Pfaffijan i savršena sparivanja

Granić, Karla

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Karla Granić

Pfaffijan i savršena sparivanja

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, veljača 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Grafovi su jedna od osnovnih matematičkih struktura. Mnogi se problemi iz stvarnog života modeliraju grafovima koji se sastoje od točaka koje nazivamo vrhovima, i njihovim spojnicama koje nazivamo bridovima. Tako vrhovi mogu predstavljati ljude, a bridovi parove prijatelja, ili vrhove možemo podijeliti u dvije skupine koje se sastoje od jednakog broja djevojaka i mladića, a bridovi među njima uzajamne simpatije. Možemo se pitati na koliko načina možemo podijeliti mladiće i djevojke u parove tako da se svaki par međusobno simpatizira? Ekvivalentno bi bilo pitanje: koliko ima savršenih sparivanja u bipartitnom grafu? Time se bavi poseban dio teorije grafova, a to je teorija sparivanja. Savršeno sparivanje je skup bridova tako da nikoja dva nisu susjedna, a svaki vrh se nalazi na nekom bridu iz sparivanja. Cilj ovoga rada je ispitati kada postoji u grafu savršeno sparivanje te ukoliko postoji, kada ih možemo prebrojati. Rad je podijeljen na pet poglavlja.

U prvom poglavlju navodimo definicije i teoreme iz linearne algebre potrebne za razumijevanje ostatka rada.

U drugom poglavlju opisujemo teoriju sparivanja. Započinjemo s definicijama i osnovnim rezultatima iz teorije grafova te proširujemo na teoriju sparivanja i iznosimo osnovne rezultate o tome.

Jednom kada znamo što je to savršeno sparivanje, pitamo se kada će ga neki graf imati te možemo li ih prebrojati. Time se bavimo u sljedećem poglavlju. Najprije uvodimo pojam permanente, zatim pokazujemo da pomoću nje možemo prebrojati savršena sparivanja u bipartitnom grafu, no pokazujemo da je računanje permanente težak problem. Na kraju ćemo vidjeti da postoji kriterij koji utvrđuje postojanje savršenog sparivanja u bilo kojem grafu i dajemo probabilistički algoritam za taj problem.

U četvrtom poglavlju uvodimo pojam Pfaffijana antisimetrične matrice. Navodimo njegovu definiciju i svojstva te na kraju dolazimo do poznatog Cayleyjevog rezultata koji povezuje Pfaffijan matrice s njezinom determinantom.

U zadnjem poglavlju dolazimo do glavnih rezultata o prebrojavanju savršenih sparivanja u planarnom grafu. Najprije uvodimo pojam planarnog grafa, zatim grafu pridružujemo orijentaciju koju nazivamo Pfaffijan orijentacijom, pomoću koje možemo efikasno prebrojati savršena sparivanja. Međutim, pokazujemo da nemaju svi grafovi Pfaffijan orijentaciju. Navodimo Kasteleynejev rezultat iz 1960-tih godina da svaki planaran graf ima Pfaffijan orijentaciju te da ju možemo efikasno odrediti. Ovom prilikom zahvaljujem svom mentoru na izrazitoj kolegijalnosti i svojim roditeljima, sestri, dečku i prijateljima na velikoj podršci.

2 Osnovni pojmovi linearne algebre

Da bismo definirali Pfaffijan i savršeno sparivanje, trebamo najprije uvesti neke osnovne definicije o matricama i determinantama i navesti neka njihova svojstva.

Definicija 2.1. *Za prirodne brojeve m i n, preslikavanje $A\colon \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \to \mathbb{F}$ naziva se* matricom *tipa (m,n) s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$.*

Svaku takvu funkciju zapisujemo tablično u m redaka i n stupaca tako da u i-ti redak i j-ti stupac pišemo funkcijsku vrijednost $A(i,j)$ koju jednostavnije označimo s a_{ij}. Skup svih takvih matrica s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$. U slučaju $m = n$ govorimo o kvadratnim matricama reda n i skup svih takvih matrica kraće označavamo s $M_n(\mathbb{F})$. Uvedimo sada pojam determinante, no za to nam najprije treba pojam permutacije i njezina svojstva.

Definicija 2.2. *Neka je n proizvoljan prirodan broj.* Permutacija *skupa $\{1,2,\dots,n\}$ je bilo koja bijekcija $\sigma\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$. Često se kaže da je σ permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.*

Skup S_n s kompozicijom kao binarnom operacijom čini grupu od $n!$ elemenata, koju zovemo simetričnom grupom stupnja n.

Definicija 2.3. *Neka je $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$. Svaki par (i,j) takav da vrijedi $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$ naziva se* inverzijom *u permutaciji σ. Broj svih inverzija u permutaciji σ označava se s $I(\sigma)$. Ukoliko je $I(\sigma)$ paran broj, kažemo da je permutacija parna, u suprotnom kažemo da je σ neparna permutacija.*

Definicija 2.4. *Za $\sigma \in S_n$ definira se predznak kao $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{I(\sigma)}$.*

Definicija 2.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$.* Determinanta *matrice A, u oznaci* $\det A$*, definira se kao*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Računanje determinante po definiciji može biti problematično. Za matricu reda n imat ćemo $n!$ osnovnih sumanada, što znači da za velike n-ove računanje determinante postaje teško. Zato postoje puno efikasnije i brže metode računanja determinanti. Takve će nam metode omogućiti računanje determinante sa složenosti $\mathcal{O}(n^3)$.

Definicija 2.6. *Kažemo da je* $A = (a_{ij}) \in M_n$ donjetrokutasta matrica *ako vrijedi* $a_{ij} = 0$, *za sve* $i < j$.

Propozicija 2.7. *Za svaku donjetrokutastu matricu* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *vrijedi* $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Propozicija 2.8. *Za svaku matricu* $A \in M_n$ *vrijedi* $\det A^t = \det A$.

Korolar 2.9. *Determinanta svake gornjetrokutaste matrice je produkt dijagonalnih elemenata.*

Propozicija 2.10. *Pomnožimo li neki redak (ili stupac) matrice A skalarom* λ, *za determinantu tako dobivene matrice* B *vrijedi* $\det B = \lambda \det A$.

Korolar 2.11. *Za svaku matricu* $A \in M_n$ *vrijedi* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Propozicija 2.12. *Neka matrica* B *nastaje međusobnom zamjenom dvaju redaka (ili stupaca) u matrici* $A \in M_n$. *Tada je* $\det B = -\det A$.

Propozicija 2.13. *Neka matrica* B *nastaje iz matrice* $A \in M_n$ *tako da nekom retku (ili stupcu) matrice* A *pribrojimo neki drugi redak (ili stupac) matrice* A *pomnožen skalarom* λ. *Tada je* $\det B = \det A$.

Teorem 2.14 (Binet-Cauchy)**.** *Za sve* $A, B \in M_n$ *vrijedi* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Definicija 2.15. *Za realnu matricu* $A \in M_n$ *kažemo da je* simetrična *ako vrijedi* $A^t = A$, *a* antisimetrična *ako vrijedi* $A^t = -A$.

Definicija 2.16. *Za matricu* $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ *definira se* hermitski adjungirana matrica $A^* = (b_{ij}) \in M_{nm}$ *s* $b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \forall i, j$ *(gdje je* $\overline{a_{ji}}$ *kompleksno konjugiran broj broju* a_{ji}*).*

Definicija 2.17. *Za kompleksnu matricu* $A \in M_{mn}$ *kažemo da je* hermitska *ako vrijedi* $A^* = A$, *a* antihermitska *ako vrijedi* $A^* = -A$.

Definicija 2.18. *Neka su* V *i* W *vektorski prostori nad istim poljem* $\mathbb{F}$. *Preslikavanje* $A\colon V \to W$ *zove se* linearan operator *ako vrijedi* $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Definicija 2.19. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i* $A\colon V \to V$ *linearni operator. Kažemo da je skalar* $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost *operatora* A *ako postoji vektor* $x \in V, x \neq 0$ *takav da je* $Ax = \lambda_0 x$.

U nastavku ćemo se uglavnom posvetiti antisimetričnim matricama. Vrijednosti na dijagonali antisimetrične matrice A uvijek su 0. Primjetimo još da je $\sqrt{-1}A$ hermitska matrica, što povlači da je realni dio svojstvene vrijednosti matrice A uvijek jednak nuli. Iz propozicije 2.8 i korolara 2.11 vrijedi slijedeća relacija

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

pa iz toga slijedi da je za n neparne $\det A = 0$.

3 Savršena sparivanja u grafovima

Započet ćemo s definiranjem osnovnih pojmova teorije grafova da bismo kasnije mogli objasniti teoriju sparivanja u grafovima. Ograničit ćemo se na jednostavne grafove, bez višestrukih bridova i petlji.

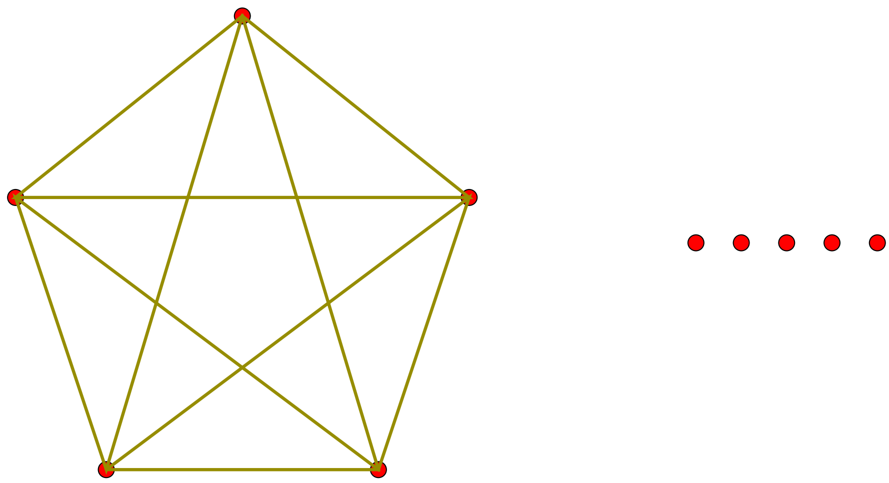
Definicija 3.1. Graf *je uređeni par skupova* (V, E)*, pri čemu je* V *neprazan skup vrhova, a* E *je podskup skupa svih dvočlanih podskupova od* V*, čije elemente nazivamo bridovima. Ako je* $e = \{u, v\} \in E$*, onda kažemo da su* u *i* v *krajevi brida* e*.*

Za vrhove $u, v \in V$ kažemo da su *susjedni* ako je $\{u, v\} \in E$. Vrh u i brid e su *incidentni* ako je $u \in e$, tj. ako postoji $v \in V$ takav da je $e = \{u, v\}$. Bridovi sa zajedničkim krajem zovu se *susjedni bridovi*.

Definicija 3.2. Šetnja *u grafu* $G = (V, E)$ *je niz vrhova* $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ *pri čemu su* v_i *i* v_{i+1} *susjedni za* $i = 1, 2, \ldots, k-1$*.* Staza *je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti (ali moguća su ponavljanja vrhova), dok je* put *staza u kojoj su svi vrhovi različiti, osim eventualno prvog i zadnjeg, a takav put onda nazivamo* ciklusom*.*

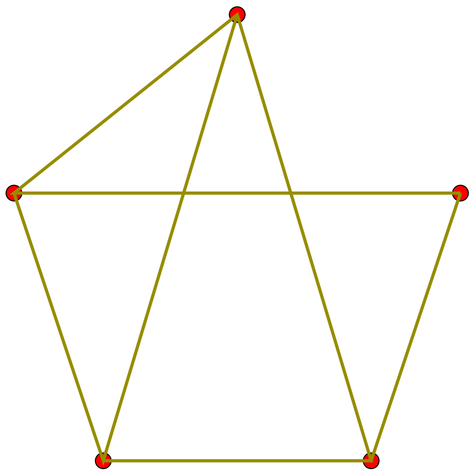
Najjednostavniji primjeri grafova su potpuni graf i nulgraf. Potpuni graf je graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridom. Oznaka za potpuni graf je K_n, gdje n označava broj vrhova u grafu. Nulgraf je graf koji nema bridova i njega označavamo s N_n. Primjer potpunog grafa i nulgrafa možemo vidjeti na slici 1.

Definicija 3.3. Usmjereni graf *ili* digraf *je graf u kojem su svi bridovi usmjereni, tj. svaki brid ima orijentaciju tako da ide iz jednog vrha prema drugome. U tom slučaju skup bridova je* $E \subseteq V \times V$*, tj. sadrži uređene parove umjesto dvočlanih podskupova.*



Slika 1: Potpuni graf K_5 i nulgraf N_5

Definicija 3.4. Podgraf *grafa* $G = (V, E)$*, u oznaci* $G' \subseteq G$*, je graf kojemu je skup vrhova podskup od* V *te skup bridova podskup od* E *(vidi sliku 2), a* inducirani podgraf *grafa* G *induciran skupom* $V'' \subseteq V$ *je podgraf* $G'' = (V'', E'')$*, gdje se* E'' *sastoji od svih bridova od* E *čija oba kraja leže u* V''*. Slično, za* $E''' \subseteq E$ *definiramo podgraf od* G *induciran s* E''' *kao podgraf* $G''' = (V''', E''')$*, pri čemu je* V''' *skup svih vrhova iz* V *incidentnih barem s jednim bridom iz* E'''*.*



Slika 2: Podgraf grafa K_5 sa slike 1

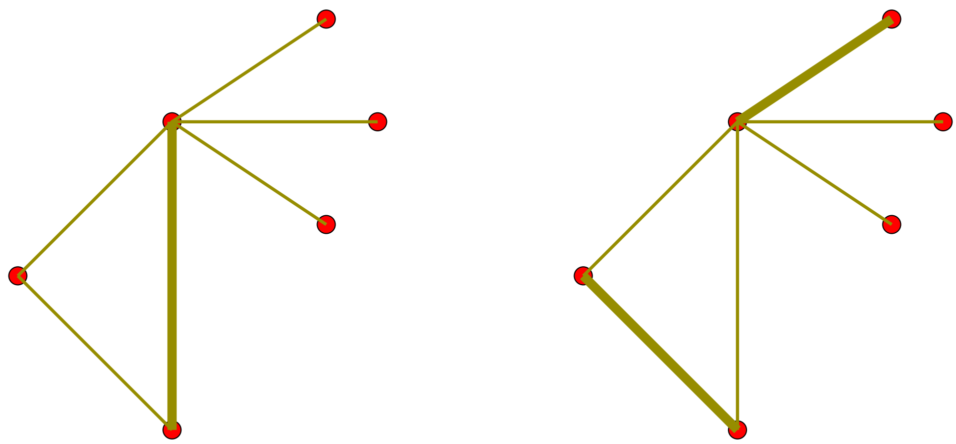
Definicija 3.5. *Neka je* G *graf sa* n *vrhova. Definiramo* sparivanje *u grafu* G *kao skup bridova* $M \subseteq E$ *takav da nikoja dva brida iz* M *ne dijele zajednički vrh.*

Reći ćemo da sparivanje M u grafu $G = (V, E)$ *zasićuje* vrh $v \in V$ ili da je vrh v *M-zasićen* ako je v incidentan s nekim bridom iz M. U protivnom kažemo da je vrh v *M-nezasićen*. Ako je $E \neq \emptyset$, onda je svaki jednočlani podskup od E jedan primjer sparivanja u G. No, zanimljivije je pronaći sparivanje sa što većim brojem bridova, zato definiramo slijedeće:

Definicija 3.6. Maksimalno sparivanje *je sparivanje koje sadrži najveći mogući broj bridova, odnosno ne postoji sparivanje u G sa većim brojem bridova. Kardinalnost maksimalnog sparivanja u grafu G označavamo s $\nu(G)$.*

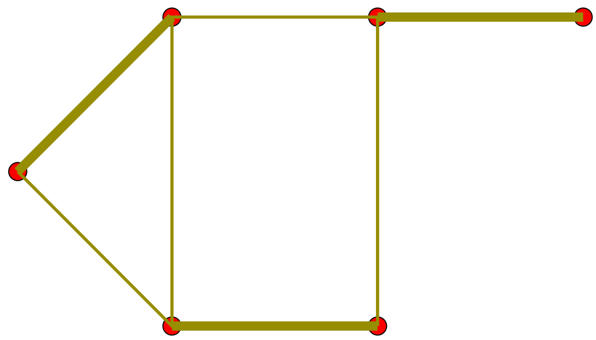
Definicija 3.7. Savršeno sparivanje M *u grafu G je sparivanje u kojem je svaki vrh incidentan s točno jednim bridom sparivanja, odnosno ako je svaki vrh iz G M-zasićen.*

Primijetimo, svako savršeno sparivanje je ujedno i maksimalno sparivanje, no obratno ne vrijedi uvijek. Na slici 3 na lijevoj strani vidimo primjer običnog sparivanja, a na desnoj primjer maksimalnog sparivanja na istome grafu, koje nije savršeno. Nadalje, broj bridova u savršenom sparivanju iznosi $|V|/2$. Za postojanje savršenog sparivanja nužno je da graf ima paran broj vrhova. No, to je samo nužan, ne i dovoljan uvjet za postojanje savršenog sparivanja. Slika 4 nam prikazuje jedno savršeno sparivanje u grafu (koje je ujedno i maksimalno). Vidimo da je broj vrhova paran, te kada bismo maknuli jedan vrh, takav graf ne bi imao savršeno sparivanje. Kasnije ćemo prikazati neke dovoljne uvjete za postojanje savršenog sparivanja.

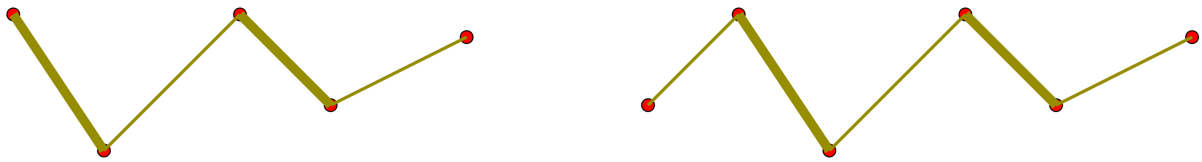


Slika 3: Sparivanje i maksimalno sparivanje

Definicija 3.8. *Put (ili ciklus) P je M-*alternirajući *ako su bridovi od P naizmjenično u skupu M i $\overline{M}$. Takav put može početi s bridom u M ili koji nije u M. Ako M-alternirajući put počinje i završava s M-nezasićenim vrhom, tada put P zovemo M-*uvećavajući *put (vidi sliku 5).*



Slika 4: Savršeno sparivanje u grafu



Slika 5: M-alternirajući put i M-uvećavajući put

Sada ćemo dati jedan osnovni rezultat poznatiji kao Bergeov teorem. On nam omogućuje provjeru je li neko sparivanje M u grafu G maksimalno tako da ispitamo postoji li ili ne M-uvećavajući put u grafu G i obrnuto. Prije nego što damo dokaz teorema, podsjetit ćemo se definicije simetrične razlike skupova te ćemo navesti jedan rezultat koji će nam biti koristan u dokazivanju teorema.

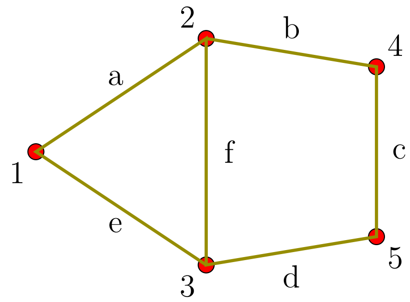
Definicija 3.9. *Simetrična razlika skupova A i B, u oznaci $A \bigtriangleup B$ je*

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Lema 3.10. *Komponente grafa inducirane simetričnom razlikom dvaju sparivanja su putovi ili parni ciklusi.*

Dokaz. Neka su M i N neka dva sparvanja u grafu G te neka je F podgraf induciran simetričnom razlikom $M \bigtriangleup N$. Pogledajmo sada skup vrhova $V(F)$ inducirani bridovima iz $M \bigtriangleup N$. Za svaki vrh $v \in V(F)$ postoje tri mogućnosti: v može biti M-zasićen, može biti N-zasićen ili ga zasićuju oba sparivanja M i N. Stoga je stupanj svakog vrha $v \in V(F)$ jedan ili dva, odnosno $d_F(v) \leq 2$ (stupanj vrha je broj bridova s kojima je on incidentan). Kada bi za neki vrh v vrijedilo $d_F(v) > 2$, to bi značilo da su dva ili više brida koji su incidentni s tim vrhom u nekom od sparivanja, a to se kosi s definicijom sparivanja. Stoga je F disjunktna unija putova i ciklusa, i to tako da su u svakoj komponenti bridovi naizmjenično u M i u N. Ciklusi moraju biti parni jer kada bismo dobili neparan ciklus, kako su bridovi naizmjenično u M i u N, dobili bi u jednom od tih sparivanja susjedne bridove što je nemoguće. Dakle, svi ciklusi su parni. □

Primjer 3.11. *Pogledajmo graf sa slike 6:*



Slika 6: Graf G

Na grafu G označeni su bridovi i vrhovi. Neka su M i N sparivanja u grafu G takva da je:

1. $M = \{a, d\}$ *i* $N = \{c, f\}$

   Tada je $M \triangle N = \{a, f, d, c\}$*, dakle dobili smo put* $(1, 2, 3, 5, 4)$*, gdje su bridovi naizmjenično u M i N.*

2. $M = \{f, c\}$ *i* $N = \{b, d\}$

   Tada je $M \triangle N = \{b, f, d, c\}$*, dakle dobili smo paran ciklus* $(3, 2, 4, 5)$.

Teorem 3.12 (Berge)**.** *Neka je M sparivanje u grafu G. M je maksimalno sparivanje ako i samo ako ne postoji M-uvećavajući put u G.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M maksimalno sparivanje u G. Želimo pokazati da ne postoji M-uvećavajući put. Pretpostavimo suprotno, tj. da M-uvećavajući put postoji i nazovimo ga P. Neka je sada $M' = M \triangle P$. Dakle, dobili smo M' tako da smo iz M izbacili one bridove koji su u P i dodali bridove iz P koji nisu u M. Budući da P počinje i završava s vrhom koji je M-nezasićen, vrijedi $|M'| = |M| + 1$, i M' je sparivanje u grafu G. Dakle, dobili smo sparivanje koje je veće od M, a to je kontradikcija. Stoga ne postoji M-uvećavajući put.

Obrnuto, neka ne postoji M-uvećavajući put u G i trebamo dokazati da je M maksimalno sparivanje. Pretpostavimo suprotno, odnosno da M nije maksimalno sparivanje te neka je M' neko sparivanje veće od M. Promotrimo sada podgraf F induciran simetričnom razlikom $M \triangle M'$. Prema lemi 3.10 F je disjunktna unija putova i parnih ciklusa. Pogledajmo sljedeće slučajeve:

1. Ako su sve komponente od F parni ciklusi ili putovi s parnim brojem bridova, budući da su bridovi u svakom putu i ciklusu naizmjenično u M i M', onda je $|M| = |M'|$. Mi smo uzeli da je $|M| < |M'|$, pa je u našem slučaju to nemoguće.

2. Ako u F postoji komponenta koja je put neparne duljine, onda on treba početi s bridom iz M' jer jedino tako možemo postići da nam je M' veći od M. Zbog definicije od F prvi i zadnji vrh tog puta su M-nezasićeni. Ali tako smo dobili M-uvećavajući put, a to nam je kontradikcija s našom pretpostavkom.

Dakle, ne postoji sparivanje veće od M, odnosno M je maksimalno sparivanje. □

Definicija 3.13. *Neka je $G = (V, E)$ graf.* Bridni pokrivač *$L \subseteq E(G)$ je skup bridova koji su incidentni sa svakim vrhom iz $V(G)$. Kardinalitet najmanjeg bridnog pokrivača označavamo s $\rho(G)$.* Vršni pokrivač *$K \subseteq V(G)$ je skup vrhova grafa G takvih da svaki brid u G ima barem jednu krajnju točku u K. Kardinalitet najmanjeg takvog skupa označavamo s $\tau(G)$.*

Primijetimo da je $\rho(G)$ dobro definiran samo za grafove bez izoliranih vrhova.

Definicija 3.14. *Kažemo da je skup vrhova $S \subseteq V(G)$ u grafu G* stabilan *ako nikoja dva vrha iz S nisu susjedna. Kardinalitet najvećeg stabilnog skupa zovemo stabilni broj i označavamo ga s $\alpha(G)$.*

Neka je K neki vršni pokrivač grafa G, a M neko sparivanje u G. Tada svaki brid iz M ima barem jedan kraj u K, a budući da bridovi u sparivanju M nemaju zajedničkih vrhova, vrijedi $|M| \leq |K|$. Onda i za maksimalno sparivanje M' i minimalni vršni pokrivač K' vrijedi $|M'| \leq |K'|$, odnosno $\nu(G) \leq \tau(G)$.
Slično, ako je L bridni pokrivač grafa G, a S stabilan skup, onda je $|S| \leq |L|$ jer je svaki vrh iz S kraj barem jednom bridu iz L, a nikoja dva vrha iz S nisu susjedna. Stoga je $\alpha(G) \leq \rho(G)$. Nadalje, vrijedi sljedeće:

Teorem 3.15. *Skup S je stabilan ako i samo ako je skup $V \setminus S$ vršni pokrivač grafa G.*

Iz ovog odmah slijedi slijedeća lema koju navodimo bez dokaza:

Lema 3.16. *Za bilo koji graf G vrijedi $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$.*

Lema 3.17. *Za bilo koji graf G koji nema izolirane vrhove vrijedi $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$.*

Dakle, kardinalnost maksimalnog sparivanja i minimalnog bridnog pokrivača u sumi daju ukupan broj bridova grafa G, iako komplement sparivanja ne mora biti bridni pokrivač, kao što je slučaj sa stabilnim skupom i vršim pokrivačem.

Definicija 3.18. *Kažemo da je graf* $G = (V, E)$ bipartitan *ako postoje* $A, B \neq \emptyset$ *takvi da je* $A \cup B = V$ *i* $A \cap B = \emptyset$ *te da za svaki* $e \in E, e = \{a, b\}$ *vrijedi da je* $a \in A$ *i* $b \in B$.

Za bipartitne grafove postoji velika teorija povezana sa sparivanjima. Mi ćemo navesti samo neke najzanimljivije rezultate.

Neka je X bilo koji podskup od $V(G)$, tada $\Gamma(X)$ označava sve vrhove iz $V(G)$ koji su susjedni s barem jednim vrhom u X.

Teorem 3.19 (P. Hall)**.** *Neka je* G *graf s biparticijom* $V(G) = A \cup B$. *Tada* G *ima sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz* A *ako i samo ako je* $|\Gamma(X)| \geq |X|$ *za sve* $X \subseteq A$.

Korolar 3.20 (Teorem o braku)**.** *Graf* G *s biparticijom* $V(G) = A \cup B$ *ima savršeno sparivanje ako i samo ako je* $|A| = |B|$ *i za sve* $X \subseteq A$ *je* $|X| \leq |\Gamma(X)|$.

Vidjeli smo da u svakom grafu vrijedi nejednakost $\nu(G) \leq \tau(G)$, no za bipartitne grafove vrijedi jednakost, što nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.21 (König)**.** *Ako je* G *bipartitan graf, onda je* $\tau(G) = \nu(G)$.

Dokaz. Znamo da za bilo koji graf vrijedi $\nu(G) \leq \tau(G)$. Sada ćemo dokazati i drugu nejednakost.

Neka G graf s biparticijom $V(G) = A \cup B$ i neka $K \subseteq V(G)$ označava minimalni vršni pokrivač. Sada ćemo konstruirati sparivanje M u G koje će biti veličine $|K|$. Najprije particioriramo K u dva dijela:

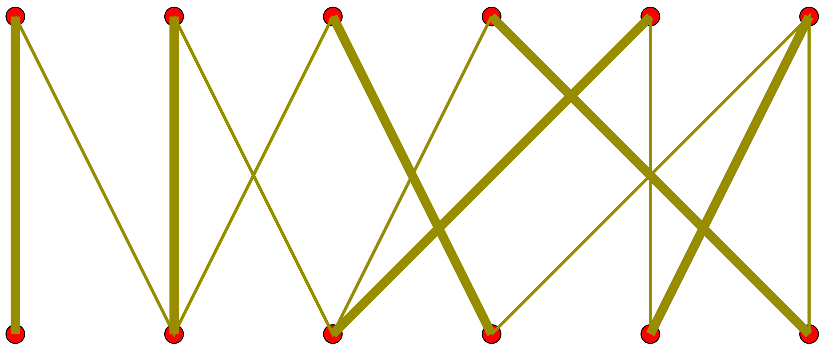
$$R = K \cap A \quad i \quad T = K \cap B.$$

Definirajmo dva podgrafa grafa G. Neka je $H \subseteq G$ podgraf induciran vrhovima $V(H) = R \cup (B \setminus T)$ i neka je $H' \subseteq G$ također podgraf induciran vrhovima $V(H') = T \cup (A \setminus R)$. Želimo pokazati da H ima sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz R te da H' ima sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz T. Prema Hallovom teoremu 3.19, dovoljno će biti da pokažemo da je $|\Gamma_H(X)| \geq |X|$ za sve $X \subseteq R$. Slično se dokaže i za H'.

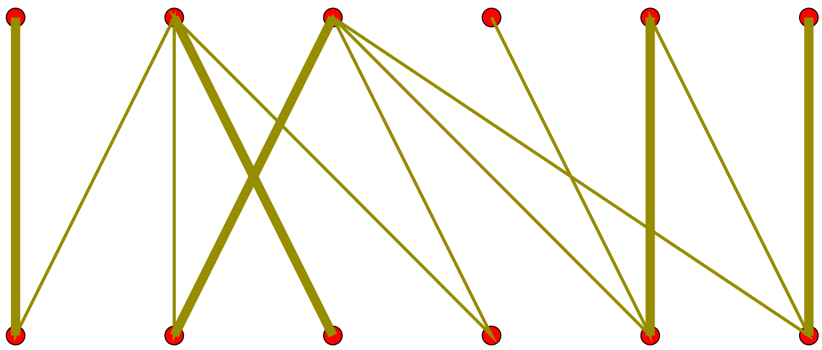
Pretpostavimo da nisu zadovoljeni uvjeti Hallovog teorema. To znači da postoji $X \subseteq R$ takav da je $|\Gamma_H(X)| < |X|$. Ali sada možemo zamijeniti X sa $\Gamma_H(X)$ u K i time smo dobili vršni pokrivač $K \cup (\Gamma_H(X)) \setminus X$ koji je manji od K, a to je nemoguće. Stoga su uvjeti Hallovog teorema zadovoljeni pa doista imamo sparivanje u H i u H' koje zasićuje R, odnosno T, respektivno. Neka je M unija ta dva sparivanja. Kako su H i H' međusobno disjunktni, M je veličine $|R| + |T| = |K|$. Dakle, $|M| = |K|$, odnosno $\nu(G) = \tau(G)$. □

Korolar 3.22. *Ako je G bipartitan graf, onda je $\rho(G) = \alpha(G)$.*

Na slici 7 možemo vidjeti jedan primjer savršenog sparivanja u bipartitnom grafu, a na slici 8 primjer jednog maksimalnog sparivanja u bipartitnom grafu koje nije savršeno. U tom grafu ne postoji savršeno sparivanje.



Slika 7: Savršeno sparivanje u bipartitnom grafu



Slika 8: Maksimalno sparivanje u bipartitnom grafu koje nije savršeno

4 Prebrojavanje i egzistencija savršenih sparivanja

Do sada smo prikazali teoriju sparivanja u jednostavnim grafovima. Nakon što smo saznali što je to savršeno sparivanje, prirodno je pitati se možemo li jednostavno odrediti postoji li savršeno sparivanje u nekom grafu te ukoliko postoji, možemo li odrediti koliko ih ima? U ovoj ćemo cjelini odgovoriti na ta dva pitanja.

Pogledajmo prvo bipartitan graf. Neka je G graf s biparticijom (U, W), gdje je $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Definirajmo matricu bisusjedstva $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ sa

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \{u_i, w_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Determinanta ove matrice daje nam informaciju o broju savršenih sparivanja u grafu G. Točnije, ako graf G nema savšeno sparivanje, onda je $\det B = 0$. Obrnuta tvrdnja nije uvijek istinita. Naime, u raspisu determinante zbog različitog predznaka može se dogoditi da se određeni dijelovi koji odgovaraju različitim savršenim sparivanjima međusobno ponište, što nam ne daje točan broj savršenih sparivanja. Na primjer, ako uzmemo potpun bipartitan graf $G = K_{n,n}$ vrijednosti njegove matrice bisusjedstva su sve jednake 1, dakle $\det B = 0$, ali takav graf ima savršeno sparivanje. Zato uvodimo pojam permanente koja će nam riješiti ovaj problem. No, pogledajmo najprije sljedeći primjer:

Primjer 4.1. *Pogledajmo bipartitan graf G sa slike 8. Znamo da taj graf nema savršeno sparivanje. Pokazat ćemo da je determinanta pripadne matrice bisusjedstva jednaka 0. Njegova matrica bisusjedstva $B \in M_6$ je:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vrlo jednostavno možemo izračunati da je $\det B = 0$. *Na primjer, svedemo ju na gornjetrokutastu matricu i prema korolaru 2.9, zbog toga što je $b_{44} = 0$ vrijedi tvrdnja.*

Definicija 4.2. *Neka je $A = (a_{ij})$ $n \times n$ matrica. Definiramo* permanentu *od A kao*

$$\operatorname{per} A = \sum a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{1}$$

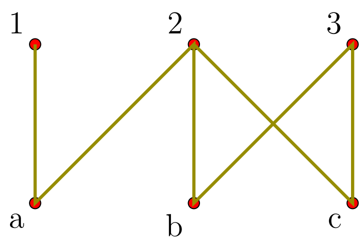
gdje suma ide po svim permutacijama σ od $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dakle, jedina je razlika od determinante da su ovdje svi izrazi istog predznaka. Prema gornjoj diskusiji, ako je B matrica bisusjedstva bipartitnog grafa G, tada svaki sumand koji nije nula u definiciji permanente odgovara određenom savršenom sparivanju grafa G i obrnuto. Dakle, permanenta broji koliko bipartitan graf ima savršenih sparivanja, o čemu nam govori sljedeća lema.

Lema 4.3. *Neka je $B = (b_{ij}) \in M_n$ matrica bisusjedstva grafa G s biparticijom (U, W), gdje je $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ te je $b_{ij} = 1$ ako i samo ako su u_i i w_j susjedni vrhovi. Tada je $\operatorname{per} B$ jednaka broju savršenih sparivanja grafa G.*

Dokaz. Svako savršeno sparivanje grafa G određuje bijekciju β s redaka na stupce matrice B sa svojstvom da je i susjedan s $\beta(i)$ i obratno, svaka takva bijekcija određuje savršeno sparivanje od G. Također, β se može promatrati i kao permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ kao $b_{i,\beta(i)} = 1$ za sve i. Stoga je broj bijekcija β jednak permanenti od B. □

Primjer 4.4. *Prikazat ćemo gornju diskusiju na jednom primjeru. Pogledajmo graf G sa slike 9.*



Slika 9: Bipartitan graf G

To je graf s biparticijom (U, W), gdje je $U = \{1, 2, 3\}$ i $W = \{a, b, c\}$. Odredimo mu matricu bisusjedstva:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lako se vidi da ovaj graf ima savršeno sparivanje, točnije ima ih dva: $M_1 = \{\{1, a\}, \{2, b\}, \{3, c\}\}$ i $M_2 = \{\{1, a\}, \{2, c\}, \{3, b\}\}$, a vrijedi da je $\det B = 0$. Izračunajmo permanentu matrice B. Prema formuli 1 imamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{per} B &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} + b_{13}b_{22}b_{31} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Dobili smo $\operatorname{per} B = 2$*, a upravo toliko imamo savršenih sparivanja u grafu te isto tako možemo vidjeti da u raspisu permanente prvi sumand* $b_{11}b_{22}b_{33}$ *upravo odgovara savršenom sparivanju* M_1*, a drugi sumand* $b_{11}b_{23}b_{32}$ *odgovara* M_2*.*

Ipak, postoji veliki problem s permanentom, a to je da se ona za velike n teško računa. Za determinantu znamo da se ona "lijepo ponaša" prema nekim operacijama kao što su zbrajanje i oduzimanje redaka i stupaca s drugim retcima, odnosno stupcima, množenje redaka i stupaca nekim skalarom. Takva nam svojstva omogućavaju da determinantu izračunamo u $\mathcal{O}(n^3)$ koraka dok je računanje permanente #P-potpun problem. Najprije ćemo objasniti kakav je to problem, a zatim ćemo navesti dvije nejednakosti koje nam daju donju i gornju ocjenu za permanentu.

Općenito, algoritmi i problemi su kategorizirani u klase složenosti. Vedran Šego je lijepo opisao neke od njih u [12]. P i NP-problemi obično se definiraju kao problemi odlučivanja, tj. oni koji daju odgovor na da/ne pitanja. Godine 1971. dvojica znanstvenika Cook i Leonid definirali su P-probleme kao "one koje je jednostavno riješiti" te NP-probleme kao "one čije je rješenje jednostavno provjeriti." Da budemo precizniji, P-problemi (ili problemi klase P) definiraju se kao problemi za koje je moguće definirati deterministički Turingov stroj koji rješenje nalazi u polinomijalnom vremenu, a NP-problemi (ili problemi klase NP) su problemi za koje možemo definirati nedeterministički Turingov stroj koji ih rješava također u polinomijalnom vremenu. Zatim postoje P-potpuni i NP-potpuni problemi. To su problemi klase P, odnosno NP koji imaju svojstvo da rješavanjem tih problema u polinomnom vremenu možemo i sve ostale P, odnosno NP-probleme riješiti u polinomnom vremenu. To zapravo znači da su oni u početku problemi koje ne možemo rješiti u polinomijalnom vremenu, ali mogu se reducirati na problem iz klase P, odnosno NP koji će biti rješiv u polinomijalnom vremenu. Postoji još i NP-težak problem, to je problem koji se ne može rješiti u polinomijalnom vremenu, ali mogu se reducirati na NP- problem pa postaje NP-potpun. Odnosno, to je problem koji je barem jednako težak kao i NP-problem.

Objasnili smo probleme koji pripadaju problemima odluke. Postoji još neke klase složenosti kao što su #P i #P-potpuni problemi. Oni se definiraju kao problemi prebrojavanja, odnosno oni daju odgovor na pitanje "koliko nečega ima". Formalnije, #P je klasa funkcijskih problema koja broji koliko ima prihvaćenih putova u nedeterminističkom Turingovom stroju koji se izvodi u polinomijalnom vremenu. Ti problemi prebrojavanja su povezani s problemima odluke iz klase NP. Dakle, #P-problem mora biti barem jednako težak kao i odgovarajući NP-problem jer ako možemo reći koliko mnogo nečega ima, lako je utvrditi postoji li uopće to nešto. Za #P-potpune probleme možemo reći da su to problemi klase #P sa svojstvom da se svaki drugi problem u #P može nekim postupkom reducirati tako da bude rješiv u polinomijalnom vremenu. Sada možemo prikazati neke rezultate vezane uz permanentu koje je Godsil opisao u svojoj knjizi (vidi [2]).

Prisjetimo se, za matricu kažemo da je dvostruko stohastička ako je nenegativna i ako je zbroj svakog njezinog retka i stupca jednak 1.

Teorem 4.5. *Neka je A dvostruko stohastička $n \times n$ matrica. Tada je*

$$\operatorname{per} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

gdje se jednakost postiže ako i samo ako su sve vrijednosti od A jednake $1/n$.

Teorem 4.6. *Neka je A 0-1 matrica i neka $r_1, r_2, \ldots, r_n$ označavaju sume redaka matrice A. Tada je*

$$\operatorname{per} A \leq (r_1!)^{1/r_1}(r_2!)^{1/r_2} \cdots (r_n!)^{1/r_n}.$$

Slijedeći rezultat nam je od velike važnosti.

Teorem 4.7 (Valiant). *Računanje permanente 0-1 matrice je #P-potpun problem.*

Valiant je također dokazao da se za fiksni cijeli broj m broj savšenog sparivanja modulo 2^m može izračunati u polinomijalnom vremenu, ali računanje istog broja modulo 3 je opet #P-potpun problem. Iako smo dobili potvrdan odgovor na pitanje možemo li prebrojati sva savršena sparivanja u bipartitnom grafu, vidjeli smo da to ne možemo napraviti u polinomijalnom vremenu. Pogledajmo možemo li jednostavnije odrediti postoji li uopće savršeno sparivanje u bipartitnom graf.

Vidjeli smo da ako savršeno sparivanje u grafu G ne postoji, tada je determinanta pripadne matrice susjedstva jednaka nuli. No, obrnuta tvrdnja nije uvijek istinita. Uredimo li malo pripadnu matricu bisusjedstva, vidjet ćemo da će vrijediti i obrnuta tvrdnja.

Neka graf G ima istu biparticiju kao ranije, ali sada svakom bridu e pridružimo varijablu x_e i definiramo pripadnu $n \times n$ matricu bisusjedstva $B(x) = (b_{ij})$ sa:

$$b_{ij} = \begin{cases} x_e, & \text{ako je } e = \{u_i, w_j\} \\ 0, & \text{ako } u_i \text{ i } w_j \text{ nisu susjedni} \end{cases}$$

Svaki izraz u raspisu $\det B(x)$ odgovara nekom savršenom sparivanju od G i obratno. Nadalje, svi se ti članovi izraza razlikuju pa se ne mogu međusobno pokratiti, kao što je bilo za prethodnu 01-matricu bisusjedstva. Stoga smo dobili potvrdan odgovor i na pitanje postoji li kriterij za utvrđivanje ima li bipartitan graf savršeno sparivanje

Teorem 4.8. *Bipartitan graf G ima savršeno sparivanje ako i samo ako* $\det B(x)$ *nije nulpolinom.*

Međutim, determinanta ovako zadane matrice je polinom više varijabli. To znači da ne možemo odrediti je li ona nula ili ne u polinomijalnom vremenu, stoga je to težak problem. Pogledajmo situaciju u općenitom grafu.

Neka je $G = (V, E)$ graf sa n vrhova i pridružimo mu proizvoljnu orijentaciju $\overrightarrow{G}$. Slično definiramo njemu pripadnu matricu susjedstva $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Pridružimo svakom bridu $e \in E(\overrightarrow{G})$ varijablu x_e pa definiramo antisimetričnu matricu $A(x)$ kao:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_e, & \text{ako je } e = (v_i, v_j) \in E(\overrightarrow{G}), \\ -x_e, & \text{ako je } e = (v_j, v_i) \in E(\overrightarrow{G}), \\ 0, & \text{ako } v_i \text{ i } v_j \text{ nisu susjedni.} \end{cases} \tag{2}$$

Tada vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.9. *Neka je G graf i neka je $A(x)$ definirana kao gore. Tada u G postoji savršeno sparivanje ako i samo ako* $\det A(x)$ *nije nulpolinom.*

Dakle, i za općenite grafove postoji kriterij preko determinante koji utvrđuje ima li graf savršeno sparivanje ili ne. Kao i maloprije, utvrditi je li polinom u determinanti ovako zadane matrice identički jednak nuli je težak problem. Međutim, postoji probabilistički algoritam koji nam rješava ovaj problem. Budući da znamo efikasno izračunati determinantu matrice sa skalarnim unosima, upravo ćemo to i napraviti. Umjesto x_e ubacit ćemo brojeve generirane nasumično iz nekog skupa. Ako dobijemo broj koji nije nula, onda očito determinanta ne može biti identički jednaka nuli. Ukoliko dobijemo nulu, to ne mora značiti da je determinanta identički jednaka nuli jer smo možda imali nesreću da smo baš izabrali korijen polinoma. Međutim, vjerojatnost da se to dogodi je vrlo mala i ona ovisi o tome kako ćemo generirati brojeve. Zato ćemo ih generirati uniformno iz skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$. Tada je vjerojatnost da pogodimo korijen najviše $(2/N)^q$, gdje je q broj bridova grafa. Time smo dobili polinomijalni algoritam koji utvrđuje postojanje savršenog sparivanja u grafu.

Postoje i drugi “nerandomizirani” algoritmi koji provjeravaju egzistenciju savršenog sparivanja u grafu, koji se također izvršavaju u polinomijalnom vremenu. Jedan takav je Hopcroft-Karpov algoritam (vidi [16]). On uzima bipartitan graf i preko uvećavajućih putova vraća maksimalno sparivanje u grafu. Složenost tog algoritma u najgorem slučaju je $\mathcal{O}(\sqrt{|V|}|E|)$. Ukoliko dobijemo da je kardinalitet maksimalnog sparivanja jednak $|V|/2$, dobili smo savršeno sparivanje, u suprotnom ne postoji savršeno sparivanje. Isti princip traženja uvećavajućih putova u grafu može se iskoristiti za konstrukciju polinomijalnog algoritma koji radi s proizvoljnim grafovima.

5 Pfaffijan

Pokazali smo da postoje kriteriji za utvrđivanje postoji li savršeno sparivanje za općenito sve grafove te smo pokazali na koji način možemo prebrojati sva savršena sparivanja u bipartitnom graf. Sada nas zanima možemo li prebrojati sva savršena sparivanja u proizvoljnom grafu. Za to nam treba pojam Pfaffijan matrice, kojeg ćemo obraditi u ovoj cjelini. Ograničit ćemo se na matrice parnoga reda.

Definicija 5.1. *Neka je $A = (a_{ij})$ antisimetrična matrica reda $2n$.* Pfaffijan *od A definira se kao*

$$\mathrm{pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} \tag{3}$$

gdje suma ide po svim permutacijama σ skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.

Neka je $G = (V, E)$ potpun graf s $2n$ vrhova. Proizvoljnoj permutaciji σ iz skupa S_{2n} možemo pridružiti savršeno sparivanje M grafa G tako da stavimo $M = \{\{\sigma(2i-1), \sigma(2i)\} : 1 \leq i \leq n\}$. Više permutacija odgovara istom sparivanju, točnije $2^n n!$ različitih permutacija.

Neka je $A = (a_{ij})$ antisimetrična matrica reda $2n \times 2n$. Za danu permutaciju $\sigma \in S_{2n}$, pridruženo savršeno sparivanje M i antisimetričnu matricu A definiramo *težinu* od M s obzirom na matricu A kao

$$\mathrm{wt}_A(M) = \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} \tag{4}$$

Kraće pišemo $\mathrm{wt}(M)$ kada je jasno iz konteksta o kojoj se matrici radi. Tvrdimo da je težina $\mathrm{wt}(M)$ dobro definirana, tj. da ne ovisi o permutaciji koja određuje M. Pokazat ćemo da iz jedne permutacije možemo određenim postupcima dobiti drugu, a time ćemo onda imati istu težinu. Uzmimo dvije permutacije σ_1 i σ_2 koje odgovaraju istom sparivanju M. Imamo tri slučaja koja se mogu dogoditi:

1. Permutacije su istoga predznaka, ali imaju različit poredak faktora u produktu. Kako je množenje komutativno, težine su im jednake.

2. Permutacije su opet istog predznaka, ali su zapisane s drugačijim redoslijedom vrhova na istom bridu. To znači da je za isti brid jedna permutacija napisana kao $a_{\sigma_1(2i-1),\sigma_1(2i)}$, a druga $a_{\sigma_2(2i-1),\sigma_2(2i)}$, gdje je $\sigma_1(2i-1)=\sigma_2(2i)$ i $\sigma_1(2i)=\sigma_2(2i-1)$ za neki i. Međutim, matrica A je antisimetrična pa je $a_{ij}=-a_{ji}$. Takvih različitih faktora mora biti parno mnogo jer u protivnom permutacije ne bi imale isti predznak. Na kraju imamo paran broj umnoška s -1 pa to ne utječe na predznak težine. Time smo dobili iste težine.

3. Permutacije su različitog predznaka. Slično kao u prethodnom, imamo bridove s različito zapisanim redoslijedom vrhova, ali ovaj put takvih razlika ima neparno mnogo. Stoga će se na kraju jednoj od permutacija promijeniti predznak, a time ćemo ponovo dobiti istu težinu.

Dakle, težina ne ovisi o izboru permutacije koja određuje M.

Sada možemo malo drugačije definirati Pfaffijana:

$$\mathrm{pf}(A) = \sum_{M\in\mathcal{M}_n} \mathrm{wt}(M), \tag{5}$$

gdje je $\mathcal{M}_n$ familija svih savršenih sparivanja potpunog grafa K_{2n}.

Primjer 5.2. *Izračunat ćemo Pfaffijan nekih matrica, u prvom primjeru preko definicije, a u drugom preko težina.*

1.

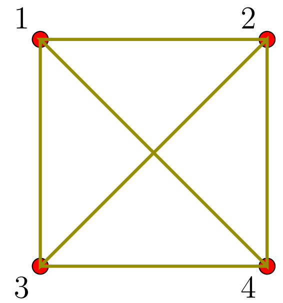
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

Tada je prema formuli (3)*:*

$$\mathrm{pf}\, A = \frac{1}{2^1 1!}(a-(-a)) = a.$$

2. Nacrtajmo prvo potpun graf K_4 i odredimo mu savršena sparivanja.

Vidimo da ovaj graf ima ukupno tri savršena sparivanja. Dakle, $\mathcal{M}_4 = \{M_1, M_2, M_3\}$, gdje su $M_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $M_2 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$ i $M_3 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$. S obzirom na antisimetričnu matricu $A \in M_4$:



Slika 10: Potpun graf K_4

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

izračunajmo težine od svih savršenih sparivanja. Na jednom ćemo primjeru pokazati da težine ne ovisi o izboru permutacije koja određuje savršeno sparivanje. Izračunat ćemo prvo težinu od M_1. *Uzmimo* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$. *Tada je prema formuli* (4):

$$wt(M_1) = \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} = a_{12} \cdot a_{34}.$$

Pogledajmo još neke permutacije koje određuju M_1. *Neka je* $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. *To nam je prvi slučaj u gornjoj diskusiji. Pa imamo:*

$$wt(M_1) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_1(2i-1),\sigma_1(2i)} = a_{34} \cdot a_{12} = a_{12} \cdot a_{34}.$$

Za permutaciju $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$, *prema drugom slučaju imamo:*

$$wt(M_1) = \operatorname{sign}(\sigma_2) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_2(2i-1),\sigma_2(2i)} = a_{21} \cdot a_{43} = -a_{12} \cdot (-a_{34}) = a_{12} \cdot a_{34}.$$

Pokažimo još treći slučaj pa uzmimo permutaciju $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$*:*

$$wt(M_1) = \operatorname{sign}(\sigma_3) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_3(2i-1),\sigma_3(2i)} = -a_{34} \cdot a_{21} = -a_{34} \cdot (-a_{12}) = a_{12} \cdot a_{34}.$$

Dakle, u sva tri slučaja imamo istu težinu. Odredimo sada težine preostalih savršenih sparivanja s permutacijom $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *koja određuje* M_2 *i te* $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *koja određuje* M_3*:*

$$wt(M_2) = \operatorname{sign}(\sigma_4) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_4(2i-1),\sigma_4(2i)} = -a_{13} \cdot a_{24}.$$

$$wt(M_3) = \operatorname{sign}(\sigma_5) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_5(2i-1),\sigma_5(2i)} = a_{14} \cdot a_{23}.$$

Sada je Pfaffijan matrice A prema formuli (5)*:*

$$\operatorname{pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

Primjetimo da vrijedi:

$$\det A = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 = (\operatorname{pf}(A))^2,$$

no time ćemo se nešto kasnije baviti.

Kao i determinanta, Pfaffijan matrice ima razna svojstva. Prikazat ćemo neka zanimljvija, bez dokaza. Prvo svojstvo koje navodimo kaže da ako imamo anisimetričnu matricu A i neku proizvoljnu matricu B koje su obje reda $2n \times 2n$, onda vrijedi sljedeća relacija:

$$\operatorname{pf}(BAB^{\tau}) = \det B \operatorname{pf} A.$$

Dokaz toga može se pronaći u [3].

Sljedeće svojstvo (vidi također [3]) kaže da ako imamo dvije antisimetrične matrice A_1 i A_2 reda $2n \times 2n$ i ako imamo blok dijagonalnu matricu A takvu da je $A = A_1 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, tada vrijedi

$$\operatorname{pf}(A_1 \oplus A_2) = \operatorname{pf}(A_1) \operatorname{pf}(A_2).$$

Navodimo još jedno svojstvo. Prema [11], ako je A $n \times n$ matrica, tada vrijedi

$$\det A = \operatorname{pf} \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}.$$

To nam pokazuje da su determinante specijalni slučaji Pfaffijana ovako zadane matrice. Sva ta svojstva mogu nam poslužiti u računanju Pfaffijana neke matrice jer, kao i kod determinante, taj račun ima složenost $\mathcal{O}(n^3)$. U teoriji Pfafijana postoji jedno najvažnije svojstvo do kojeg želimo doći, a to je da ako imamo antisimetričnu matricu A da je $\det A = (\operatorname{pf} A)^2$. No, prvo ćemo prikazati neke prethodne rezultate.

Svaka se permutacija može zapisati kao kompozicija disjunktnih ciklusa. Takva je reprezentacija permutacije jedinstvena, do na redoslijed ciklusa i odabir početnih točaka ciklusa. Označimo sa $\varepsilon(n)$ skup svih permutacija iz skupa S_n u kojem su svi ciklusi parne duljine. Ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ciklus, onda definiramo njegovu duljinu kao $k-1$.

Lema 5.3. *Ako je $A = (a_{ij})$ antisimetrična matrica reda $n \times n$, onda je*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \varepsilon(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Poanta ove leme je da se determinanta može izračunati tako da suma ide samo po onim permutacijama koje, kada ih zapišemo kao kompoziciju disjunktnih ciklusa, imaju sve cikluse parne duljine, ne moramo sumirati po skupu S_n. Ova lema se vrlo lako dokaže. Definirajmo najmanji element ciklusa kao najmanji element skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji se nalazi u tom ciklusu. Ako uzmemo permutaciju $\alpha \in S_n \setminus \varepsilon(n)$, to znači da zapis te permutacije preko ciklusa ima barem jedan ciklus neparne duljine. Kreirajmo sada novu permutaciju α' tako da u permutaciji α nađemo neparni ciklus s minimalnim najmanjim elementom i zamijenimo ga njegovim inverzom. Primjetimo da je $\alpha'' = \alpha$. Permutacije α i α' imaju isti predznak i vrijedi $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\alpha(i)} = -\prod_{i=1}^{n} a_{i,\alpha'(i)}$, čime je lema dokazana.

Pisat ćemo $\alpha \approx \beta$ ako β možemo dobiti iz α tako da u α zamijenimo neke cikluse njihovim inverzima. Tada je $\approx$ relacija ekvivalencije na S_n, ali i na $\varepsilon(n)$. Svaka klasa ekvivalencije iz $\varepsilon(n)$ odgovara podgrafu potpunog grafa K_n kojemu su komponente parni ciklusi i bridovi. Kako unija bilo koja dva savršena sparivanja u grafu K_n čini podgraf kojemu su komponente parni ciklusi i bridovi, postoji bijekcija između ovakvih podgrafova i klasa ekvivalencije elemenata iz $\varepsilon(n)$. Stoga postoji bijekcija između uređenih parova savršenih sparivanja u K_n i klasa ekvivalencije iz $\varepsilon(n)$.

Primjer 5.4. *Pogledajmo potpun graf K_4 (vidi sliku 10) i odredimo klasu ekvivalencije na $\varepsilon(4) \subseteq S_4$ s obzirom na relaciju ekvivalencije $\approx$. U skupu $\varepsilon(4)$ nalaze se sve one permutacije koje kad se zapišu kao produkt disjunktnih ciklusa imaju sve cikluse parne duljine. Dakle, $\varepsilon(4) = \{\sigma_1 = (1)(2)(3)(4), \sigma_2 = (1)(234), \sigma_3 = (1)(243), \sigma_4 = (123)(4), \sigma_5 = (124)(3), \sigma_6 = (132)(4), \sigma_7 = (134)(2), \sigma_8 = (142)(3), \sigma_9 = (143)(2)\}$ Odredimo klase ekvivalencije na skupu $\varepsilon(4)$. Za identitetu vrijedi $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$ pa je ona u relaciji sama sa sobom,*

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(243) = \sigma_3,$$

$$\sigma_4^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (132)(4) = \sigma_6,$$

$$\sigma_5^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (142)(3) = \sigma_8,$$

$$\sigma_7^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (143)(2) = \sigma_9.$$

Pa je $\sigma_2 \approx \sigma_3$, $\sigma_4 \approx \sigma_6$, $\sigma_5 \approx \sigma_8$, $\sigma_7 \approx \sigma_9$, pa su klase ekvivalencije: $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2, \sigma_3\}$, $\{\sigma_4, \sigma_6\}$, $\{\sigma_5, \sigma_8\}$ i $\{\sigma_7, \sigma_9\}$, koje u uniji daju cijeli $\varepsilon(4)$. Izaberimo jednu klasu ekvivalencije, na primjer $\{\sigma_4, \sigma_6\}$. Tada permutacije iz te klase ekvivalencije određuju savršena sparivanja $M_1 = \{\{2,3\},\{1,4\}\}$ i $M_2 = \{\{3,1\},\{2,4\}\}$, čija unija $M_1 \cup M_2$ čini podgraf grafa K_4 u obliku parnog ciklusa (v_4, v_2, v_3, v_1).

Neka je γ klasa ekvivalencije permutacija iz $\varepsilon(n)$. Ako je α permutacija u γ i ako je γ unija dvaju savršenih sparivanja M_1 i M_2, onda vrijedi

$$|\operatorname{sign}(\alpha) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\alpha(i)}| = |\operatorname{wt}(M_1)\operatorname{wt}(M_2)|. \tag{6}$$

Prema tome, postoji funkcija $\epsilon(M_1, M_2)$, pri čemu su M_1 i M_2 savršena sparivanja u K_n, koja daje vrijednosti iz skupa $\{-1, 1\}$ tako da vrijedi

$$\det A = \sum_{(M_i, M_j)} \epsilon(M_i, M_j) \operatorname{wt}(M_i) \operatorname{wt}(M_j),$$

gdje suma ide po svim uređenim parovima savršenih sparivanja iz K_{2n} (savršena sparivanja ne moraju biti različita), a A je antisimetrična matrica reda $2n \times 2n$. Tvrdnja $\det A = (\operatorname{pf} A)^2$ će slijediti ako pokažemo da je funkcija ϵ konstanta, tj. da za sve parove poprima vrijednost 1, ili za sve parove poprima vrijednost -1.

Lema 5.5. *Neka je $A = (a_{ij})$ antisimetrična matrica reda $n \times n$, pri čemu je n paran. Ako je $\alpha \in S_n$ i ako su M_1 i M_2 dva savršena sparivanja čijoj uniji odgovara klasa ekvivalencije koja sadrži α, onda vrijedi*

$$\operatorname{sign}(\alpha) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\alpha(i)} = \operatorname{wt}(M_1) \operatorname{wt}(M_2).$$

Dokaz. Neka su σ_1 i σ_2 permutacije koje određuju savršena sparivanja M_1 i M_2 redom. Iz naše definicije težine savršenog sparivanja očigledno je da vrijedi

$$\operatorname{wt}(M_1) \operatorname{wt}(M_2) / \prod_{i=1}^{n} a_{i,\alpha(i)} = \operatorname{sign}(\sigma_1) \operatorname{sign}(\sigma_2).$$

Dakle, dovoljno je pokazati da je $\operatorname{sign}(\alpha) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \operatorname{sign}(\sigma_2)$, a to ćemo dokazati ako pokažemo da se mogu uzeti σ_1 i σ_2 takvi da je $\sigma_1 \sigma_2 = \alpha$. Pretpostavimo prvo da se α sastoji od jednog ciklusa duljine $n = 2m$ oblika $(i_1, i_2, \ldots, i_{2m-1}, i_{2m})$. Možemo pretpostaviti da je

$$M_1 = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \ldots, \{i_{2m-1}, i_{2m}\}\}$$

i

$$M_2 = \{\{i_2, i_3\}, \{i_4, i_5\}, \ldots, \{i_{2m}, i_1\}\}.$$

Ako sada konstruiramo odgovarajuće permutacije σ_1 i σ_2 koje određuju M_1 i M_2 kao što su u definiciji težine savršenog sparivanja, onda imamo da je $\sigma_1 \sigma_2 = \alpha$. Zapravo smo ovdje α koristili kako bismo odredili redoslijed u kojem ćemo pisati bridove od M_1 i M_2 te također redoslijed pisanja vrhova u svakom bridu. Pretpostavimo sada da α ima više od jednog ciklusa. Svaki ciklus određuje par sparivanja (ne nužno savršenih) i M_1 tako možemo kreirati da uzimamo bridove tih sparivanja u svakom ciklusu od α. Zatim uredimo bridove svake komponente s obzirom na ciklus iz kojeg su uzeti. Tako isto napravimo i za M_2 i opet smo dobili $\sigma_1 \sigma_2 = \alpha$. Time je dokaz gotov. □

Sada sljedeći teorem slijedi iz leme 5.5 i jer je

$$(\operatorname{pf} A)^2 = \sum_{(M_i, M_j) \in \mathcal{M}_n} \operatorname{sign}(\sigma_1) \operatorname{sign}(\sigma_2) \operatorname{wt}(M_i) \operatorname{wt}(M_j)$$

Teorem 5.6 (Cayley)**.** *Za proizvoljnu $2n \times 2n$ antisimetričnu matricu A vrijedi da je* $\det A = (\operatorname{pf} A)^2$.

6 Prebrojavanje savršenih sparivanja u planarnom grafu

Znamo da je računanje broja savršenih sparivanja u proizvoljnom grafu ili čak bipartitnom grafu $\#P$-potpun problem, što znači da za takvo računanje nije poznat polinomijalni algoritam. Međutim, prema Kasteleynijevom rezultatu možemo u polinomijalnom vremenu izračunati broj savršenih sparivanja, ali samo u planarnom grafu i to preko Pfaffijana odgovarajuće matrice susjedstva. U ovoj ćemo cjelini prikazati upravo to. Opet ćemo se ograničiti na grafove s parnim brojem vrhova jer oni s neparnim brojem nemaju savršeno sparivanje. Definirat ćemo najprije planaran graf.

Definicija 6.1. *Graf G je* planaran *ako se može uložiti u ravninu $\mathbb{R}^2$, tj. ako se može svakom vrhu pridružiti točka, a svakom bridu neorijentirana krivulja u $\mathbb{R}^2$ koja spaja točke pridružene krajevima tog brida tako da se krivulje pridružene bridovima sijeku samo u vrhovima. Graf zajedno s takvim ulaganjem nazivamo* ravninski graf*.*

Svaki ravninski graf očito dijeli ravninu na disjunktna područja, od kojih je jedno beskonačno. Ta područja nazivamo stranama i broj strana označavamo s f. Za planarne grafove vrijedi Eulerova formula:

Teorem 6.2 (Eulerova formula)**.** *Za svako ulaganje povezanog planarnog grafa G s n vrhova, m bridova i f strana vrijedi*

$$n - m + f = 2.$$

Definiramo *stupanj strane* planarnog grafa kao broj bridova na koje naiđemo pri šetnji oko ruba strane. Lako se pokaže da je u povezanom planarnom grafu zbroj stupnjeva strana jednak dvostrukom broju bridova. Kod potpunih grafova K_n planarni su samo oni za koje je $n \leq 4$. Pokazat ćemo da K_5 nije planaran, a zatim će slijediti da ni K_n, za $n \geq 5$ nisu planarni jer svaki takav potpuni graf sadrži K_5 kao podgraf.

Kada bi K_5 bio planaran, tada bi on dijelio ravninu u $f = 2 - 5 + 10 = 7$ strana. Svaka od 7 strana mora imati stupanj veći ili jednak od 3 (strana s jednim ili dva brida može se pojaviti samo ako postoje petlje ili višestruki bridovi u grafu), a kako je zbroj stupnjeva strana u planarnom grafu jednak dvostrukom broju bridova vrijedi $20 \geq 7 \cdot 3 = 21$, što je kontradikcija. Slično se pokaže ni da graf $K_{3,3}$ nije planaran. Kuratowski je pokazao nužan i dovoljan uvjet da bi graf bio planaran. Objasnimo prvo što je to subdivizija grafa. Subdivizija brida je umetanje novog vrha (stupnja 2) na tom bridu, a subdivizija grafa G je graf G' dobiven iz G rekurzivnim subdivizijama bridova.

Teorem 6.3 (Kuratowski)**.** *Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži subdiviziju od K_5 ili $K_{3,3}$ kao podgraf.*

Definirali smo već prije usmjereni graf, dakle to je graf kojemu svi bridovi imaju orijentaciju. Htjet ćemo nekom grafu odrediti orijentaciju te mu onda pridružiti pripadnu matricu susjedstva.

Neka je G graf sa $2n$ vrhova i neka mu je pridružena proizvoljna orijentacija $\overrightarrow{G}$. Sada danoj orijentaciji $\overrightarrow{G}$ pridružujemo orijentiranu matricu susjedstva $A(\overrightarrow{G}) = (a_{ij})_{2n\times 2n}$ tako da je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (u_i, u_j) \in E(\overrightarrow{G}), \\ -1, & \text{ako je } (u_j, u_i) \in E(\overrightarrow{G}), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{7}$$

Ovakva matrica je antisimetrična pa pogledajmo Pfaffijan te matrice. Prema definiciji, svaki je član sume jednak 1, -1 ili 0. Nadalje, znamo da svaki član koji nije nula odgovara nekom savršenom sparivanju u grafu. Kako bismo bili sigurni da će nam Pfaffijan dati broj savršenih sparivanja u grafu, trebala bi postojati takva orijentacija grafa u kojoj će članovi sume koji odgovaraju savršenim sparivanjima biti istog predznaka. Takvu ćemo orijentaciju zvati *Pfaffijan orijentacijom.*

Slična razmatranja imamo i s težinama. Ako je $\overrightarrow{G}$ proizvoljna orijentacija grafa G, tada je $\det A(\overrightarrow{G}) = (\operatorname{pf} A(\overrightarrow{G}))^2$ pa je

$$\det A(\overrightarrow{G}) = \sum \operatorname{wt}(M_1)\operatorname{wt}(M_2), \tag{8}$$

gdje suma ide po svim parovima savršenih sparivanja M_1 i M_2 u G. Kako je $A(\overrightarrow{G})$ $\{-1, 0, 1\}$-matrica, težina $\operatorname{wt}(M)$ može biti samo 1 ili -1. Htjeli bismo moći izabrati orijentaciju grafa G baš takvu da je izraz $\operatorname{wt}(M_1)\operatorname{wt}(M_2)$ uvijek jednak 1 jer bi onda broj savršenih sparivanja u grafu G bio pozitivni drugi korijen od $\det A(\overrightarrow{G})$. Takva orijentacija je opet Pfaffijan orijentacija. Dakle, ukoliko ćemo imati graf s Pfaffijan orijentacijom, moći ćemo mu izbrojati sva savršena sparivanja i to u polinomijalnom vremenu. No, problem je možemo li uopće odrediti nekom grafu Pfaffijan orijentaciju u polinomijalnom vremenu. Zanima nas kada graf ima Pfaffijan orijentaciju, te ukoliko je zadana orijentacija nekom grafu, je li ona Pfaffijan orijentacija?

Pridružimo sada grafu G proizvoljnu orijentaciju $\overrightarrow{G}$ i neka je C neki neusmjereni parni ciklus u G. Bez obzira koje od mogućih dva usmjerenja izaberemo oko njega, ako je broj bridova koji prate dano usmjerenje u C paran, tada će on imati i paran broj bridova suprotnog usmjerenja. Stoga slijedeća definicija ne ovisi kojim putem krenemo.

Definicija 6.4. *Neka je C neusmjereni parni ciklus u G. Kažemo da je ciklus C* paran u odnosu na $\overrightarrow{G}$ *ukoliko ima paran broj bridova koji slijede usmjerenje $\overrightarrow{G}$. U suprotnom kažemo da je C* neparan u odnosu na $\overrightarrow{G}$.

Ako je M neko savršeno sparivanje u grafu G, tada definiramo preznak od M, $\operatorname{sign} M$ kao predznak odgovarajućeg člana u izrazu Pfaffijana.

Lema 6.5. *Neka je $\overrightarrow{G}$ proizvoljna orijentacija neusmjerenog grafa G. Neka su M_1 i M_2 bilo koja dva savršena sparivanja u G i neka k označava broj parnih ciklusa u odnosu na $\overrightarrow{G}$ formiranih u $M_1 \cup M_2$. Tada je*

$$\operatorname{sign} M_1 \cdot \operatorname{sign} M_2 = (-1)^k. \tag{9}$$

Prema (8), ako u grafu G s proizvoljnom orijentacijom $\overrightarrow{G}$ postoje dva savršena sparivanja s različitim predznakom, onda graf nema Pfaffijan orijentaciju. Ova lema kaže da možemo pogledati cikluse formirane u uniji dva savršena sparivanja, te ukoliko u nekoj uniji ima neparno mnogo ciklusa koji su parni s obzirom na $\overrightarrow{G}$, onda $\overrightarrow{G}$ sigurno nije Pfaffijan orijentacija.

Definicija 6.6. *Kažemo da je ciklus C u grafu G* lijep *ako $G - V(C)$ sadrži savršeno sparivanje.*

Teorem 6.7. *Neka je G graf s parnim brojem vrhova i $\overrightarrow{G}$ neka njegova orijentacija. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) *$\overrightarrow{G}$ je Pfaffijan orijentacija.*

(2) *Svako savršeno sparivanje od G ima isti predznak u odnosu na $\overrightarrow{G}$.*

(3) *Svaki lijepi ciklus u G je neparan u odnosu na $\overrightarrow{G}$.*

(4) *Ako G ima savršeno sparivanje, onda je za neko savršeno sparivanje M svaki M-alternirajući ciklus neparan u odnosu na $\overrightarrow{G}$.*

Dakle, dobili smo neke uvjete na graf G da bi $\overrightarrow{G}$ bila Pfaffijan orijentacija. Međutim, problem je što ne možemo lako provjeriti te uvjete pa opet imamo težak problem. Želimo neki efikasniji način određivanja Pfaffijan orijentacije u nekom grafu. Kasteleyn je uspio pronaći efikasniji način, međutim samo u planarnom grafu.

Teorem 6.8 (Kasteleyn)**.** *Svaki planaran graf G ima Pfaffijan orijentaciju.*

Osim toga, pokazao je da se takva orijentacija u planarnom grafu može pronaći u polinomijalnom vremenu. Algoritam se bazira na sljedećoj lemi, no prije nje trebamo jednu definiciju.

Definicija 6.9. *Kažemo da je brid e, koji leži na nekoj strani f* orijentiran u smjeru kazaljke na satu *ako se, kada se pomičemo u smjeru dane orijentacije, strana f nalazi s desne strane.*

Lema 6.10. *Neka je G ravninski graf. Tada se G može efikasno orijentirati tako da svaka strana ima neparan broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu. Štoviše, to je Pfaffian orijentacija.*

Prema teoremu 6.7, ako je $\overrightarrow{G}$ Pfaffijan orijentacija, onda je svaki lijepi ciklus u G neparan u odnosu na $\overrightarrow{G}$ i obratno. Stoga to vrijedi i za planaran graf G. Pa vrijedi sljedeća lema:

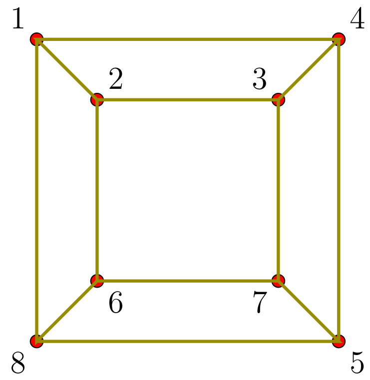
Lema 6.11. *Neka je G planaran. Ako je G orijentiran tako da svaka strana ima neparan broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu, onda je svaki lijepi ciklus u G neparan u odnosu na tu orijentaciju.*

Sada ćemo FKT algoritmom, nazvan po Fisheru, Kasteleynu i Temperleyu, pokazati da uvijek možemo konstruirati Pfaffijan orijentaciju koja zadovoljava uvjete leme 6.10 i na taj način možemo prebrojati sva savršena sparivanja u grafu.

Neka je G planaran graf. FKT-algoritam ide ovako:

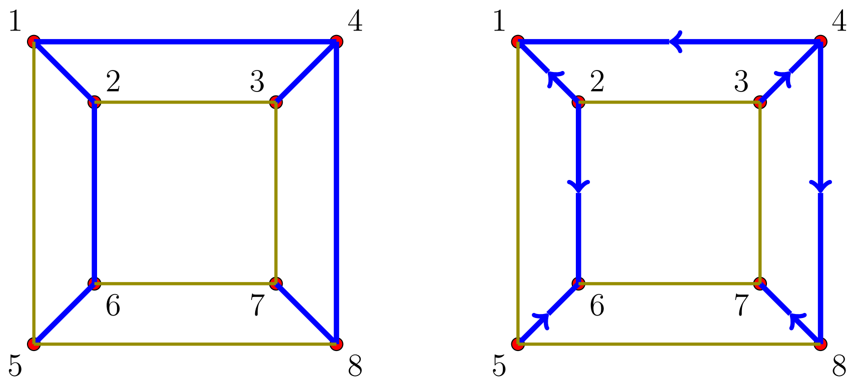
1. Nađi razapinjuće stablo u G (inducirani podgraf od G koji je povezan i bez ciklusa) i nazovi ga T_1.
2. Orijentiraj bridove u T_1 proizvoljno.
3. Konstruiraj drugo stablo T_2 čiji su vrhovi strane od G, uključujući i beskonačnu stranu. Spoji te vrhove s bridom tako da se spajaju samo oni vrhovi čije strane imaju zajednički brid i to onaj koji nije u T_1.
4. Orijentiraj preostale bridove od G, počevši od listova stabla T_2, tako da svaka strana ima neparan broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu. Zatim makni brid po brid iz T_2.

Pokazat ćemo algoritam na planarnom grafu sa slike 11.

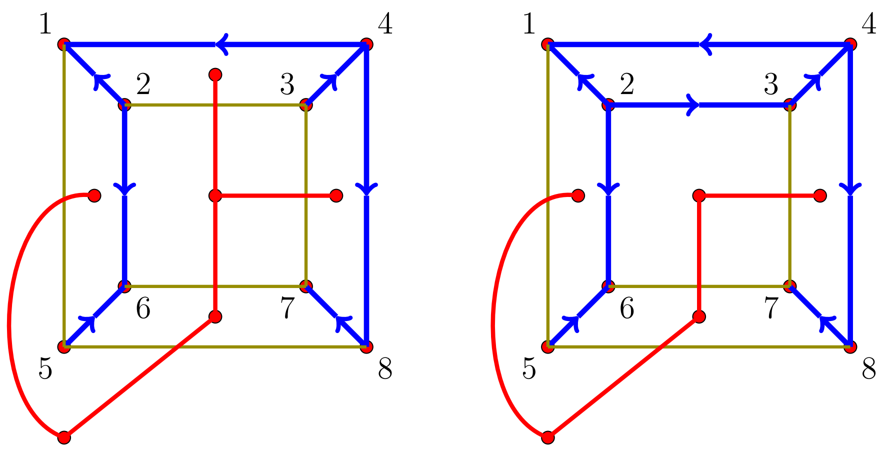


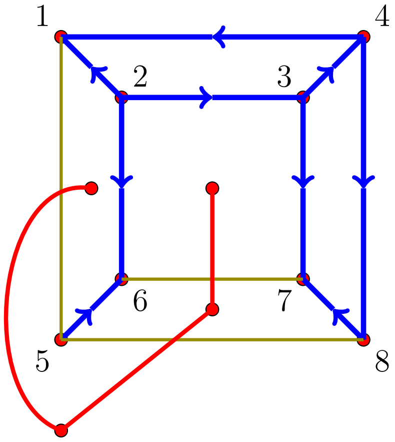
Slika 11: Planaran graf G

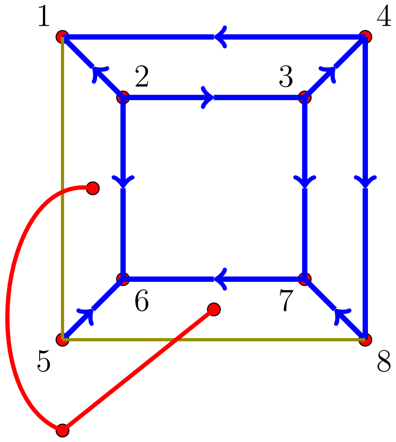
Najprije odredimo razapinjuće stablo T_1 i orijentiramo ga proizvoljno.

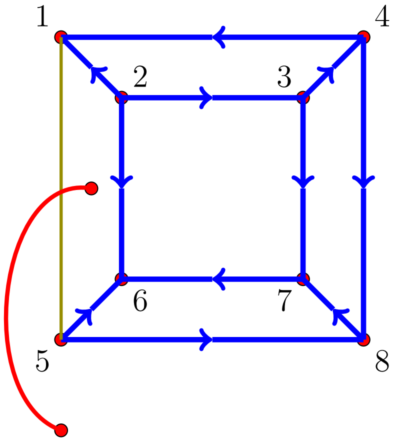


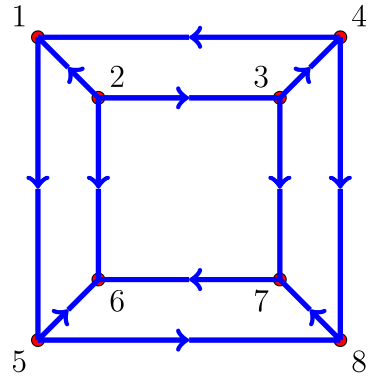
Konstruirajmo stablo T_2 te, polazeći od listova, orijentirajmo preostale bridove grafa G.











Tako smo dobili Pfaffijan orijentaciju. Sada ćemo izbrojati sva savršena sparivanja te tako provjeriti da nam ovakva orijentacija uistinu daje točan broj. Pridružimo tom orijentiranom grafu matricu susjedstva.

Pripadna matrica susjedstva izgleda ovako:

$$A(\overrightarrow{G}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinanta ove matrice je 81 te kako je ona antisimetrična i parnoga reda, prema teoremu 5.6 pf $A = 9$, a to znači da ima ukupno 9 savršenih sparivanja u grafu G. Za ovakav graf lako možemo ručno prebrojati savršena sparivanja i potvrditi da ih uistinu ima 9. Dakle, konstruirali smo orijentaciju koja će nam doista izbrojati sva savršena sparivanja.

Sljedeći teorem je posljedica Kasteleynijevog teorema i teorema Kuratowskog.

Teorem 6.12. *Ako G ne sadrži subdiviziju od K_5 ili $K_{3,3}$ kao podgraf, onda G ima Pfaffijan orijentaciju.*

Pokazali smo da postoje neki uvjeti na proizvoljan graf G da bi on imao Pfaffijan orijentaciju. Međutim, to nam nije dovoljno da ju možemo efikasno odrediti. Znamo da ako graf ima Pfaffijan orijentaciju, da tada možemo izračunati broj savršenih sparivanja u polinomijalnom vremenu. Ipak, nije poznat polinomijalni algoritam utvrđivanja je li zadana orijentacija $\overrightarrow{G}$ Pfaffijan orijentacija. Štoviše, ne znamo spada li to i u klasu NP. U polinomijalnom vremenu bismo mogli odrediti da $\overrightarrow{G}$ nije Pfaffijan orijentacija, dovoljno je pronaći dva savršena sparivanja različitih predznaka. Dakle, računanje broja savršenih sparivanja u proizvoljnom graf ostaje #P-potpun problem. Iako je Kasteleyn dokazao da svaki planaran graf ima Pfaffijan orijentaciju, i tu nailazimo na probleme.

Teorem 6.13 (Jerrum)**.** *Računanje broja sparivanja u planarnom grafu je #P-potpun problem.*

Zanimljivo je da možemo efikasno odrediti broj savršenih sparivanja u planarnom grafu, ali odrediti broj k-sparivanja u istome grafu je #P-potpun problem. Štoviše, za planaran graf s n vrhova, ne znamo odrediti broj sparivanja već s $n/4$ bridova.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2008.

[2] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.

[3] H. E. Haber, *Notes on antisymmetric matrices and the Pfaffian*, University of California, 2015. dostupno na: `http://scipp.ucsc.edu/~haber/webpage/pfaffian2.pdf` (veljača 2020.).

[4] F. Kalebić, J. Mandić, S. Braić, D. Vukičević *Prebrojavanje savršenih sparivanja*, math.e 17 (2010) 3-4.

[5] Z. Liao, M. X. Goemans, *Advanced combinatorial optimization*, bilješke s predavanja, 2014. dostupno na: `http://www-math.mit.edu/~goemans/18438S14/lec4-algmat.pdf` (veljača 2020.).

[6] L. Lovasz, M. D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[7] L. Lu, D. Smith, *Matchings*, bilješke s predavanja, 2006. dostupno na: `http://people.math.sc.edu/lu/teaching/2006spring_777/math776/lecture7.pdf` (veljača 2020.).

[8] A. Montanaro, *Counting perfect matchings in planar graphs*, prezentacija s predavanja na kolegiju "Advanced Algorithms", 2009. dostupno na: `https://people.maths.bris.ac.uk/~csxam/presentations/matchings.pdf` (veljača 2020.).

[9] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

[10] J. Nguyen, *Perfect matchings and Pfaffian orientation*, disertacija, Universiteit van Amsterdam, 2008.

[11] G. Rote, *Division-Free Algorithms for the Determinant and the Pfaffian: Algebraic and Combinatorial Approaches*, In: Computational Discrete Mathematics. Editor: Helmut Alt. Lecture Notes in Computer Science 2122, Springer-Verlag, 2001. 119–135.

[12] V. Šego, *P = NP?*, Matematičko-fizički list LX (2010), br. 4, 211-220.

[13] D. Veljan, *Kombinatrorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[14] Wikipedia, *#P-problems*, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/%E2%99%AFP (veljača 2020.).

[15] Wikipedia, *#P-complete problems*, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/%E2%99%AFP-complete (veljača 2020.).

[16] Wikipedia, *Hopcroft–Karp algorithm*, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Hopcroft%E2%80%93Karp_algorithm (veljača 2020.).

Sažetak

U ovom radu obradili smo savršena sparivanja u grafu i Pfaffijan antisimetrične matrice. U početku upoznajemo definiciju savršenog sparivanja i rezultate koji su nam potrebni za ostatak rada. Nakon toga pokazujemo kriterij za egzistenciju savršenog sparivanja u bipartitnom grafu i u proizvoljnom grafu. Opisujemo probabilistički algoritam koji pitanje egzistencije savršenog sparivanja rješava u polinomijalnom vremenu. Zatim utvrđujemo da permanenta matrice bisusjedstva bipartitnog grafa broji sva savršena sparivnja, međutim izračunavanje permanente je #P-potpun problem za kojeg nije poznat polinomijalni algoritam. U zadnjem dijelu rada obrađujemo Kasteleynov rezultat da u planarnom grafu možemo efikasno prebrojati sva savršena sparivanja, i to preko Pfaffijana antisimetrične matrice susjedstva grafa kojeg smo orijentirali na odgovarajući način.

Summary

This master thesis deals with perfect matchings in graphs as well as with the Pfaffian of a skew-symmetric matrix. The topic is introduced with the definition of perfect matchings and with results that are useful for later work. Then the criterion for existence of perfect matching is shown for bipartite graphs and the arbitrary graphs. We describe probabilistic algorithm which solves the existence problem of perfect matchings in polynomial time. In addition, it is determined that the permanent of the biadjacency matrix of a bipartite graph counts all perfect matchings. However, it turns out that the calculation of permanent is #P-complete problem for which polynomial algorithm isn't known. Nevertheless, in the last part of the thesis we deal with Kasteleyn's result that we can efficiently compute all perfect matchings in planar graphs through Pfaffian of adjacency matrix of the graph, which is oriented appropriately.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 03. travnja 1995. godine. U Zagrebu završavam Osnovnu školu Malešnicu te do 2014. pohađam opću gimnaziju Lucijana Vranjanina. Potom upisujem preddiplomski studij Matematike, inžinjerski smjer, na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija sam 2017. godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu. Aktivno se bavim plesom od svoje pete godine.