

# Podjela na jednake dijelove pomoću origamija

---

**Bunetić, Maja**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:497918>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-28**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maja Bunetić

**PODJELA NA JEDNAKE DIJELOVE**  
**POMOĆU ORIGAMIJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Franka Miriam  
Brückler

Zagreb, veljača, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, sestri Ivani i zaručniku Filipu koji su mi uvijek bili najveća podrška i nikada nisu dali da odustanem.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Egzaktna podjela pomoću origamija</b>	<b>3</b>
1.1 Binarna podjela . . . . .	3
1.2 Podjela na neparan broj jednakih dijelova . . . . .	5
<b>2 Aproksimativna podjela pomoću origamija</b>	<b>26</b>
2.1 Fujimotova aproksimacija . . . . .	26
2.2 Binarna aproksimacija . . . . .	33
<b>3 Podjela kuta na jednake dijelove</b>	<b>35</b>
3.1 Podjela pravog kuta . . . . .	35
3.2 Trisekcija kuta . . . . .	40
3.3 Još neke zanimljive konstrukcije kutova . . . . .	49
<b>4 Osvrt na primjenu origamija u nastavi matematike</b>	<b>58</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>59</b>

# Uvod

Origami je tradicionalna japanska umjetnost ili tehnika savijanja papira u različite dekorativne oblike.<sup>1</sup> Kada se spomene origami, ljudi često zamisle složene oblike koji se dobiju presavijanjem lista papira, a najčešće zamisle različite životinje ili cvijeće.

Mnogi oblici napravljeni pomoću origamija, čak i oni najjednostavniji, zahtijevaju da se početna presavijanja naprave na točno određenim mjestima na papiru, koji je najčešće oblika kvadrata. U početnim presavijanjima često stranu, odnosno rub papira ili jedan od kutova papira treba podijeliti na jednak broj dijelova, npr. trećine, četvrtine, petine, dvanaestine itd. Iako je jedna od metoda podjele i jednostavno mjerenje, zbog estetskog dojma, ali i matematičkog „purizma”, tražene točke pokušavaju se odrediti samo pomoću savijanja papira. Traženje redosljeda kojim će se papir savijati dolazi u doticaj s geometrijskim konstrukcijama u matematici. U ovom radu ćemo opisati metode kako podijeliti stranicu (rub) lista papira ili jedan njegov kut na neki broj jednakih dijelova te dati izvode i dokaze tih metoda.

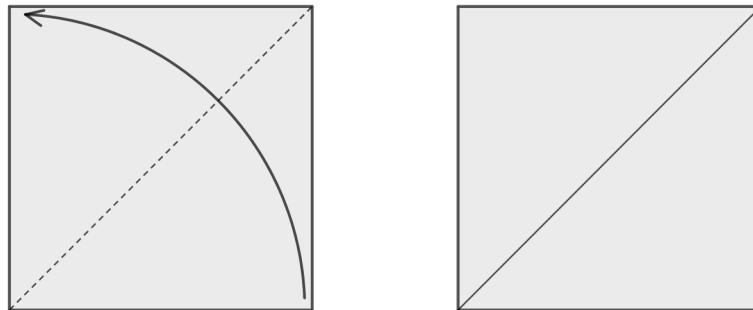
Zbog lakšeg snalaženja u koracima konstrukcije, ali i diskusijama uz konstrukcije, odredimo standardnu poziciju lista papira kojeg ćemo koristiti. Postavimo papir tako da su stranice papira vodoravne i okomite. Tada rubove papira možemo imenovati kao lijevi, desni, gornji i donji rub, a vrhove papira kao gornji lijevi, donji lijevi, gornji desni, donji desni. Svako origami-presavijanje papira započinje neoznačenim listom papira (slika 0.1). Također svako presavijanje je precizno određeno točkama, rubovima papira, pregibnim linijama ili sjecištima tih linija. Na slici 0.2 (lijevi dijagram) prikazano je presavijanje papira gdje strelica označava smjer u kojem presavijamo papir: donji desni vrh preklapamo na gornji lijevi vrh. Crtkana crta označava gdje nastaje novi pregib, dok puna crta označava već nastali pregib (slika 0.2).

---

<sup>1</sup><https://www.dictionary.com/browse/origami>



Slika 0.1: Neoznačen papir oblika kvadrata



Slika 0.2: Presavijanje papira na pola po dijagonali

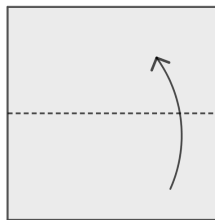
# Poglavlje 1

## Egzaktna podjela dužine na jednake dijelove

U ovom poglavlju podrazumijevamo da je dužina koju želimo podijeliti na neki broj jednakih dijelova rub lista papira. Također, duljinu tog ruba (te stranice) poistovjećujemo s brojem 1.

### 1.1 Binarna podjela

Ako želimo papir u obliku kvadrata (ili općeg pravokutnika) podijeliti na dva jednaka dijela, već je intuitivno jasno kako treba presaviti papir. Dovoljno je presaviti ga tako da se jedna stranica kvadrata preklopi s nasuprotnom (slika 1.1) te se napravi pregib koji dijeli papir na pola (simetrala lijeve i desne stranice) i rastvori papir. Nastali pregib (pravac) dijeli kvadrat, odnosno dvije njegove nasuprotne stranice, na dva jednaka dijela.

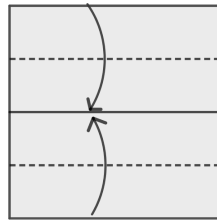


Slika 1.1: podjela kvadrata na polovine

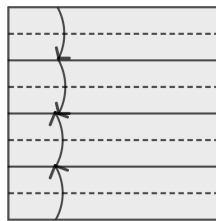
Želimo li stranicu lista papira podijeliti na četvrtine, osmine, šesnaestine itd., odnosno na  $2^n$  jednakih dijelova, gdje je  $n \in \mathbb{N}$ , očigledno možemo više puta ponoviti prepolavljanje.



Podjele na četvrtine i osmine mogu se vidjeti na slikama 1.2 i 1.3 . Primijetimo da se kod podjele na četvrtine papir presavija tri puta, kod podjele na osmine presavija se sedam puta, kod podjele na šesnaestine savijati će se petnaest puta itd. Općenito, dijelimo li ovom metodom papir na  $2^n$  dijelova, papir presavijamo  $2^n - 1$  puta. Ako bi nam trebao samo jedan dio ( $\frac{1}{2^n}$ -ti dio stranice), mogli bismo prepolavljanje izvoditi samo u jednom smjeru (npr. prema gore) te bi se broj potrebnih savijanja smanjio na  $n$ . Na ovaj način se lako



Slika 1.2: Podjela stranice na četvrtine



Slika 1.3: Podjela stranice na osmine

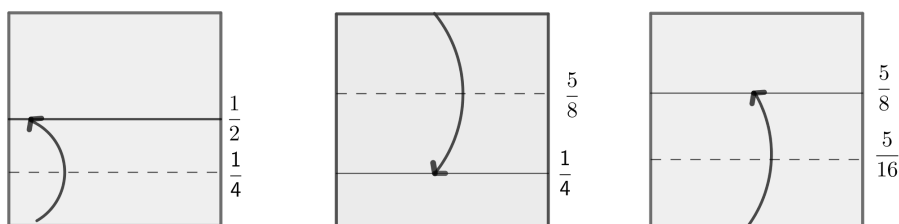
pokaže i kako konstruirati dužinu čija je duljina razlomak  $\frac{m}{2^n} \in [0, 1]$ , gdje su  $m$  i  $n$  brojevi i  $m < 2^n \in [0, 1]$ . Ako smo uzeli da je stranica koju dijelimo duljine 1 i da smo ju podjelili na  $2^n$  jednakih dijelova, treba pobrojati  $m$  pregiba kako bismo našli razlomak  $\frac{m}{2^n}$ . Treba napomenuti da su razlomci koje ovdje razmatramo pozitivni i manji od 1.

Problem s ovom metodom je taj da se prilikom podjele na jednake dijelove za veće  $n$  već u samom početku napravi velik broj pregiba. No, postoji metoda presavijanja koja skraćuje pronalazak takvih razlomaka, a zove se *binarna podjela*. Naziv joj potječe od toga što se razlomci, čiji je nazivnik potencija broja 2, nazivaju *binarnim razlomcima*. U konstrukciji 1.1.1 opisat ćemo kako se papir presavija prema binarnoj podjeli. Njezin temelj je činjenica da binarni razlomci imaju konačan binarni zapis.

**Konstrukcija 1.1.1.** Uzmimo neki razlomak oblika  $\frac{m}{2^n}$ , na primjer  $\frac{5}{16}$ . Taj razlomak zapisan u binarnom sustavu glasi 0,0101. Promatramo li binarni zapis razlomka s desna na lijevo, primjećujemo da je prva znamenka 1 (vrijedi za svaki binarni razlomak u binarnom zapisu) te iz toga slijedi prvi korak binarne podjele: Gornju stranicu kvadrata saviti prema donjoj, napraviti pregib i rastvoriti. Dakle, prvi korak je uvijek raspolavljanje papira. U nastavku se gledaju znamenke koje slijede (zdesna ulijevo) u binarnom zapisu. Pravila su:

- Ako znamenka iznosi 1, savij gornji dio papira do prethodnog pregiba.
- Ako znamenka iznosi 0, savij donji dio papira do prethodnog pregiba.

Kod razlomka  $\frac{5}{16}$  presavijanje započinjemo tako da prepолоvimo kvadrat na dva jednaka dijela, odnosno gornji dio kvadrata savijemo prema donjem i rastvorimo. Sljedeća znamenka, nakon jedinice, gledajući s desna na lijevo je 0 pa presavijemo donju stranicu kvadrata do pregiba napravljenog u prvom koraku. Zatim ponovo slijedi 1 što znači da gornji rub stranice kvadrata presavijemo do prethodnog pregiba. Na kraju se nalazi 0 što znači da donji rub presavijemo do pregiba koji je prethodno presavinut. Novonastali pregib označuje razlomak  $\frac{5}{16}$  na danom kvadratu, odnosno, taj pregib dijeli papir u omjeru 5 : 11. Na slici 1.4 po koracima je prikazan upravo opisan postupak.



Slika 1.4: Binarna podjela – određivanje  $\frac{5}{16}$

## 1.2 Podjela na neparan broj jednakih dijelova

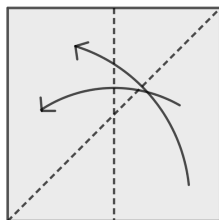
U ovom odjeljku stranicu kvadrata želimo podijeliti na trećine, petine, sedmine ili neki drugi neparan broj jednakih dijelova. Tada je uz znanje o origamiju potrebno i znanje analitičke geometrije kao i znanje geometrijskih konstrukcija. Ovdje ćemo opisati tri metode podjele stranice kvadrata na neparan broj jednakih dijelova. To su redom metoda dijagonala, metoda rubova i Noma-ova metoda.

## Metoda dijagonala za podjelu stranice kvadrata na jednake dijelove

U metodi dijagonala dovoljno je presaviti papir tako da nastanu samo dvije linije, od kojih je jedna dijagonala kvadrata. Temeljem sjecišta tih linija nalazi se traženi razlomag. Prije općenitog opisa ove metode, opišimo podjelu na trećine.

**Konstrukcija 1.2.1** (Podjela stranice na trećine). *Da bismo podijelili kvadrat na tri jednaka dijela potrebno je provesti sljedeće korake:*

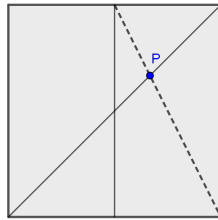
1. *Presaviti kvadrat na pola, tako da pregib prolazi kroz polovišta gornje i donje stranice kvadrata (slika 1.5). Zatim, presaviti kvadrat na pola dijagonalno tako da linija savijanja spaja donji desni vrh s nasuprotnim.*
2. *Presaviti papir tako da pregib koji nastane spaja polovište gornje stranice kvadrata i donji desni vrh kvadrata (slika 1.6). Označimo presjek dijagonale kvadrata i novonastalog pregiba s  $P$ .*
3. *Presaviti papir usporodno s bočnim stranicama kvadrata, tako da pregib prolazi kroz točku  $P$  (slika 1.7).*



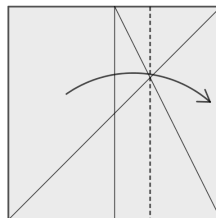
Slika 1.5: Prvi korak podjele stranice kvadrata na trećine

*Zadnji pregib dijeli kvadrat u omjeru 1 : 2, odnosno, gledamo li sliku s desna na lijevo, zadnjim pregibom podijelili smo stranicu kvadrata na trećinu i dvije trećine.*

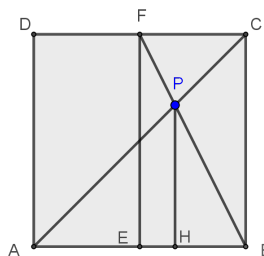
Dokažimo da je konstrukcija 1.2.1 korektna. Neka kvadrat ima oznake kao na slici 1.8. Neka točka  $P$  ima koordinate  $(x, x)$ . Budući da pretpostavljamo da stranica kvadrata ima duljinu 1 znamo da je  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Tada je duljina dužine  $\overline{AH}$  jednaka  $x$ , dok je duljina dužine  $\overline{HB}$  jednaka  $1 - x$ . Također, dužina  $\overline{HP}$  ima duljinu jednaku  $x$ .



Slika 1.6: Drugi korak podjele stranice kvadrata na trećine



Slika 1.7: Posljednji korak podjele stranice kvadrata na trećine



Slika 1.8: Dokaz podjele stranice kvadrata na trećine

Primijetimo sada da su trokuti  $\triangle BFE$  i  $\triangle BPH$  slični prema KK-poučku o sličnosti trokuta. Iz toga slijedi  $\frac{|FE|}{|PH|} = \frac{|BE|}{|BH|}$ . To možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x}. \quad (1.1)$$

Sređivanjem jednadžbe 1.1 dobije se sljedeće

$$2 - 2x = x, \quad (1.2)$$

odnosno  $x = \frac{2}{3}$ .

Mogli smo argumentirati i drugačije. Smjestimo kvadrat u koordinatni sustav tako da je točka  $A$  ishodište, a točka  $B$  ima koordinate  $(1, 0)$ . Tada se točka  $P$  nalazi na sjecištu pravaca čije su jednadžbe  $y = x$  i  $y = -2x + 2$ . Rješavanjem sustava tih dviju jednadžbi lako se dobiju koordinate točke  $P$ , odnosno  $P = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Poopćimo sad konstrukciju 1.2.1 na podjelu stranice kvadrata na neparan broj jednakih dijelova.

Za dani neparan  $n \in \mathbb{N}$ , prvo pronađemo prirodne brojeve  $a$  i  $b$  za koje vrijedi  $n = a + b$ , gdje je  $a = 2^m$  najveća potencija broja 2 koja je manja od  $n$ . Zatim presavijamo papir sljedeći korake:

1. Na desnoj stranici kvadrata potrebno je presavijanjem pronaći razlomak  $\frac{b}{a}$  (slika 1.9). Uočimo da je ovdje  $\frac{b}{a}$  binarni razlomak te to možemo učiniti opisanom binarnom podjelom.
2. Papir presaviti i rastvoriti tako da nastane prešivanje koji spaja donji lijevi vrh kvadrata i točku  $\frac{b}{a}$  na desnoj stranici (slika 1.10).
3. Presaviti papir po dijagonali koja spaja donji desni vrh i lijevi gornji vrh. Rastvoriti (slika 1.11).
4. Sjecište prešivanja iz drugog koraka i dijagonale u koordinatnom sustavu čije ishodište je u donjem lijevom vrhu papira, a koordinatne osi leže na stranicama papira ima koordinate  $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$  (slika 1.12).

Da bismo dokazali da je ova metoda zaista podijelila kvadrat na  $n$  jednakih dijelova, potrebno je naći koordinate sjecišta dvaju pravaca. Za lakše snalaženje u dokazu, pomoći će slika 1.13. Ako dani kvadrat ima stranicu duljine 1, tada je jednadžba dijagonale koja spaja donji desni vrh i gornji lijevi vrh kvadrata jednaka

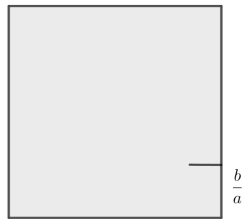
$$y = -x + 1. \quad (1.3)$$

Jednadžba pravca koja spaja lijevi donji vrh i točku  $\left(1, \frac{b}{a}\right)$  je

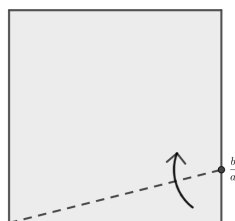
$$y = \frac{b}{a}x. \quad (1.4)$$

Potrebno je riješiti sustav jednadžbi 1.3 i 1.4 i tako odrediti koordinate sjecišta tih dviju linija. Metodom supstitucije dobijemo

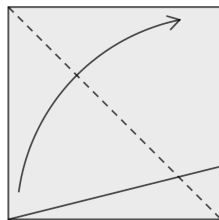
$$\frac{b}{a}x = -x + 1, \quad (1.5)$$



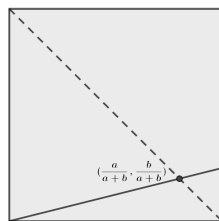
Slika 1.9: Prvi korak metode dijagonala – razlomak  $\frac{b}{a}$



Slika 1.10: Drugi korak metode dijagonala



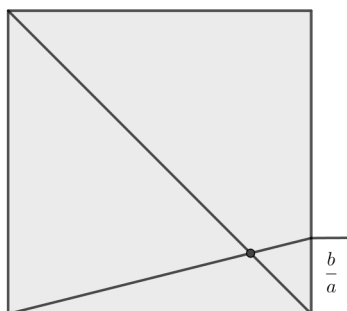
Slika 1.11: Treći korak metode dijagonala



Slika 1.12: Četvrti korak metode dijagonala

pa slijedi

$$x = \frac{a}{a+b}, \tag{1.6}$$



Slika 1.13: Dokaz metode dijagonala

i naposljetku

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}. \quad (1.7)$$

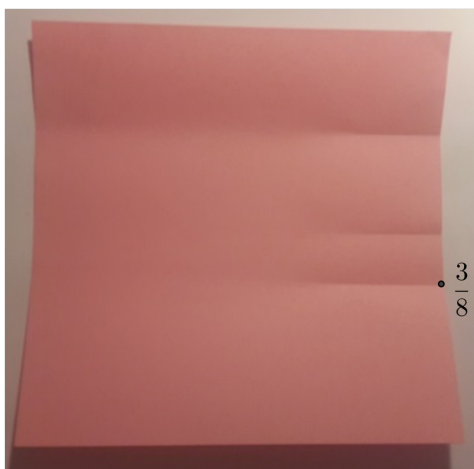
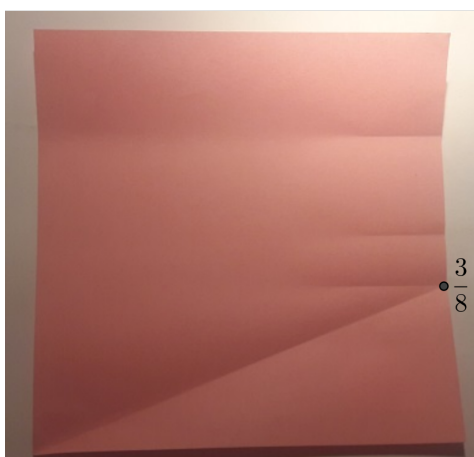
Budući da je  $n = a + b$ , gdje je  $a$  najveća potencija broja 2 manja od  $n$ , koordinate sjecišta su  $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)$ . Dakle savijanjem paralela sa stranicama kroz tu točku podijelili smo stranice kvadrata na dijelove duljina  $\frac{a}{n}$  i  $1 - \frac{a}{n}$ , odnosno  $\frac{b}{n}$  i  $1 - \frac{b}{n}$ . Budući da je  $a$  potencija od 2, uzastopnim prepolavljanjem duž njezine duljine  $\frac{a}{n}$  dobit ćemo traženi razlomak  $\frac{1}{n}$ .

**Primjer 1.2.1** (Podjela na jedanaestine). *Primijenimo metodu dijagonala kako bismo podijelili papir na jedanaestine. Budući da je  $n = 11$  slijedi  $a = 8$  i  $b = 3$ .*

1. Na desnoj stranici kvadrata (binarnom podjelom) pronađemo razlomak  $\frac{3}{8}$  (slika 1.14).
2. Presavijemo i rastvorimo papir tako da nastane pregib koji spaja donji lijevi vrh i točku  $\frac{3}{8}$  (slika 1.15).
3. Presavijemo papir po dijagonali koja spaja donji desni vrh i lijevi gornji vrh.
4. Na sjecištu linija iz drugog i trećeg koraka nalazi se točka s koordinatama  $\left(\frac{8}{11}, \frac{3}{11}\right)$  (slika 1.16).

## Metoda rubova za podjelu stranice kvadrata na jednake dijelove

Za korištenje ove metode, potrebno je pronaći točku na lijevoj stranici kvadrata pomoću koje se presavije papir, a traženi razlomak nalazi se na gornjoj stranici.

Slika 1.14: Prvi korak podjele na jedanaestine – razlomak  $\frac{3}{8}$ 

Slika 1.15: Drugi korak podjele na jedanaestine

Prikažimo općenitu podjelu stranice kvadrata na proizvoljan broj neparnih djelova. Za neparan  $n$ , prvo odredimo  $a$  i  $b$  kao i u metodi dijagonala. Sad pronađimo razlomak  $\frac{b}{a}$  na lijevoj stranici kvadrata (slika 1.17). Donji desni vrh kvadrata savijemo prema gornjoj stranici tako da donja stranica kvadrata prolazi kroz oznaku za razlomak na lijevoj stranici (slika 1.18). Dok je papir presavijen, potrebno je još presaviti gornji desni vrh kako

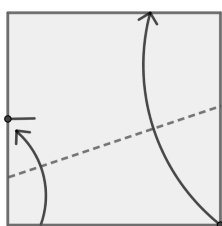




Slika 1.16: Treći i četvrti korak podjele na jedanaestine – točka je na  $\left(\frac{8}{11}, \frac{3}{11}\right)$

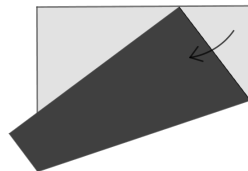


Slika 1.17: Prvi korak metode rubova – razlomak  $\frac{b}{a}$

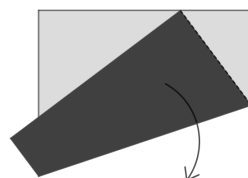


Slika 1.18: Drugi korak metode rubova

je prikazano na slici 1.19 da bismo dobili oznaku podjele stranice. Na kraju rastvorimo presavijanja (slika 1.20). Kao i kod metode dijagonala i ovdje je potrebno dokazati da će



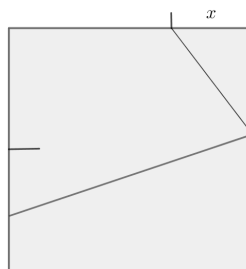
Slika 1.19: Treći korak metode rubova



Slika 1.20: Četvrti korak metode rubova

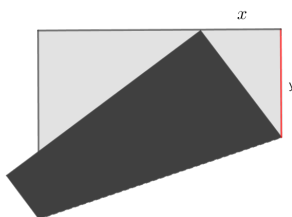
ovim postupkom stranica kvadrata zaista biti podijeljena na  $n$  jednakih dijelova.

Neka je zadana duljina  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  na stranici kvadrata (slika 1.21). Kada presavijemo



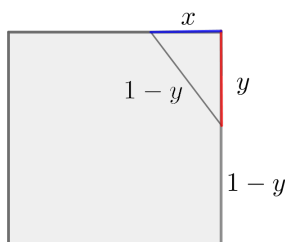
Slika 1.21: Zadana duljina  $x$  na gornjoj stranici kvadrata

papir tako da se donji desni vrh kvadrata poklopi s oznakom za  $x$ , dobivena je nova duljina na desnoj stranici kvadrata, označimo je s  $y$  (slika 1.22). Potrebno je odrediti koliko iznosi  $y$  ako znamo duljinu  $x$ . Primijetimo, da je presavijanjem nastao pravokutan trokut s katetama duljine  $x$  i  $y$  kao na slici 1.23. Budući da i dalje pretpostavljamo da je duljina stranice



Slika 1.22: Duljina  $y$ , označena crvenom, nastala savijanjem donjeg desnog ruba papira do oznake  $x$

kvadrata 1, slijedi, hipotenuza tog pravokutnog trokuta je duljine  $1 - y$ . Prema Pitagorinom



Slika 1.23: Pravokutan trokut nastao presavijanjem

poučku vrijedi

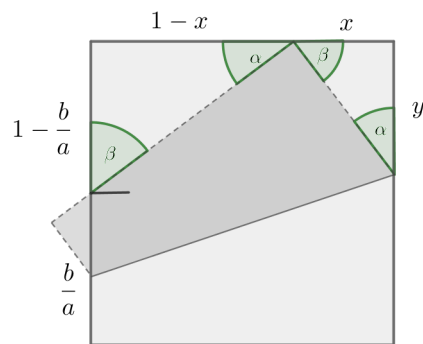
$$x^2 + y^2 = (1 - y)^2, \quad (1.8)$$

odnosno

$$y = \frac{1 - x^2}{2}. \quad (1.9)$$

Dakle, kad god savijemo papir tako da donji lijevi kut padne na gornju stranicu, za duljine  $x$  i  $y$  kao na slici 1.22 vrijedi formula 1.9. U našoj metodi rubova, prvo dobivamo  $x$  i  $y$  iz pozicije razlomka  $\frac{b}{a}$  na lijevom rubu papira, vidi sliku 1.24. Primijetimo pravokutne trokute koji imaju zajednički vrh na gornjoj stranici kvadrata. Ta dva trokuta su slična (prema KK-poučku o sličnosti trokuta). Slijedi:

$$\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 - x} = \frac{x}{y}. \quad (1.10)$$



Slika 1.24: Slični trokuti s veličinama kutova  $\alpha, \beta$  i  $90^\circ$

Budući da je  $y = \frac{1-x^2}{2}$ , iz jednadžbe 1.10 možemo odrediti  $\frac{b}{a}$  pomoću  $x$ :

$$\frac{b}{a} = \frac{1-x}{1+x}, \tag{1.11}$$

pa je

$$x = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}. \tag{1.12}$$

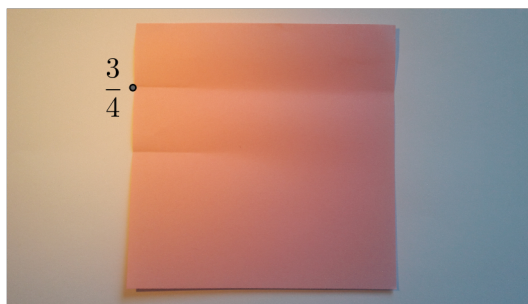
U tablici 1.1 možemo vidjeti primjere nekih vrijednosti  $\frac{b}{a}$ ,  $x$  i  $y$ .

$\frac{b}{a}$	$x$	$y$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{25}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{24}{49}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{16}{81}$

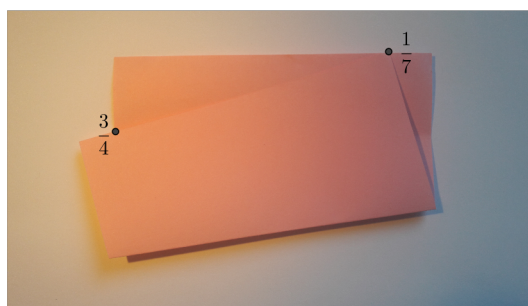
Tablica 1.1: Neke vrijednosti za  $\frac{b}{a}$ ,  $x$ ,  $y$

**Primjer 1.2.2** (Podjela na sedmine pomoću metode rubova). *Postupak podjele započinjemo jednako kao i u metodi dijagonala nazivnik  $n = 7$  rastavimo na najveću potenciju broja 2 manju od 7, a to je broj 4, i razliku do  $n$ , tj. 3. Od ta dva broja načinimo razlomak manji od 1, a to je  $\frac{3}{4}$  i jednom od dviju metoda iz prvog odjeljka odredimo  $\frac{3}{4}$  lijeve stranice kvadrata (slika 1.25). Dovoljno je presaviti papir tako da nastane oznaka, nije potrebno odrediti*

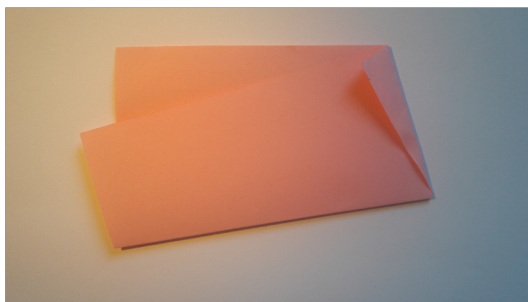
cijelu liniju savijanja. Zatim, donji desni vrh kvadrata prislonimo uz gornju stranicu kvadrata tako da donja stranica prolazi kroz naznačenih  $\frac{3}{4}$  na lijevoj stranici (slika 1.26). Tada je donji desni vrh podijelio gornji rub na sedmine. Potrebno je još presavijanjem označiti  $\frac{1}{7}$  duljine stranice (slika 1.27) te rastvoriti papir (slika 1.28).



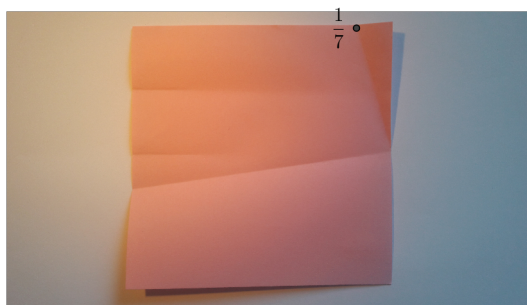
Slika 1.25: Prvi korak podjele na sedmine – određivanje  $\frac{3}{4}$  stranice



Slika 1.26: Drugi korak podjele na sedmine

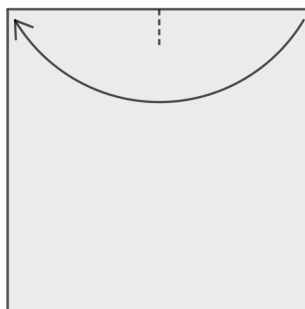


Slika 1.27: Treći korak podjele na sedmine – određivanje  $\frac{1}{7}$  stranice



Slika 1.28: Četvrti korak podjele na sedmine

Metoda rubova je u vezi s jednim od najpoznatijih teorema matematičkog origamija, Haginim teoremom. Promotrimo sljedeće presavijanje. Odredimo polovište gornjeg ruba. Dovoljno je presaviti papir tek toliko da nastane oznaka za polovište (slika 1.29). Donji

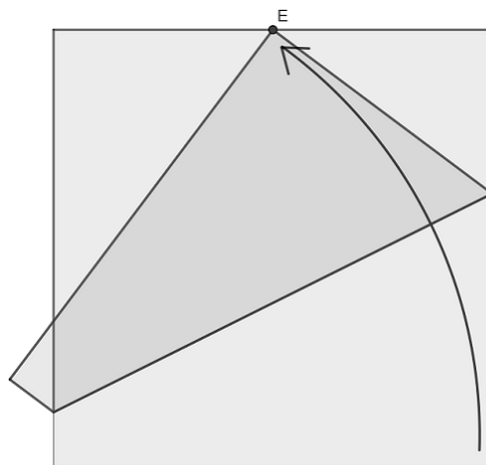


Slika 1.29: Polovište gornjeg ruba

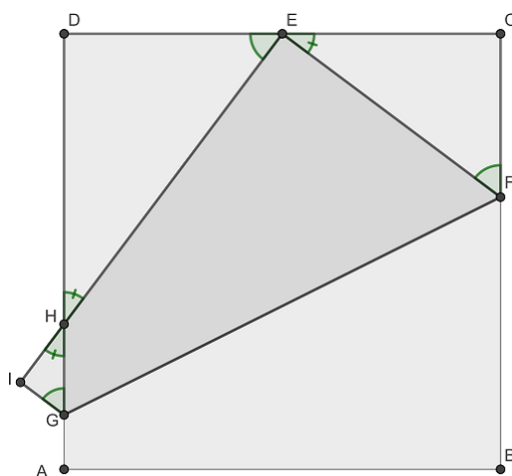
desni vrh papira smjestimo na oznaku za polovište i presavijemo papir tako da nastane pregib (slika 1.30) Ovim presavijanjem nastalo je mnogo zanimljivih trokuta i omjera, a zbog lakšeg praćenja diskusije imenovat ćemo točke kao na slici 1.31.

Odredimo duljine stranica trokuta  $\triangle CEF$  prikazanog na slici 1.31. Kao i do sada, duljina stranice kvadrata je 1. Trokut  $\triangle CEF$  je pravokutan (kut kod vrha C je pravi). Iz konstrukcije (slika 1.29) vidimo da je duljina stranice  $\overline{CE}$  jednaka  $\frac{1}{2}$ . Neka je  $|\overline{CF}| = a$ , tada je  $|\overline{BF}| = 1 - a$ . Kako je, zbog presavijanja,  $|\overline{BF}| = |\overline{EF}|$ , pomoću Pitagorinog poučka na trokutu  $\triangle CEF$  možemo odrediti  $a = \frac{3}{8}$ , to jest  $|\overline{CF}| = \frac{3}{8}$ . Slijedi  $|\overline{EF}| = 1 - a = \frac{5}{8}$ .

Odredimo duljine stranice trokuta  $\triangle EDH$  prikazanog na slici 1.31. Kako se kod presavijanja vrh  $B$  poklapa s točkom  $E$ , a kut pri vrhu  $B$  je pravi, vrijedi da je i  $\angle HEF$  pravi



Slika 1.30: Presavijemo papir tako da se poklope donji desni vrh i polovište



Slika 1.31: Hagin prvi teorem

kut. Kutovi susjedni kutu  $\angle HEF$  su komplementarni pa su trokuti  $\triangle EDH$  i  $\triangle CEF$  slični (prema KK – poučku o sličnosti slika 1.31). Tražimo najprije duljinu stranice  $\overline{DH}$ . Zbog

sličnosti trokuta  $\triangle EDH$  i  $\triangle CEF$  vrijedi

$$\frac{|CF|}{|CE|} = \frac{|DE|}{|DH|}. \quad (1.13)$$

Pa slijedi

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{|AH|}, \quad (1.14)$$

odnosno  $|DH| = \frac{2}{3}$ . Ovim postupkom smo odredili još jedan način podjele stranice na trećine, odnosno, ako odredimo točku  $H$ , možemo pronaći i trećinu stranice, a to je dužina  $\overline{AH}$ .

Pronađimo sada duljinu stranice  $\overline{HE}$ . Ponovno, zbog sličnosti trokuta vrijedi

$$\frac{|CF|}{|EF|} = \frac{|DE|}{|HE|}, \quad (1.15)$$

pa slijedi

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{|HE|} \quad (1.16)$$

odnosno  $|HE| = \frac{5}{6}$ . Pomoću duljine stranice trokuta  $\overline{HE}$  možemo odrediti šestinu stranice kvadrata. Rastvorimo li papir na početnu poziciju, dužina  $\overline{HE}$  se preklopi s dužinom  $\overline{AB}$  tako da točka  $H$  određuje šestinu stranice kvadrata.

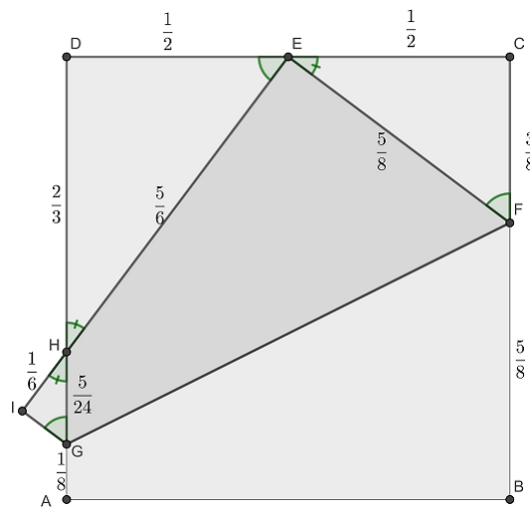
Postoji još trokuta koje možemo promatrati na slici 1.31. Jedan od njih je trokut  $\triangle GIH$  koji je također pravokutan. Odredimo duljine stranica tog trokuta. Kako je  $|EI| = |\overline{AB}| = 1$ , vrijedi  $|HI| = |EI| - |EH| = \frac{1}{6}$ . Preostale duljine stranica je lako odrediti,  $|GI| = \frac{1}{8}$ , a  $|GH| = \frac{5}{24}$ .

Tvrđnje o kojima smo diskutirali do sada, navedene su u sljedećem teoremu.

**Teorem 1** (Hagin prvi teorem). *Pomoću presavijanja u kojem polovište gornjeg ruba preklopimo s donjim desnim vrhom kvadrata, svaki je rub kvadrata podijeljen u sljedećim omjerima (slika 1.32):*

1. Desni rub je točkom  $F$  podijeljen u omjeru 3 : 5.
2. Lijevi rub je točkom  $H$  podijeljen u omjeru 2 : 1.
3. Lijevi rub je točkom  $G$  podijeljen u omjeru 7 : 1.
4. Donji rub je točkom  $H$  podijeljen u omjeru 1 : 5.

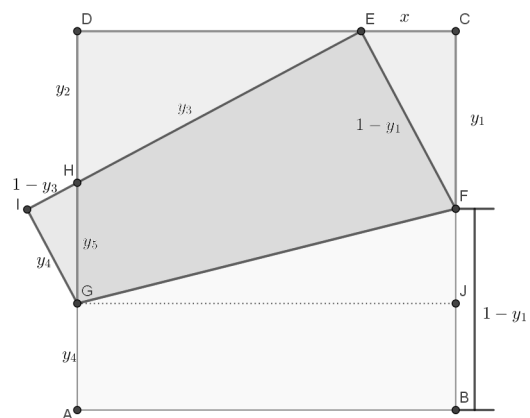




Slika 1.32: Duljine koje su određene presavijanjem

Prvi Hagin teorem može se i generalizirati. Zanima nas vrijedi li Hagin prvi teorem ako početna točka nije polovište gornjeg ruba, već neka proizvoljna točka na istom rubu.

Odaberimo proizvoljnu točku  $E$  na gornjem rubu kvadrata (slika 1.33). Imenujmo preostale vrhove, a duljinu dužine  $\overline{CE}$  označimo s  $x$ . Preostale duljine dužina označimo s  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  (slika 1.33). Duljine dužina na slici možemo izraziti pomoću  $x$  na sljedeći način: Prema Pitagorinom poučku pravokutnog trokuta  $\triangle CEF$  vrijedi  $x^2 + y_1^2 = (1 - y_1)^2$



Slika 1.33: Oznake specifičnih duljina dužina

(slika 1.33). Izrazimo li  $y_1$  iz jednadžbe vrijedi:

$$y_1 = \frac{1 - x^2}{2}. \quad (1.17)$$

Nadalje, zbog sličnosti trokuta  $\triangle DHE$  i  $\triangle CEF$  (slika 1.33) vrijedi proporcija  $\frac{y_1}{1-x} = \frac{x}{y_2}$ , odnosno

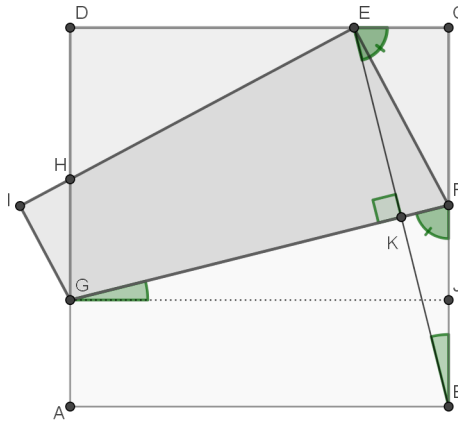
$$y_2 = \frac{2x}{1+x}. \quad (1.18)$$

Također zbog sličnosti tih trokuta vrijedi i  $\frac{y_2}{y_3} = \frac{x}{1-y_1}$  iz čega slijedi

$$y_3 = \frac{1+x^2}{1+x}. \quad (1.19)$$

Promatramo li stranice trokuta  $\triangle BCE$  i  $\triangle GJF$  (slika 1.34), uočavamo da su  $\overline{FG}$  i  $\overline{EB}$  okomite (okomite su stranice  $\overline{CE}$  i  $\overline{JF}$  te stranice  $\overline{GJ}$  i  $\overline{BC}$  slijedi, preostale dvije stranice trokuta  $\triangle BCE$  i  $\triangle GJF$  moraju biti okomite). Promatramo li sada trokute  $\triangle BCE$  i  $\triangle BKF$  (slika 1.34), možemo zaključiti da su oni slični (prema KK – poučku o sličnosti trokuta). Slijedi, mjere kutova  $\angle CEB$  i  $\angle KFB$  su jednake pa su trokuti  $\triangle BCE$  i  $\triangle GJF$  sukladni (prema  $KKS^>$  – poučku o sukladnosti trokuta). Budući da je  $|FJ| = x$ , vrijedi

$$y_4 = |FJ| = 1 - (y_1 + x) = \frac{(1-x)^2}{2}. \quad (1.20)$$



Slika 1.34:  $\triangle BCE \sim \triangle BKF$ ,  $\triangle BCE \cong \triangle GJF$

Iz jednadžbe

$$y_2 + y_3 + y_4 = 1 \quad (1.21)$$

možemo odrediti  $y_5$ , odnosno

$$y_5 = 1 - \left( \frac{2x}{1+x} + \frac{(1-x)^2}{2} \right). \quad (1.22)$$

$x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$y_1$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$
$y_2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{7}$
$y_3$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{25}{28}$
$y_4$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{32}$

Tablica 1.2: Vrijednosti dobivene generalizacijom Haginog prvog teorema

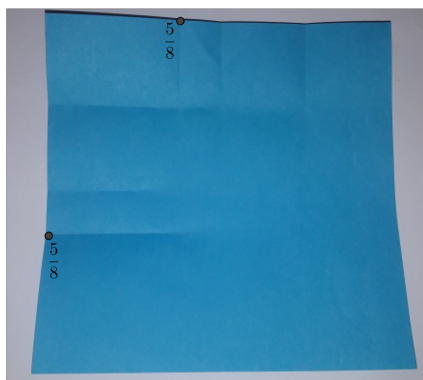
U tablici 1.2 su dane neke vrijednosti duljine  $x$  kojima ćemo lakše predočiti važnost ove generalizacije. Primijetimo, vrijednosti u trećem stupcu tablice 1.2 već su dobivene presavijanjem papira metodom rubova kod podjele na sedmine pomoću metode rubova.

### Noma-ova metoda

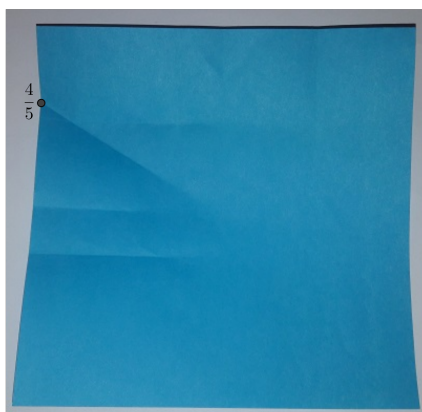
Mana metoda poput prethodnih je ta što na papiru ostanu dodatne linije nastale presavijanjem. Sljedeća metoda omogućava konstrukciju bilo kojeg pozitivnog razlomka manjeg od 1 samo uz pomoć pregiba, odnosno oznaka uz rubove papira. Ova metoda je otkriće Masamichija Noma pa ju i nazivamo Noma-ova metoda [6]. Pogledajmo najprije korake presavijanja za jedan konkretan razlomak, a zatim ćemo poopćiti ovu metodu.

**Primjer 1.2.3** (Podijela stranice na petine Noma-ovom metodom). *Prvi je korak (gotovo) isti kao u prethodnim metodama. Najveća potencija broja 2 manja od 5 je broj 4. Zato na lijevoj i gornjoj stranici kvadrata, binarnom metodom, određujemo gdje se nalazi razlomak  $\frac{5}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$  (slika 1.35). Spojimo točke koje su oznake za  $\frac{5}{8}$  stranice na lijevoj i gornjoj stranici kvadrata i tako nastaje linija kojoj je visina  $y$  na lijevom rubu jednaka  $\frac{4}{5}$  (slika 1.36). Konstruiramo četvrtinu dužine kojoj je duljina  $\frac{4}{5}$ . Oznaka kod zadnjeg presavijanja papira je oznaka za  $\frac{1}{5}$  stranice kvadrata (slika 1.37).*

Na slikama 1.38 i 1.39 se nalazi prikaz Noma-ove metode za opći slučaj kada želimo stranicu kvadrata podijeliti na  $b$  jednakih dijelova, gdje je  $b$  prirodan broj koji nije potencija broja 2. Ako bolje proučimo različite udaljenosti na stranicama kvadrata (kako su



Slika 1.35: Prvi korak podjele na petine Nomovom metodom



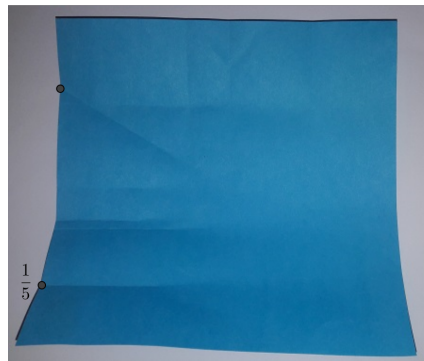
Slika 1.36: Drugi korak podjele na petine Nomovom metodom

prikazane na slici 1.39), možemo pokazati da za duljine  $y$ ,  $w$  i  $x$  vrijedi

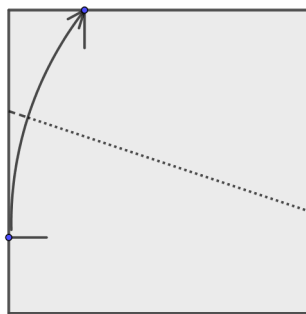
$$y = \frac{1 - w^2 + x^2}{2 - 2w}. \quad (1.23)$$

Jednadžbu 1.23 možemo dobiti uz pomoć Pitagorinog poučka primjenjenog na pravokutni trokut s katetama duljine  $1 - y$  i  $x$  te hipotenuzom duljine  $y - w$ . Ispitivanjem različitih slučajeva presavijanja Noma-ovom metodom možemo pokazati sljedeće. Uzmemo li da za  $x$  i  $w$  vrijedi

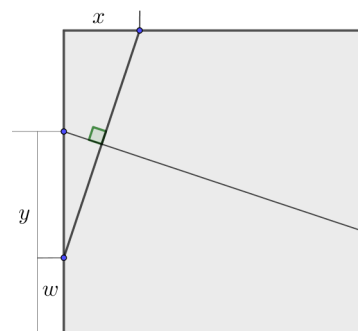
$$w = x = \frac{b}{2a} \quad (1.24)$$



Slika 1.37: Treći korak podjele na petine Nomovom metodom



Slika 1.38: Shematski prikaz Noma-ove konstrukcije



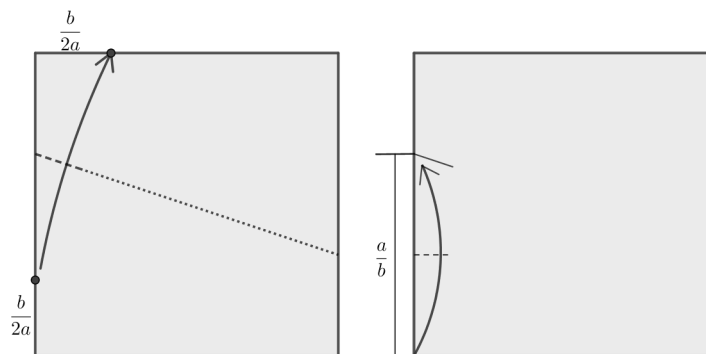
Slika 1.39: Duljine korištene u Noma-ovoj metodi

gdje je  $a$  prirodan broj koji je potencija broja 2 i uvrstimo li jednađbe 1.24 u 1.23, tada je  $y$  udaljen od donje stranice kvadrata za

$$y = \frac{p}{b}. \quad (1.25)$$

Prethodni postupak nas dovodi do sljedećeg algoritma kojim možemo dobiti razlomak  $\frac{1}{b}$  pomoću Nomaove metode, a algoritam je prikazan na slikama 1.40:

1. Odredimo najveću potenciju broja 2 koju označujemo s  $a$  i koja je manja od  $b$ .
2. Konstruiramo razlomke  $w = \frac{b}{2a}$ ,  $x = \frac{b}{2a}$  uz lijevi, odnosno gornji rub kvadrata.
3. Spojimo točke  $w$  i  $x$  i tako napravimo pregib uz lijevi rub na visini  $y = \frac{a}{b}$ . Nije potrebno raditi cijelu liniju pregiba.
4. Kako je  $a$  oblika  $2^n$ , razlomak  $\frac{1}{b}$  odredit ćemo binarnom podjelom dijela stranice koji je duljine  $y = \frac{a}{b}$  dok ne dođemo do traženog razlomka.



Slika 1.40: Noma-ova metoda za podjelu na  $b \in \mathbb{N}$  jednakih dijelova

Mana Noma-ove metode bila bi ta što se binarna podjela koristi čak tri puta zbog čega u ovoj metodi postoji veći broj presavijanja nego u ostalim metodama.

## Poglavlje 2

# Aproksimativna podjela dužine na jednake dijelove

Do sada smo se bavili metodama presavijanja papira koje su matematički egzaktne. U ovom poglavlju bit ćemo usmjereni na aproksimativne podjele na jednake dijelove. Prva takva metoda je Fujimotova aproksimacija.

### 2.1 Fujimotova aproksimacija

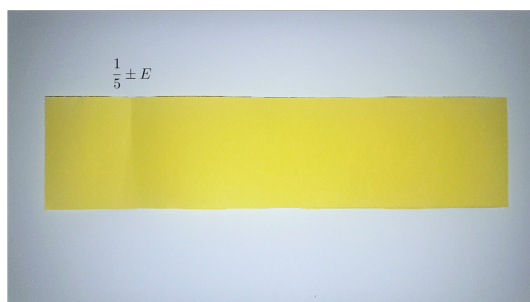
Fujimotova metoda obično se opisuje na pravokutniku kojemu je jedna stranica puno kraća od druge (traka papira), no naravno, može se provoditi i na bilo kojem drugom pravokutnom papiru. Ovom metodom presavijamo traku na neparan broj približno jednakih dijelova. Podsjetimo se da ako znamo podijeliti dužinu na neparan broj  $n$  jednakih dijelova, daljnjim uzastopnim prepolavljanjem možemo dobiti podjelu na bilo koji paran višekratnik od  $n$ .

Želimo li detaljnije analizirati Fujimotovu aproksimaciju, moramo kreirati prikladan matematički model. Ovdje ćemo papirnatu traku zamisliti kao segment  $[0, 1]$  na brojevnom pravcu realnih brojeva. Za početak, opišimo korake za dobivanje  $\frac{1}{5}$  Fujimotovom aproksimacijom.

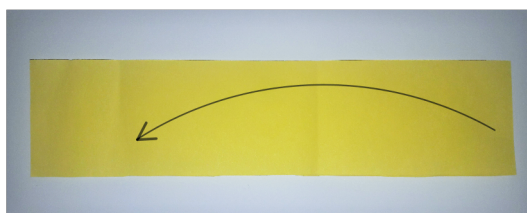
**Konstrukcija 2.1.1** (Podjela na petine Fujimotovom aproksimacijom). *Prvi pregib odredimo tako da presavijemo papir tamo gdje bi otprilike mogla biti  $\frac{1}{5}$  duljine trake npr. od lijevog kraja (slika 2.1). Sad je s desne strane pregiba otprilike  $\frac{4}{5}$  duljine trake, stoga presavijemo tu stranu na pola (slika 2.2). Zadnji pregib je blizu pozicije  $\frac{3}{5}$  pa je desno od njega približno  $\frac{2}{5}$  trake. Desni dio trake opet presavijemo na pola (slika 2.3).*

*Dobili smo pregib koji ostavlja približno  $\frac{1}{5}$  na desnoj strani dakle, približno je na poziciji  $\frac{4}{5}$ . Lijevi dio presavijemo na pola (slika 2.4) i tako dobijemo pregib blizu  $\frac{2}{5}$ . Lijevi*

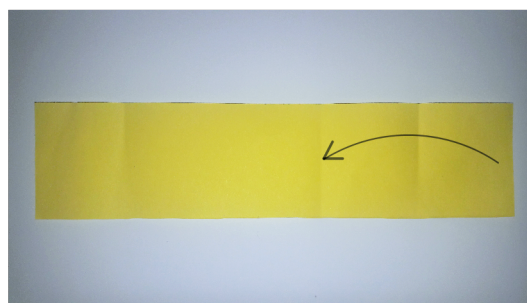
dio ponovno presavijemo na pola (slika 2.5). Zadnje presavijanje daje oznaku vrlo blizu stvarnoj petini trake.



Slika 2.1: Prvi korak podjele na petine Fujimotovom aproksimacijom

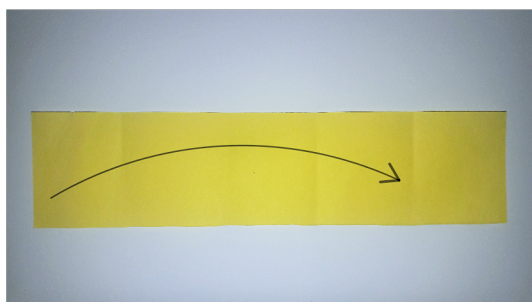


Slika 2.2: Drugi korak podjele na petine Fujimotovom aproksimacijom

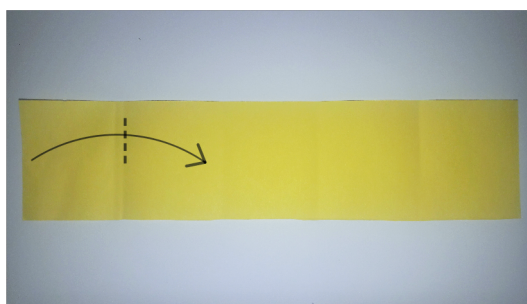


Slika 2.3: Treći korak podjele na petine Fujimotovom aproksimacijom





Slika 2.4: Četvrti korak podjele na petine Fujimotovom aproksimacijom



Slika 2.5: Peti korak podjele na petine Fujimotovom aproksimacijom

Zašto smo sigurni da Fujimotovom metodom možemo dovoljno dobro aproksimirati tražene razlomke manje od 1? Promotrimo aproksimaciju razlomka  $\frac{1}{5}$  iz gornje konstrukcije. Neka je  $a \in \langle 0, 1 \rangle$  pozicija prvog savijanja trake (slika 2.6). Tada drugo savijanje prepolavlja ostatak trake i daje poziciju  $a + \frac{1-a}{2} = \frac{a+1}{2}$  (slika 2.7). Treće presavijanje prepolavlja interval između te pozicije i kraja trake (pozicije 1), dakle daje poziciju

$$\frac{a+1}{2} + \frac{1-a}{4} = \frac{a+3}{4}$$

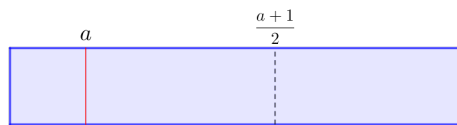
(slika 2.8). Četvrto savijanje prepolavlja interval  $\left[0, \frac{a+3}{4}\right]$ , dakle daje poziciju  $\frac{a+3}{8}$  (slika 2.9), a zadnje prepolavlja nju, dakle ako smo krenuli od procjene  $a$  dobit ćemo novu procjenu  $\frac{a+3}{16}$  (slika 2.10).

Znamo da je  $a$  bila procjena za  $\frac{1}{5}$ , dakle je  $a = \frac{1}{5} \pm \varepsilon$  pa je  $\frac{a+3}{16} = \frac{\frac{1}{5} \pm \varepsilon + 3}{16} = \frac{1}{5} \pm \frac{\varepsilon}{16}$ . Dakle, ako je prva procjena imala grešku  $\varepsilon$ , Fujimotova aproksimacija daje procjenu sa 16 puta manjom greškom. Stoga, ako Fujimotovu aproksimaciju ponovimo svaki puta počevši od

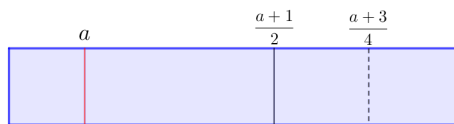
novonastale zadnje oznake, greške će činiti niz  $(\varepsilon 16^{-n})_n$  koji konvergira u 0, odnosno nakon dovoljno ponavljanja Fujimotove aproksimacije dobit ćemo po želji točnu aproksimaciju  $\frac{1}{5}$ .



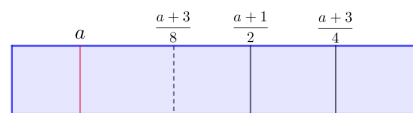
Slika 2.6: Pozicija prvog savijanja trake  $a$



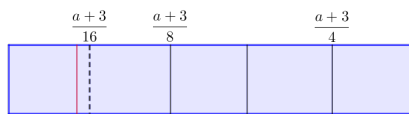
Slika 2.7: Pozicija drugog savijanja trake  $\frac{a+1}{2}$ .



Slika 2.8: Pozicija trećeg savijanja trake  $\frac{a+3}{4}$



Slika 2.9: Pozicija četvrtog savijanja trake  $\frac{a+3}{8}$



Slika 2.10: Peto savijanje trake s novom procjenom  $\frac{a+3}{16}$

Fujimotova aproksimacija  $\frac{1}{5}$  ima vezu s binarnim zapisom. Kada razlomak  $\frac{1}{5}$  zapišemo u binarnom sustavu, taj zapis je oblika  $0,0011$ . Primijetimo da se prve četiri znamenke u decimalnom dijelu binarnog zapisa ponavljaju. Vidjeli smo da Fujimotovom metodom aproksimaciju razlomka  $\frac{1}{5}$  dobivamo tako da dva puta prepolavljamo desni dio trake, a

zatim dva puta lijevi dio trake. Ako prepolavljanju desnog kraja pridružimo broj 1, vidimo da je slijed presavijanja trake zapravo periodički dio binarnog zapisa čitan zdesna ulijevo.

Zapišemo li pak razlomak  $\frac{1}{7}$  u binarnom sustavu dobijemo zapis  $0,\overline{001}$ , dakle slijed presavijanja bi bio prepolovi desni dio trake, a zatim dva puta prepolovi lijevi dio trake. Ako sada s  $a$  označimo procjenu za  $\frac{1}{7}$ , odnosno vrijedi  $a = \frac{1}{7} \pm \varepsilon$ , u prvoj Fujimotovoj aproksimaciji kao novu procjenu dobijemo  $\frac{a+1}{8} = \frac{\frac{1}{7} \pm \varepsilon + 1}{8} = \frac{1}{7} \pm \frac{\varepsilon}{8}$ . Primijetimo da se u svakoj aproksimaciji greška smanjuje 8 puta, dakle niz grešaka  $(\varepsilon 8^{-n})_n$  konvergira u 0, ali upola sporije nego kod  $\frac{1}{5}$ . Možemo uočiti da se u svakom koraku Fujimotove aproksimacije greška smanjuje  $2^n$  puta, gdje je  $n$  duljina periodičkog dijela binarnog zapisa, zato npr. greška za  $\frac{1}{3} = 0,\overline{01}$  sporo konvergira jer se svaki put smanji samo  $2^2 = 4$  puta.

Kod savijanja trake Fujimotovom aproksimacijom pretpostavljamo da pri prepolavljanju nema grešaka. Zbog toga je ova metoda prikladna za sve razlomke s neparnim nazivnicima, kao i za one s parnim (iz razlomka s neparnim nazivnikom uzastopnim prepolavljanjem dobijemo razlomak koji želimo, npr.  $\frac{1}{20}$  dobijemo iz  $\frac{1}{5}$  tako da ju prepolovimo dva puta).

Dakle u postupku Fujimotove aproksimacije nastaju brojni pregibi na papiru pomoću kojih iz prvotne procjene razlomka  $\frac{1}{n}$  (s neparnim  $n$ ) dobivamo novu, bolju procjenu istog razlomka. Ponekad, u procesu presavijanja određujemo i sve višekratnike razlomka  $\frac{1}{n}$  kao što je to slučaj kod  $\frac{1}{5}$ , a ponekad ćemo odrediti samo neke višekratnike, kao npr. za  $\frac{1}{7}$ . U tablicama 2.1, 2.2, 2.3) i 2.4 dajemo pregled oznaka razlomaka  $\frac{k}{n}$  koje u Fujimotovoj aproksimaciji nastaju za  $n = 5, 7, 9$  i  $11$ .

petine slijeva	petine zdesna
1	4
3	2
4	1
2	3
1	4

Tablica 2.1: Razlomci koji nastaju na traci kod aproksimacije petine papira

sedmine slijeva	sedmine zdesna
1	6
4	3
2	5
1	6

Tablica 2.2: Razlomci koji nastaju na traci kod aproksimacije sedmine papira

devetine slijeva	devetine zdesna
1	8
5	4
7	2
8	1
4	5
2	7
1	8

Tablica 2.3: Razlomci koji nastaju na traci kod aproksimacije devetine papira

jedanaestine slijeva	jedanaestine zdesna
1	10
6	5
3	8
7	4
9	2
10	1
5	6
8	3
4	7
2	9
1	10

Tablica 2.4: Razlomci koji nastaju na traci kod aproksimacije jedanaestine papira

Promotrimo li te tablice i čitamo li ih odozdo prema gore, lijevi ili desni stupac, vidimo da se u tablicama pojavljuju uzastopne potencije broja 2 počevši od 2, ali modulo  $n$ . Npr. za  $n = 5$  vrijedi

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1 \pmod{5}, \\ 2^1 &\equiv 2 \pmod{5}, \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{5}, \\ 2^3 &\equiv 3 \pmod{5}, \\ 2^4 &\equiv 1 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Iz tablica zaključujemo da ćemo savijanjem trake dobiti sve oznake od  $\frac{1}{n}$  do  $\frac{n-1}{n}$  samo ako potencije od 2 generiraju sve ostatke (osim 0) modulo  $n$ , tj. izraženo jezikom teorije brojeva, točno ako je 2 primitivni korijen od  $n$ <sup>1</sup>. Možemo još malo produbiti ovo objašnjenje.

Neka je  $\frac{1}{n} = (0, \overline{i_1 i_2 \dots i_k})_2$ . Pretpostavimo da je  $k$  najmanji mogući, tj. da je prethodni zapis najkraći binarni periodički zapis za  $\frac{1}{n}$ . To znači da je

$$\frac{1}{n} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{i_1}{2^{jk+1}} + \frac{i_2}{2^{jk+2}} + \dots + \frac{i_k}{2^{jk+k}} \right). \quad (2.1)$$

Zapis 2.1 svodimo na zajednički nazivnik pa dobijemo

$$\frac{1}{n} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{2^{k-1}i_1 + 2^{k-2}i_2 + \dots + 2^0i_k}{2^{jk+k}} \right). \quad (2.2)$$

Neka je brojnik u zapisu 2.2 označen s  $a = 2^{k-1}i_1 + 2^{k-2}i_2 + \dots + 2^0i_k$ . Primijetimo da se  $a$  može zapisati kao binarni broj  $a = (i_1 i_2 \dots i_k)_2$ , a to je točno periodički dio binarnog zapisa razlomka  $\frac{1}{n}$ . Budući da  $a$  ne ovisi o  $j$ , formulu 2.2 možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{1}{n} = a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{jk+k}} = \frac{a}{2^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}. \quad (2.3)$$

Gornji red je konvergentan geometrijski red s kvocijentom  $\frac{1}{2}$  pa vrijedi

$$\frac{1}{n} = \frac{a}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a}{2^k} \cdot \frac{2}{2 - 1}. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Broj  $a \in \mathbb{N}$  nazivamo primitivnim korijenom modulo  $n$  ako je red od  $a$  modulo  $n$  jednak vrijednosti Eulerove funkcije  $\phi(n)$ , a  $a$  i  $n$  su relativno prosti brojevi. Npr. red od 2 modulo 5 je 4 (najmanji prirodni broj za koji vrijedi  $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ), a  $\phi(5) = 4$  ( $\phi(5)$  je broj elemenata u skupu  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  koji su relativno prosti s 5) pa je 2 primitivni korijen od 5.

Stoga je

$$an = 2^k - 1, \quad (2.5)$$

odnosno

$$2^k \equiv 1 \pmod{n}. \quad (2.6)$$

Pretpostavimo sad da  $k$  nije najmanji prirodan broj koji zadovoljava  $2^k \equiv 1 \pmod{5}$  pa razlomak  $\frac{1}{n}$  također možemo zapisati kao

$$\frac{1}{n} = \frac{b}{2^m - 1} \quad (2.7)$$

gdje su  $b$  i  $m$  prirodni brojevi,  $m < k$ . Provedemo li račun unatrag, dobit ćemo drugi periodički binarni zapis za  $\frac{1}{n}$ , s kraćim periodičkim dijelom (sad bi bio duljine  $m < k$ ), što je kontradikcija jer smo već pretpostavili da je  $k$  najkraća duljina periodičkog dijela. Dakle dokazali smo da je  $k$  najmanji prirodni broj za koji vrijedi  $2^k \equiv 1 \pmod{5}$ .

Iz svega navedenog zaključujemo da Fujimotovom aproksimacijom za  $\frac{1}{n} = (0,\overline{i_1 i_2 \dots i_k})_2$  na traci dobivamo oznake svih višekratnika razlomka  $\frac{1}{n}$  ako i samo ako je  $k = n - 1$ . To će pak vrijediti ako i samo ako potencije broja 2 generiraju cijeli  $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ . Drugim riječima,  $n$  mora biti prost broj i 2 mora biti primitivni korijen modulo  $n$ .

## 2.2 Binarna aproksimacija

Razlomci čiji je nazivnik potencija broja 2 jedini su razlomci koji imaju konačan binarni zapis. Stoga kod određivanja takvih razlomaka pomoću origamija, koristimo binarnu podjelu kao što smo prikazali u odjeljku 1.1. S druge strane, za većinu razlomaka, binarni zapis je beskonačan pa nije moguće koristiti binarnu podjelu kod njihove konstrukcije. Ipak, zaokružimo li beskonačan binarni zapis nekog razlomka čiji nazivnik nije potencija broja 2, možemo odrediti binarni razlomak koji daje aproksimaciju danog broja. Zaokružimo li primjerice binarni zapis  $\frac{1}{3} = (0,\overline{01})_2$  na dva ili tri binarna mjesta dobijemo  $0,01 = \frac{1}{4}$  što nije dobra aproksimacija. Zaokružimo li na četiri mjesta, dobijemo  $0,0101 = \frac{5}{16}$  što je već bliže  $\frac{1}{3}$ . Uzmemo li pak  $0,010101 = \frac{21}{64}$  greška je samo 1%. Na ovaj način, možemo aproksimirati bilo koji broj do proizvoljne točnosti pomoću konačnog binarnog razlomka, a nakon toga, možemo koristiti binarnu podjelu za konstrukciju te aproksimacije.

**Primjer 2.2.1.** *Prisjetimo se, binarni zapis razlomka  $\frac{1}{5}$  je  $(0,\overline{0011})_2$ . Pogledamo li binarnu podjelu (konstrukcija 1.1.1) i zamijenimo gornji i donji rub papira s lijevom i desnom rubom trake, vidimo da je binarna podjela za  $\frac{3}{16} = 0,0011$  točno jedna Fujimotova aproksimacija za  $\frac{1}{5}$  kad bismo krenuli od prve aproksimacije na poziciji 0.*

Možemo razmatrati i obrnuti postupak.

**Primjer 2.2.2.** *Odredimo razlomak koji je zadan sljedećim postupkom presavijanja: prepolovi desnu stranu trake dva puta, a zatim lijevu stranu trake tri puta. O kojem se razlomku radi? Takvim postupkom presavijanja određen je binarni zapis broja  $0,00011 = \frac{3}{32}$ . Pretvorimo li taj zapis u periodički dobijemo*

$$(0,\overline{00011})_2 = \frac{3}{31}$$

*odnosno ova binarna podjela daje prvu aproksimaciju tog razlomka.*

Prednost aproksimativnih metoda podjele je ta što funkcioniraju usprkos greškama koje nastaju kod savijanja papira. Niti jedan pregib nastao presavijanjem papira nije matematički savršeno precizan i, koliko god se trudili, uvijek će biti neke greške u presavijanju. Možemo se pitati koja metoda je efikasnija, aproksimacije ili neka od prije navedenih matematički točnih i savršenih metoda? Naime, krajnji rezultat je taj da je količina nastalih grešaka podjednaka. Kod Fujimotove aproksimacije, greška postoji od početka presavijanja i svakim savijanjem papira se sve više smanjuje. Kod binarne aproksimacije greška također postoji od početka, pomoću binarnog zapisa određujemo razlomak na proizvoljnu točnost. Njezina prednost je također što s relativno malim brojem presavijanja možemo dosta precizno odrediti traženi razlomak. Kod „preciznog” presavijanja greška je uključena u svakom koraku savijanja papira. Također kod matematički egzaktnog savijanja, svakim presavijanjem se greška dodaje, dok se kod Fujimotove aproksimacije greška svakim presavijanjem smanjuje.

## Poglavlje 3

# Podjela kuta na jednake dijelove

Podjela kutova na jednake dijelove pomoću origamija nije tako česta kao podjela dužine. Ona je potrebija kod presavijanja papira za izradu modela poliedara. Podjela kutova na neku potenciju broja 2 je lagana i intuitivno jasna, kao i podjela dužine. Također aproksimativne metode (Fujimotova ili binarna aproksimacija) mogu se analogno primijeniti na kutove pri čemu lijevi i desni rub papira zamjenjujemo krakovima, no egzaktna podjela kutova na proizvoljne neparne brojeve  $n$  je znatnije teža i zamršenija. Prisjetimo se da ravnalom i šestarom ne možemo podijeliti kut na bilo koji broj jednakih dijelova (npr. trećine). Ipak, neke konstrukcije koje su nemoguće ravnalom i šestarom moguće je izvesti pomoću origamija.

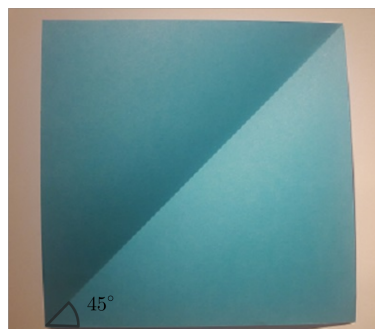
### 3.1 Podjela pravog kuta

Prikažimo neke podjele pravog kuta na jednake dijelove. Za prikaz ćemo koristiti papir u obliku kvadrata čija je duljina stranice jednaka 1.

**Primjer 3.1.1** (Podjela pravog kuta na polovine i četvrtine). *Želimo li podijeliti pravi kut na dva jednaka dijela potrebno je presaviti kvadrat po dijagonali. Pregib nastaje tako da jedan vrh kvadrata prislonimo na suprotan vrh, a da se stranice koje zatvaraju vrhove podudaraju. Prepolavljanjem pravog kuta je određen kut veličine  $45^\circ$  (slika 3.1). Presavinemo li papir tako da se donja stranica kvadrata preklopi s prethodno određenom dijagonalom (slika 3.2), dobivenim pregibom podijelili smo pravi kut na četvrtine, odnosno određen je kut čija je mjera  $22.5^\circ$  (slika 3.3). Analogno bismo dalje mogli dobiti kut od  $12,5^\circ$ ,  $6,25^\circ$ , ..., sve dok veličina (i debljina) papira ne bi onemogućila daljnje savijanje.*

Pravi kut je jedna od iznimaka kod kojih ravnalom i šestarom možemo provesti trisekciju kuta, odnosno podijeliti ga na trećine. Odgovarajuća origami konstrukcija opisana je u primjeru 3.1.2.





Slika 3.1: Kut veličine  $45^\circ$

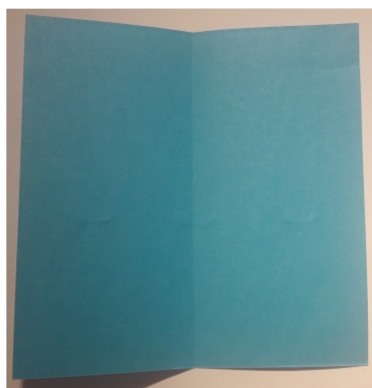


Slika 3.2: Podjela pravog kuta na četvrtine



Slika 3.3: Podjelom pravog kuta na četvrtine određen je kut veličine  $22.5^\circ$

**Primjer 3.1.2** (Podjela pravog kuta na trećine). *Presavijmo nasuprotne stranice kvadrata, tako da je dobivena linija simetrala tih stranica (slika 3.4). Zatim, presavijemo papir tako da se desni donji vrh kvadrata nađe na prethodno nastaloj simetrali (slika 3.5). Novonastali pregib i donja stranica kvadrata čine krakove kuta od  $30^\circ$  (slika 3.6).*

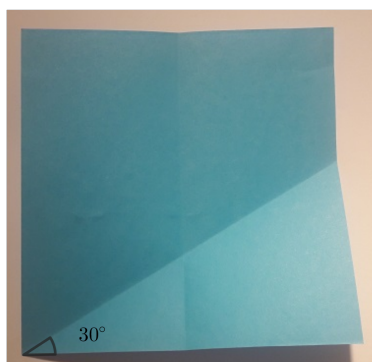
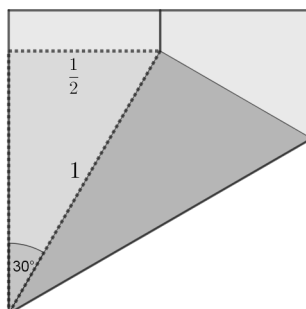


Slika 3.4: Prvi korak podjele pravog kuta na trećine



Slika 3.5: Drugi korak podjele pravog kuta na trećine

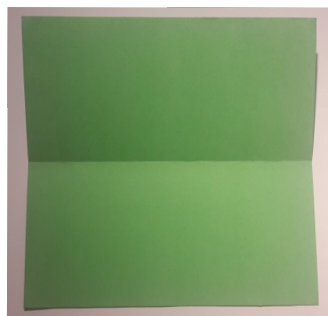
Zašto smo sigurni da je veličina dobivenog kuta baš  $30^\circ$ ? Presavijanjem u drugom koraku nastaje pravokutni trokut koji je označen svijetlo sivo na slici 3.7. Budući da je hipotenuza tog trokuta jednaka 1, a jedna kateta duljine  $\frac{1}{2}$ , slijedi da je veličina kuta nasuprot te katete jednaka  $30^\circ$ . Prepolavljanjem kuta od  $30^\circ$  dobit ćemo kut od  $15^\circ$ , ali za njega postoji i direktna konstrukcija.

Slika 3.6: kut veličine  $30^\circ$ Slika 3.7:  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 

**Primjer 3.1.3** (Podjela pravog kuta na šestine). *Možemo odrediti i šestinu pravog kuta, odnosno kut čija je mjera  $15^\circ$ , sljedećim koracima:*

1. Prvi korak je kao za trisekciju pravog kuta (slika 3.8).
2. Presavijemo papir tako da donji desni vrh dodiruje prije nastali pregib, a novonastali pregib prolazi kroz lijevi donji vrh kvadrata (slika 3.9).
3. Određena je  $\frac{1}{6}$  pravog kuta, odnosno kut mjere  $15^\circ$  (slika 3.10).

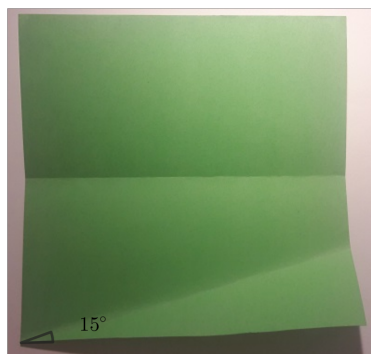
Kako znamo da smo dobili kut od  $15^\circ$ ? Primijetimo svijetlo sivi pravokutni trokut na slici 3.11. Taj trokut je nastao u drugom koraku prethodne konstrukcije. Hipotenuza tog trokuta je duljine 1, a kateta uz stranicu kvadrata je duljine  $\frac{1}{2}$  pa stoga kut između te,



Slika 3.8: Prvi korak podjele pravog kuta na šestine



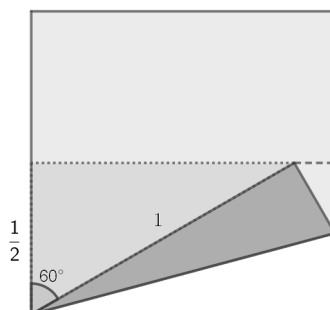
Slika 3.9: Drugi korak podjele pravog kuta na šestine



Slika 3.10: Treći korak podjele pravog kuta na šestine

priležće, katete i hipotenuze iznosi  $60^\circ$ . Uočimo (slika 3.11) da tamnosivi trokut predstavlja dva sloja papira, dakle je preostali kut od  $30^\circ$  prepolovljen, odnosno nastali kut kojeg dobijemo nakon razmotavanja papira je  $15^\circ$ . Naravno, tako smo dobili i kut od  $75^\circ$  kao

razliku do pravog kuta.



Slika 3.11:  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

## 3.2 Trisekcija kuta

Svaki kut možemo podijeliti na dva jednaka dijela koristeći šestar i ravnalo i taj postupak nazivamo bisekcijom kuta. Logično je pomisliti da je moguća i trisekcija kuta, odnosno podjela kuta na tri jednaka dijela pomoću ravnala i šestara, no francuski matematičar Pierre Wantzel je 1837. godine dokazao suprotno.

Ipak, koristeći origami, trisekcija proizvoljnog kuta je moguća, a u nastavku ćemo opisati korake u konstrukciji. Svaki korak sastoji se u primjeni po jednog od aksioma origamija analogno kao što se konstrukcije ravnalom i šestarom sastoje od koraka koji su primjene aksioma euklidske geometrije. Prije opisa konstrukcije navedimo aksiome origamija, poznate pod imenom Huzita-Hatori aksiomi [6],[3]. Primijetimo da u origami-konstrukcijama pregibe geometrijski poistovjećujemo s pravcima.

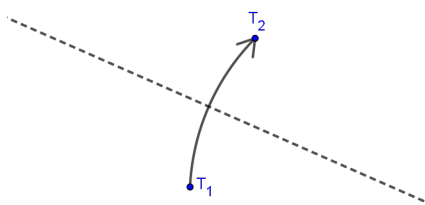
**Aksiom 1.** Za svake dvije  $T_1$  i  $T_2$ , postoji jedinstveni pregib koji prolazi kroz njih (slika 3.12). Vidimo da je ovo konstrukcija pravca zadanog dvjema točkama, koja je izvediva ravnalom i šestarom.

**Aksiom 2.** Za svake dvije točke  $T_1$  i  $T_2$  postoji jedinstveni pregib tako da se pri presavijanju papira duž tog pregiba  $T_1$  i  $T_2$  poklapaju (slika 3.13). Ovo je konstrukcija simetrale dužine, koja je također izvediva ravnalom i šestarom.

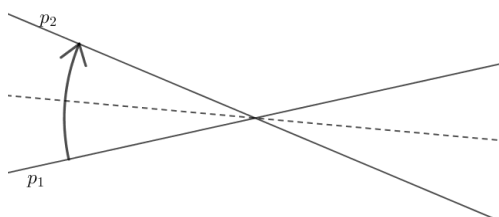
**Aksiom 3.** Za svaka dva pravca  $p_1$  i  $p_2$  postoji pregib tako da se savijanjem papira duž njega pravci  $p_1$  i  $p_2$  poklope (slika 3.14). Vidimo da je ovo konstrukcija simetrale dvaju pravaca, što je također izvedivo ravnalom i šestarom.



Slika 3.12: Prvi aksiom origamija



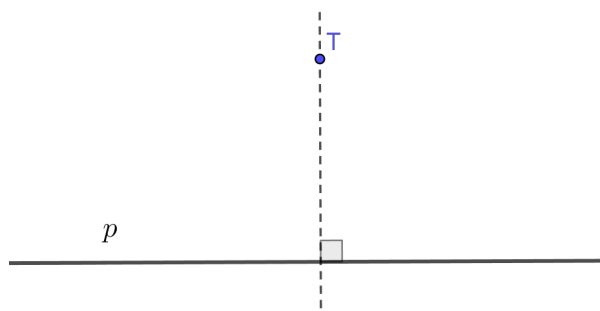
Slika 3.13: Drugi aksiom origamija



Slika 3.14: Treći aksiom origamija

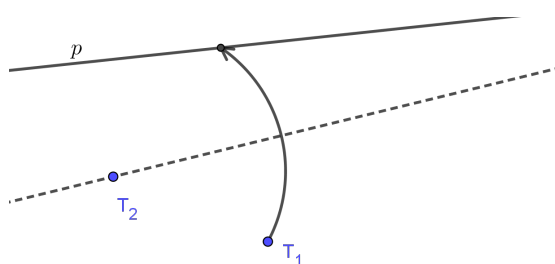
**Aksiom 4.** Za svaku točku  $T$  i pravac  $p$  postoji jedinstveni pregib koji prolazi kroz  $T$  i okomit je na  $p$  (slika 3.15). Vidimo da je ovo konstrukcija okomice na pravac iz točke, koja je isto izvediva ravnalom i šestarom.

**Aksiom 5.** Neka su dane dvije točke  $T_1$  i  $T_2$  te pravac  $p_1$ . Tada postoji pregib koji prolazi kroz točku  $T_2$ , a takav da savijanjem papira duž njega točka  $T_1$  padne na pravac  $p_1$  (slika



Slika 3.15: Četvrti aksiom origamija

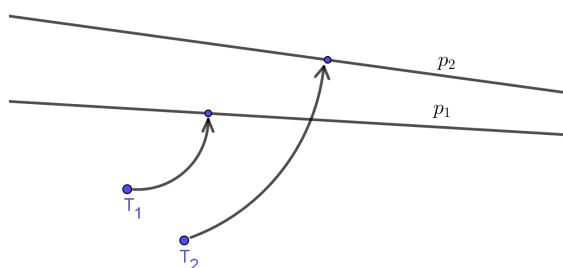
3.16). Ovaj aksiom (vidi —[3]) odgovara određivanju sjecišta pravca s kružnicom kojoj je središte u  $T_2$ , a polumjer jednak  $|T_1T_2|$ , pa je i ova konstrukcija izvediva ravnalom i šestarom.



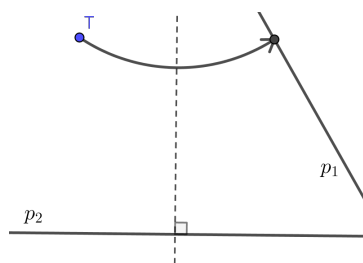
Slika 3.16: Peti aksiom origamija

**Aksiom 6.** Neka su dane dvije točke  $T_1$  i  $T_2$  i dva pravca  $p_1$  i  $p_2$ . Tada postoji pregib tako da savijanjem duž njega točka  $T_1$  padne na pravac  $p_1$ , a točka  $P_2$  na pravac  $l_2$  (slika 3.17). Ova konstrukcija daje zajedničku tangentu dviju parabola zadanih svojim fokusima i direktrisama ([3]). To nije izvedivo ravnalom i šestarom i ovaj je aksiom glavni razlog zašto su s origamijem moguće neke konstrukcije koje nisu s ravnalom i šestarom.

**Aksiom 7.** Neka je dana točka  $T$  i dva pravca  $p_1$  i  $p_2$ . Tada postoji pregib takav da savijanje duž njega točku  $T$  smješta na  $p_1$  i okomit je na  $p_2$  (slika 3.18). Ovaj, Hatorijev, aksiom upotpunjuje sustav origami-aksioma, ali je i njegova konstrukcija izvediva ravnalom i šestarom ([6]).



Slika 3.17: Šesti aksiom origamija



Slika 3.18: Sedmi aksiom origamija

Znamo da trisekcija kuta nije izvediva ravnalom i šestarom te da je šesti aksiom origamija jedini čija konstrukcija nije izvediva ravnalom i šestarom, dakle on je razlog zašto je pomoću origamija izvediva trisekcija kuta. Budući da svaki kut (tupi ili šiljasti) može biti podijeljen na tri jednaka dijela tako da se trisektira njegov komplement, dovoljno je znati trisektirati samo šiljaste kutove.

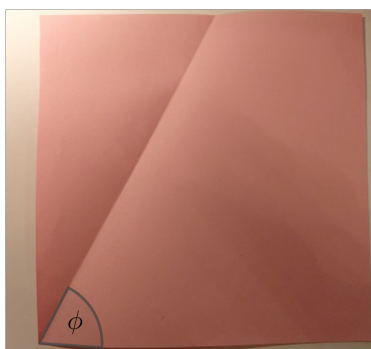
**Konstrukcija 3.2.1** (Trisekcija proizvoljnog šiljastog kuta). *Konstrukciju provodimo na kvadratnom listu papira. Za početak, presavijanjem kroz donji vrh papira označimo proizvoljan kut veličine  $\phi$  kojeg želimo podijeliti na tri jednaka dijela (slika 3.19). Provodimo sljedeće korake:*

1. *Presavijmo papir tako da je pregib koji nastane paralelan s donjim rubom papira (aksiom 2), pri čemu je donji rub jedan krak našeg kuta. Neka je ovaj pregib na gornjoj polovici papira (slika 3.20).*
2. *Presavijmo donju polovicu papira tako da se donji rub preklopi s pregibom na gornjoj polovici papira (aksiom 3). Tako nastaju dva horizontalna pravca koji su paralelni s donjim rubom papira (slika 3.21).*

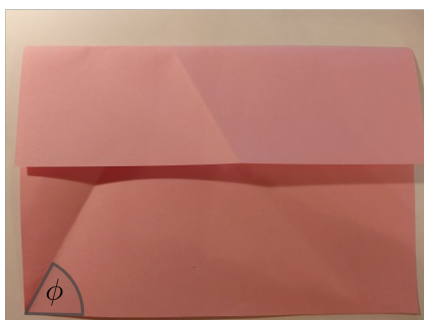


3. U sljedećem presavijanju želimo postići da dvije točke istodobno padnu na dva pravca (aksiom 6). Preciznije, potrebno je presaviti papir tako da se točka u kojoj gornji horizontalni pravac siječe lijevi rub papira padne na presavinuti krak kuta  $\phi$  i da istovremeno lijevi donji vrh papira padne na donji horizontalni pravac (slika 3.22)
4. Papir ne rastvaramo, već ga presavijamo još jednom duž donjeg horizontalnog pravca koji je sada usmjeren pod nekim kutom prema gornjem desnom vrhu (slika 3.23), linija po kojoj presavijamo prikazana je crtkano na slici 3.22.
5. Kada rastvorimo papir, primijetimo da je nastao pregib koji se približava vrhu početnog kuta (slika 3.24). Produljimo taj pregib do vrha kuta i rastvorimo papir (slika 3.25).
6. Presavijmo papir tako da se donji rub papira preklopi s novonastalim pregibom (aksiom 3) i rastvorimo (slika 3.26).

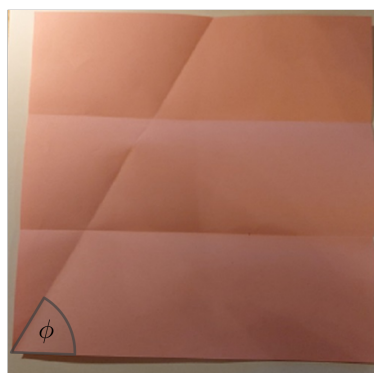
Ovim postupkom presavijanja papira odredili smo tri kuta koji imaju zajednički vrh u lijevom donjem vrhu papira. Ta tri kuta su jednake veličine, odnosno dijele kut veličine  $\phi$  na tri jednaka dijela (slika 3.27) pa je završen postupak trisekcije kuta.



Slika 3.19: Proizvoljni kut veličine  $\phi$



Slika 3.20: Prvi korak trisekcije kuta



Slika 3.21: Drugi korak trisekcije kuta



Slika 3.22: Treći korak trisekcije kuta

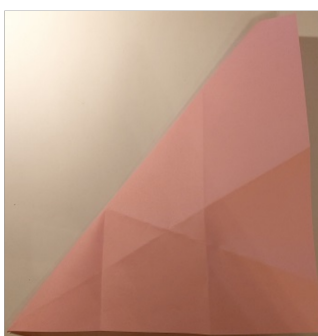
Dokažimo da je ovom konstrukcijom zaista provedena trisekcija kuta  $\phi$ . Zbog lakšeg



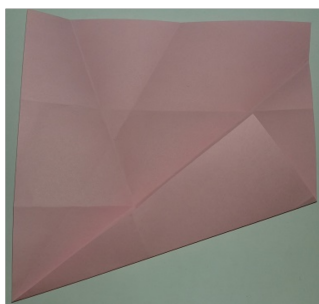
Slika 3.23: Četvrti korak trisekcije kuta



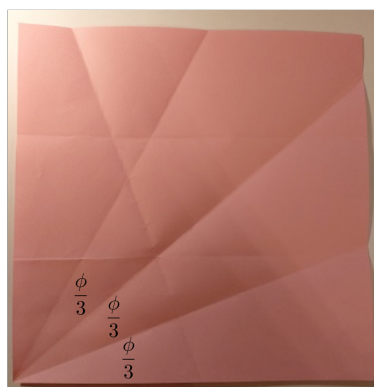
Slika 3.24: Rastvoren papir nakon četvrtog koraka



Slika 3.25: Peti korak trisekcije kuta



Slika 3.26: Šesti korak trisekcije kuta

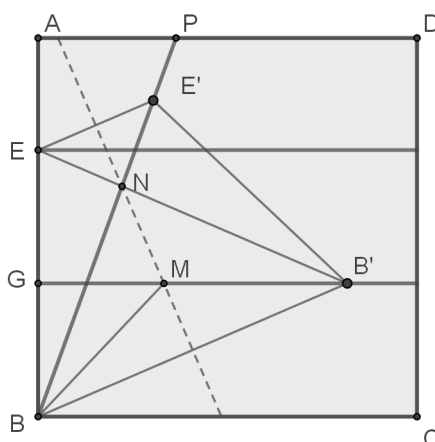

 Slika 3.27: Kut veličine  $\phi$  podijeljen na tri jednaka dijela

snalaženja, dokaz ćemo pratiti na slici 3.28. Vrhovi lista papira su označeni s  $A, B, C, D$ . Pretpostavit ćemo da je već dan pregib  $\overline{BP}$ , odnosno da je  $\phi = \angle PBC$ . Točka  $E'$  je točka na koju se preklopi sjecište usporednog pravca na gornjoj polovici papira i lijevog ruba papira  $E$ , a točka  $B'$  je točka na koju se preklopi donji lijevi vrh  $B$ .

Dokaz ćemo provesti na dva načina, geometrijski i algebarski.

*Dokaz. Geometrijski dokaz.* Neka je  $\varphi = \angle(CBB')$ . Prema konstrukciji, trapez  $BB'E'E$  je jednakokračan ( $|BE| = |B'E'|$ ). Također je jednakokračan i trokut  $BB'M$ . Iz toga slijedi da je  $\varphi = \angle(MB'B) = \angle(B'BM)$ , gdje smo također koristili da je dužina  $\overline{GB'}$  usporedna s dužinom  $\overline{BC}$ . Zbog očigledne jednakokračnosti trokuta  $EBB'$  vrijedi  $\varphi = \angle(EB'G)$ . Trokut  $BB'N$  je također jednakokračan, jer je po konstrukciji crtkani pravac simetrala dužine  $\overline{BB'}$ , pa je  $\varphi = \angle(MBN)$ . To nam pokazuje da je  $\phi = \angle(CBP) = 3\varphi$ , tj.  $\varphi = \frac{\phi}{3}$ .

*Algebarski dokaz.* Neka je  $B$  ishodište koordinatnog sustava te neka je  $BC$  os apscisa, a  $BA$  os ordinata. Nepoznate koordinate točaka  $E', B'$  zapišimo kao  $E' = (\alpha, \beta), B' = (\gamma, \delta)$ .


 Slika 3.28: Trisekcija kuta  $\phi = \angle(CBP)$ 

Tada je  $E = (0, 2\delta)$ . Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da je  $\gamma^2 + \delta^2 = 1$ , tj, da je točka  $B'$  na jediničnoj kružnici oko ishodišta  $B$ . Prema konstrukciji slijedi da je  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Budući da je  $\angle CBP = \phi$  to znači da je  $\gamma = \cos \phi$  i  $\delta = \sin \phi$ . Prema konstrukciji je duljina dužine  $\overline{BE}$  jednaka duljini dužine  $\overline{B'E'}$ , zbog čega vrijedi jednakost

$$4\gamma^2 = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2. \quad (3.1)$$

S druge strane  $\overline{EE'}$  je usporedna s  $\overline{BB'}$  pa vrijedi

$$\frac{\alpha}{\beta - 2\delta} = \frac{\gamma}{\delta}. \quad (3.2)$$

Dobijemo četiri relacije:

$$\gamma^2 + \delta^2 - 1 = 0 \quad (3.3)$$

$$3\delta^2 + 2\beta\delta - \alpha^2 + 2\alpha\gamma - \gamma^2 - \beta^2 = 0 \quad (3.4)$$

$$\alpha\gamma + 2\gamma\delta - \beta\gamma = 0 \quad (3.5)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \quad (3.6)$$

Naš cilj je izvesti iz ovih relacija jednadžbu koja uključuje  $\alpha$  i  $\gamma$  koji su ovisni o  $\beta$  i  $\delta$ . Ako jednakost 3.3 pomnožimo s 3, a zatim od dobivene jednakosti oduzmemo jednakost 3.4 dobit ćemo

$$4\gamma^2 - 2\alpha\gamma - 2\beta\delta + \alpha^2 + \beta^2 - 3. \quad (3.7)$$

Pomnožimo li novodobivenu jednakost 3.7 s  $\alpha + 2\gamma$ , a jednakost 3.5 s  $2\beta$  te zbrojimo li ta dva umnoška dobit ćemo sljedeće

$$8\gamma^3 - 6\gamma + \alpha^3 - 3\alpha + \alpha\beta^2 = 0. \quad (3.8)$$

Oduzimanjem jednakosti 3.6 pomnožene s  $\alpha$  od jednakosti 3.8 dobivena je jednakost

$$8\gamma^3 - 6\gamma - 2\alpha = 0. \quad (3.9)$$

Dijeljenjem relacije 3.9 brojem 2 dobivena je tražena jednakost

$$4\gamma^3 - 3\gamma - \alpha = 0. \quad (3.10)$$

Time smo pokazali da je  $\gamma$  korijen polinoma  $4X^3 - 3X - \alpha$ , gdje je  $\alpha = \cos(\phi)$  i zaista vrijedi  $\gamma = \cos \frac{\phi}{3}$  kao što je traženo. □

### 3.3 Još neke zanimljive konstrukcije kutova

Pomoću origamija možemo odrediti i neke kutove koji ne dijele pravi kut na neki broj jednakih dijelova, ali nastaju pomoću metode rubova za podjelu stranice kvadrata na jednake dijelove. To su većinom kutovi čija je veličina (u stupnjevima) cjelobrojna. Ovdje ćemo opisati neke od tih konstrukcija prema [8].

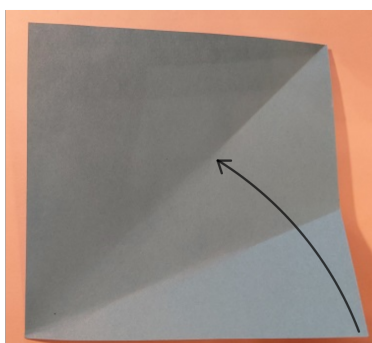
**Konstrukcija 3.3.1** (Približno određivanje kuta od  $36^\circ$ ). *Pogledajmo metodu presavijanja kojom možemo odrediti kut koji iznosi gotovo točno  $36^\circ$ .*

1. *Presavijmo list papira po dijagonali koja spaja gornji desni vrh i donji lijevi. Napravimo pregib samo kod gornjeg vrha (slika 3.29).*
2. *Presavijmo papir tako da se donji desni vrh prisloni na dio dijagonale (slika 3.30). Pregib napravimo samo uz desni rub papira.*
3. *Presavijmo papir tako da gornja stranica prolazi kroz točku koja je sjecište desnog ruba i prethodno nastalog pregiba i rastvorimo (slika 3.31).*
4. *Presavijmo papir tako da nastali pregib spaja točku koja je sjecište desne stranice i prethodno nastalog pregiba i rastvorimo. Kut kojem su krakovi novonastali pregib i donja stranica kvadrata iznosi približno  $36^\circ$  (slika 3.32).*

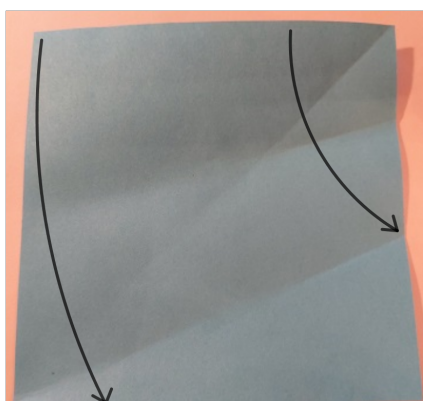
*Pravokutni trokut koji je nastao zadnjim presavijanjem ima katetu duljine približno 0,72654, a vrijedi  $\arctg 0,72654 \approx 35,9999052^\circ$  što je gotovo točno  $36^\circ$ . Na slici 3.33 možemo vidjeti koje još kutove možemo odrediti pomoću kuta od  $36^\circ$ .*



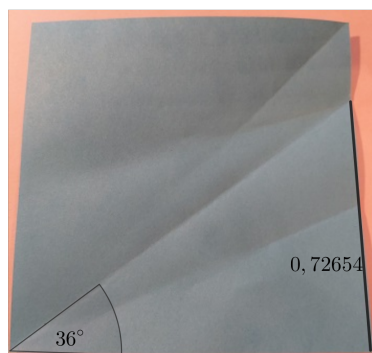
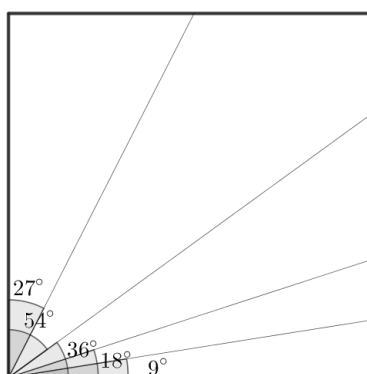
Slika 3.29: Prvi korak konstrukcije kuta od  $36^\circ$



Slika 3.30: Drugi korak konstrukcije kuta od  $36^\circ$



Slika 3.31: Treći korak konstrukcije kuta od  $36^\circ$

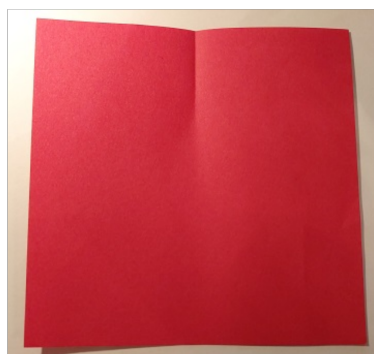
Slika 3.32: Četvrti korak konstrukcije kuta od  $36^\circ$ Slika 3.33: Cjelobrojni kutovi određeni pomoću kuta od  $36^\circ$ .

**Konstrukcija 3.3.2** (Približno određivanje kuta od  $32^\circ$ ). Budući da je  $\arctg \frac{5}{8} \approx 32,00538^\circ$ , možemo iskoristiti metodu rubova za podjelu stranice kvadrata na osmine kako bismo odredili kut veličine  $32^\circ$  s vrhom u donjem lijevom vrhu papira. Postupak savijanja je sljedeći:

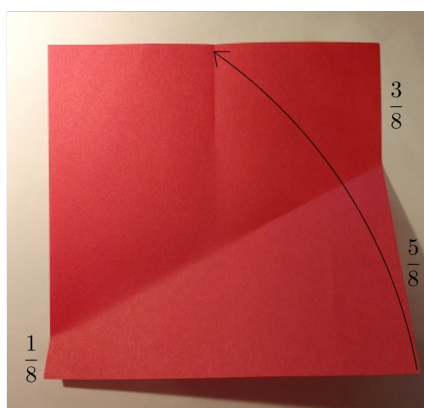
1. Prepolovimo gornju stranicu kvadrata (slika 3.34).
2. Presavijmo papir tako da se donji desni vrh poklopi s polovištem na gornjoj stranici kvadrata (slika 3.35). Rastvorimo papir.
3. Presavijmo papir tako da pregib koji nastaje spaja donji lijevi vrh kvadrata i kraj pregiba nastalog na desnoj stranici u prethodnom koraku (slika 3.36).

Donja stranica kvadrata i pregib koji je nastao u trećem koraku čine krakove kuta čija je veličina gotovo egzaktno  $32^\circ$ . Na slici 3.37 možemo vidjeti koje još kutove možemo odrediti pomoću kuta od  $32^\circ$ .

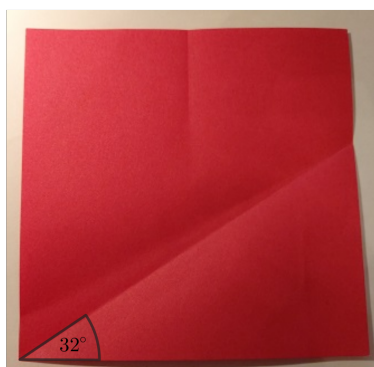




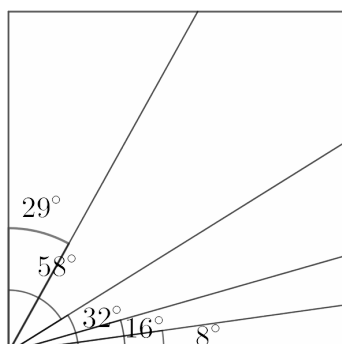
Slika 3.34: Prvi korak konstrukcije kuta od  $32^\circ$



Slika 3.35: Drugi korak konstrukcije kuta od  $32^\circ$



Slika 3.36: Treći korak konstrukcije kuta od  $32^\circ$

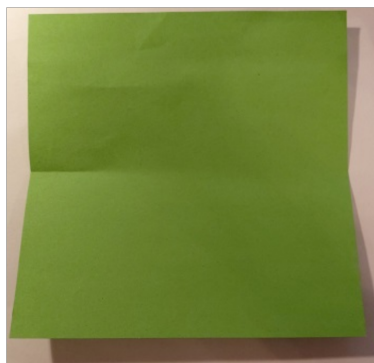
Slika 3.37: Neki kutovi koje možemo odrediti pomoću kuta od  $32^\circ$ 

**Konstrukcija 3.3.3** (Približno određivanje kuta od  $24^\circ$ ). *Budući da je  $\arctg \frac{4}{9} \approx 23,96^\circ$ , pomoću podjele ruba stranice na  $\frac{1}{9}$  možemo jednostavno odrediti i kut veličine gotovo točno  $24^\circ$ .*

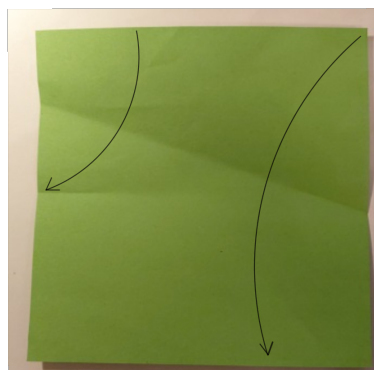
1. *Prepolovimo lijevu stranicu kvadrata (slika 3.38).*
2. *Postavimo desni gornji vrh na donju stranicu, a gornju stranicu točno u polovište lijeve stranice te napravimo pregib samo pri desnom rubu (slika 3.39).*
3. *Presavijmo papir tako da pregib koji nastaje spaja donji lijevi vrh kvadrata i pregib na desnom rubu nastao u prethodnom koraku (slika 3.40).*

*Kut čiji su krakovi donja stranica kvadrata i pregib nastao u zadnjem savijanju je gotovo točno  $24^\circ$ . Na slici 3.41 možemo vidjeti koje još kutove možemo odrediti pomoću kuta od  $24^\circ$ .*

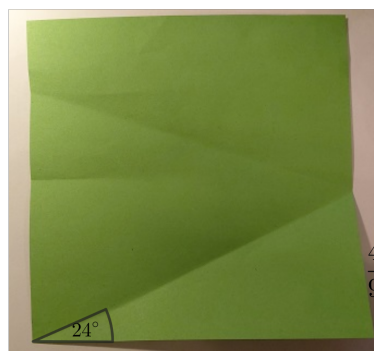
**Konstrukcija 3.3.4** (Približno određivanje kuta od  $14^\circ$ ). *Budući da je  $\arctg \frac{1}{4} \approx 14,0362^\circ$ , kut veličine gotovo egzaktno  $14^\circ$  lako odredimo tako da označimo  $\frac{1}{4}$  desnog ruba (slika 3.42). Na slici 3.43 možemo vidjeti koje još kutove možemo odrediti pomoću kuta od  $14^\circ$ .*



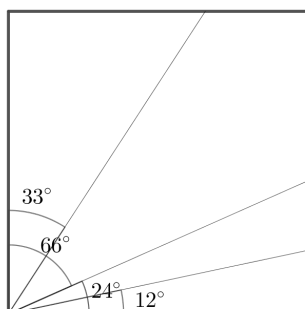
Slika 3.38: Prvi korak konstrukcije kuta od  $24^\circ$



Slika 3.39: Drugi korak konstrukcije kuta od  $24^\circ$



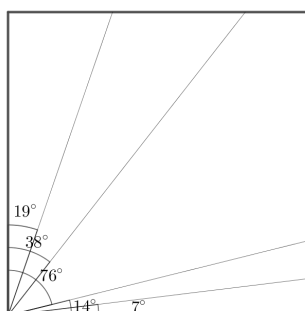
Slika 3.40: Treći korak konstrukcije kuta od  $24^\circ$



Slika 3.41: Kutovi koje možemo odrediti pomoću kuta od  $24^\circ$



Slika 3.42: Kut veličine  $14^\circ$



Slika 3.43: Kutovi koje možemo odrediti pomoću kuta od  $14^\circ$

Vidimo dakle da krenuvši od pravog kuta imamo „egzaktne” konstrukcije za kutove  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $15^\circ$  i aproksimativne za kutove od  $36^\circ$ ,  $32^\circ$ ,  $24^\circ$  i  $14^\circ$ . No zapravo smo tim konstrukcijama riješili problem konstrukcija svih drugih cjelobrojnih (u stupnjevima) šiljastih kutova. Primijetimo prvo da ako znamo konstruirati kut od  $n^\circ$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, 89\}$  kao kut kojemu jedan krak leži na stranici papira, automatski smo konstruirali i njegovu razliku do  $90^\circ$ . Svaki konstruirani kut možemo dalje uzastopno raspolavljati sve dok je raspolovljeni kut cjelobrojni. Kutovima od manjim od  $45^\circ$  možemo odrediti i dvostruke kutove. Kod kutova čiji iznosi u stupnjevima su djeljivi s 3 možemo provesti trisekciju kuta i na taj način dobiti još cjelobrojnih kutova. Kombinacijama tih konstrukcija dobivamo sve cjelobrojne šiljaste kutove (tablica 3.1).

U tablici 3.1 vidimo kako dobiti cjelobrojne kutove. Možemo zaključiti da u teoriji svaki kut od  $n^\circ$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, 89\}$  možemo odrediti pomoću origamija.

1°	pola od 2°	31°	pola od 62°	61°	razlika 29° do 90°
2°	pola od 4°	32°	konstrukcija 3.3.2	62°	razlika 28° do 90°
3°	pola od 6°	33°	pola od 66°	63°	razlika 27° do 90°
4°	pola od 8°	34°	razlika 56° do 90°	64°	dvostruki 32° ili razlika 26° do 90°
5°	trisekcija od 15°	35°	pola od 70°	65°	razlika 25° do 90°
6°	pola od 12°	36°	konstrukcija 3.3.1	66°	razlika 24° do 90°
7°	pola od 14°	37°	pola od 74°	67°	razlika 23° do 90°
8°	pola od 16°	38°	pola od 76°	68°	dvostruki 34°
9°	pola od 18°	39°	pola od 78°	69°	razlika 21° do 90°
10°	dvostruki 5° ili trisekcija od 30°	40°	razlika 50° do 90° ili dvostruki 20°	70°	razlika 20° do 90°
11°	pola od 22°	41°	pola od 82°	71°	razlika 19° do 90°
12°	pola od 24°	42°	razlika 48° do 90°	72°	razlika 18° do 90°
13°	pola od 26°	43°	pola od 86°	73°	razlika 17° do 90°
14°	konstrukcija 3.3.4	44°	pola od 88°	74°	razlika 16° do 90°
15°	primjer 3.1.3	45°	primjer 3.1.1	75°	razlika 15° do 90°
16°	pola od 32°	46°	razlika 44° do 90°	76°	razlika 14° do 90°
17°	pola od 34°	47°	razlika 43° do 90°	77°	razlika 13° do 90°
18°	pola od 36°	48°	dvostruki 24°	78°	razlika 12° do 90°
19°	pola od 38°	49°	razlika 41° do 90°	79°	razlika 11° do 90°
20°	trisekcija od 60° ili dvostruki 10°	50°	razlika 40° do 90°	80°	razlika 10° do 90°
21°	pola od 42°	51°	razlika 39° do 90°	81°	razlika 9° do 90°
22°	razlika 68° od 90°	52°	razlika 38° do 90°	82°	razlika 8° do 90°
23°	pola od 46°	53°	razlika 37° do 90°	83°	razlika 7° do 90°
24°	konstrukcija 3.3.3	54°	razlika 36° do 90°	84°	dvostruki 42° ili razlika 6° do 90°
25°	trisekcija od 75°	55°	razlika 35° do 90°	85°	razlika 5° do 90°
26°	pola od 52°	56°	dvostruki od 28°	86°	razlika 4° do 90°
27°	pola od 54° ili tri- sekcija 81°	57°	razlika 33° do 90°	87°	razlika 3° do 90°
28°	dvostruki 14°	58°	razlika 32° do 90°	88°	razlika 2° do 90°
29°	pola od 58°	59°	razlika 31° do 90°	89°	razlika 1° do 90°
30°	primjer 3.1.2	60°	razlika 30° do 90°		

Tablica 3.1: Tablica konstrukcija cjelobrojnih šiljastih kutova

## Poglavlje 4

# Osvrt na primjenu origamija u nastavi matematike

Origami može uvelike doprinijeti kvaliteti nastave matematike, a najčešće se koristi za vizualni prikaz geometrijskih pojmova. Geometrijske konstrukcije ravnalom i šestarom tradicionalni su dio matematičkog obrazovanja, a konstrukcije pomoću origamija mogu biti njihova zanimljiva zamjena.

Na nastavi matematike origamijem možemo prikazati podjele dužina i kutova na jednake dijelove, što ulazi u gradivo razlomaka. Učenici mogu sami pokušati podijeliti dužinu ili kut na pola što im je intuitivno jasno, a takva aktivnost može biti zanimljiv uvod u konstrukciju simetrale dužine i simetrale kuta. Uz nastavnu jединicu „Dijeljenje dužine na jednake dijelove” možemo zadati zadatak da učenici sami pokušaju podijeliti stranicu kvadrata na npr. trećine. Ukoliko postoje teškoće u pronalasku načina, možemo pokazati učenicima metodu dijagonala za podjelu stranice kvadrata na jednak broj dijelova. Učenici mogu sami ili uz navođenje ukoliko je potrebno, pokušati dokazati da je stranica zaista podijeljena na trećine i tako primijeniti svoje znanje o sličnosti trokuta ili vidjeti primjenu koordinatnog sustava u ravnini, ovisno za koji tip dokaza se odluče. Kada su učenici svjesni da se ravnalom i šestarom ne može trisektirati kut, možemo ih navesti na razmišljanje vrijedi li isto kod primjene origamija te pokazati kako se provodi trisekcija kuta. Origami ne moramo koristiti samo u geometriji, naime pomoću Fujimotove aproksimacije možemo na vizualan način prikazati konvergenciju niza.

Pomoću origamija učenici mogu lakše usvajati nove matematičke pojmove i odnose u ravnini ili prostoru, a materijal za provođenje smišljenih aktivnosti je vrlo pristupačan, naime potreban je samo list papira. Za više ideja i detaljnije analize o korištenju origamija u nastavi matematike upućujemo na [1], [7], [9] i [4].

# Bibliografija

- [1] Lance Coad, *Paper folding in the middle school classroom and beyond*, The Australian Mathematics Teacher **62** (2006), br. 1, 6–13.
- [2] Clemens Fuchs, *Angle trisection with origami and related topics*, Elemente der Mathematik **66** (2011), br. 3, 121–131.
- [3] Robert Geretschläger, *Euclidean Constructions and the Geometry of Origami*, Mathematics Magazine **68** (1995), br. 5, 357–371.
- [4] Thomas Hull, *Project origami: activities for exploring mathematics*, AK Peters/CRC Press, 2012.
- [5] Haga Kazuo, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific, 2008.
- [6] Robert J Lang, *Origami and geometric constructions*, Self Published (1996– 2003) (1996).
- [7] D Meyer i J Meyer, *Teaching Mathematical Thinking through Origami. BRIDGES, Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, Winfield, Kansas (1999).
- [8] John Montroll, *Origami polyhedra design*, AK Peters/CRC Press, 2011.
- [9] R Alan Russell, *Origami, Papierfalten, Papiroflexia: Paper Folding in Mathematics Education*.
- [10] Rachel Thomas, *Trisecting an angle with origami*, <https://plus.maths.org/content/trisecting-angle-origami>, rujana, 2019.



# Sažetak

U ovom radu opisane su metode podjele dužina i kutova na jednake dijelove pomoću presavijanja papira bez rezanja i lijepljenja, tj. pomoću origamija. Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju su opisane i analizirane egzaktne podjele dužine na jednake dijelove, a to su binarna podjela, metoda dijagonala, metoda rubova i Noma-ova metoda. Drugo poglavlje rada bavi se aproksimativnim podjelama dužina na jednake dijelove: Fujimotova aproksimacija i binarna aproksimacija. U trećem poglavlju opisujemo podjele pravog kuta na jednake dijelove kao i neke dodatne konstrukcije kutova, a detaljno je opisana i trisekcija proizvoljnog šiljastog kuta koja je izvediva unutar sustava akisoma origamija iako nije izvediva euklidskim konstrukcijama. Naposljetku, u četvrtom kratkom poglavlju kratko se osvrćemo na primjene origamija u nastavi matematike.

# Summary

This thesis describes various methods for dividing a segment or an angle into equal parts using origami. It is divided into four chapters. In the first chapter we describe methods for dividing a segment into equal parts by exact constructions. These methods are: binary division, diagonal method, edge method and Noma's method. The second chapter is about approximative methods: Fujimoto approximation and binary approximation of dividing a segment into equal parts. The third chapter concerns divisions of a right angle and some other angle constructions, as well as the description and analysis of trisecting an angle. The last short chapter concludes this thesis by describing some ideas on using origami in the mathematics classroom.

# Životopis

Rođena sam 7. veljače 1995. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole u Šenkovcu, srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u srednjoj školi „Ban Josip Jelačić”, smjer opća gimnazija u Zaprešiću. Maturirala sam 2013. godine i iste godine upisala sam preddiplomski studij matematike na Prirodno-slovno matematičkom fakultetu u Zagrebu. U srpnju 2017. godine završila sam preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički i upisala diplomski studij matematike, smjer nastavnički, na istom fakultetu.