div\, I(y) = \sum_{x\sim y} I_{yx} = \sum_{x\sim y} \mu_{yx}(\varphi(x) - \varphi(y)) \le 0,$$
$$z \in D = V - (B_0 \cup B_1) \implies \Delta\varphi(z) = 0 \implies Div\, I(z) = \mu_z \Delta\varphi(z) = 0,$$

pri čemu zadnja implikacija vrijedi jer je φ rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9).
Koristeći Lemu 3.1.8 (jer konačnost mreže implicira i konačnost nosača iz uvjeta leme) uočavamo vezu između protoka kroz skupove B_0 i B_1:

$$Flux(I; B_0) = \sum_{x\in B_0} Div\, I(x) = -\sum_{x\in B_1} Div\, I(x) = -Flux(I; B_1).$$

Definicija 3.2.1. *Neka je $\mathbb{V}$ konačan.* ***Efektivni otpor konačne mreže između*** B_0 ***i*** B_1, *u oznaci $R^{FN}_{eff}(B_0, B_1)$, definiramo kao $Flux(I; B_0)^{-1}$, pri čemu je I tok struje koji teče iz B_0 u B_1 kad držimo potencijal u B_0 na 0, a potencijal u B_1 na 1.*

Teorem 3.2.2. *Neka je $B_0 \subset A \subset \mathbb{V}$ pri čemu je A konačan. Tada je*

$$\sum_{x\in B_0} P^x\left(\tau_A < T^+_{B_0}\right)\mu_x = \frac{1}{R^{FN}_{eff}(B_0, \mathbb{V} - A)}. \tag{3.13}$$

Dokaz. Neka je $D = A - B_0$, $B_1 = \mathbb{V} - A$, φ kao u (3.12) i $I = \Delta\varphi$. Neka je $x \in B_0$. Tada je $\varphi(x) = 0$ te koristeći (1.1) vrijedi:

$$\begin{aligned} Div\, I(x) &= \sum_{y\sim x} \varphi(y)\mu_{xy} = \sum_{y\sim x} \mu_{xy} P^y(T_{B_1} < T_{B_0}) \\ &= \mu_x \sum_{y\sim x} \mathcal{P}(x,y) P^y(T_{B_1} < T_{B_0}) = \mu_x P^x(T_{B_1} < T_{B_0}). \end{aligned}$$

Sumiranjem lijeve strane po svim $x \in B_0$ dobijemo $Flux(I; B_0)$ pa tvrdnja teorema slijedi iz Definicije 3.2.1. $\square$

Napomena 3.2.3. *Kao poseban slučaj gornjeg teorema za $x_0 \in A$ (A konačan) imamo:*

$$R^{FN}_{eff}(x_0, \mathbb{V} - A) = \frac{1}{P^{x_0}\left(\tau_A < T^+_{x_0}\right)\mu_{x_0}}.$$

Sada nas zanima kako definirati efektivni otpor na beskonačnom grafu s obzirom da su beskonačni grafovi objekti koju su nam zanimljiviji za proučavanje u kontekstu slučajnih šetnji.

Definicija 3.2.4. *Neka je (Γ, μ) **beskonačni** graf s težinama te neka je $B_0 \subset \mathbb{V}$ i $A_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$ takav[2] da je $B_0 \subset A_1$. Definiramo:*

$$R_{eff}(B_0, \infty) = \lim_n R^{FN}_{eff}(B_0, A^c_n). \tag{3.14}$$

Napomena 3.2.5. *Uočimo da je $D = \mathbb{V} - (B_0 \cup A^c_n) \subset A_n$. S obzirom da je A_n konačan, zaključujemo da je D konačan. Isto tako je i B_0 konačan (jer je podskup konačnog skupa A_1), pa je izraz unutar limesa dobro definiran, odnosno u skladu s Definicijom 3.2.1.*

Prirodno se postavlja pitanje dobre definicije efektivnog otpora u beskonačnosti. Iduća lema daje odgovor na to pitanje i daje bitno svojstvo efektivnog otpora.

Lema 3.2.6. *(a) Ako je $B_0 \subset D_1 \subset D_2$ i ako je D_2 konačan, tada vrijedi:*

$$R^{FN}_{eff}(B_0, D^c_1) \leq R^{FN}_{eff}(B_0, D^c_2). \tag{3.15}$$

(b) $R_{eff}(B_0, \infty)$ ne ovisi o nizu (A_n) koji odaberemo.

Dokaz. (a) Kako vrijedi $\tau_{D_1} \leq \tau_{D_2}$ jer je $D_1 \subset D_2$, slijedi da vrijedi i $P^x\left(\tau_{D_1} < T^+_{B_0}\right)\mu_x \geq P^x\left(\tau_{D_2} < T^+_{B_0}\right)\mu_x$. Sumiranjem po $x \in B_0$ i koristeći Teorem 3.2.2 slijedi (a) tvrdnja.
(b) Neka je A'_n neki drugi niz takav da $A'_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$. Označimo limese nizova u (3.14) za nizove A_n i A'_n s R i R' respektivno. Za dani n postoji m_n takav da $A_n \subset A'_{m_n}$ jer oba niza rastu prema $\mathbb{V}$. Stoga koristeći (a) dio imamo:

$$R^{FN}_{eff}(B_0, A^c_n) \leq R^{FN}_{eff}\left(B_0, \left(A'_{m_n}\right)^c\right) \leq \lim_n R^{FN}_{eff}\left(B_0, \left(A'_{m_n}\right)^c\right) = R'.$$

Puštanjem $n \to \infty$ imamo $R \leq R'$. Zbog simetričnosti potpuno analogno slijedi $R' \leq R$. □

Napomena 3.2.7. *Povežimo svojstvo (a) Leme 3.2.6 s Definicijom 3.2.2. S obzirom da $A_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$ označava rastući niz konačnih skupova A_n (odnosno $A_n \subset A_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$), slijedi da je niz $R^{FN}_{eff}(B_0, A^c_n)$ rastući niz (po n). Da bi takav niz konvergirao, mora biti omeđen.*

---

[2] Izraz $A_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$ označava konvergenciju prema $\mathbb{V}$ za A_n rastući niz konačnih skupova takvih da je $\cup_n A_n = \mathbb{V}$

Sljedeći teorem daje karakterizaciju povratnosti/prolaznosti preko efektivnog otpora u beskonačnosti:

Teorem 3.2.8. *Neka je* (Γ, μ) *beskonačni graf s težinama.*

(a) Za svaki $x \in \mathbb{V}$ *vrijedi:*

$$\mu_x P^x (T_x^+ = \infty) = \frac{1}{R_{eff}(x, \infty)}. \tag{3.16}$$

(b) (Γ, μ) *je povratan ako i samo ako je* $R_{eff}(x, \infty) = \infty$.

(c) (Γ, μ) *je prolazan ako i samo ako je* $R_{eff}(x, \infty) < \infty$.

Dokaz. (a) Neka je $B_0 = \{x\}$ za proizvoljan $x \in \mathbb{V}$, te A_n niz konačnih skupova u $\mathbb{V}$ tako da je $x \in A_n$ i $A_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$. Tada iz Teorema 3.2.2 slijedi:

$$\mu_x P^x (\tau_{A_n} < T_x^+) = \frac{1}{R_{eff}^{FN}(x, A_n^c)}$$

Djelovanjem s $\lim_n$ na prethodnu jednakost te koristeći Definiciju 3.2.4 slijedi tvrdnja s obzirom da $A_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$.
(b) Iz Teorema 1.2.3 slijedi da je graf povratan ako i samo ako je $P(T_x^+ < \infty) = 1$. To implicira da je $P(T_x^+ = \infty) = 0$. Koristeći (a) dio slijede oba smjera dokaza.
(c) Iz Teorema 1.2.3 slijedi da je graf prolazan ako i samo ako je $P(T_x^+ < \infty) < 1$. To implicira da je $P(T_x^+ = \infty) > 0$. Koristeći (a) dio slijede oba smjera dokaza. □

Poglavlje 4

Energijski i varijacijski problemi

U ovom poglavlju razvijamo teoriju varijacijskih problema koji će nam biti korisni za dokazivanje nekih svojstava električnih mreža i prolaznosti/povratnosti.

4.1 Varijacijski problem 1

Neka je (Γ, μ) graf s težinama, $B_0, B_1 \subset \mathbb{V}$ takav da je $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. Definiramo novi potprostor funkcija koji ćemo razmatrati u varijacijskim problemima:

$$\mathcal{V}(B_0, B_1) = \{f \in H^2(\mathbb{V}) : f|_{B_1} = 1, f|_{B_0} = 0\}. \tag{4.1}$$

Na tom potprostoru promatramo sljedeći varijacijski problem:

$$C_{eff}(B_0, B_1) = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in \mathcal{V}(B_0, B_1)\}. \tag{4.2}$$

$C_{eff}(B_0, B_1)$ nazivamo **efektivnom provodljivošću** između B_0 i B_1 i pokazat će se da je recipročno $R_{eff}^{FN}(B_0, B_1)$ (u slučajevima kad je $R_{eff}^{FN}(B_0, B_1)$ dobro definirana).

Napomena 4.1.1. *Ako je $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$, tada je $\mathcal{V}(B_0, B_1) = \emptyset$, pa u tom slučaju stavimo da je $C_{eff}(B_0, B_1) = \infty$.*

Lema 4.1.2. *(a) $C_{eff}(B_0, B_1) = C_{eff}(B_1, B_0)$.*

(b) $C_{eff}(B_0, B_1) < \infty$ ako je jedan od B_0 i B_1 konačan te vrijedi $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.

(c) $C_{eff}(B_0, B_1)$ je rastući po B_0 i B_1.

Dokaz. (a) Neka je $f \in \mathcal{V}(B_0, B_1)$. Ako definiramo $g := 1 - f$, lako se vidi da je tada $g \in \mathcal{V}(B_1, B_0)$. Isto tako, direktnim uvrštavanjem u definiciju energijske forme vidi se da vrijedi i $\mathcal{E}(f, f) = \mathcal{E}(g, g)$. Dobili smo bijektivno preslikavanje skupova, pa vrijedi tvrdnja o jednakosti infimuma.

(b) Iz (a) dijela imamo simetriju, pa je dovoljno dokazati da tvrdnja vrijedi ako je B_1 konačan. Stavimo $f = 1_{B_1}$, pa imamo $\mathcal{E}(f, f) = \mu(B_1) < \infty$ zbog lokalne konačnosti grafa, stoga vrijedi tvrdnja.

(c) Zbog simetrije iz (a) dijela, tvrdnju je dovoljno dokazati za B_1. S obzirom da je $\mathcal{V}\left(B_0, B_1'\right) \subset \mathcal{V}(B_0, B_1)$ za $B_1 \subset B_1'$, slijedi tvrdnja.

□

Napomena 4.1.3. *Hilbertov prostor je potpuni metrički prostor sa skalarnim produktom koji inducira danu metriku.*

Sada dokazujemo teorem o svojstvima na Hilbertovim prostorima koji će nam biti koristan za rješavanje varijacijskog problema (4.2).

Teorem 4.1.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \subset \mathcal{H}$ neprazan zatvoren i konveksan podskup.*

(a) Postoji jedinstveni $g \in A$ s minimalnom normom.

(b) Ako je (f_n) niz u A takav da $\|f_n\| \to \|g\|$, tada i $f_n \to g$ u $\mathcal{H}$.

(c) Ako je $h \in \mathcal{H}$ i postoji $\delta > 0$ takav da je $g + \lambda h \in A$ za sve $|\lambda| < \delta$, tada je $\langle h, g\rangle = 0$.

Dokaz. (a) Uočimo da minimum postoji jer je A zatvoren i $\|\cdot\|$ neprekidno preslikavanje omeđeno odozdo. Neka je:

$$M = \inf\{\|f\|^2 : f \in A\}.$$

Neka su $g_1, g_2 \in A$ takvi da $\|g_i\|^2 \leq M + \epsilon$, $i = 1, 2$ za neki $\epsilon \geq 0$. Kako je A konveksan, slijedi da je $h := \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in A$ pa imamo:

$$4M \leq \langle 2h, 2h\rangle = \|g_1\|^2 + 2\langle g_1, g_2\rangle + \|g_2\| \leq 2M + 2\epsilon + 2\langle g_1, g_2\rangle,$$

iz čega slijedi da je $-2\langle g_1, g_2\rangle \leq -2M + 2\epsilon$. Dalje:

$$\langle g_1 - g_2, g_1 - g_2\rangle \leq 2(M + \epsilon) - 2\langle g_1, g_2\rangle \leq 4\epsilon. \tag{4.3}$$

Iz toga slijedi da je minimalni element jedinstven.

(b) Neka je (f_n) niz u A za koji vrijedi $\|f_n\| \to M$, stavimo $\delta_n = \|f_n\|^2 - M$. Tada prema (4.3) imamo $\|f_n - f_m\| \leq 4(\delta_n \vee \delta_m)$, pa je (f_n) Cauchyjev niz koji konvergira prema f. Jer je $\|f\| = M$, tada je $f = g$.

(c) S obzirom da g ima minimalnu normu:

$$0 \leq \langle g + \lambda h, g + \lambda h \rangle - \langle g, g \rangle = 2\lambda \langle g, h \rangle + \lambda^2 \langle h, h \rangle.$$

S obzirom da ovo vrijedi za svaki $|\lambda| \leq \delta$, mora vrijediti: $\langle g, h \rangle = 0$.

□

Sljedeći teorem nam daje odgovor na varijacijski problem (4.2) te povezuje isti s Dirichlet-ovim problemom (3.9).

Teorem 4.1.5. *Pretpostavimo da je $C_{eff}(B_0, B_1) < \infty$.*

(a) Postoji jedinstveni f koji minimizira (4.2).

(b) f je rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ na } B_0 \\ f(x) &= 1 \text{ na } B_1 \\ \Delta f(x) &= 0 \text{ na } \mathbb{V} - (B_0 \cup B_1). \end{aligned}$$

Dokaz. (a) Promotrimo Hilbertov prostor $H^2(\mathbb{V})$ s baznom točkom $x_0 \in B_0$. Pokažimo da je $\mathcal{V} = \mathcal{V}(B_0, B_1)$ konveksan podskup od $H^2(\mathbb{V})$. Naime, za $g_1, g_2 \in \mathcal{V}$ te za proizvoljan $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi:

$$\mathcal{E}(\alpha g_1 + (1-\alpha) g_2, \alpha g_1 + (1-\alpha) g_2) \leq (\alpha \mathcal{E}(g_1, g_1) + (1-\alpha) \mathcal{E}(g_2, g_2))^2 < \infty.$$

Također, očito je: $(\alpha g_1 + (1-\alpha) g_2)|_{B_1} = 1$ i $(\alpha g_1 + (1-\alpha) g_2)|_{B_0} = 0$, pa je $\mathcal{V}$ konveksan.

Dalje, ako niz $(f_n) \subset \mathcal{V}$ konvergira prema f u $H^2(\mathbb{V})$, tada je $f \in \mathcal{V}$, pa je $\mathcal{V}$ zatvoren. Stoga po Teoremu 4.1.4 postoji jedinstveni f koji minimizira $\|g\|_{H^2(\mathbb{V})}$ pa time i $\mathcal{E}(g, g)$ po svim $g \in \mathcal{V}$.

(b) Potrebno je pokazati da za f vrijedi: $\Delta f(x) = 0$ na $\mathbb{V} - (B_0 \cup B_1)$. Uzmimo $x \in \mathbb{V} - (B_0 \cup B_1)$ i definirajmo $h(y) := 1_{\{x\}}(y)$. Tada za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ funkcija $f + \lambda h \in \mathcal{V}$, pa prema Teoremu 4.1.4 vrijedi $\mathcal{E}(f, h) = 0$. Kako je $h \in C_0(\mathbb{V})$ (ima konačan nosač), prema diskretnom Gauss-Green teoremu 2.2.3 slijedi:

$$0 = \mathcal{E}(f, h) = \mu_x \Delta f(x),$$

posebno i $\Delta f(x) = 0$.

□

Sljedeća propozicija govori o prelasku s grafova s konačnim brojem vrhova na grafove s beskonačnim brojem vrhova.

Propozicija 4.1.6. *Neka* $\mathbb{V}_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$. *Pišemo* $C_{eff}(\cdot,\cdot;\mathbb{V}_n)$ *za efektivnu provodljivost na* $\mathbb{V}_n$. *Tada za* $B_0, B_1 \subset \mathbb{V}$ *vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_n, B_1 \cap \mathbb{V}_n; \mathbb{V}_n) = C_{eff}(B_0, B_1). \tag{4.4}$$

Dokaz. Uočimo prvo da vrijedi:

$$\begin{aligned} C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_n, B_1 \cap \mathbb{V}_n; \mathbb{V}_n) &\le C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_n, B_1 \cap \mathbb{V}_n; \mathbb{V}_{n+1}) \\ &\le C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_{n+1}, B_1 \cap \mathbb{V}_{n+1}; \mathbb{V}_{n+1}) \\ &\le C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_{n+1}, B_1 \cap \mathbb{V}_{n+1}) \\ &\le C_{eff}(B_0, B_1). \end{aligned}$$

Prva i treća nejednakost vrijede jer za svaki $f \in C(\mathbb{V})$ vrijedi $\mathcal{E}_{\mathbb{V}_n}(f,f) \le \mathcal{E}_{\mathbb{V}_{n+1}}(f,f) \le \mathcal{E}(f,f)$. Druga i četvrta nejednakost vrijede zbog Leme 4.1.2.
Iz gornjeg razmatranja zaključili smo da je niz s lijeve strane jednakosti (4.4) monoton i ograničen odozgo pa je i konvergentan.
Neka je φ_n optimalno rješenje za (4.2) na $\mathbb{V}_n$ u kojem se poprima minimum $C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_n, B_1 \cap \mathbb{V}_n; \mathbb{V}_n)$.
Proširujemo φ_n na $\mathbb{V}$ s 0 na području izvan $\mathbb{V}_n$. Neka je $C = \lim_{n\to\infty} C_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_n, B_1 \cap \mathbb{V}_n; \mathbb{V}_n)$.
Ako je $C = \infty$, nemamo što dokazati. U suprotnom, $\mathcal{E}_{\mathbb{V}_n}(\varphi_n, \varphi_n)$ su uniformno ograničene, pa postoji podniz n_k takav da φ_{n_k} konvergira po točakama u $\mathbb{V}$ prema funkciji φ pa imamo:

$$\mathcal{E}(\varphi,\varphi) \le \liminf_n \mathcal{E}_{\mathbb{V}_n}(\varphi_n, \varphi_n) = C.$$

Jer φ_{n_k} konvergiraju prema φ i jer su φ_{n_k} optimalne funkcije za varijacijski problem (4.2) na $\mathbb{V}_{n_k}$, slijedi da je $\varphi = k$ na B_k za $k = 0, 1$ pa je φ dopustiva za varijacijski problem (4.2) na $\mathbb{V}$. Iz definicije $C_{eff}(B_0, B_1)$ i C vrijedi:

$$C_{eff}(B_0, B_1) \le \mathcal{E}(\varphi,\varphi) \le C,$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Dalje, vraćamo se na promatranje električnih mreža i želimo izgraditi teoriju na tokovima struje. Prvo definiramo Hilbertov prostor za tok struje. Neka je $\vec{E}$ skup svih usmjerenih bridova u $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$:

$$\vec{E} = \{(x,y) : \{x,y\} \in E\}.$$

Za tokove I i J definiramo:

$$E(I,J) = \frac{1}{2} \sum_x \sum_{y\sim x} \mu_{xy}^{-1} I_{xy} J_{xy} \tag{4.5}$$

unutrašnji produkt na prostoru $L^2\left(\vec{E}, \mu^{-1}\right)$. $E(I,I)$ zovemo **energijom osipanja struje I**.

Napomena 4.1.7. *Uočimo da za $f, g \in H^2$ vrijedi:*

$$E(\nabla f, \nabla g) = \mathcal{E}(f, g)\,. \tag{4.6}$$

Navodimo par tehničkih lema koje će nam biti korisne.

Lema 4.1.8. *Neka je I tok struje. Tada vrijedi: $\|divI\|_2^2 \leq 2E(I, I)$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}\|divI\|_2^2 &= \sum_x \mu_x (\sum_{y\sim x} \mu_x^{-1} I_{xy})^2 = \sum_x \mu_x^{-1} (\sum_{y\sim x} \mu_{xy}^{-1/2} I_{xy} \mu_{xy}^{1/2})^2 \leq \\ &\leq \sum_x \mu_x^{-1} (\sum_{y\sim x} \mu_{xy})(\sum_{y\sim x} \mu_{xy}^{-1} I_{xy}^2) = 2 \sum_x \sum_{y\sim x} \mu_{xy}^{-1} I_{xy}^2 = 2E(I, I)\,.\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili Cauchy-Schwartz-ovu nejednakost. □

Lema 4.1.9. *Neka je $f \in C(\mathbb{V})$ i I tok struje. Ako je $I \in L^2\left(\vec{E}\right)$ i $f \in L^2$, tada vrijedi:*

$$E(I, \nabla f) \leq E(I, I)^{1/2}\, \mathcal{E}(f, f)^{1/2}\,, \tag{4.7}$$

$$\langle -divI, f\rangle \leq \langle divI, divI\rangle^{1/2} \langle f, f\rangle^{1/2}. \tag{4.8}$$

Isto tako vrijedi:

$$E(I, \nabla f) = -\sum_x divI(x) f(x) \mu_x \tag{4.9}$$

ako vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

(a) I ili f imaju konačan nosač,

(b) $I \in L^2\left(\vec{E}\right)$ i $f \in L^2$,

(c) $I \in L^2\left(\vec{E}\right)$, $divI \in C_0$ i $f \in H_0^2$.

Dokaz. Prve dvije nejednakosti slijede primjenom Cauchy-Schwartz-ove nejednakosti slično kao u dokazu prethodne leme.

(a) Pretpostavimo da ili I ili f imaju konačan nosač u skupu A. Stavimo $A_1 = \bar{A}$ kao zatvarač od A. Tada iz (3.3) i (4.5) imamo:

$$\begin{aligned} E(I, \nabla f) &= \frac{1}{2}\sum_x \sum_{y\sim x} \mu_{xy}^{-1} I_{xy} (\nabla f)_{xy} = \frac{1}{2}\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1} I_{xy}(f(y) - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1} I_{xy} f(y) - \frac{1}{2}\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1} I_{xy} f(x) \\ &= -\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1} I_{xy} f(x) = -\sum_{x\in A_1} f(x) \sum_{y\in A_1} I_{xy} \\ &= -\sum_x f(x)\, divI(x)\, \mu_x = \langle -divI, f\rangle. \end{aligned}$$

pri čemu smo za zamjenu poretka suma koristili pretpostavku o konačnom nosaču te tvrdnju $I_{xy} = -I_{yx}$.

(b) Neka je $f_n \in C_0$ niz takav da $f_n \to f$ u L^2. Tada $f_n \to f$ u H^2. Iz (a) dijela vrijedi:

$$E(I, \nabla f_n) = -\langle divI, f_n\rangle$$

Sada zbog dviju nejednakosti u (4.8) te konvergencije niza u L^2 vrijedi:

$$\begin{gathered} E(I, \nabla f_n) \to E(I, \nabla f) \\ -\langle divI, f_n\rangle \to -\langle divI, f\rangle. \end{gathered}$$

pa vrijedi tvrdnja.

(c) Slijedi slično kao i (b) dio.

□

Sljedeći rezultat povezuje pojam **efektivne provodljivosti** C_{eff} s pojmom **efektivnog otpora** R_{eff}^{FN}.

Propozicija 4.1.10. *Pretpostavimo da je $\mathbb{V}$ konačan, $B_0, B_1 \subset \mathbb{V}$ takvi da je $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.*

(a) Jedinstvena funkcija koja rješava problem (4.2) je:

$$\varphi(x) = P^x\left(T_{B_1} < T_{B_0}\right).$$

(b) Tok $I = \nabla\varphi$ zadovoljava:

$$Flux(I; B_0) = \sum_{x\in B_0} DivI(x) = \mathcal{E}(\varphi, \varphi) = C_{eff}(B_0, B_1).$$

(c)

$$C_{eff}(B_0, B_1) = R_{eff}^{FN}(B_0, B_1)^{-1}. \tag{4.10}$$

Dokaz. (a) Teorem 4.1.5 nam kaže da postoji jedinstvena funkcija koja rješava problem (4.2) i koji zadovoljava (3.8). Pošto φ zadovoljava (3.8), te po Teoremu 3.9 Dirichlet-ov problem ima jedinstveno rješenje, slijedi da je φ rješenje problema (4.2).

(b) Neka je $I = \nabla\varphi$. Prisjetimo se da vrijedi: $divI(x) \geq 0$ ako je $x \in B_0$, $divI(x) \leq 0$ ako je $x \in B_1$ te $divI(x) = 0$ ako je $x \in \mathbb{V} - (B_0 \cup B_1)$. Primjenimo Lemu 4.1.9 na $f = \varphi$ i $I = \nabla\varphi$:

$$\begin{aligned} C_{eff}(B_0, B_1) &= \mathcal{E}(\varphi, \varphi) = -\sum_x \varphi(x)\, divI(x)\, \mu_x \\ &= -\sum_{x \in B_1} DivI(x) = -Flux(I; B_1) = Flux(I; B_0). \end{aligned}$$

(c) Ranije smo definirali R_{eff}^{FN} kao $Flux(I; B_0)^{-1}$.

□

Napomena 4.1.11. *Uočimo da Propozicija 4.1.10 vrijedi samo za konačne* $\mathbb{V}$.

Sada prirodno proširujemo definiciju efektivnog otpora preko efektivne provodljivosti i na beskonačne $\mathbb{V}$ koristeći intuiciju iz Propozicije 4.1.10.

Definicija 4.1.12. *Neka su $B_0, B_1 \subset \mathbb{V}$ takvi da $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, tada definiramo efektivni otpor:*

$$R_{eff}(B_0, B_1) = C_{eff}(B_0, B_1)^{-1}. \tag{4.11}$$

Zanimljivo bi bilo pogledati što se događa s efektivnim otporom ako izbacimo brid ili ako brid zamijenimo novim vrhom. S obzirom da smo uveli karakterizaciju prolaznosti/povratnosti preko efektivnog otpora, tehnike brisanja ili skraćivanja će nam biti korisne pri dokazivanju prolaznosti/povratnosti. Prvo formalno definiramo pojmove **skraćivanja** i **brisanja**.

Definicija 4.1.13. *Neka je (Γ, μ) graf s težinama, te neka je $e_0 = \{x, y\}$ proizvoljan brid grafa.*
Graf $\left(\Gamma^{(c)}, \mu^{(c)}\right)$ nastao ***brisanjem brida*** *e_0 je graf s težinama sa skupom vrhova $\mathbb{V}$, skupom bridova $E^{(c)} = E - \{e_0\}$ i težinama bridova danim s:*

$$\mu_e^{(c)} = \begin{cases} \mu_e & e \neq e_0 \\ 0 & e = e_0 \end{cases}$$

(Uočimo da graf ne mora ostati povezan.)
Graf $\left(\Gamma^{(s)}, \mu^{(s)}\right)$ *nastao* ***skraćivanjem brida*** $\{x, y\}$ *je graf s težinama kojem je brid* $\{x, y\}$ *zamijenjen novim vrhom a.*

Korolar 4.1.14. *Neka su* μ, μ^* *težine na grafu* Γ, *te* R_{eff}, R^*_{eff} *pripadni efektivni otpori za grafove s težinama* (Γ, μ) *i* (Γ, μ^*).

(a) Ako vrijedi $\mu \leq c_1\mu^*$, *tada vrijedi:*

$$C_{eff}(B_0, B_1) \leq c_1 C^*_{eff}(B_0, B_1)$$
$$R_{eff}(B_0, B_1) \geq c_1 R^*_{eff}(B_0, B_1)$$

(b) Brisanje brida povećava $R_{eff}(B_0, B_1)$.

(c) Zamjena brida smanjuje $R_{eff}(B_0, B_1)$.

Dokaz. (a) Iz definicije energijske forme vidi se da vrijedi $\mathcal{E} \leq c_1\mathcal{E}^*$. Iz definicije efektivne provodljivosti slijedi prva tvrdnja. Druga tvrdnja slijedi iz definicije efektivnog otpora preko efektivne provodljivosti.
Fiksirajmo brid $e_0 = \{x, y\}$. Neka je $\mathcal{E}_\lambda(f, f)$ energija funkcije f na grafu $\left(\Gamma, \mu^\lambda\right)$, pri čemu je $\mu^\lambda_e = \mu_e$ ako je $e \neq e_0$ i $\mu^\lambda_{e_0} = \lambda$. Pišemo $C_{eff}(\cdot, \cdot, \lambda)$ za efektivnu provodljivost grafa $\left(\Gamma, \mu^\lambda\right)$, te $C^{(c)}_{eff}(\cdot, \cdot)$ i $C^{(s)}_{eff}(\cdot, \cdot)$ za efektivnu provodljivost grafova $\left(\Gamma^{(c)}, \mu^{(c)}\right)$ i $\left(\Gamma^{(s)}, \mu^{(s)}\right)$, respektivno.

(b) Uočimo da vrijedi $C^{(c)}_{eff}(B_0, B_1) = C_{eff}(B_0, B_1, 0)$, pa tvrdnja slijedi iz (a) za $c_1 = 1$.

(c) Definiramo preslikavanje $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ tako da je F identiteta na $\mathbb{V} - \{x, y\}$ i $F(x) = F(y) = a$. Isto tako, neka je $B'_j = F\left(B_j\right)$ za $j = 0, 1$. Ako su $B'_0 \cap B'_1 = \emptyset$, tada vrijedi:

$$C^{(s)}_{eff}(B'_0, B'_1) = \lim_{\lambda\to\infty} C_{eff}(B_0, B_1, \lambda) \tag{4.12}$$

stoga monotonost ponovno slijedi iz (a). Ako je pak $B'_0 \cap B'_1 \neq \emptyset$, tada je desna strana u jednakosti (4.12) beskonačno pa i lijevu stranu stavljamo da je beskonačno.

□

4.2 Varijacijski problem 2

Drugi varijacijski problem odnosi se na minimizaciju energijskih tokova u $\mathbb{V}$.

Definicija 4.2.1. *Neka su B_0 i B_1 disjunktni neprazni podskupovi od $\mathbb{V}$. Definiramo $\kappa_0(B_0, B_1)$ kao skup svih tokova I s konačnim nosačem za koje vrijedi:*

$$divI(x) = 0, \ x \in V - (B_0 \cap B_1), \tag{4.13}$$
$$Flux(I : B_0) = 1, \tag{4.14}$$
$$Flux(I : B_1) = -1. \tag{4.15}$$

Dodatno, neka je $\overline{\kappa}_0(B_0, B_1)$ zatvarač skupa $\kappa_0(B_0, B_1)$ s obzirom na $E(\cdot, \cdot)$.
Promatramo sljedeći varijacijski problem:

$$\min_{I \in \overline{\kappa}_0(B_0, B_1)} E(I, I). \tag{4.16}$$

.

Idućim teoremom cilj nam je povezati dva varijacijska problema:

Teorem 4.2.2 (Thompson-ov princip)**.** *Neka su B_0 i B_1 disjunktni neprazni podskupovi od $\mathbb{V}$. Tada (4.16) ima jedinstveno rješenje I^* i vrijedi:*

$$R_{eff}(B_0, B_1) = E(I^*, I^*) = \inf\{E(I, I) : I \in \overline{\kappa}_0(B_0, B_1)\}. \tag{4.17}$$

Ako je $C_{eff}(B_0, B_1) < \infty$, neka je φ jedinstveno rješenje problema (4.2). Tada vrijedi:

$$I^* = R_{eff}(B_0, B_1) \nabla \varphi. \tag{4.18}$$

Ako je $C_{eff}(B_0, B_1) = \infty$, tada je $I^* = 0$.

Dokaz. S obzirom da je $\overline{\kappa}_0$ zatvoren i konveksan, jedinstveno rješenje problema (4.16) postoji prema Teoremu 4.1.4. Ako je $J \in \kappa_0$ proizvoljan, tada prema Lemi 4.1.9 vrijedi:

$$\begin{aligned} E(J, \nabla\varphi) = \langle -divJ, \varphi \rangle &= - \sum_{x \in B_0 \cup B_1} divJ(x) \varphi(x) \mu_x \\ &= - \sum_{x \in B_1} divJ(x) \mu_x = Flux(J; B_1) = 1, \end{aligned}$$

jer je $\varphi(x) = P^x\left(T_{B_1} < T_{T_{B_0}}\right)$ te po definiciji skupa $\kappa_0(B_0, B_1)$ vrijedi $divI(x) = 0$ za $x \in V - (B_0 \cup B_0)$. Pretpostavimo da je $C_{eff}(B_0, B_1) < \infty$, tada imamo:

$$1 = E(J, \nabla\varphi) \leq E(J, J)^{1/2} \mathcal{E}(\varphi, \varphi)^{1/2}$$

prema Lemi 4.1.9. Sada koristimo tvrdnje da je $C_{eff}(B_0, B_1) = \mathcal{E}(\varphi, \varphi)$ i vezu efektivnog otpora i efektivne provodljivosti:

$$E(J, J) \geq \frac{1}{\mathcal{E}(\varphi, \varphi)} = R_{eff}(B_0, B_1).$$

Posljednja nejednakost vrijedi trivijalno ako je $C_{eff}(B_0, B_1) = \infty$.
Ako je $J' \in \overline{\kappa}(B_0, B_1)$, tada postoji niz $J_n \in \kappa_0(B_0, B_1)$ takav da je $E(J' - J_n, J' - J_n) \to 0$ zbog svojstva zatvarača. Kako je iz prethodnog jasno da vrijedi $E(J_n, J_n) \geq R_{eff}(B_0, B_1)$ za svaki n, slijedi i da je $E(J', J') \geq R_{eff}(B_0, B_1)$, pa smo dokazali:

$$R_{eff}(B_0, B_1) \leq \inf\{E(J, J) : J \in \overline{\kappa}_0(B_0, B_1)\}.$$

Neka je I^* definiran kao u (4.18). Uočimo da vrijedi $E(\nabla\varphi, \nabla\varphi) = \mathcal{E}(\varphi, \varphi)$ zbog (4.6). Iz toga imamo:

$$E(I^*, I^*) = R_{eff}(B_0, B_1)^2 \mathcal{E}(\varphi, \varphi) = R_{eff}(B_0, B_1). \tag{4.19}$$

Preostaje nam pokazati da je $I^* \in \overline{\kappa}(B_0, B_1)$. Pretpostavimo prvo da je $\mathbb{V}$ konačan. Tada slično kao gore zbog (4.19) vrijedi:

$$1 = \frac{1}{R_{eff}(B_0, B_1)} E(I^*, I^*) = E(I^*, \nabla\varphi) = \langle -divI^*, \varphi\rangle = -\sum_{x\in B_1} divI^*(x)\mu_x = -Flux(I^*, B_1).$$

Iz svojstava φ dalje slijedi $Flux(I^*, B_0) = 1$ pa je $I^* \in \overline{\kappa}_0(B_0, B_1)$.
Sada pretpostavimo da je $\mathbb{V}$ beskonačan. Neka za niz konačnih $\mathbb{V}_n$ vrijedi $\mathbb{V}_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$ i neka je I_n rješenje (4.16) između $\mathbb{V}_n \cap B_0$ i $\mathbb{V}_n \cap B_1$ na grafu $\mathbb{V}_n$. Tada je svaki $I_n \in \kappa(B_0, B_1)$ pa prema Propoziciji 4.1.6 vrijedi:

$$E(I_n, I_n) = R_{eff}(B_0 \cap \mathbb{V}_n, B_0 \cap \mathbb{V}_n; \mathbb{V}_n) \to R_{eff}(B_0, B_1) = E(I^*, I^*).$$

Prema Teoremu 4.1.4 slijedi $E(I_n - I^*, I_n - I^*) \to 0$, pa je $I^* \in \overline{\kappa}_0(B_0, B_1)$. □

4.3 Otpor u beskonačnost

Dalje uzimamo da je B_1 konačni skup, a B_0 da je 'beskonačnost'. Definiramo varijacijske probleme u beskonačnosti ekvivalentne varijacijskim problemima (4.2) i (4.16):

$$C(B_1, \infty) = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : \ f|_{B_1} = 1, \ f \in H_0^2\}, \tag{4.20}$$

$$R(B_1, \infty) = \inf\{E(I, I) : \ Flux(I; B_1) = -1, \ divI(x) = 0, \ x \in \mathbb{V} - B_1\}. \tag{4.21}$$

Definirajmo:

$$\varphi(x) = P^x(T_{B_1} < \infty). \tag{4.22}$$

Prisjetimo se da smo Definicijom 3.14 definirali $R_{eff}(B_0, \infty)$. Ranije smo dokazali da na disjunktnim podskupovima $B_0, B_1 \subset \mathbb{V}$ vrijedi $C_{eff}(B_0, B_1) = R_{eff}(B_0, B_1)^{-1}$. Sada se prirodno proširuje definicija efektivne provodljivosti u beskonačnosti:

$$C_{eff}(B_0, \infty) = R_{eff}(B_0, \infty)^{-1}.$$

Sljedeća propozicija daje rješenje varijacijskog problema 1 u beskonačnosti:

Propozicija 4.3.1. *(a) Funkcija* $\varphi \in H_0^2(\mathbb{V})$ *i za nju se poprima minimum problema 1 u (4.20).*

(b) Ako je $f \in H_0^2$ *takva da je* $f = 1$ *na* B_1*, tada*

$$\mathcal{E}(\varphi, f) = \langle -\Delta\varphi, 1_{B_1} \rangle = R_{eff}(B_1, \infty)^{-1}. \tag{4.23}$$

Dokaz. (a) Prema Teoremu 4.1.4 postoji jedinstvena funkcija $\overline{\varphi}$ koja minimizira prvi problem u (4.20). Neka je $\overline{\varphi}_n \in C_0$ niz takav da $\overline{\varphi}_n \to \overline{\varphi}$ u H^2. Tada $\mathcal{E}(\overline{\varphi}_n, \overline{\varphi}_n) \to C(B_1, \infty)$. Kako je B_1 konačan i $\overline{\varphi}_n$ konvergira po točkama prema $\overline{\varphi}$, možemo pretpostaviti da je $\overline{\varphi}_n = 1$ na B_1.
Uzmemo $x_0 \in B_1$ i definiramo $A_n := supp(\overline{\varphi}_k, k \leq n)$ te $\mathbb{V}_n = B(x_0, n) \cup A_n$ tako da $\mathbb{V}_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$. Neka je $\varphi_n(x) = P^x(T_{B_1} < \tau_{\mathbb{V}_n})$. Prema Propoziciji 4.1.10 φ_n je rješenje za (4.2) za skupove $\partial\mathbb{V}_n$ i B_1 na konačnom grafu $\mathbb{V}_n \cup \partial\mathbb{V}_n$. Kako je $\overline{\varphi}_n$ dopustivo rješenje za taj problem, slijedi da je $\mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n) \leq \mathcal{E}(\overline{\varphi}_n, \overline{\varphi}_n)$. Isto tako, kako je φ_n dopustivo rješenje za prvi problem u (4.20), imamo:

$$\mathcal{E}(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) = C(B_1, \infty) \leq \mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n) \leq \mathcal{E}(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}).$$

Prema Teoremu 4.1.4 slijedi da $\varphi_n \to \overline{\varphi}$ u H_0^2 pa konvergira i po točakama. Isto tako, imamo da $\varphi_n(x) \uparrow \varphi(x)$ za svaki x, pa zbog jedinstvenosti limesa vrijedi $\varphi = \overline{\varphi}$ te $\varphi \in H_0^2$. Iz definicije $C_{eff}(B_1, \infty)$ imamo:

$$C_{eff}(B_0, \infty) = \lim_n C_{eff}(B_1, \mathbb{V}_n^c) = \lim_n \mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n) = \mathcal{E}(\varphi, \varphi),$$

što nam dokazuje tvrdnju.

(b) S obzirom da je B_1 konačan, koristeći Propoziciju 4.1.10(b) vrijedi:

$$\langle -\Delta\varphi, 1_{B_1} \rangle = \lim_n \langle -\Delta\varphi_n, 1_{B_1} \rangle = \lim_n C_{eff}(B_1, \mathbb{V}_n^c) = C_{eff}(B_1, \infty).$$

Neka je $f \in H_0^2$ takva da je $f = 1$ na B_1. Neka je $f_n \in C_0(\mathbb{V})$ niz takav da $f_n \to f$ u $H_0^2(\mathbb{V})$. Sličnim argumentom kao u (a) dijelu dokaza možemo pretpostaviti da je $f_n = 1$ na B_1. Tada je:

$$\mathcal{E}(\varphi, f_n) = \langle -\Delta\varphi, f_n \rangle = \langle -\Delta\varphi, 1_{B_1} \rangle.$$

Djelovanjem s $n \to \infty$ slijedi tvrdnja.

□

Sljedeća lema nam daje rezultat o vezi između $R(B_1, \infty)$ i efektivnog otpora $R_{eff}(B_1, \infty)$.

Lema 4.3.2. *Neka je I dopustivi tok za problem (4.20). Tada je $E(I,I) \geq R_{eff}(B_1,\infty)$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{V}_n \uparrow\uparrow \mathbb{V}$ i neka je φ_n definiran kao u Propoziciji 4.3.1. Prema Lemi 4.1.9:

$$E(I,I)^{1/2}\,\mathcal{E}(\varphi_n,\varphi_n)^{1/2} \geq E(I,\Delta\varphi_n) = \langle -divI, \varphi_n\rangle = -Flux(I;B_1) = 1;$$

pa je

$$E(I,I) \geq R_{eff}(B_1,\mathbb{V}_n^c).$$

Djelovanjem s $\lim_{n\to\infty}$ na prethodnu nejednakost slijedi tvrdnja. □

Sljedeći teoremi povezuje varijacijske probleme (4.20) i (4.21) sa svojstvom prolaznosti/povratnosti.

Teorem 4.3.3. *Neka je (Γ,μ) povratan graf s težinama, $B_1 \subset \mathbb{V}$ konačan podskup. Tada vrijedi:*

(a) $1 \in H_0^2$,

(b) $H_0^2 = H^2$,

(c) $R_{eff}(B_1,\infty) = \infty$,

(d) $R(B_1,\infty) = \infty$.

Dokaz. Iz svojstva povratnosti imamo $\varphi(x) = P^x(T_{B_1} < \infty) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{V}$. Sada (a) slijedi iz Propozicije 4.3.1.
Dokazujemo (b) dio. U (a) dijelu smo dokazali $1 \in H_0^2$. Tada postoji niz $u_n \in C_0(\mathbb{V})$ za koji vrijedi $\|1-u_n\|_{H^2} \leq n^{-3}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $0 \leq u_n \leq 1$. Stavimo $v_n = nu_n$, tada $\mathcal{E}(v_n,v_n) \leq n^{-1}$, ali pošto $u_n \to 1$ po točkama, slijedi $v_n(x) \to \infty$ za sve $x \in \mathbb{V}$. Sada neka je $f \in H_+^2$, stavimo $f_n = f \wedge v_n$ takav da je $f_n \in C_0(\mathbb{V})$. Za svaki $x \in \mathbb{V}$ vrijedi $f_n(x) = f(x)$ za velike n. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i odaberemo konačni skup A takav da ako je $B = \mathbb{V} - A$, tada $\mathcal{E}_B(f,f) \leq \epsilon$. Biramo $n > 1/\epsilon$ takav $f_n(x) = f(x)$ za sve $x \in \overline{A}$. Tada jer vrijedi $f - f_n = (f - v_n)_+$, slijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f-f_n,f-f_n) &= \mathcal{E}_B(f-f_n,f-f_n)\\ &\leq \mathcal{E}_B(f-v_n,f-v_n)\\ &\leq 2\mathcal{E}_B(f,f) + 2\mathcal{E}_B(v_n,v_n) \leq 4\epsilon.\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da $f_n \to f$ u H^2, pa je $f \in H_0^2$. S obzirom da se svaka $f \in H^2$ može zapisati na sljedeći način: $f = f_+ - f_-$ pri čemu su $f_+, f_- \in H_+^2$ slijedi tvrdnja (b).
(c) slijedi iz Teorema 3.2.8.
(d) slijedi iz Leme 4.3.2. □

Teorem 4.3.4. *Neka je* (Γ, μ) *prolazan graf s težinama,* $B_1 \subset \mathbb{V}$ *konačan podskup. Tada vrijedi:*

(a) funkcija $\varphi(x) = P^x(T_{B_1} < \infty)$ *je rješenje problema (4.20).*

(b) $\mathcal{E}(\varphi, \varphi) = C_{eff}(B_1, \infty) = R_{eff}(B_1, \infty)^{-1}$.

(c) $R_{eff}(B_1, \infty) < \infty$.

(d) $1 \notin H_0^2$.

(e) $I^* = R_{eff}(B_1, \infty) \nabla\varphi$ *je rješenje problema (4.21) i vrijedi:*

$$E(I^*, I^*) = R(B_1, \infty) = R_{eff}(B_1, \infty) < \infty. \tag{4.24}$$

Dokaz. U Propoziciji 4.3.1 smo dokazali (a) i (b) dio. Teorem 3.2.8 nam daje (c) dio.
Za dokaz (d) dijela, kad bi vrijedilo $1 \in H_0^2$, tada iz definicije energijske forme vrijedi $\mathcal{E}(1, 1) = 0$ pa bi infimum problema (4.20) bio 0 što je zbog (b) dijela ovog teorema u kontradikciji s (c) dijelom ovog teorema.
Dokažimo još (e) dio. Vrijedi:

$$Flux(I^*; B_1) = \sum_{x \in B_1} divI^*(x)\mu_x = R_{eff}(B_1, \infty)\langle \Delta\varphi, 1_{B_1}\rangle = -1,$$

prema Propoziciji 4.3.1 jer je $\langle \Delta\varphi, 1_{B_1}\rangle = -R_{eff}(B_1, \infty)^{-1}$. Prema tome, I^* je dopustiva točka za problem (4.21). Dalje imamo:

$$E(I^*, I^*) = R_{eff}(B_1, \infty)^2 E(\nabla\varphi, \nabla\varphi) = R_{eff}(B_1, \infty)^2 \mathcal{E}(\varphi, \varphi) = R_{eff}(B_1, \infty).$$

Prema Lemi 4.3.2 za tok I^* se poprima minimum u (4.21). □

Korolar 4.3.5. *Graf s težinama* (Γ, μ) *je prolazan ako i samo ako postoji* $x_1 \in \mathbb{V}$ *i tok* J *od* x_1 *do beskonačnosti s konačnom energijom.*

Dokaz. Stavimo da je $B_1 = \{x_1\}$ konačan skup. Teorem 4.3.4 i Teorem 4.3.3 nam daju da je (Γ, μ) prolazan ako i samo ako je $R_{eff}(B_1, \infty) < \infty$.
Ako je graf (Γ, μ) prolazan, tada iz gornje ekvivalencije slijedi da tok $J = R_{eff}(B_1, \infty)\nabla\varphi$ ima energiju $R_{eff}(B_1, \infty) < \infty$.
Obratno, ako postoji $x_1 \in \mathbb{V}$ i tok J od x_1 do beskonačnosti s konačnom energijom, tada je infimum skupa za problem (4.21) konačan pa je $R_{eff}(B_1, \infty) < \infty$. Sada zbog ekvivalencije s početka dokaza slijedi tvrdnja. □

Korolar 4.3.6. *Neka je* Γ *podgraf od* Γ^*. *Tada vrijedi:*

(a) ako je Γ prolazan, tada je Γ^* prolazan.

(b) ako je Γ^* povratan, tada je Γ povratan.

Dokaz. (a) dio slijedi iz Korolara 4.3.5 koji nam garantira egzistenciju toka J s konačnom energijom iz x_1 u beskonačnost na Γ. Taj tok J je također tok s konačnom energijom iz x_1 u beskonačnost na Γ^*, pa je Γ^* prolazan.
(b) dio slijedi obratom po kontrapoziciji iz (a) dijela. □

Dokažimo još jedan koristan kriterij za dokaz povratnosti:

Teorem 4.3.7 (Nash Williams)**.** *Neka je (Γ, μ) beskonačni graf s težinama. Pretpostavimo da postoji $A_k \uparrow\uparrow \mathbb{V}$ takav da $\overline{A_k} \subset A_{k+1}$ tako da vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_{eff}\left(A_k, A_k^c\right) = \infty. \tag{4.25}$$

Tada je Γ povratan.

Dokaz. Neka je E_k skup bridova $e = \{x, y\}$ takvih da $x \in A_k$ i $y \in A_k^c$. Uočimo da su E_k međusobno disjunktni zbog konstrukcije skupa A_k. Neka je $\varphi(x) = P^x\left(T_{A_k} < T_{A_k^c}\right)$ iz rješenja varijacijskog problema (4.2). Tada slijedi:

$$R_{eff}\left(A_k, A_k^c\right)^{-1} = C_{eff}\left(A_k, A_k^c\right) = \mathcal{E}(\varphi, \varphi) = \sum_{e \in E_k} \mu_e.$$

Dalje, neka je I jedinični tok od A_1 prema beskonačnosti, tada je $\sum_{e \in E_k} |I(e)| \geq 1$. Pa slijedi:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \sum_{e \in E_k} |I_e| \mu_e^{-1/2} \mu_e^{1/2} \leq (\sum_{e \in E_k} I_e^2 \mu_e^{-1})^{1/2} (\sum_{e \in E_k} \mu_e)^{1/2} \\
&= (\sum_{e \in E_k} I_e^2 \mu_e^{-1})^{1/2} \left(R_{eff}\left(A_k, A_k^c\right)\right)^{-1/2},
\end{aligned}$$

pri čemu smo primjenili jednakost s početka dokaza. Dalje imamo:

$$E(I, I) = \sum_{e \in E} \mu_e I_e^2 \geq \sum_k \sum_{e \in E_k} \mu_e I_e^2 \geq \sum_k R_{eff}\left(A_k, A_k^c\right) = \infty,$$

pri čemu je s E označen skup svih bridova grafa Γ, te smo u zadnjoj jednakosti iskoristili uvjet (4.25). Povratnost od Γ slijedi iz Korolara 4.3.5. □

Teorem 4.3.8. *Neka je $x \in \mathbb{V}$. Graf (Γ, μ) je prolazan ako i samo ako postoji $c_1 = c_1(x) < \infty$ takav da:*

$$|f(x)|^2 \leq c_1 \mathcal{E}(f, f) \text{ za sve } f \in C_0(\mathbb{V}). \tag{4.26}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je graf (Γ, μ) prolazan . Neka je $f \in C_0(\mathbb{V}) \subset H_0^2(\mathbb{V})$. Ako je $f(x) = 0$, nemamo što dokazati. U suprotnom, definiramo funkciju $g = f/f(x)$. Tada je g dopustiva za (4.20), pa imamo:

$$\mathcal{E}(f, f) = f(x)^2 \mathcal{E}(g, g) \geq f(x)^2 C_{eff}(B_1, \infty).$$

Time smo dokazali prvi smjer.
Obratno, ako (4.26) vrijedi, neka su φ_n, φ definirani isto kao u Propoziciji 4.3.1. Tada vrijedi da je $\mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n) \geq c_1^{-1}$. Pošto je $\mathcal{E}(\varphi, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n)$, slijedi da je $\mathcal{E}(\varphi, \varphi) \geq c_1^{-1}$. Dalje imamo: $R_{eff}(\{x\}, \infty) = \mathcal{E}(\varphi, \varphi)^{-1} \leq c_1$ pa po Teoremu 3.2.8 slijedi prolaznost. □

4.4 Dokazi prolaznosti/povratnosti

Teorem 4.4.1. *Neka je (Γ, μ) graf s težinama takav da $\mu(\mathbb{V}) < \infty$. Tada je (Γ, μ) povratan.*

Dokaz. Neka je $z \in \mathbb{V}$ proizvoljan i fiksiran te $\varphi(x) = P^x(T_z = \infty)$. Tada je $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(z) = 0$ te $\Delta\varphi(x) = 0$ ako je $x \neq z$ prema Teoremu 3.1.6 (stavimo $\mathbb{V} - D = \{z\}$) jer je rješenje Dirichlet-ovog problema (3.9). Kako je $\mu(\mathbb{V}) < \infty$, funkcija $\varphi \in L^2(\mathbb{V})$ pa imamo prema Teoremu 2.2.3:

$$-\mathcal{E}(\varphi, \varphi) = \langle \Delta\varphi, \varphi \rangle = \varphi(z)\,\Delta\varphi(z)\,\mu_z = 0,$$

jer je $\Delta\varphi(x) = 0$ za $x \neq z$. Prema Propoziciji 2.2.1 slijedi da je φ konstantna pa zbog $\varphi(z) = 0$ slijedi $\varphi = 0$. Dokazali smo da je $\varphi(x) = P^x(T_z = \infty) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{V}$ pa vrijedi da je $P^x(T_z < \infty) = 1$. Sada nam Teorem 1.2.3 daje prolaznost grafa. □

U idućem primjeru dokazujemo prolaznost/povratnost za neke primjere s početka ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$).

Primjer 4.4.2. *Za dokaze prolaznosti/povratnosti u ovom primjeru koristimo karakterizaciju preko efektivnog otpora, odnosno Teorem 3.2.8.*

(a) *$\mathbb{Z}$ je povratan jer je $R_{eff}^{FN}(\{0\}, [-n, n]^c) = \frac{1}{2}(n + 1)$.*

(b) *$\mathbb{Z}^2$ je povratan. Smanjujemo efektivni otpor tehnikom zamjene kvadrata oko 0. Za $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, prisjetimo se standardne definicije beskonačne norme $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ te uočimo da je skup $S_n = \{x : \|x\|_\infty = n\}$ kvadrat s centrom u 0 i duljinom stranice $2n$.*

Svaka stranica od S_n sadrži $2n+1$ točaka u $\mathbb{Z}^2$ te je ukupan broj bridova između S_n i S_{n+1} jednak $4(2n+1)$.
Ako vršimo zamjenu na svakom kvadratu S_n (bridove zamijenimo jednom točkom) za svaki n, dobivamo novi graf $\hat{\Gamma}$ s 'vrhovima' $S_0, S_1, ...$[1] takav da svaki S_n ima samo 2 susjeda: S_{n-1} i S_{n+1}. Koristeći formulu za otpornike u serijama imamo $\hat{R}^{FN}_{eff}(S_n, S_{n+1}) = \frac{1}{4}(2n-1)^{-1}$, pa imamo:

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{Z}^2}_{eff}(0,\infty) \geq \hat{R}_{eff}(S_0,\infty) &= \lim_{N\to\infty} \hat{R}^{FN}_{eff}(S_0, S_N) \\ &= \lim_{N\to\infty} 4^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)^{-1} = \infty. \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili svojstvo da tehnika zamjene smanjuje efektivni otpor. Zaključak je da $R^{\mathbb{Z}^2}_{eff}(0,\infty) = \infty$, stoga je $\mathbb{Z}^2$ povratan.

(c) *Promotrimo još jedan primjer. Neka je (Γ, μ) graf sa skupom vrhova $\mathbb{Z}_+$ i težinama $\mu_{n,n+1} = a_n$ (ostale težine su 0). Tada je $R^{FN}_{eff}(0,n) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r^{-1}$, pa je Γ prolazan ako i samo ako je $\sum_n a_n^{-1} < \infty$.*

Sljedeći primjer nam pokazuje korisnost Korolara 4.3.5 za dokazivanje povratnosti/prolaznosti:

Primjer 4.4.3. *(a) $\mathbb{Z}^3$ je prolazan.*
Promotrimo sljedeći tok I na $\mathbb{Z}^3_+$. Za $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3_+$, stavimo da je $A = x+y+z$, te

$$I_{(x,y,z),(x+1,y,z)} = \frac{x+1}{(A+1)(A+2)(A+3)}. \tag{4.27}$$

Potpuno analogno definiramo $I_{(x,y,z),(x,y+1,z)}$ i $I_{(x,y,z),(x,y,z+1)}$. Prisjetimo se da je $DivI(X) = \sum_{Y\sim X} I_{XY}$. Računom se pokaže da je $DivI(X) = 0$ za sve $X = (x,y,z)$ osim 0. Iz toga dalje imamo $R_{eff}(\{0\},\infty) < \infty$, pa po Teoremu 3.2.8 slijedi prolaznost.

(b) *Uočimo da se $\mathbb{Z}^3$ možemo smatrati podskupom prostora $\mathbb{Z}^d$ za $d > 3$. Stoga iz prolaznosti od $\mathbb{Z}^3$ slijedi prolaznosti svih $\mathbb{Z}^d$ za $d > 3$.*

[1] Svaki S_n se zamijeni jednom točkom pa novu točku uistinu ima smisla označiti s S_n iako je oznaka dvoznačna.

Poglavlje 5

Stabilnost nad grubim izometrijama

U ovom poglavlju promatramo stabilnost prolaznosti/povratnosti grafova s težinama na grube izometrije. Prisjetimo se prvo svojstva **kontroliranih težina** za graf (Γ, μ):

$$\text{postoji } C_2 < \infty \text{ takva da } \quad \frac{\mu_{xy}}{\mu_x} \geq \frac{1}{C_2} \quad \text{kad god je } \; x \sim y$$

Ako graf ima svojstvo kontroliranih težina, slijedi da je za $x \sim y$, $y \sim z$ vrijedi:

$$\mu_{xy} \geq C_2^{-1} \mu_y \geq C_2^{-1} \mu_{yz}.$$

Iterirajući za x, y takve da je $d(x, y) = k$ i $x \sim x'$ i $y \sim y'$, imamo:

$$\mu_{yy'} \leq C_2^{k+1} \mu_{xx'}. \tag{5.1}$$

Propozicija 5.0.1. *Neka su (Γ_i, μ_i), $i = 1, 2$ grafovi s težinama koji imaju svojstvo kontroliranih težina (s pripadnim skupovima vrhova $\mathbb{V}_i$, $i = 1, 2$) i neka je $\varphi : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ gruba izometrija između grafova. Tada postoji $K < \infty$ takav da za $f_2 \in C_0(\mathbb{V}_2)$ vrijedi:*

$$\mathcal{E}_1(f_2 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi) \leq K \mathcal{E}_2(f_2, f_2). \tag{5.2}$$

Napomena 5.0.2. *(a) Propozicija nam daje vezu između energija dvaju prostora koristeći grube izometrije između grafova sa svojstvom kontroliranih težina.*

(b) Lako se vidi da $\mathcal{E}_2(f_2, f_2)$ ne može biti "kontroliran" u terminima $\mathcal{E}_1(f_2 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi)$. Primjerice, za grafove $\Gamma_i = \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$ i grubu izometriju $\varphi(n) = 2n$ uzmemo funkciju $f_2(n) = 1_{\{n=1\}}$. Tada je $f_2 \circ \varphi = 0$, dok f_2 ima energiju različitu od 0.

Dokaz. Neka su C_1, C_2, C_3 konstante vezane uz φ iz Definicije 1.3.2 i Definicije 1.3.4 odnosno za koje vrijedi:

$$C_1^{-1}(d_1(x, y) - C_2) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C_1(d_1(x, y) + C_2)$$
$$\cup_{x \in X_1} B_{d_2}(\varphi(x), C_2) = X_2$$
$$C_3^{-1} \mu_1(x) \leq \mu_2(\varphi(x)) \leq C_3 \mu_1(x).$$

Neka je C_5 konstanta za koju vrijedi da grafovi imaju Γ_1 i Γ_2 kontrolirane težine[1]. Dalje, neka $\mu_i(x,y)$ označavaju provodljivost za graf Γ_i, $i = 1,2$. Definirajmo $f_1 := f_2 \circ \varphi$.

Neka su $x, y \in \mathbb{V}_1$ takvi da $x \sim y$ (ekvivalentno $d_1(x,y) = 1$) te $x' = \varphi(x)$ i $y' = \varphi(y)$. Tada vrijedi:

$$0 \leq d_2(x',y') = d_2(\varphi(x),\varphi(y)) \leq C_1(d_1(x,y) + C_2) = C_1(1 + C_2),$$

odnosno $0 \leq d_2(x',y') \leq C_1(1+C_2)$.
Neka je $k = \lceil C_1(1+C_2) \rceil$. Stoga postoji put u $\mathbb{V}_2$ koji povezuje x' i y'. Neka je $z_0 = x', z_1, ..., z_k = y'$ jedan takav put. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
|f_1(x) - f_1(y)| &= |f_2(x') - f_2(y')| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |f_2(z_{i-1}) - f_2(z_i)| \\
&\leq k^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{k} |f_2(z_{i-1}) - f_2(z_i)|^2)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

pri ćemu smo u prvoj nejednakosti koristili nejednakost n-terokuta, u drugoj Cauchy-Schwartz-ovu nejednakost[2] na $\mathbb{R}^k$.
Koristeći (5.1) za $1 \leq i \leq k$ te svojstvo kontroliranih težina, slijedi:

$$\begin{aligned}
\mu_1(x,y) \leq \mu_1(x) \leq C_3\mu_2(\varphi(x)) = C_3\mu_2(x') \leq \frac{C_3}{C_5}\mu_2(z_0,z_1) \\
\leq \frac{C_3}{C_5} C_5^{i+1} \mu_2(z_{i-1},z_i) = C_3 C_5^i \mu_2(z_{i-1},z_i).
\end{aligned}$$

Dalje, kombinirajući prethodna dva rezultata imamo:

$$|f_1(x) - f_1(y)|^2 \mu_1(x,y) \leq \left(kC_3C_5^k\right) \sum_{i=1}^{k} |f_2(z_{i-1}) - f_2(z_i)|^2 \mu_2(z_{i-1},z_i). \tag{5.3}$$

Sumirajući po svim $y \in \mathbb{V}_1$ takvim da $y \sim x$, na lijevoj strani dobivamo $\mathcal{E}_1(f_1,f_1)$ prema (2.3), dok je desna strana manja od $kC_3C_5^k M\mathcal{E}_2(f_2,f_2)$, pri čemu je M maksimum brojeva parova $x \sim y \in \mathbb{V}$ takvih da se isti brid $w \sim w'$ u $\mathbb{V}_2$ pojavljuje u sumi u (5.3).

Ostaje pokazati da je $M < \infty$. Fiksirajmo brid $\{w,w'\}$ u Γ_2. Ako je $\{w,w'\}$ brid na putu koji povezuje $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$, pri čemu su $x \sim y$ iz $\mathbb{V}_1$, tada je $d_2(\varphi(x),w) \leq k$. Stoga ostaje

[1] Uočimo da je to moguće napraviti. Ako su C_5^1 i C_5^2 konstante iz definicije kontrolirane težine za grafove Γ_1 i Γ_2 respektivno, tada samo stavimo $C_5 = \max\{C_5^1, C_5^2\}$ i dobili smo konstantu za koju oba grafa još uvijek imaju to svojstvo.

[2] $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

ograničiti $|A|$, gdje je $A = \varphi^{-1}(B_2(w,k))$. Neka su z_1, $z_2 \in A$. Tada koristeći svojstvo iz Definicije 1.3.2 slijedi:

$$C_1^{-1}(d_1(z_1,z_2) - C_2) \leq d_2(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) \leq 2k,$$

pa je $d(z_1,z_2) \leq c_1 = c_1(C_1,C_2) < \infty$. Dakle, udaljenost između svake dvije točke u A je ograničena, pa je i A nužno konačan, odnosno $|A| \leq c_2 = c_2(C_1,C_2)$. Iz toga slijedi da je $M \leq c_2^2$. □

Dolazimo do jednog od glavnih rezultata diplomskog rada koji povezuje grube izometrije i prolaznost/povratnost grafova s težinama.

Teorem 5.0.3. *Prolaznost i povratnost grafova s težinama je stabilna nad grubim izometrijama.*

Dokaz. Neka su (Γ_i, μ_i), $i = 1,2$ definirani kao u Proziciji 5.0.1 i neka je $\varphi : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ gruba izometrija između prostora. Pretpostavimo da je (Γ_1, μ_1) prolazan i neka je $f_2 \in C_0(\mathbb{V}_2)$ proizvoljna i $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Neka je $x_2 \in \mathbb{V}_2$ takav da postoji $x_1 \in \mathbb{V}_1$ sa svojstvom da je $x_2 = \varphi(x_1)$. Koristeći Teorem 4.3.8 i prolaznost od (Γ_1, μ_1) postoji konstanta C takva da vrijedi:

$$|f_2(x_2)| = |f_2(\varphi(x_1))|^2 = |f_1(x_1)|^2 \leq C\mathcal{E}_1(f_1, f_1).$$

Koristeći Propoziciju 5.0.1 postoji konstanta K takva da:

$$|f_2(x_2)| \leq C\mathcal{E}_1(f_1, f_1) = C\mathcal{E}_1(f_2 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi) \leq KC\mathcal{E}_2(f_2, f_2).$$

Sada nam obrat Teorema 4.3.8 daje prolaznost od (Γ_2, μ_2).
S obzirom da se može pokazati da je gruba izometrija simetrična relacija, slijedi prolaznost u oba smjera. Pošto je svaki graf, odnosno slučajna šetnja na grafu nužno prolazna ili povratna, slijedi da je svojstvo prolaznosti/povratnost stabilno na grube izometrije. □

Zadnja rezultati iz poglavlja vezani su uz Cayley-jeve grupe.

Propozicija 5.0.4. *Neka je $\mathcal{G}$ konačno generirana beskonačna grupa i neka su Λ_1 i Λ_2 dva skupa generatora. Neka su Γ_1, Γ_2 pripadni Cayley-jevi grafovi. Tada su Γ_1 i Γ_2 grubo izometrični.*

Dokaz. Stavimo da je $\varphi(x) = x$ za $x \in \mathcal{G}$. Neka je d_i metrika Cayley-jevog grafa $(\mathcal{G}, \Lambda_i)$, $i = 1,2$. Provjeravamo uvjete Definicije 1.3.2. Jasno je da vrijedi svojstvo (1.3). Dalje pokazujemo da vrijedi (1.2). Dovoljno je pokazati da postoji $C_{21} \geq 1$ takav da:

$$d_2(x,y) = C_{21} d_1(x,y), \ x, y \in \mathcal{G},$$

jer zamjenom d_1 i d_2 u dokazu slijedi da postoji $C_{12} \geq 1$ takav da vrijedi: $d_1(x, y) = C_{12} d_2(x, y)$ za sve x, y. Uzmemo $C_1 = max\{C_{21}, C_{12}\}$ i $C_2 = 0$ pa imamo (1.2).
Prisjetimo se da se za Λ definira $\Lambda^* := \{g, g^{-1}, g \in \Lambda\}$. Dodatno definiramo:

$$\Lambda_2(k) = \left\{ \prod_{j=1}^{k'} x_j : x_j \in \Lambda_2^*, k' \leq k \right\}$$

kao produkt najviše k elemenata iz Λ_2^*. Lako se vidi da vrijede sljedeće tvrdnje:

- $d_2(x, y) \leq k \iff x^{-1}y \in \Lambda_2(k)$
- za sve $\omega_1 \in \Lambda_2(k_1)$ i $\omega_2 \in \Lambda_2(k_2)$ vrijedi $\omega_1\omega_2 \in \Lambda_2(k_1 + k_2)$.

Kako je grupa generirana s Λ_2^* zapravo cijeli $\mathcal{G}$, stoga za svaki $g \in \Lambda_1^*$ postoji $k(g)$ takav da je $g \in \Lambda_2(k(g))$. Neka je $C_{21} = max\{k(g), g \in \Lambda_1\}$. Uočimo da C_{21} postoji jer je Λ_1 konačni skup generatora.
Neka su $x, y \in \mathcal{G}$ takvi da je $d_1(x, y) = m$. Tada je $x^{-1}y = z_1 \cdots z_m$, pri čemu je $z_j \in \Lambda_1^*$ pa i u $\Lambda_2(C_{21})$. Zbog diskusije gore imamo da je $x^{-1}y \in \Lambda_2(mC_{21})$ pa dalje imamo:

$$d_2(x, y) \leq C_{21} m = C_{21} d_1(x, y).$$

Time smo dokazali tvrdnju. □

Prethodna propozicija nam u kombinaciji s Teoremom 5.0.3 govori da je kod Cayley-jevih grafova dovoljno pokazati svojstvo prolaznosti ili povratnosti za samo jedan skup generatora (odnosno graf generiran tim skupom generatora). Tada svi ostali grafovi imaju isto svojstvo.

Korolar 5.0.5. *Vrsta Cayley-jevog grafa je neovisna o izboru konačnog skupa generatora.*

Bibliografija

[1] Martin T. Barlow: *Random Walks and Heat Kernels on Graphs*. London Mathematical Society, Lecture Notes Series: 438, Cambridge University Press, 2017.

Sažetak

Grafovi s težinama se mogu interpretirati na više načina: kao slučajni proces ili električna mreža. Iz raznih interpretacija grafa slijede zgodna svojstva grafova koja nam mogu biti korisna za opisivanje geometrije grafa. Osnovno svojstvo slučajnih šetnji su prolaznost i povratnost.

Električne mreže predstavljaju potpuno drukčiji pogled na grafove od slučajnih šetnji te omogućuju interpretaciju prolaznosti i povratnosti preko efektivnog otpora.

Varijacijski problemi se prirodno nadovezuju na teoriju električnih mreža i omogućavaju nam bolje razumijevanje geometrije grafa s obzirom na prolaznost i povratnost. Primjerice, kako brisanje i zamjena bridova utječe na efektivni otpor grafa. Koristeći ovaj pristup izvodimo nove tehnike za dokazivanje prolaznosti i povratnosti.

Razne vrste grafova možemo povezati konceptom grubih izometrija koje čuvaju određene odnose među grafovima.

Glavni cilj ovog diplomskog rada je proučavati svojstva grafova vezanih uz slučajne šetnje: prolaznost i povratnost te dokazati njihovu stabilnost na grube izometrije. Korisnost ovog svojstva je sljedeća: za prolazan ili povratan graf, prolaznost ili povratnost grafa lako slijedi za sve grafove koji su mu grubo izometrični, što znači da gruba izometrija čuva određenu vrstu strukture u grafu koja je važna.

Summary

Weighted graphs can be easily interpreted in several ways: as a stochastic process or electric network. From these different interpretations many different properties of graphs can be derived and used to further describe its geometry. The fundamental properties of random walks are transience and recurrence.

Electric networks represent completely different approach on graph interpretation regarding random walks and enable us to interpret transience and recurrence through the concept of effective resistance.

Variational problems are natural upgrade on the theory of electric networks and enable us to further understand connection of graph geometry to transience and recurrence. For example, how cutting and shorting the edges affect effective resistance. Using these approaches we derive new techniques for proving transience and recurrence.

Furthermore, different types of graphs can be connected using concept of rough isometries that preserve certain relations between graphs.

The main idea of this thesis is to investigate the properties of graphs connected to random walks: transience and recurrence and prove their stability under rough isometries. Usefulness of this property is following: for a graph that is transient or recurrent, transience or recurrence comes easily for all graphs that are roughly isometric to him, meaning that rough isometry preserves some kind of graph structure.

Životopis

Tin Barišin se rodio 23. siječnja 1996. godine u Splitu. U Splitu završava osnovnu školu te upisuje III. gimnaziju u Splitu. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao je na dva državna natjecanja iz matematike 2013. i 2014. godine.

Upisuje preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 2014. godine te stječe titulu sveučilišnog prvostupnika matematike 2017. godine s težinskim prosjekom 4,90 na skali do 5. Tijekom preddiplomskog školovanja primio je nagradu Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu za izniman uspjeh na studiju u akademskoj godini 2016./2017. U istoj ustanovi nastavlja svoje obrazovanje te 2017. godine upisuje diplomski sveučilišni studij Matematička statistika.

Tijekom studija odradio je praksu u ZB Invest-u, UniCredit Grupa, društvu za upravljanju fondovima, u Zagrebu te praksu u Commerzbank-u u Frankfurtu. Na fakultetu je držao demonstrature iz sljedećih kolegija: Linearna algbera 1 i 2, Vjerojatnost i Integrali funkcija više varijabli.

Područja interesa obuhvaćaju teoriju vjerojatnosti, stohastičke procese te optimizaciju.