Kaotične oscilacije u nelinearnom električnom titrajnom krugu

Subotić, Hrvoje

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:390752

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Hrvoje Subotić

Kaotične oscilacije u nelinearnom električnom titrajnom krugu

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Hrvoje Subotić

Diplomski rad

Kaotične oscilacije u nelinearnom električnom titrajnom krugu

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Emil Tafra

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____
Zagreb, 2020.

Zahvaljujem mentoru doc.dr.sc. Emilu Tafri na uloženom vremenu te pruženoj pomoći tijekom izrade ovog rada. Zahvaljujem svim svojim kolegama i prijateljima koji su mi studiranje učinili ljepšim i ugodnijim, a ponajviše svojim roditeljima na neograničenoj podršci i razumijevanju.

Sažetak

Uvođenjem diode kao nelinearnog elementa u električni titrajni krug, uspjeli smo ga dovesti u režim kaotičnih oscilacija. Sastavili smo dva RLD kruga s različitim zavojnicama i pratili smo postupan prelazak sustava u kaotično ponašanje na tri načina: vremenskim prikazom, X-Y prikazom i pomoću frekvencijskog spektra. U oba RLD kruga potvrdili smo teorijska predviđanja i vidjeli kada se u takvom sustavu pojavljuju bifurkacije, kaotično ponašanje i otoci reda. Jedna od važnijih značajki kaotičnih sustava je univerzalnost koja se može očitovati i u Feigenbaumovoj konstanti. Izračunata je Feigenbaumova konstanta za oba RLD kruga; za RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH dobili smo vrijednost Feigenbaumove konstante $\delta_1 = 3.61$, a za RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2 mH dobili smo $\delta_2 = 3.79$. Oba ova rezultata odstupaju od teorijske vrijednosti $\delta = 4.669$, ali ta je vrijednost dobivena kada promatramo uzastopne bifurkacije visokog reda. Da bi se mogla preciznije izmjeriti Feigenbaumova konstanta, potreban je drugačiji eksperimentalni postav koji će biti u stanju razlučiti više bifurkacije.

Ključne riječi: nelinearni sustavi, bifurkacijski dijagram, dvoperiodičnost, Feigenbaumova konstanta.

Chaotic oscillations in a non-linear electrical oscillating circuit

Abstract

By introducing a diode as a non-linear element in the electrical oscillating circuit, we have succeeded to bring it to the state of the chaotic oscillations. We have constructed two RLD circuits with different inductors and followed a gradual transition into a chaotic behaviour in three ways: waveform, X-Y display and frequency spectrum. In both RLD circuits we have confirmed theoretical hypothesis and seen when would we in such systems observe bifurcations, chaotic behaviour and island of order. One of more important features of chaotic systems is universality which can be manifested in Feigenbaum constant. We have calculated the Feigenbaum constant for both RLD circuits; for RLD circuit with inductor of inductance 2/3 mH we have calculated the value of Feigenbaum constant of $\delta_1 = 3.61$ and for RLD circuit with inductor of inductance 2 mH we got $\delta_2 = 3.79$. Both values differ from theoretical value of Feigenbaum constant $\delta = 4.669$, but this value is calculated when we observe successive bifurcations of higher order. In order to be more precise in measurement of Feigenbaum constant, we need different experimental setup that would be able to identify bifurcations of higher order.

Keywords: non-linear systems, bifurcation diagram, period-doubling, Feigenbaum constant.

Sadržaj

1 Uvod **1**

1.1 Put prema kaosu 1

1.2 Ukratko o kaosu 2

1.3 Univerzalnost kaosa 2

1.3.1 Feigenbaumova konstanta 3

1.4 Kako prepoznati kaotičan sustav? 4

1.4.1 Vremenski prikaz 5

1.4.2 Fazni portreti 6

1.4.3 Fourierov spektar 6

2 Metodologija rada **8**

2.1 Eksperimentalni postav korišten za potrebe izrade ovog diplomskog rada 8

2.2 Zašto dolazi do kaosa u RLD krugu? 9

2.3 Postupak dobivanja rezultata 11

3 Rezultati i diskusija **13**

3.1 RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. 13

3.2 RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2 mH 28

4 Zaključak **40**

5 Metodički dio **41**

5.1 Uvod 41

5.2 Nastavna priprema iz fizike: LC titrajni krug 42

5.2.1 Uvodni dio sata 43

5.2.2 Središnji dio 45

5.2.3 Završni dio 49

Literatura **51**

1 Uvod

1.1 Put prema kaosu

Ako bismo htjeli govoriti o kaotičnim oscilacijama, prvo bismo trebali definirati u kakvim se sustavima oni pojavljuju. Matematičari, fizičari (i znanstvenici općenito) uvijek su pokušavali matematički linearizirati znanstvene probleme jer su takve probleme mogli (više ili manje) lagano riješiti. Međutim, problem je u tome što je većina zakona u prirodi nelinearna, tj. jedva možemo pronaći linearni proces u prirodi [1]. Zato su u fizici od posebnog značaja nelinearni dinamični sustavi (dinamični sustavi su oni sustavi u kojima se sustav različito ponaša u različitim vremenima).

Kako bismo mogli definirati nelinearne sustave, moramo prvo definirati što su to linearni sustavi. Kao primjer možemo prvo uzeti dvodimenzionalni sustav koji lako poslije generaliziramo na *n* dimenzija; dvodimenzionalni linearni sustav je sustav oblika

$$\dot{x} = ax + by \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = cx + dy, \tag{1.2}$$

gdje su $a,\ b,\ c,\ d$ parametri. Ovakav sustav je linearan u pogledu da ako su x_1 i x_2 rješenja sustava (1.1) i (1.2), tada je i linearna kombinacija $c_1x_1 + c_2x_2$ također rješenje sustava (1.1) i (1.2) [9]. Ovaj rezultat se naziva princip superpozicije i može se generalizirati na n-dimenzionalni sustav. Vodeći se ovom logikom, možemo zaključiti da su nelinearni sustavi oni sustavi koji se ne podvrgavaju principu superpozicije. Drugim riječima, nelinearni sustav je sustav čija je vremenska evolucija nelinearna, tj. varijable koje opisuju svojstva sustava (položaj, brzina, akceleracija,...) pojavljuju se u nelinearnom obliku [1]. Posljedica principa superpozicije jest da ako se vanjski poticaj (stimulus), koji djeluje na linearni sustav, poveća za faktor 2, tada će se i odgovor sustava povećati za faktor 2. Ako gledamo isti slučaj za nelinearni sustav, odgovor nelinearnog sustava će biti veći ili manji od 2.

1.2 Ukratko o kaosu

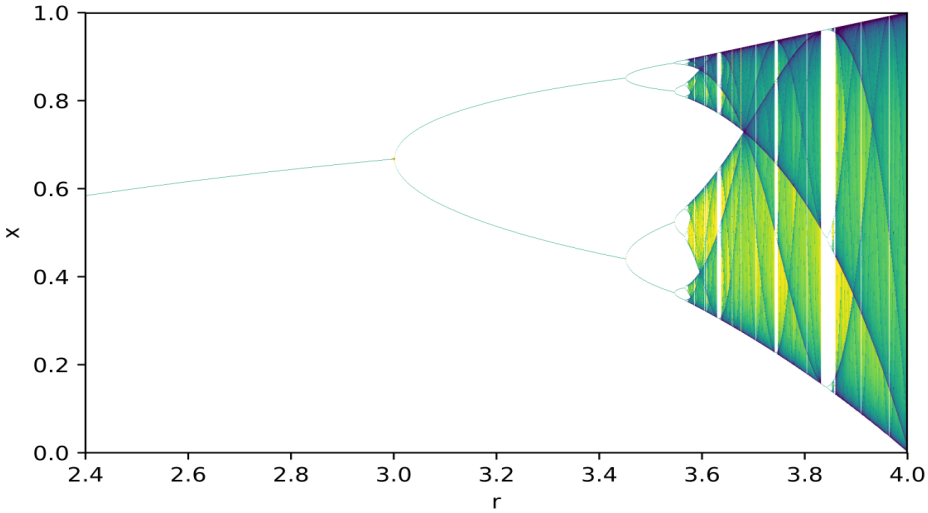
Iako nema univerzalno prihvaćene definicije kaosa, većina znanstvenika bi se dogovorila oko sljedeće definicije; kaotični sustav je onaj koji evoluira deterministički, pokazuje dugoročno aperiodično ponašanje i veliku osjetljivost na početne uvjete [2,9]. U ovom kontekstu pojam deterministički označava da sustav nema nasumičnih ili "bučnih" parametara ili vanjskih sila (interakcija). Nepravilno (nasumično) ponašanje proizlazi iz nelinearnosti sustava, a ne zbog "bučnih" vanjskih sila (tj. zbog kaotičnih i aperiodičnih vanjskih pobuda). Pojam "dugoročno aperiodično ponašanje" podrazumijeva da postoje putanje koje se ne "smiruju" u nekim fiksnim točkama ili periodičkim (ili kvaziperiodičkim) orbitama kada $t \to \infty$. I na kraju, osjetljivost na početne uvjete podrazumijeva da se susjedne putanje odvajaju vrlo brzo, tj. za male promjene početnih uvjeta, putanje sustava se mijenjanju drastično.

U svakodnevnom rječniku se riječ kaos poistovjećuje s nestabilnošću. Na primjer, sustav $\dot{x} = x$ (čije je rješenje $x(t) = ce^t$, gdje je c konstanta) deterministički je sustav i pokazuje eksponencijalno odvajanje susjednih putanja. Međutim, ovaj sustav ne možemo nazvati kaotičnim jer sve putanje teže u beskonačnost, ali se nikada ne vraćaju. Drugim riječima, beskonačnost u ovom slučaju igra ulogu privlačne fiksne točke (točke kojoj teže sve putanje sustava). Kaotični sustav bi trebao biti aperiodičan i kao takav bi trebao isključivati fiksne točke i periodičko ponašanje sustava [9].

Premda su svi kaotični sustavni nelinearni, sama nelinearnost nije dovoljna da sustav bude kaotičan; ključnu ulogu u tome imaju dugoročno aperiodično ponašanje i osjetljivost na početne uvjete, poznatija kao "efekt leptira" ("butterfly effect") [2,10].

1.3 Univerzalnost kaosa

Jedan lijep način kako možemo prikazati ponašanje nekog dinamičkog sustava je preko bifurkacijskog dijagrama (bifurkacija je pojava kada se dogodi kvalitativna promjena u dinamičkom sustavu). U bifurkacijskom dijagramu promatramo povezanost vrijednosti parametra neke vanjske pobude i odgovora sustava na tu pobudu. Primjer nekog takvog bifurkacijskog dijagrama dan je na slici 1.1. Ono što možemo primijetiti na tom dijagramu jest da sustav u početku počne kao periodičan, tj. za



Slika 1.1: Bifurkacijski dijagram. Preuzeto iz [1].

male vrijednosti parametra r, imamo točno određenu vrijednost odgovora sustava x. Svako "grananje" na dva dijela označava bifurkaciju gdje možemo vidjeti da za neku vrijednost ulaznog parametra r, imamo dvije vrijednosti odgovora sustava x. Daljnjim povećavanjem vrijednosti ulaznog parametra r možemo opaziti daljnja grananja (bifurkacije) gdje za neku vrijednost ulaznog parametra r primjećujemo četiri vrijednosti odgovora sustava x, pa osam,... Vidimo da se te bifurkacije sve više ponavljaju dok se na kraju te grane ne mogu prepoznati (razlučiti). To označava da je sustav došao u kaotično stanje. [1, 7, 9]

Ono što je posebno zanimljivo jest da daljnjim povećavanjem parametra r, sustav izlazi iz kaotičnog režima; ta područja se nazivaju otocima reda u kaosu. U tom području za neku vrijednost ulaznog parametra r, odziv sustava oscilira između tri vrijednosti pa daljnjim povećanjem između šest, pa devet,... Međutim, kako možemo vidjeti na slici 1.1, sustav se već za vrlo male promjene parametra r vraća u kaotično stanje. [9]

1.3.1 Feigenbaumova konstanta

Kao što smo vidjeli do sada, kaos u dinamičkim sustavima ne dolazi bez najave i sustav postepeno ulazi u kaotični režim. Svaki kaotični sustav trebao je proći taj put i odatle vidimo neku univerzalnost kaosa, ali u proučavanju kaotičnih sustava možemo

naići na još veću univerzalnost.

Krajem 20. stoljeća američki fizičar Mitchell Feigenbaum počeo je proučavati dvoperiodičnost kaotičnih sustava. Kada pogledamo bifurkacijski dijagram 1.1, možemo vidjeti da se udaljenosti između uzastopnih bifurkacija smanjuju (uzduž horizontalne osi). To isto je primijetio i Feigenbaum te zaključio da je omjer razlika parametara uzastopnih bifurkacija jednak uzduž cijelog bifurkacijskog dijagrama, tj. ako bi to zapisali matematički imamo

$$\delta_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}, \tag{1.3}$$

gdje je λ_n vrijednost parametra u kojoj se pojavljuje n-ta bifurkacija. Nadalje, Feigenbaum je pokazao da omjer 1.3 konvergira prema određenoj vrijednost kada se n približava beskonačnosti

$$\delta \equiv \lim_{n\to\infty} \delta_n = 4.669201\ldots \tag{1.4}$$

Konstantu 1.4 nazivamo Feigenbaumova konstanta. Ono što posebno ističe ovu konstantu jest što je ona univerzalna bez obzira na to kakav kaotični sustav promatramo. [1, 9]

1.4 Kako prepoznati kaotičan sustav?

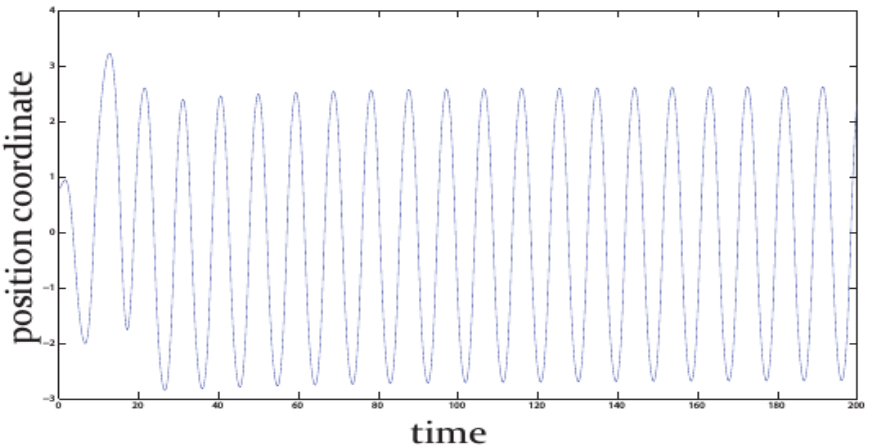
Kao što smo već napomenuli, u svakodnevno rječniku kaotično ponašanje se poistovjećuje s nestabilnošću. Zato bi moglo izgledati neobično da kaotično ponašanje nije baš tako "kaotično",tj. da se ne može predvidjeti. Naime, kaotično ponašanje ne dolazi bez najave. Obično sve počinje odvostručenjem perioda (dvoperiodičnost[1]). Sustav se prebacuje u novo ponašanje s periodom 2 puta većim nego što je to bilo originalno (u trenutku prije). Kako povećavamo parametar u sustavu, tako se povećava i odziv sustava. Ali, za neku malu promjenu ulaznog parametra dogodi se bifurkacija i sustav sada ima odziv čiji je period sada 2 puta veći nego prije. Ako bi taj parametar još više povećavali, posvjedočili bi daljnjim bifurkacijama u kojima bi odziv sustava imao period 4 puta veći, pa 8 puta veći, i tako dalje, sve dok sustav ne bi ušao u kaotično ponašanje [1, 9].

[1] period-doubling [16]

1.4.1 Vremenski prikaz

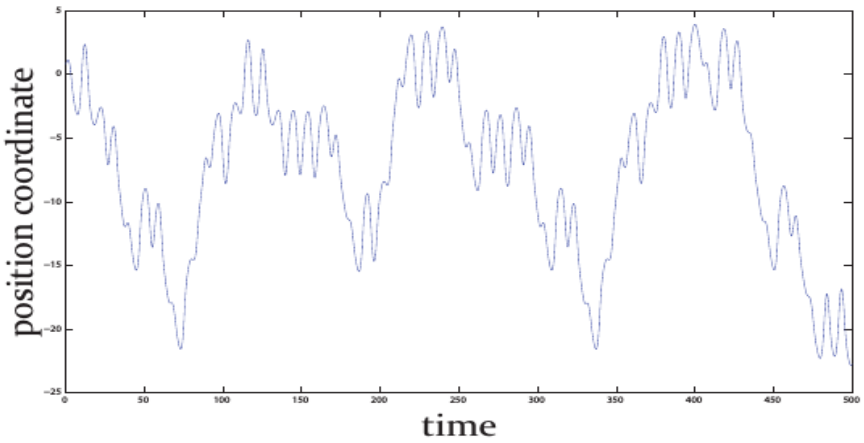
Prvi i najosnovniji alat za identifikaciju kaotičnog sustava jest vremenski prikaz (prikaz kada gledamo kako se mijenja neka fizička veličina, u ovom slučaju napon u vremenu). Iz bifurkacijskog dijagrama, na slici 1.1, možemo vidjeti da ćemo, pri pojavi prve bifurkacije, imati situaciju da pri jednoj vrijednosti ulaznog parametra, odgovor sustava oscilira između dvije vrijednosti. Pri idućoj bifurkaciji sustav će oscilirati između četiri vrijednosti,... [7, 8]

Na slikama 1.2 i 1.3 možemo vidjeti primjer nekog periodičnog sustava i primjer kaotičnog sustava u kojem promatramo ovisnost položaja o vremenu. Prije smo naveli da je značajka kaotičnog sustava aperiodičnost pa onda možemo promatrati je li neki sustav kaotičan poučavajući njegov vremenski prikaz. U ovom slučaju možemo zaključiti kako je na slici 1.2 bio prikazan periodičan sustav, a na slici 1.3 dan je primjer kaotičnog sustava.



Slika 1.2: Ovisnost položaja o vremenu nekog periodičkog sustava. Preuzeto iz [1].

Problem u ovakvom proučavanju je taj što aperiodičnost odziva sustava ne podrazumijeva uvijek kaos. Mnogi signali mogu biti aperiodični zbog statističke buke ili zbog kompleksnosti sustava, ali to ne znači da je svaki aperiodični sustav kaotičan, već treba imati i ostale, već navedene značajke u poglavlju 1.2. Stoga se vremenski prikaz treba prikazati za različite početne uvjete i tako pratiti razvoj i pojavu kaotičnog ponašanja sustava [1].



Slika 1.3: Ovisnost položaja o vremenu nekog kaotičnog sustava. Preuzeto iz [1].

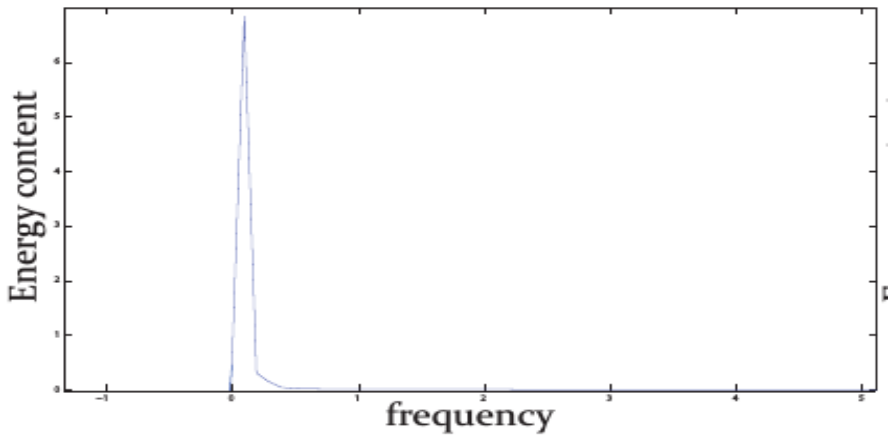
1.4.2 Fazni portreti

Kako smo vidjeli, sami vremenski prikaz ima svoje nedostatke kada želimo identificirati kaos. Drugi način preko kojeg možemo jednoznačno odrediti kaotično ponašanje jest fazni portret. Ono što se u njima promatra jest kakva je ovisnost izlaznog signala u odnosu na ulazni signal. Ako se u takvom prikazu prikazuje jedna petlja, to znači da je sustav periodičan. Pri pojavi prve bifurkacije fazni portret će se promijeniti tako da će se sada pojaviti dvije petlje (dvoperiodičnost) pa pri sljedećoj četiri petlje,... [4, 6].

1.4.3 Fourierov spektar

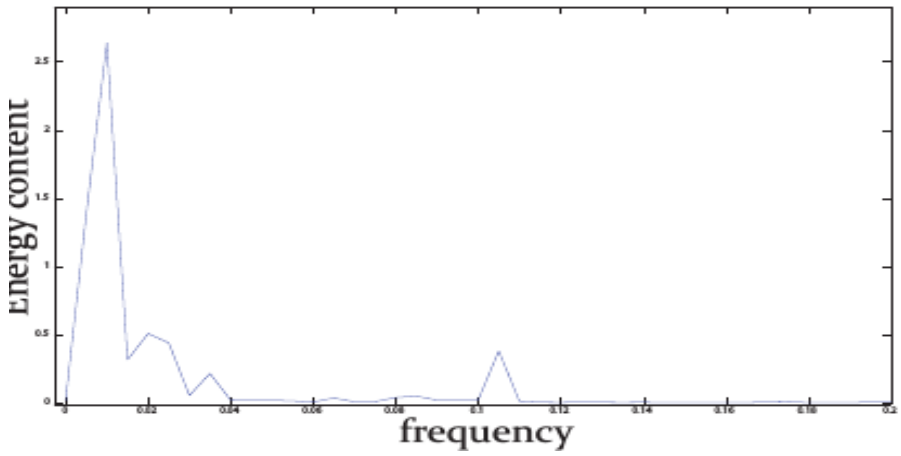
Prije smo naveli da će sustav pri pojavi prve bifurkacije oscilirati između dvije vrijednosti. No, period, između kojih se događaju te oscilacije, ne ostaje nepromijenjen, već tada sustav oscilira dva puta većim periodom, što onda nazivamo dvoperiodičnost. Tako imamo još jedan način kako možemo prepoznati kaotično ponašanje: frekventni spektar nekog signala. Kada bismo proučavali frekventni spektar običnog periodičnog signala (signala koji cijelo vrijeme titra jednim periodom), ono što bismo očekivali jest frekventni spektar poput na slici 1.4; na toj slici vidimo da je u frekventnom spektru zastupljena samo jedna frekvencija [2, 6].

Nakon prve bifurkacije, kada sustav oscilira između dvije vrijednosti, očekujemo da će sustav oscilirati dva puta većim periodom. To znači da bi na frekvencijskom spektru trebali uočiti liniju čija bi osnovna frekvencija bila dva puta manja od frekvencije periodičnog sustava. Ali, kao što smo već spomenuli u poglavlju 1.4.1, svaki



Slika 1.4: Fourierov spektar nekog periodičnog sustava. Preuzeto iz [1].

aperiodični sustav (pa tako i kaotični), imati će kontinuum frekvencija u frekventnom spektru (slika 1.5). Razlog tome je naravno aperiodičnost kaotičnog sustava.



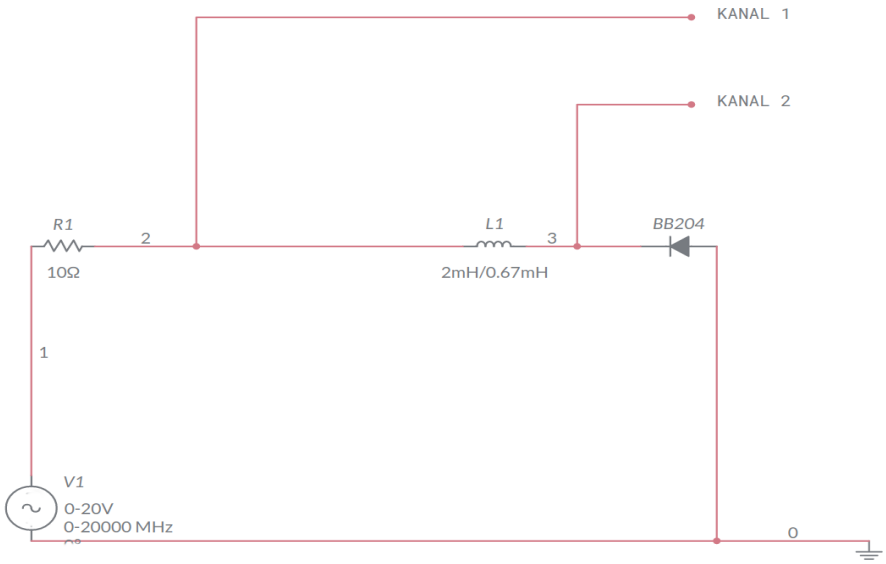
Slika 1.5: Fourierov spektar nekog kaotičnog sustava. Preuzeto iz [1].

Iako se iz ove rasprave može vidjeti zašto bi identificiranje kaotičnog sustava preko proučavanja Fourierovog spektra bio dobar alat, moramo pripaziti. Naime, Fourierov spektar potpuno nasumičnih signala je opet kontinuum frekvencija, ali naravno, to ne znači da imamo kaotični sustav. Kako bismo pravilno koristili ovaj alat za identifikaciju kaosa, trebamo pratiti sustav kako prolazi kroz različite bifurkacije i tako identificirati kaotično sustav. [1, 4]

2 Metodologija rada

2.1 Eksperimentalni postav korišten za potrebe izrade ovog diplomskog rada

Teorija kaosa ima vrlo raširenu upotrebu u znanosti i tehnologiji, počevši od meteorologije, fizike, biologije, elektronike, komunikacije, itd. [9]. Međutim, kaotični sustav možemo promatrati i na vrlo jednostavnom primjeru: na RLD[2] krugu. Na slici 2.1 dan je shematski prikaz strujnog kruga korištenog u ovom diplomskom radu. Kao što možemo vidjeti, serijski je spojen izvor sinusoidalnog signala Wavetek Model 29, otpornik otpora $10\,\Omega$, zavojnica induktiviteta 2 mH ili 2/3 mH (induktivitet 2/3 mH dobiven je tako da su paralelno spojene zavojnice induktivitet 2 mH i 1 mH) i dioda BB204. Za proučavanje signala na diodi i na izvoru korišten je dvokanalni osciloskop Tektronix MDO3054.



Slika 2.1: Shematski prikaz RLD strujnog kruga korištenog za potrebe izrade ovog diplomskog rada gdje je serijski spojen izvor sinusoidalnog signala, otpornik otpora $10\,\Omega$, zavojnica induktiviteta 2 mH, tj. 2/3 mH i dioda BB204.

Kako imamo izvor izmjeničnog napona u našem eksperimentalnom postavu, znamo da će se naš sklop, zbog prisustva diode, ponašati na drugačiji način u različitim smjerovima struje. Imamo dva slučaja: kada je dioda spojena tako da je propusno polarizirana i kada je nepropusno polarizirana. Kada je dioda propusno polarizirana, to znači da dioda neće pokazivati svoja ispravljačka svojstva i struja će moći

[2] eng. resistor-inductor-diode

teći kroz nju (tu struju nazivamo propusna struja). A kada je dioda spojena tako da bude nepropusno polarizirana, kroz nju teče vrlo mala struja (oko 50 nA za diodu BB204 [15]) koju nazivamo reverzna struja.

Zato što se dioda (kada je nepropusno polarizirana) može aproksimirati kondenzatorom, nije svejedno koju frekvenciju vanjskog signala (koji daje generator signala) odabiremo. Radovi koji su već rađeni na sličnu temu ([4, 5, 7]) su za proučavanje kaosa u RLD strujnom krugu našli (a zatim i koristili) rezonantnu frekvenciju kruga. Zato smo za oba slučaja (kada smo spojili zavojnicu induktiviteta 2 mH i 2/3 mH) tražili rezonantnu frekvenciju kruga te kaos proučavali na tim frekvencijama. Rezonantna frekvencija je nađena tako što smo gledali odziv sustava (tj. napon na diodi) kako smo mijenjali frekvenciju pobude. Kada smo vidjeli da je odziv sustava maksimalan, tada smo zaključili da smo pronašli rezonantnu frekvenciju kruga. Kada je u strujnom krugu bila spojena zavojnica induktiviteta 2 mH, pronađeno je da je rezonantna frekvencija tog kruga na 281.5 kHz, a rezonantna frekvencija kruga kada je spojena zavojnica induktiviteta 2/3 mH je 357 kHz.

2.2 Zašto dolazi do kaosa u RLD krugu?

Jedan od prvih radova koji su se bavili kaotičnim oscilacijama u RLD strujnom krugu bio je Linsayev rad [5]. U tom radu je dvoperiodičnost i kaotičnost sustava pripisana nelinearnosti koju uvodi naponski ovisan kapacitet. Međutim, istraživanja Rollinsa i Hunta [3] su pokazala da se kaotičnost RLD strujnog kruga objašnjava preko vremena oporavka diode.

Vrijeme oporavka diode τ_r je vrijeme potrebno da dioda potpuno prestane voditi struju kada kroz nju teče struja u nepropusnom smjeru. Iako τ_r ovisi o različitim veličinama kao što su struja u propusnom smjeru i iznos napona u nepropusnom smjeru, Rollins i Hunt [3] predložili su sljedeći izraz

$$\tau_r = \tau_m \left[1 - e^{-\frac{|I_m|}{I_c}} \right], \tag{2.1}$$

gdje je $|I_m|$ maksimalni iznos prethodne struje u propusnom smjeru, a τ_m i I_c su konstante karakteristične za diodu.

Način rada nekog općenitog RLD kruga, koji je tjeran ulaznim naponom oblika $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, možemo promatrati u dva slučaja. Jedan slučaj je kada struja teče

u takvom smjeru tako da je dioda propusno polarizirana, a drugi slučaj je kada je struja kroz krug u takvom smjeru da je dioda nepropusno polarizirana.

Struja kroz krug I i odgovor diode V_d, u slučaju kada je dioda propusno polarizirana, u RLD je krugu je dano s izrazima [3]

$$I(t;A) = \left(\frac{V_0}{Z_a}\right)\cos\left(\omega t - \theta_a\right) + Ae^{-Rt/L} + \frac{V_f}{R} \tag{2.2}$$

$$V_d(t) = -V_f, \tag{2.3}$$

gdje je V_f pad napona na diodi kada je ona propusno polarizirana, $Z_a^2 = R^2 + \omega^2 L^2$, $\omega_a = \arctan(\omega L/R)$ i A konstanta određena rubnim uvjetima.

Općenito rješenje RLD kruga u slučaju kada dioda ne provodi struju je dana s izrazima [3]

$$I(t;B,\Phi) = \frac{V_0}{Z_b}\cos\left(\omega t - \theta_b\right) + Be^{-2Rt/L}\cos\left(\omega_b t + \Phi\right) \tag{2.4}$$

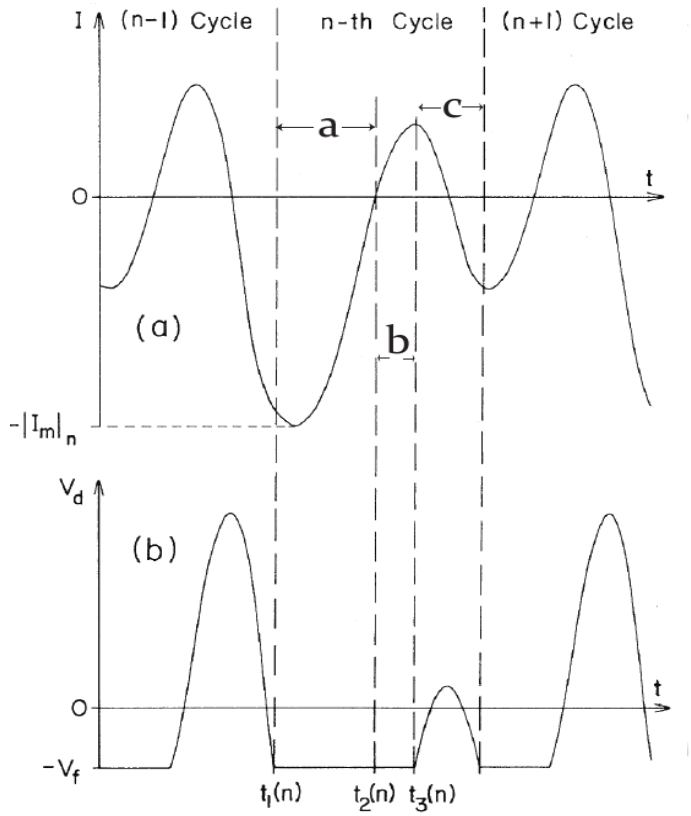
$$V_d(t;B,\Phi) = V_0\cos\omega t - I(t;B,\Phi)R - L\dot{I}(t;B,\Phi), \tag{2.5}$$

gdje je $Z_b^2 = R^2 + (L/\omega)^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2$, $\omega_b = \arctan\left[L(\omega^2 - \omega_0^2)/(R\omega)\right]$, $\omega^2 = 1/(LC)$, $\dot{I} = dI/dt$, $\omega_b^2 = \omega_0^2 - (R/(2L))^2$ te B i Φ konstante određene rubnim uvjetima.

Detaljan prikaz zašto dolazi do dvoperiodičnosti u RLD krugu je prikazan na slici 2.2. Važno je napomenti koje su karakteristike diode koja se promatra. Dioda neće voditi struju sve dok napon na diodi V_d ne padne ispod $V_d = -V_f$ i vrijednost tog napona na diodi ostaje $-V_f$ toliko dugo koliko dioda provodi. Drugim riječima, ako gledamo sliku 2.2 dioda će početi voditi u trenutku $t_1(n)$. Ako je maksimalna struja kroz krug $|I_m|$ dovoljno velika u vodljivom ciklusu (interval a na slici 2.2), dioda se neće odmah isključiti u trenutku $t_2(n)$. Dioda će se isključiti s određenim zakašnjenjem (interval b na slici 2.2) zbog konačnog vremena oporavka dioda te će zbog toga dozvoliti struji da teče iako je nepropusno polarizirana. Dioda će se onda isključiti u trenutku $t_3(n) = t_2(n) + \tau_r(n)$. Ako struja u trenutku $t_3(n)$ prolazi kroz diodu u takvom smjeru da je ona nepropusno polarizirana, dioda prestaje voditi struju u trenutku $t_3(n)$ i ona se počinje "ponašati" kao kondenzator. U tom slučaju, rubni uvjeti u trenutku $t_3(n)$ određuju konstante B_n i Φ_n. Tada su struja i pad napona na diodi određeni jednadžbama 2.4 i 2.5 sve dok pad napona na diodi ne postigne vrijednost od $-V_f$, gdje stižemo do trenutka $t_1(n+1)$ i ciklus ponovno počinje. Možemo

primijetiti da su za ovaj proces bila potrebna dva ciklusa vanjskog signala te ovaj proces onda prepoznajemo kao bifurkaciju.

Ukoliko struja u trenutku $t_3(n)$ prolazi diodu u takvom smjeru da je ona propusno polarizirana, tada idući ciklus s $t_1(n+1) = t_3(n)$.



Slika 2.2: Gornji graf prikazuje ovisnost struje kroz krug o vremenu, a donji graf pokazuje ovisnost napona na diodi o vremenu. Negativni iznos struje kroz krug označava onaj smjer u kojem je dioda spojena tako da je propusno polarizirana, a pozitivan smjer označava smjer u kojem je dioda nepropusno polarizirana. Dioda je provodi struju kada je $V_d = -V_f$. Preuzeto iz [1].

Kada bi maksimalni iznos ulaznog signala još više povećali, onda se pojavljuju bifurkacije s četiri puta većim periodom te bi slično dobili sve više bifurkacije [3].

2.3 Postupak dobivanja rezultata

Postavili smo RLD serijski krug sačinjen od otpornika otpora $10\,\Omega$, zavojnice 2 mH i 2/3 mH. Drugim riječima, proučavali smo kaotična ponašanja na dva različita RLD kruga.

U oba kruga smo prvo tražili rezonantnu frekvenciju kruga. Napon izvora sinusoidalnog signala postavili smo na vrlo male vrijednosti tako da nemamo nikakvu

deformaciju signala na diodi. Zatim smo mijenjali frekvenciju kruga i proučavali kako se ponaša odziv sustava (napon na diodi). Znamo da smo pogodili rezonantnu frekvenciju sustava kada je odziv sustava bio maksimalan (tada je najviše energije sustav primio).

Kada smo našli rezonantnu frekvenciju, tada smo izvor sinusoidalnog signala držali cijelo vrijeme na toj frekvenciji i na njoj proučavali kaotično ponašanje sustava. Počeli smo s malim naponima vanjskog izvora signala, a zatim smo polako povećavali taj napon (izvor napona korišten za potrebe izrade ovog diplomskog rada može mijenjati amplitudu napona za vrijednosti od 0.01 V) i gledali kada će se pojaviti bifurkacije sustava.

Kaotičnost sustava smo proučavali na tri načina. Prvi način je vremenski prikaz sustava. Proučavali smo istodobno signal vanjskog izvora i signal na diodi; kada je odziv sustava (napon na diodi) počeo oscilirati između dvije vrijednosti, znali smo da smo opazili prvu bifurkaciju. Slično smo onda mogli identificirati i ostale bifurkacije.

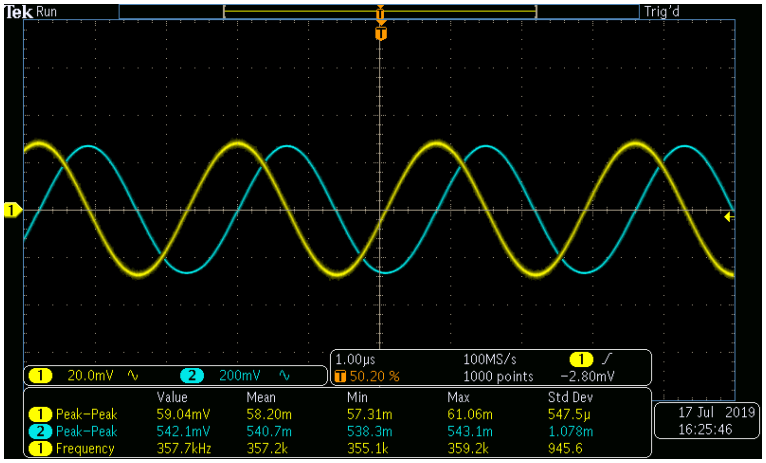
Drugi način je fazni portret ovog sustava. Fazni portret možemo promatrati na našem osciloskopu tako da ga postavimo na X-Y način rada. U tom slučaju na x osi gledamo vanjski napon, a na y osi odziv sustava. Kada vidimo lijepi krug, znači da se sustav nalazi u rezonanciji, a bifurkaciju prepoznajemo tako što vidimo dvije petlje na X-Y prikazu.

Zadnji način na koji smo proučavali kaotičnost našeg sustava je Fourierov spektar. Naime, naš osciloskop (Tektronix MDO3054) imao je mogućnost izrade frekvencijskog spektra nekog signala tako da signal kojem želimo odrediti frekvencijski spektar, spojimo na RF ulaz na osciloskopu. Međutim, u početku nismo dobivali dobar spektar, tj. ono što smo mi dobili, bio je spektar u kojem su sve frekvencije bile pobuđene i dobivali smo neki šum. Taj problem je riješen tako što nismo signal diode (tj. kanal 2 prema slici 2.1) spojili direktno na ulaz za spektre na osciloskopu, nego smo prije toga taj signal spojili na diferencijalno pretpojačalo. Na to pretpojačalo smo spojili napon na diodi i ulazni napon. Time smo postigli promatranje razlike napona na diodi i ulaznog napona. Kako je izlaz bio prejak (amplituda signala), morali smo spojiti i djelitelj napona prije nego smo taj signal spojili na RF ulaz na osciloskopu. Tako smo smanjili signal i spriječili mogući kvar osciloskopa.

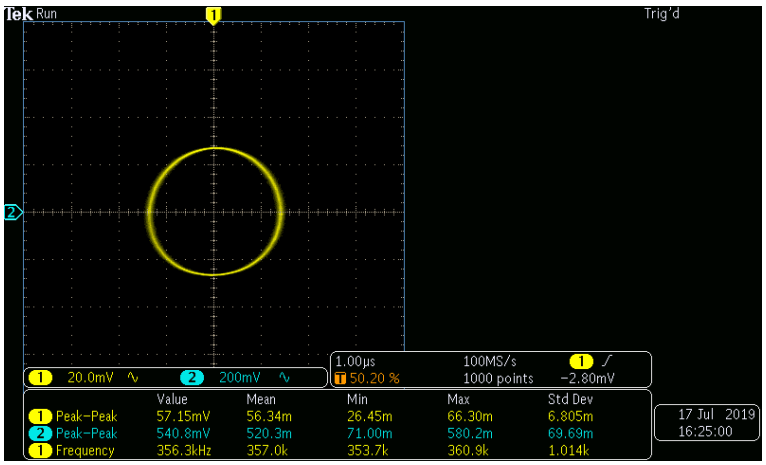
3 Rezultati i diskusija

3.1 RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

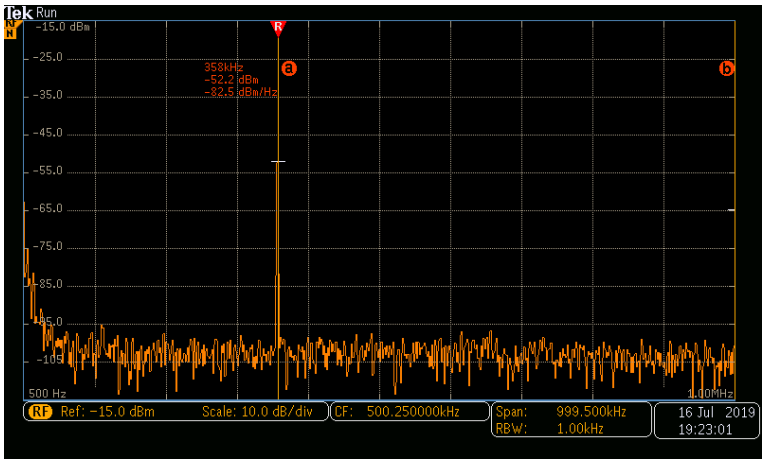
Prvo smo spojili sklop prema slici 2.1 sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Kao što smo već spomenuli u poglavlju 2.3, prvo ćemo odrediti rezonantnu frekvenciju ovog sklopa. Amplitudu sinusoidalnog signala smo stavili na 0.065 V (slike 3.1 i 3.2) te smo vidjeli da je rezonantna frekvencija ovog sklopa $f_{\text{rez, 2/3 mH}} = 357\,\text{kHz}$. Zato ćemo cijelo vrijeme držati frekvenciju ulaznog napona na frekvenciji 357 kHz. Ono što još možemo vidjeti iz slika 3.1 i 3.2, a pogotovo iz slike 3.3 (koja prikazuje frekvencijski spektar signala na diodi), da je u signalu zastupljena samo osnovna (rezonantna) frekvencija, tj. da imamo "lijep" periodičan signal. Naime, na vrlo malim naponima



Slika 3.1: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 0.065 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.2: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 0.065 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.3: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 0.065 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Jedina linija na frekvencijskom spektru se nalazi na frekvenciji 385 kHz.

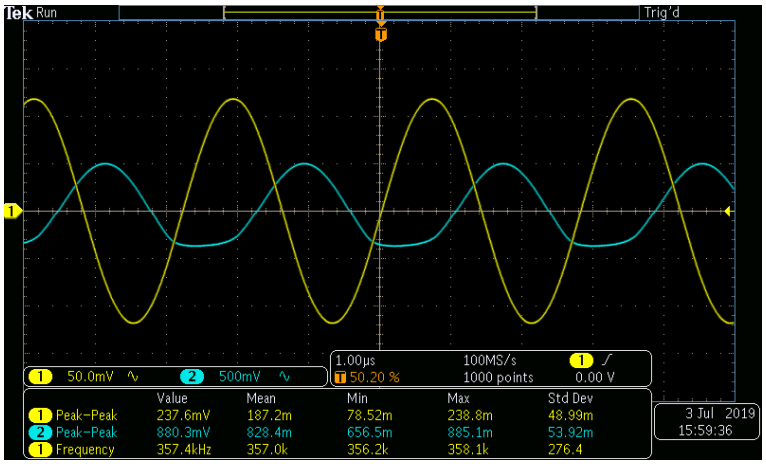
dioda ne pokazuje svoja ispravljačka svojstva i ona se ponaša kao čisti kondenzator [7]. Zbog tog razloga krug oscilira kao i izvor signala te vidimo samo jednu frekvenciju u frekvencijskom spektru (rezonantnu frekvenciju) na slici 3.3.

Možemo primijetiti na frekvencijskom spektru 3.3 kako osnovna frekvencija kruga koju naš osciloskop očitava (358 kHz) ne odgovara točno frekvenciji koju smo postavili na izvoru sinusoidalnog napona (357 kHz). Razlog ovoj maloj razlici u frekvencijama pripisujem činjenici da osciloskop, a ni izvor signala nisu savršeni uređaji. Naime, izvor signala proizvodi sinusoidalan signal frekvencije 357 kHz, ali taj signal nije savršen, tj. moguća su mala odstupanja od te frekvencije. Također, kada osciloskop analizira signal na diodi (kada radi frekvencijski spektar), on ne očitava točno jednu frekvenciju, nego tu imamo neka odstupanja. Drugim riječima, linija na frekvencijskom spektru nije delta funkcija, nego ima određenu debljinu i zbog tog razloga osciloskop na frekvencijskom spektru ne daje istu frekvenciju koju smo podesili na izvoru signala.

Također, isto tako možemo primijetiti da je na frekvencijskom spektru na slici 3.3 istaknuta samo jedna linija (358 kHz) te da na ostalim frekvencijama vidimo određeni šum (tzv. bijeli šum).. Kako u prvoj aproksimaciji naš RLD krug možemo aproksimirati RLC krugom, on služi kako svojevrsna antena i onda taj naš krug prima i ostale frekvencije iz okoline. Kako je njihova amplituda puno manja od naše jedine razlučive linije, zanemarujemo ih i pripisujemo bijelom šumu. Taj bijeli šum se mogao smanjiti da smo cijeli sklop izolirali od vanjskih utjecanja (signala) na način da smo oko njega stavili svojevrsni Faradayev kavez. Time ne bismo u potpunosti

otklonili taj šum, nego bi ga mogli samo smanjiti što za potrebe ovog diplomskog rada nije bilo potrebno uraditi. Također, na vrlo niskim frekvencijama primjećujemo da frekvencijski spektar daje signal velike amplitude. Ta pojava se naziva rozi šum (ili 1/f šum) i on se pojavljuje u sustavima s frekvencijskim spektrom takvim da je spektralna gustoća snage obrnuto proporcionalna frekvenciji signala (kao što je i naš sustav). Zato ćemo na frekvencijskim spektrima, u ovom diplomskom radu, primjećivati rozi šum koji je, nažalost, neizbježan. [11, 12]

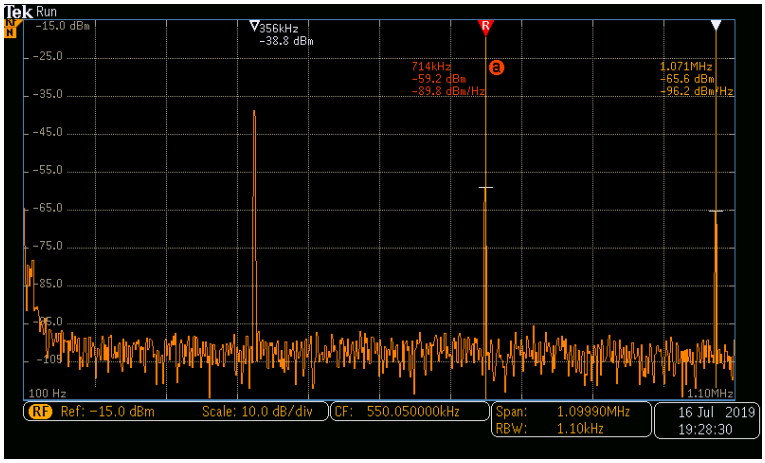
Kako smo povećavali ulazni napon, primijetili smo da napon na diodi više nije "lijepo" sinusoidalan, tj. periodičan, kao što možemo vidjeti na slici 3.4. No, ovo nije slučaj prve bifurkacije jer odziv sustava (napon na diodi) i dalje oscilira između dvije vrijednosti. U to se možemo dodatno uvjeriti ako pogledamo X-Y prikaz na slici 3.5. Kao što smo spomenuli u potpoglavlju 1.4.2, bifurkaciju ćemo prepoznati tako što ćemo u X-Y prikazu vidjeti dvije petlje, što ovdje nije slučaj. Do istog zaključka možemo doći ako gledamo frekvencijski spektar 3.6. Iako su se ovdje pojavile neke nove linije u spektru, one se nisu pojavile zbog pojave dvoperiodičnosti sustava. Naime, dvoperiodičnost sustava je pojava kada odziv sustava (napon na diodi) počinje oscilirati dva puta većim periodom od ulaznog napona. Kako znamo vezu između frekvencije f i perioda T $\left(f = \frac{1}{T}\right)$, zaključujemo da bi se pri pojavi bifurkacije trebala pojaviti nova linija u frekvencijskom spektru, čija je frekvencija dva puta manja od rezonantne frekvencije. Ono što se ovdje dogodilo jest da se dioda više ne ponaša



Slika 3.4: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 0.250 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

kao čisti kondenzator, već počinje pokazivati svoja ispravljačka svojstva. Kako smo povećavali napon ulaznog signala, tako je dioda dozvoljavala prolazak samo pola

Slika 3.5: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 0.250 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.6: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 0.250 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Linije, koje možemo razlučiti, se nalaze na frekvencijama 356 kHz, 714 kHz i 1071 kHz.

vala [7].

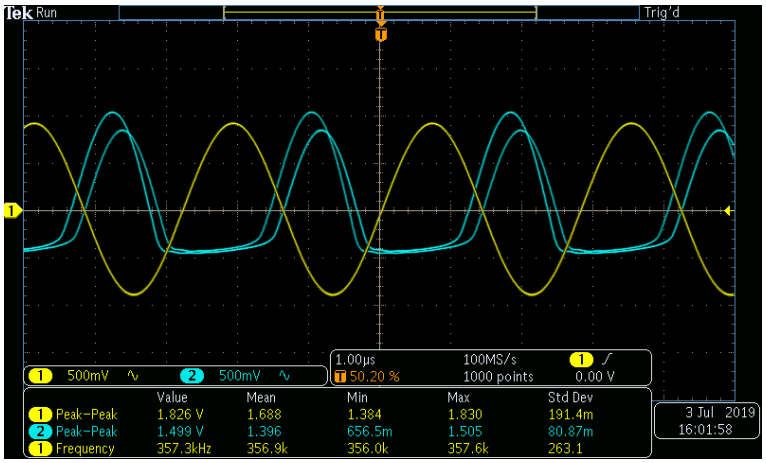
Naime, naš osciloskop ima mogućnost stvaranja frekvencijskog spektra pomoću procesa kojeg nazivamo "Fast Fourier Transform" (skraćeno FFT). Obično na osciloskopu gledamo samo ovisnost napona o vremenu, tj. gledamo signal u vremenskoj domeni. Međutim, kada želimo gledati kako naš signal izgleda u frekvencijskoj domeni, onda koristimo FFT [14]. Prema teoriji Fourierove analize, svaki signal možemo aproksimirati kao zbroj jednostavnih trigonometrijskih funkcija (sinusa i kosinusa). Matematički gledano, neku funkciju f(x) možemo razviti u Fourierov red kao

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{3.1}$$

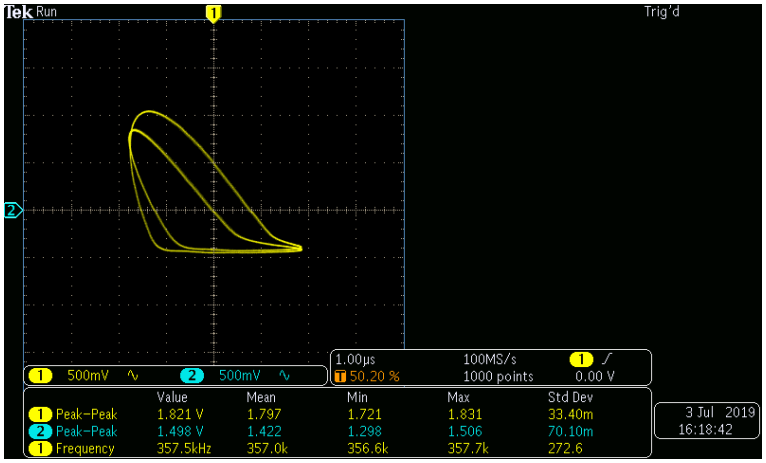
gdje su a_0, a_n i b_n Fourierovi koeficijenti, a n je prirodni broj [13]. Jednadžba 3.1 nam potvrđuje da svaku funkciju f(x) (ili u ovom slučaju signal na diodi) možemo razviti kao zbroj jednostavnih trigonometrijskih funkcija. Kada imamo jednostavan sinusoidalan napon na diodi, kao na slici 3.1, osciloskop može izraditi frekvencijski spektar ovog signala i dobit ćemo liniju na samo jednoj frekvenciji u frekvencijskom spektru.

Pri amplitudi ulaznog napona od 0.25 V smo vidjeli da dioda pokazuje svoja ispravljačka svojstva što onda uzrokuje deformaciju signala. Kada osciloskop radi FFT signala na diodi na slici 3.4, on tada taj signal razvija u Fourierov red te zbog toga dolaze do izražaja dodatni članovi u jednadžbi 3.1 s većim n. Kao što vidimo na slici 3.6, i dalje najveći doprinos daje linija na frekvenciji koja odgovara frekvenciji ulaznog signala, što nazivamo osnovnom frekvencijom. Ali sada možemo primijetiti linije koje se nalaze na linijama koje se nalaze na većim frekvencija od frekvencije ulaznog signala. Iz prirode jednadžbe 3.1 vidimo da bi te frekvencije trebale biti višekratnici osnovne frekvencije što je potvrđeno na frekvencijskom spektru 3.6. Te linije nazivamo višim harmonicima.

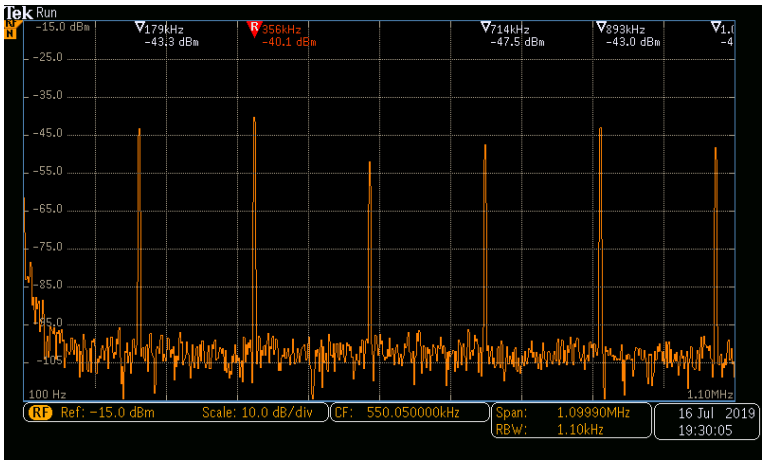
Daljnjim povećavanjem ulaznog napona, napon na diodi se sve više povećava i na frekvencijskom spektru smo dobivali još više linija koje su odgovarale višim harmonicima, ali se ništa kvalitativno nije mijenjalo u samom naponu na diodi. Međutim, kada je napon povećan s 1.83 V na 1.84 V, vidjeli smo prvu bifurkaciju (slike 3.7, 3.8 i 3.9). Na slici 3.7 možemo vidjeti da napon na diodi sad oscilira između dvije vrijednosti, baš kao što predviđeno u teorijskom dijelu. Bifurkaciju možemo opaziti i na slici 3.8 koja prikazuje X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona. Predvidjeli smo u potpoglavlju 1.4.2 kako bi se prilikom prve bifurkacije trebale pojaviti dvije petlje u X-Y prikazu, čemu možemo posvjedočiti na slici 3.8. Najzorniji dokaz da se u sustavu dogodila bifurkacija možemo vidjeti na slici 3.9. Kako smo već spomenuli, kada sustav doživi prvu bifurkaciju, on prelazi u režim u kojem oscilira dvostruko većim periodom od ulaznog signala (tj. dvostruko manjom frekvencijom). Zato, kada gledamo sliku 3.9, vidimo liniju na frekvenciju od 179 kHz što bi odgovaralo našoj pretpostavci da bi nakon bifurkacije sustav trebao oscilirati dva puta manjom frekvencijom (tj. da bi nova osnovna frekvencija sustava trebala biti dva puta manja od "stare"). Ostale linije (356 kHz, 536 kHz, 714 kHz, 893 kHz) odgovaraju višim harmonicima. Razlog zašto te vrijednosti ne odgovaraju točnim vrijednostima



Slika 3.7: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 1.84 sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



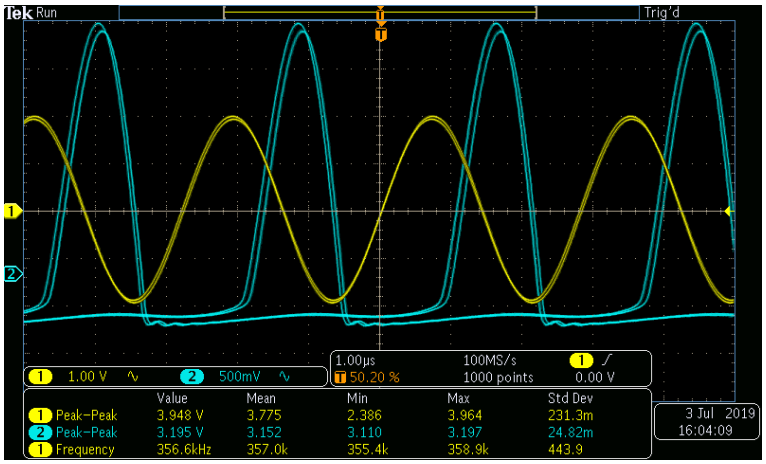
Slika 3.8: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 1.84 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



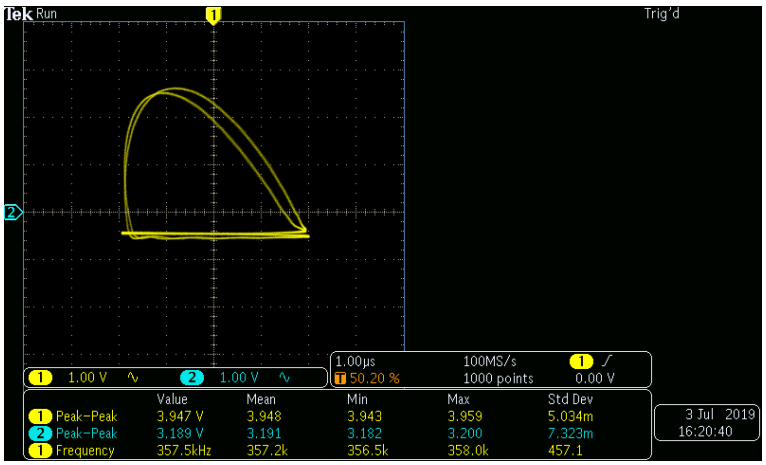
Slika 3.9: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 1.84 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, nalaze se na frekvencijama 179 kHz, 356 kHz, 536 kHz, 714 kHz, 893 kHz i 1070 kHz.

je opet u nesavršenosti mjernih instrumenata. I ovdje vidimo da linije nisu savršene delta funkcije pa je zato osciloskopu teže odrediti kojoj točno frekvenciji odgovara ta linija.

Iduću bifurkaciju je sustav doživio pri ulaznom naponu od 3.90 V što možemo vidjeti na slikama 3.10, 3.11 i 3.12. Na slici 3.10 opažamo da sustav oscilira između četiri vrijednosti napona. Također, na X-Y prikazu napona na diodi i ulaznog napona (slika 3.11) vidimo sada četiri petlje, kao što smo predvidjeli u teorijskom djelu, što je dokaz da je sustav doživio novu bifurkaciju. Isto tako vidimo na frekvencijskom

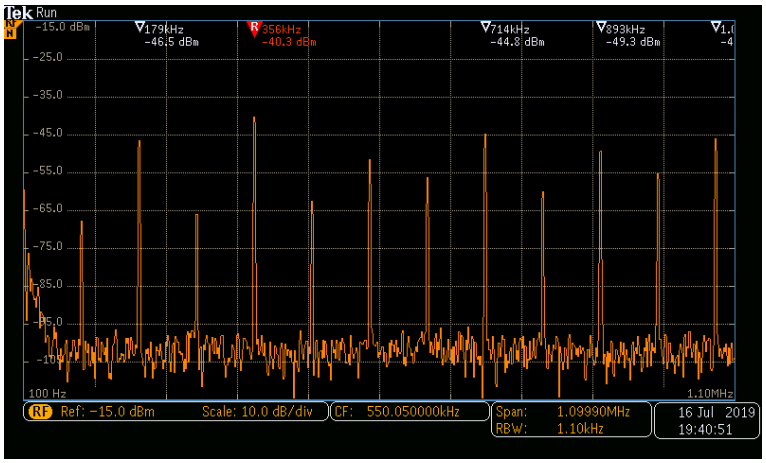


Slika 3.10: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 3.90 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.11: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 3.90 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

spektru, na slici 3.12, da se pojavila nova linija čija je frekvencija četiri puta manja od frekvencije ulaznog napona. I ovo je predviđeno u teorijskom uvodu kada smo rekli da će sustav, nakon svake sljedeće bifurkacije, oscilirati dva puta većim periodom. I

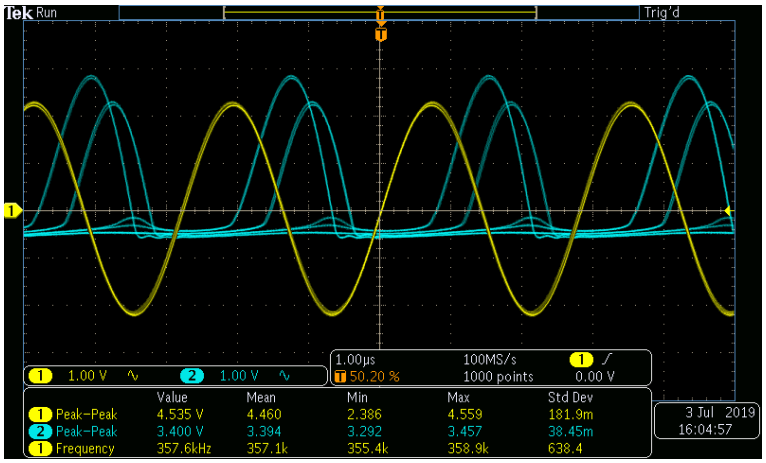


Slika 3.12: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 4.00 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 90 kHz, 179 kHz, 268 kHz, 356 kHz, 446 kHz, 536 kHz, 624 kHz, 704 kHz, 803 kHz, 893 kHz, 982 kHz.

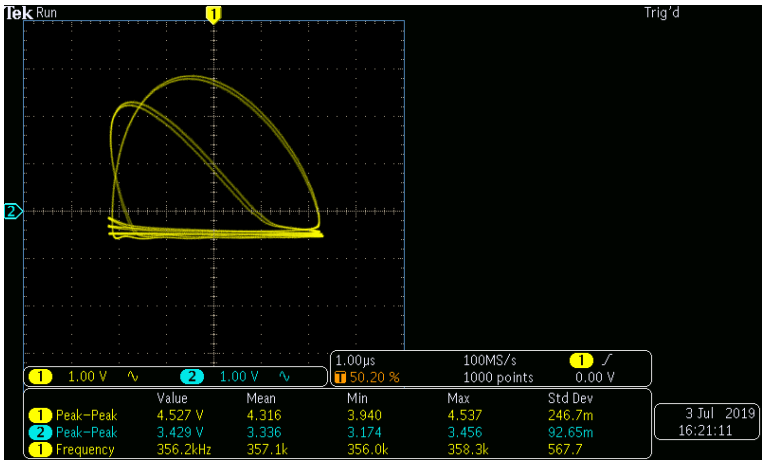
ovdje primjećujemo da frekvencije ostalih linija nisu točni višekratnici frekvencije 90 kHz što opet pridajemo nesavršenosti naših uređaja.

Razlog zašto su prikazi na slikama 3.10 i 3.11 promatrani na ulaznim naponima od 3.90 V, a frekvencijski spektar na ulaznom naponu od 4.00 V praktične je naravi. Naime, kada smo proučavali odziv sustava u vremenskom prikazu i na X-Y prikazu, bifurkacija pri prijelazu napona s 3.89 V na 3.90 V bila je vidljiva. Međutim, kada smo proučavali frekvencijski spektar, pojava nove linije nije bila toliko uočljiva i nije se mogla jednoznačno razlučiti od ostalog šuma. Amplituda te linije se povećala tek kada smo povećali ulazni napon i onda smo je mogli razlučiti od ostalih linija.

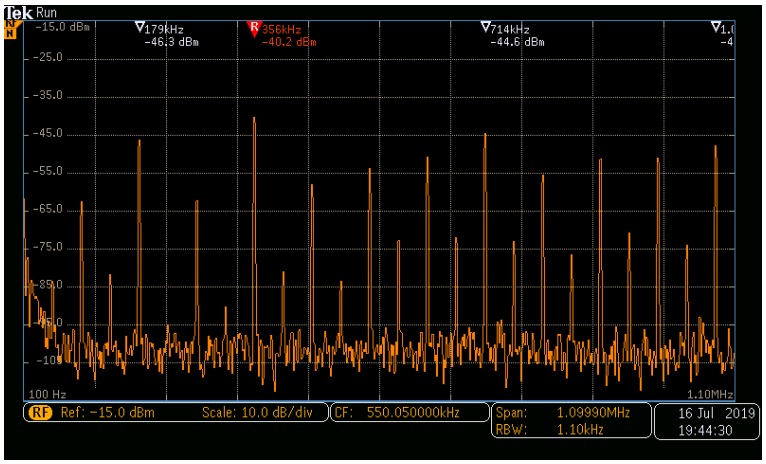
Pri ulaznom naponu od 4.47 V sustav je doživio novu bifurkaciju i sada oscilira s osnovnom frekvencijom od 45 kHz što je osam puta manja frekvencija od ulazne frekvencije, a to je predviđeno u teorijskom dijelu. Na slikama 3.13 i 3.14 prikazano je kako izgleda odziv sustava u vremenskom prikazu i X-Y prikazu kada je sustav doživio novu bifurkaciju. U vremenskom prikazu vidimo da sustav sada oscilira između osam vrijednosti (tj. opažamo osam amplituda), a na X-Y prikazu možemo vidjeti osam petlji što je dokaz da je sustav doživio novu bifurkaciju. Na slici 3.15 možemo vidjeti frekvencijski spektar signala na diodi pri ulaznom naponu od 4.64 V na kojem se pojavila nova linija na frekvenciji 45 kHz što je osam puta manja frekvencija od osnovne frekvencije. Razlog zašto smo promatrali frekvencijski spektar pri ovom naponu je isti kao i prije; pri naponu od 4.47 V pojavila se nova linija na frekventnom spektru, ali je ona bila slabo razlučiva jer je njezina amplituda bila vrlo bliska bijelom šumu.



Slika 3.13: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 4.47 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.14: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 4.47 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

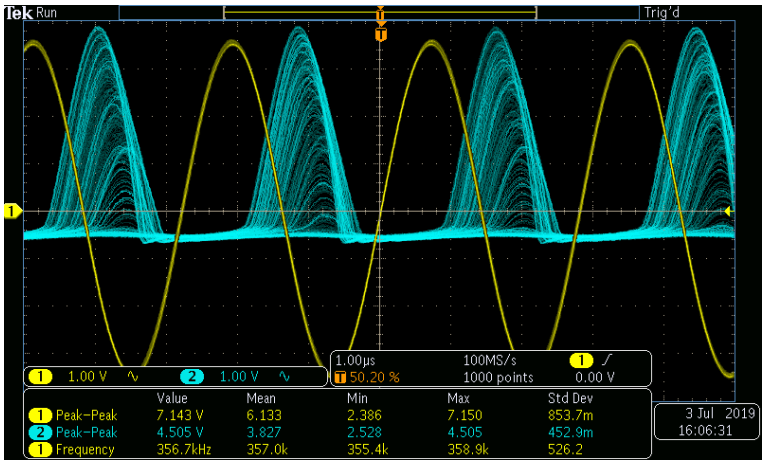


Slika 3.15: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 4.64 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 45 kHz, 90 kHz, 134 kHz, 179 kHz, 222 kHz, 268 kHz, 312 kHz, 357 kHz, 402 kHz, 446 kHz, 491 kHz, 536 kHz,...

Ta linija je bila dobro razlučiva tek kada smo povećali ulazni napon.

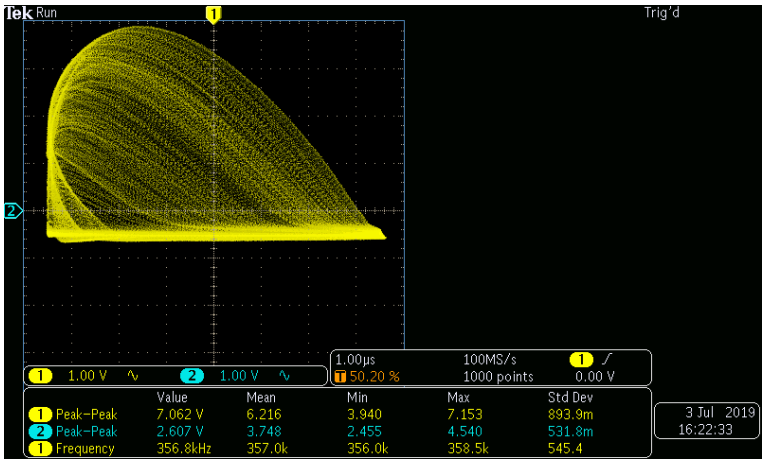
Kao što možemo primijetiti, razlika između ulaznih napona svake nove bifurkacije je sve manji ($1.84\ \mathrm{V} \rightarrow 3.90\ \mathrm{V} \rightarrow 4.47\ \mathrm{V}$). To je također predviđeno u teorijskom dijelu na bifurkacijskom dijagramu, na slici 1.1, na kojem je vidljivo da je razlika na x osi (u našem slučaju ulazni napon) sve manja i manja kako se javljaju više bifurkacije. Također, već smo spomenuli problem rozog šuma u kojem se pri niskim frekvencija u spektru pojavljuje šum velikih amplituda. Zbog ovih razloga se daljnjim povećavanjem ulaznog napona nije moglo razlučiti u kojem je režimu trenutno sustav (tj. oscilira li 16 puta većim periodom ili 32 puta većim periodom i tako dalje).

Na slikama 3.16, 3.17 i 3.18 prikazan je vremenski prikaz, X-Y prikaz i frekvencijski spektar pri ulaznom naponu od 7 V. Iz ovih slika primjećujemo da je sustav sada kaotičan. Na X-Y prikazu više ne možemo prebrojiti koliko ima petlji, a na frekvencijskom spektru su sada sve frekvencije pobuđene.

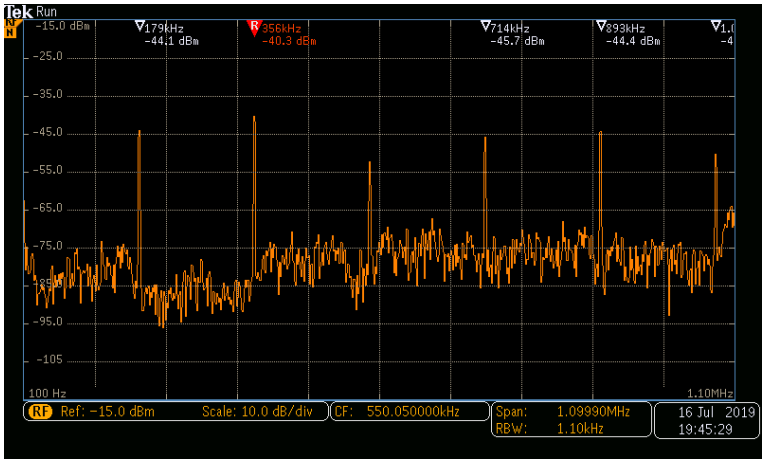


Slika 3.16: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 7.00 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

Pri ulaznom naponu od 8.03 V sustav je izašao iz kaotičnog režima rada. Kao što možemo vidjeti sa slika 3.19 i 3.20, više ne primjećujemo kaotično ponašanje te na X-Y prikazu vidimo tri petlje, a u vremenskom prikazu opažamo tri amplitude titranja napona na diodi. Nadalje, na slici 3.21 prikazan je frekvencijski spektar napona na diodi. Na njoj možemo primijetiti da je osnovna frekvencija ovog sustava 119 kHz što je tri puta manje od frekvencije ulaznog signala. Ovakvo ponašanje sustava predvidjeli smo u teorijskom djelu. Naime, u poglavlju 1.3 pretpostavili smo da će sustav,



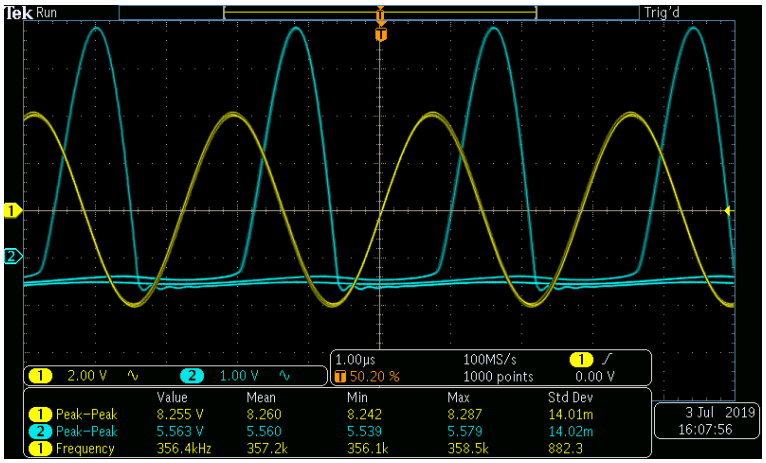
Slika 3.17: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 7.00 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.18: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 7.10 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

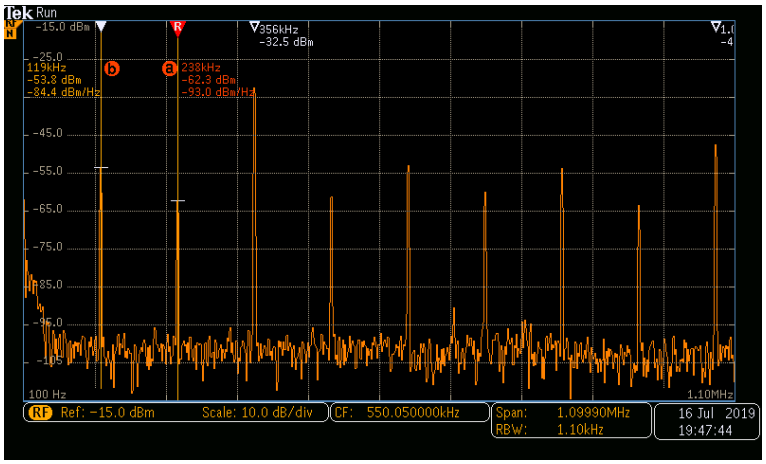
nakon što se nalazio u kaotičnom ponašanju, izaći iz njega daljnjim povećanjem ulaznog parametra (napona na diodi). Područje, u kojem se sustav nalazi nakon što izađe iz kaotičnog režima, nazivamo otokom reda i predvidjeli smo da će sustav oscilirati tri puta većim periodom od perioda ulaznog napona. Kao što možemo vidjeti iz našeg frekvencijskog spektra, njegova osnovna frekvencija pri naponu ulaznog signala od 8.03 V je 119 kHz što je točno tri puta manje od frekvencije ulaznog signala čime smo potvrdili naša predviđanja iz poglavlja 1.3.

Kada smo ulazni napon povećali na 8.63 V, uočili smo novu bifurkaciju. Na slikama 3.22 i 3.23 uočavamo da sustav oscilira sa šest amplituda. Također, na slici 3.24 prikazan je frekvencijski spektar signala na diodi i primjećujemo da je sada osnovna frekvencija 59 kHz što je 6 puta manja frekvencija od frekvencije ulaznog signala, a to odgovara teorijskom predviđanju. Ostale linije se nalaze na frekvencijama koje su



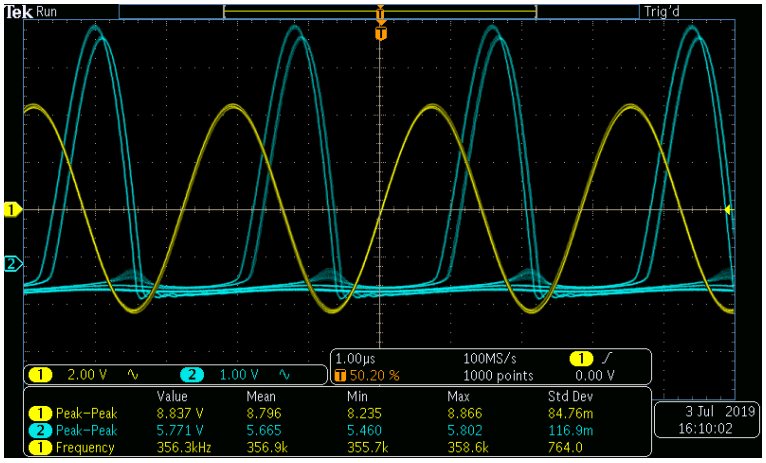
Slika 3.19: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 8.03 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

Slika 3.20: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 8.03 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.21: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 8.03 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 119 kHz, 238 kHz, 356 kHz, 475 kHz, 595 kHz, 714 kHz,...

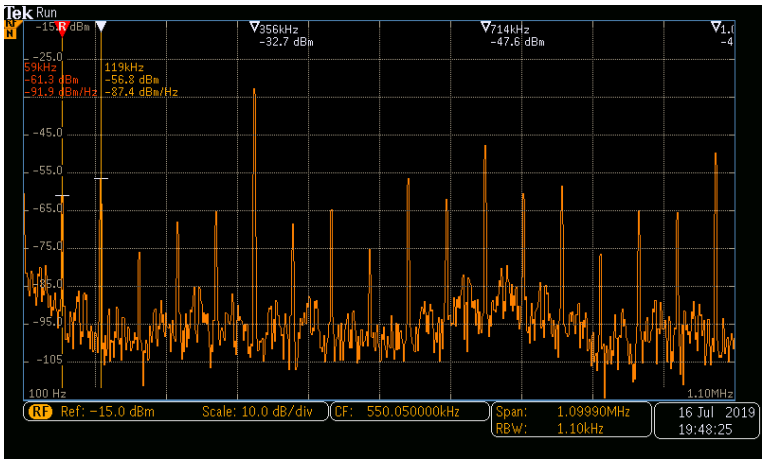
višekratnik frekvencije 59 kHz. No, kao i na svim frekvencijskim spektrima do sada, i ovdje uočavamo mala odstupanja u ovom pravilu. Na primjer, prema ovom pravilu $59\ \mathrm{kHz} \cdot 6 = 354\ \mathrm{kHz}$, a mi na frekvencijskom spektru uočavamo liniju na frekvenciji 357 kHz. Kao i do sada, ovo pripisujemo činjenici da naši mjerni uređaji nisu savršeni i da će postojati određena neodređenost pri određivanju frekvencije te linije jer te linije nisu delta funkcije, već imaju određenu debljinu.



Slika 3.22: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 8.63 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

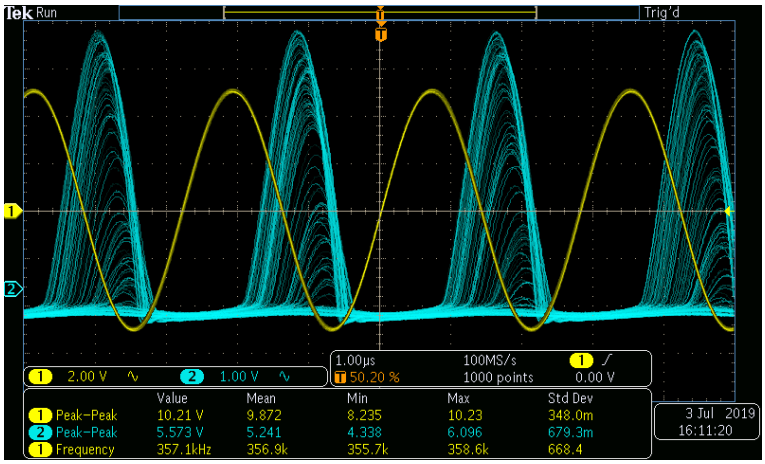
Slika 3.23: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 8.65 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

Već za mala povećavanja ulaznog napona primijetili smo nove bifurkacije sustava. Međutim, te bifurkacije nije bilo moguće identificirati zbog ograničenosti opreme. Već pri naponima većim od 9 V uočili smo kaotično ponašanje sustava, kao što je to i predviđeno u teorijskom uvodu. Na slikama 3.25 i 3.26 prikazan je vremenski prikaz sustava i X-Y prikaz sustava pri ulaznom naponu od 10 V. Možemo prepoznati



Slika 3.24: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 8.63 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 59 kHz, 118 kHz, 179 kHz, 238 kHz, 298 kHz, 357 kHz, 416 kHz,...

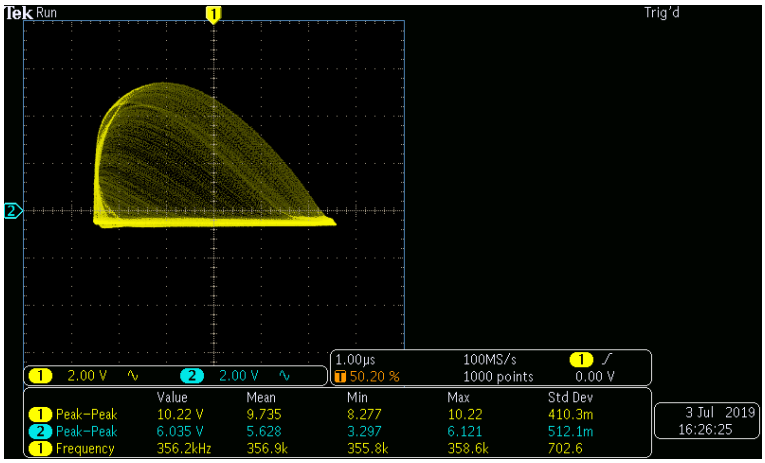
da je sustav pao u kaotično ponašanje na temelju X-Y prikaza jer na njemu vidimo jako puno petlji što je karakteristično za kaotično ponašanje. Također, na slici 3.27 možemo vidjeti frekvencijski spektar signala na diodi. Na frekvencijskom spektru primjećujemo da su sve frekvencije pobuđene što je također karakteristika kaotičnog sustava.



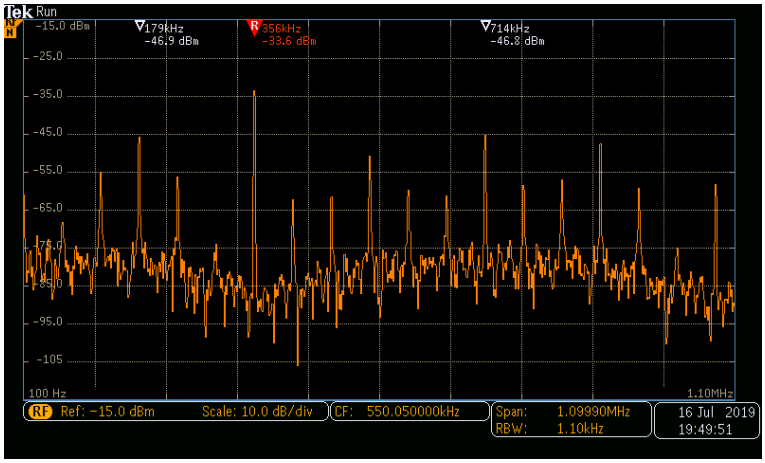
Slika 3.25: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 10 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

Iz ovih rezultata možemo izračunati i Feigenbaumovu konstantu koju smo uveli u poglavlju 1.3.1. Feigenbaumovu konstantu δ smo definirali kao

$$\delta_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}, \tag{3.2}$$



Slika 3.26: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 10 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.



Slika 3.27: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 10 V sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH.

gdje je λ_n vrijednost parametra u kojoj se pojavljuje n-ta bifurkacija. U našem slučaju parametar λ je amplituda ulaznog napona. Vidimo iz jednadžbe 3.2 da nam za određivanje Feigenbaumove konstante trebaju najmanje tri bifurkacije. Prva bifurkacija (kada je sustav prešao u oscilacije s dvostrukim periodom) pojavila se pri ulaznom naponu od $U_{1\to 2} = 1.84$ V. Drugu bifurkaciju (kada je sustav prešao s oscilacija s dvostrukim periodom u oscilacije s četverostrukim periodom) primijetili smo na naponu od $U_{2\to 4} = 3.90$ V, a treću na naponu od $U_{4\to 8} = 4.47$ V. Tada možemo izračunati Feigenbaumovu konstantu kao

$$\delta_1 = \frac{U_{2\to 4} - U_{1\to 2}}{U_{4\to 8} - U_{2\to 4}}.$$

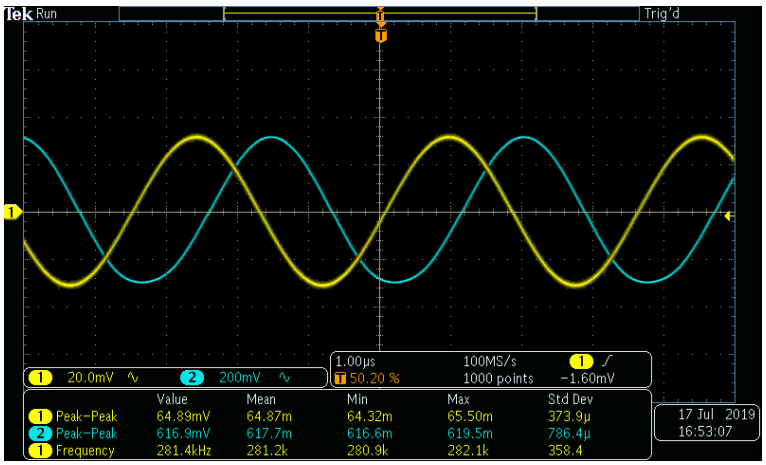
Ako uvrstimo vrijednosti iz eksperimenta, tada dobivamo

$$\delta_1 = 3.61. \tag{3.3}$$

Ono što odmah možemo primijetiti jest veliko odstupanje od predviđene teorijske vrijednosti. Naime, Feigenbaum je izračunao da bi vrijednost ove konstante kada $n \to \infty$, trebala iznositi $\delta = 4.669$. Za precizniji izračun Feigenbaumove konstante za ovaj kaotični sustav trebali bismo izvor sinusoidalnog signala koji bi mogao "finije" mijenjati ulazni napon i osciloskop koji bi imao veću razlučivost novih bifurkacija. Time bismo mogli preciznije odrediti više bifurkacije i preciznije odrediti Feigenbaumovu konstantu.

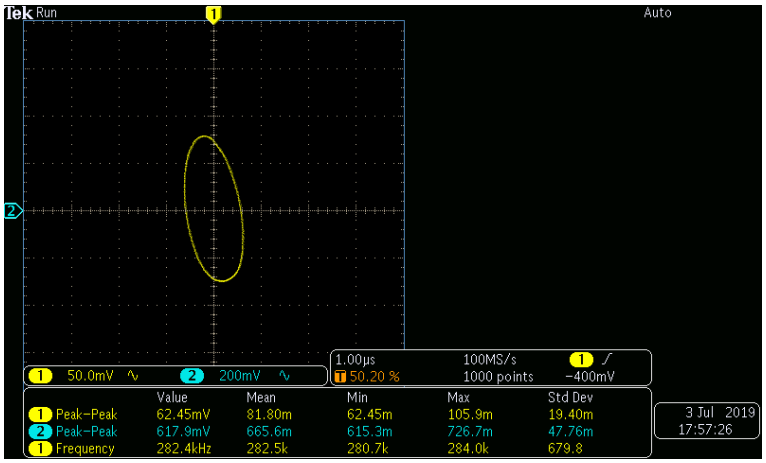
3.2 *RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2 mH*

Nakon što smo proučili kako RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH dolazi do kaotičnog ponašanja, spojili smo opet RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Opet smo prvo tražili rezonantnu frekvenciju tako što smo postavili amplitudu ulaznog sinusoidalnog signala na 0.071 V i mijenjali frekvenciju ulaznog signala. Pronašli smo da je rezonantna frekvencija ovog RLD kruga $f_{\text{rez, 2 mH}} = 281.5$ kHz te smo tu frekvenciju ostavili nepromijenjenu tijekom cijelog eksperimenta s RLD sklopom sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

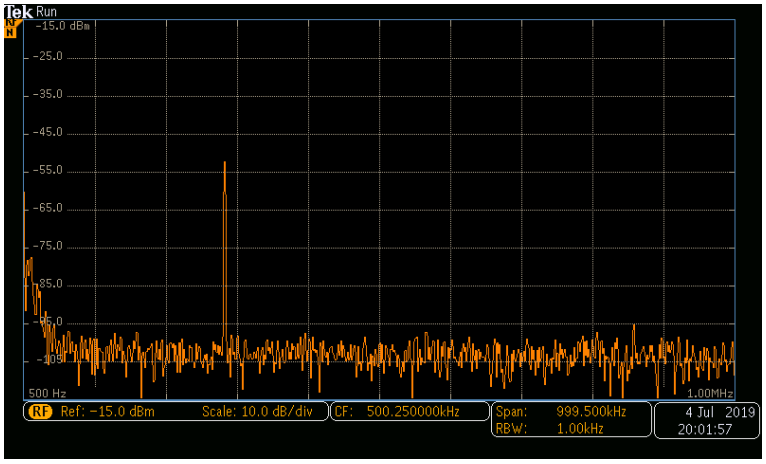


Slika 3.28: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 0.071 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

Na slikama 3.28 i 3.29 prikazan je vremenski prikaz ulaznog signala i signala



Slika 3.29: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 0.071 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

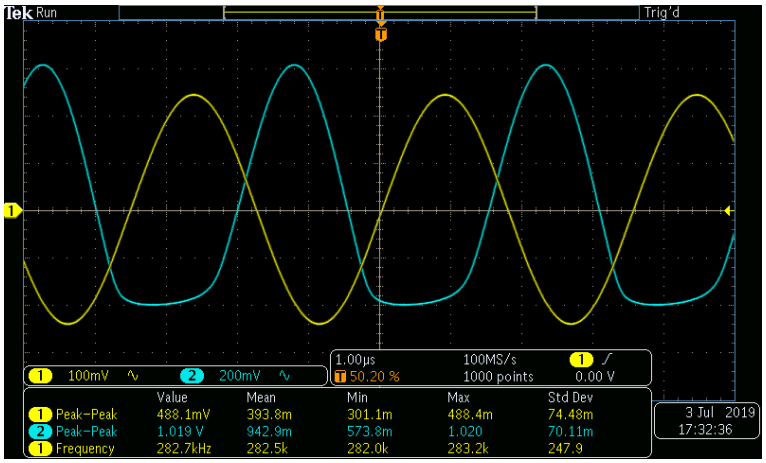


Slika 3.30: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 0.071 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Jedina linija se nalazi na frekvenciji 281 kHz.

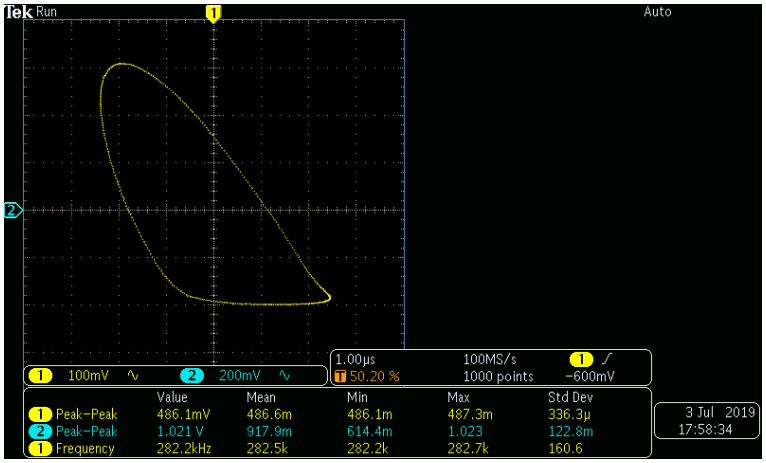
na diodi te X-Y prikaz ulaznog napona i napona na diodi. Iz tih slika vidimo lijep sinusoidalan signal gdje dioda još ne pokazuje svoja ispravljačka svojstva i ponaša se kao čisti kondenzator. Zbog toga krug oscilira jednako kao i ulazni sinusoidalni signal te na frekvencijskom spektru (slika 3.30) vidimo samo jednu liniju koja se nalazi na rezonantnoj frekvenciji od 281.5 kHz.

Povećanjem amplitude ulaznog signala primjećujemo ispravljačka svojstva diode pri čemu se lagano deformirao signal (slika 3.31 i 3.32), ali se ništa kvalitativno ne mijenja (nije se dogodila bifurkacija). Isto možemo potvrditi i na slici 3.33. Kako na frekvencijskom spektru uočavamo da je osnovna frekvencija i dalje jednaka ulaznoj frekvenciji, zaključujemo da se u ovom sustavu nije dogodila bifurkacije. Ostale linije, koje možemo vidjeti na frekvencijskom spektru, odgovaraju višim harmonicima.

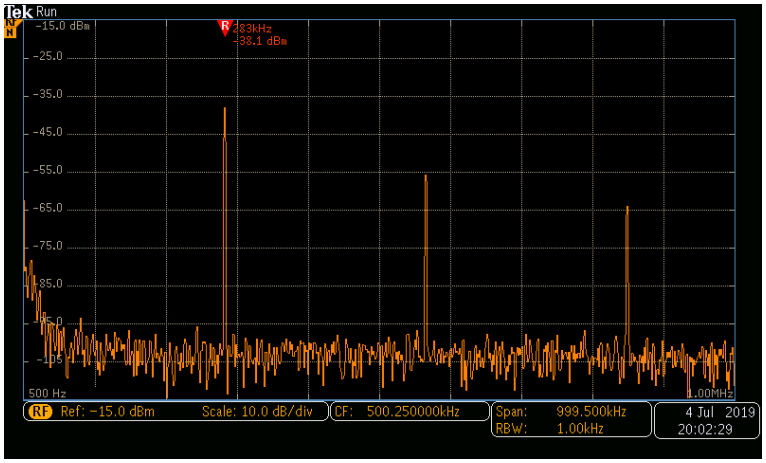
Prvu bifurkaciju prepoznali smo pri ulaznom naponu amplitude 1.58 V (slike 3.34



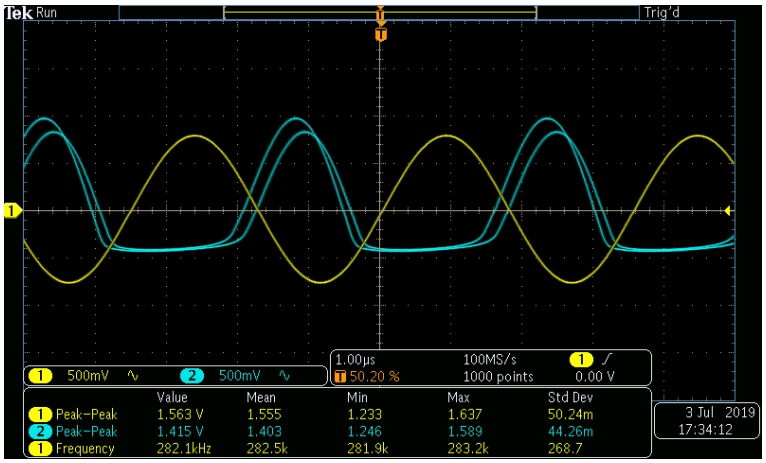
Slika 3.31: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 0.500 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



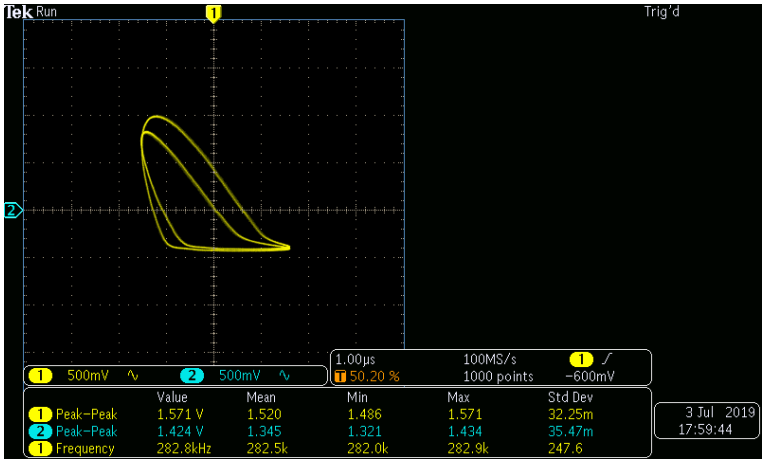
Slika 3.32: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 0.500 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



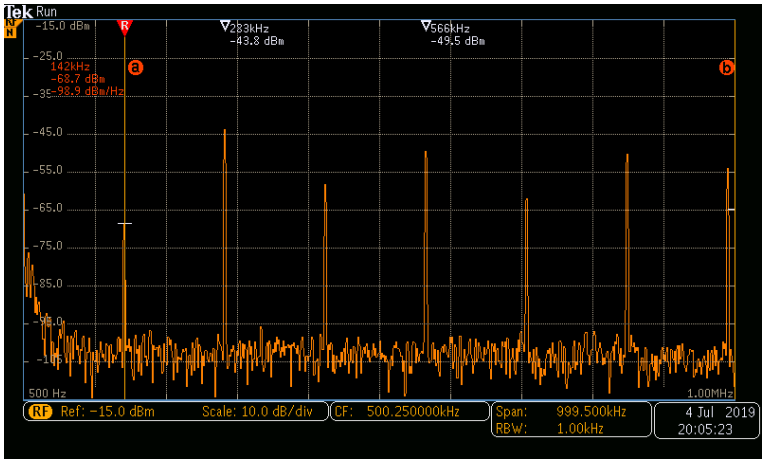
Slika 3.33: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 0.400 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 281 kHz, 563 kHz i 844 kHz.



Slika 3.34: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 1.58 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

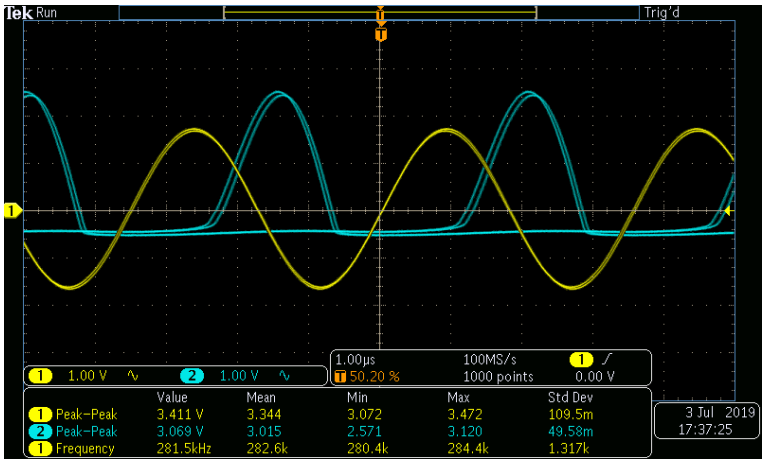


Slika 3.35: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 1.58 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

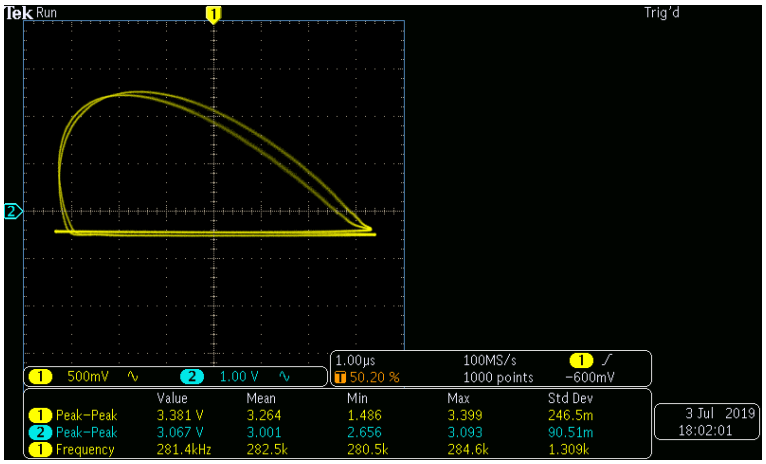


Slika 3.36: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 1.70 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 142 kHz, 281 kHz, 423 kHz, 563 kHz, 704 kHz,...

i 3.35). Kako smo i predvidjeli u teorijskom uvodu, nakon prve bifurkacije na X-Y prikazu bit će vidljive dvije petlje, a u vremenskom prikazu opažamo dvije amplitude. Na frekvencijskom spektru (slika 3.36) možemo vidjeti da je osnovna frekvencija ovog kruga 142 kHz. Ta frekvencija je dva puta manja od frekvencije ulaznog signala što se podudara s našim teorijskim predviđanjima da sustav počinje oscilirati s dvostruko većim periodom nakon prve bifurkacije. Frekvencijski spektar smo promatrali na amplitudi ulaznog napona 1.70 V zato što je linija na frekvenciji 142 kHz bila slabo vidljiva pri naponu od 1.58 V. Povećanjem amplitude ulaznog napona frekvencija te linije se nije promijenila, ali se povećala amplituda te linije pa se i sama linija lakše razlučila od ostalog šuma.

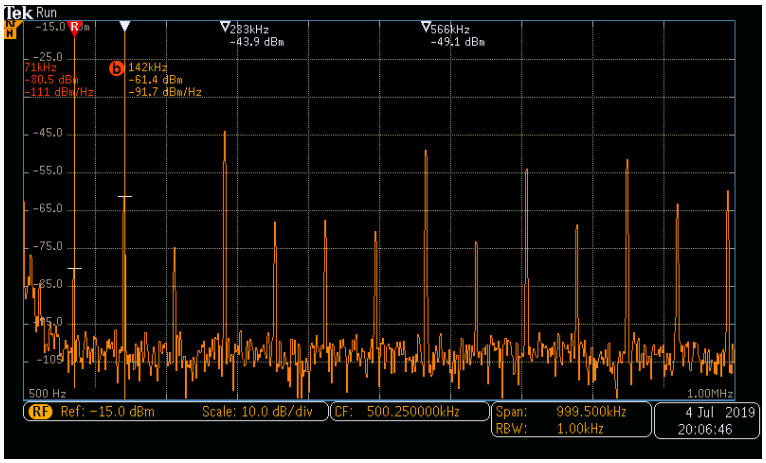


Slika 3.37: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 3.36 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



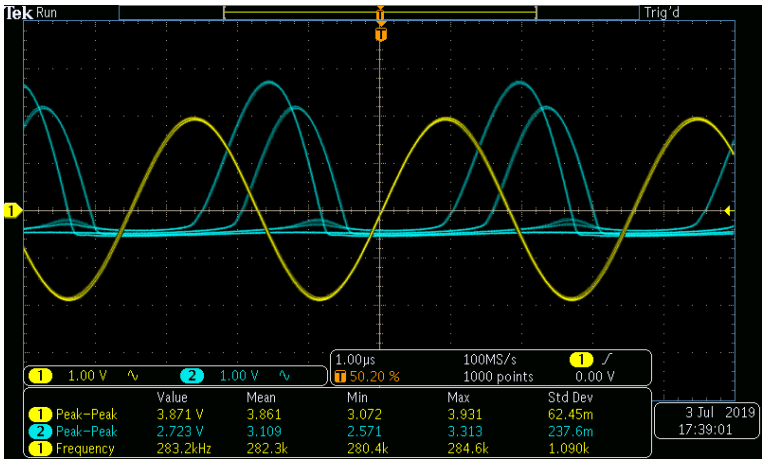
Slika 3.38: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 3.36 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

Iduću bifurkaciju smo prepoznali pri ulaznom naponu od 3.36 V što možemo vidjeti na slikama 3.37 i 3.38. Na frekvencijskom spektru (slika 3.39) vidimo da je



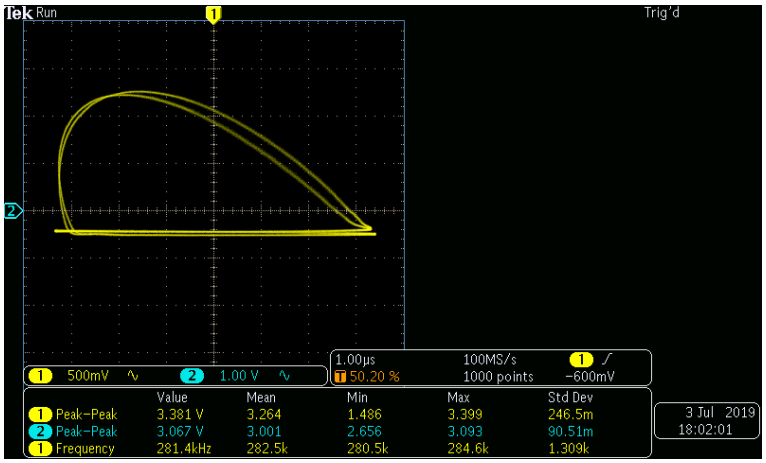
Slika 3.39: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 3.47 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 71 kHz, 142 kHz, 211 kHz, 281 kHz, 352 kHz, 423 kHz, 493 kHz, 563 kHz, 633 kHz,...

osnovna frekvencija ovog sustava sada 71 kHz što je četiri puta manje od frekvencije ulaznog signala i to je u skladu s našim predviđanjima. Točno četiri puta manja frekvencija od 281.5 kHz jest 70.375 kHz i to bismo mogli očekivati kada bi u idealnim okolnostima osciloskop tu vrijednost zaokružio na 70 kHz. Ali, kao i slučaju sklopa sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH, ove linije nisu savršene delta funkcije, već imaju neku debljinu. Zbog tog razloga osciloskop ne daje točno očekivane vrijednosti frekvencija.

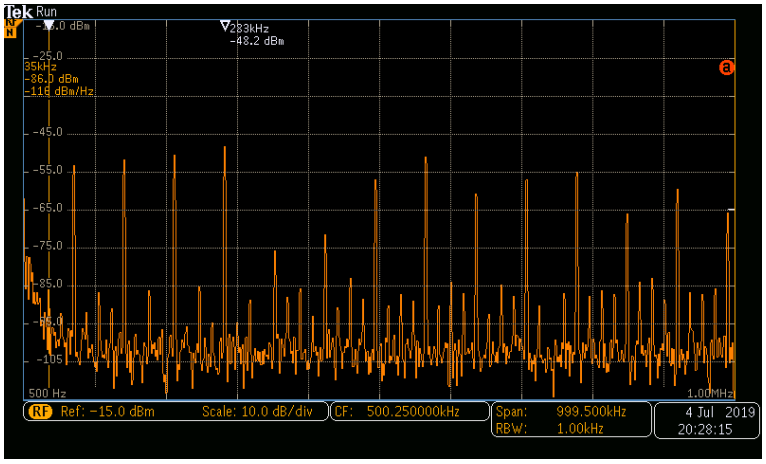


Slika 3.40: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 3.83 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

Pri naponu od 3.83 V opažamo novu bifurkaciju što možemo vidjeti na slikama 3.40, 3.41 i 3.42. U vremenskom prikazu primjećujemo osam amplituda, a na X-Y prikazu osam petlji. Iz frekvencijskom spektra vidimo da je osnovna frekvencija



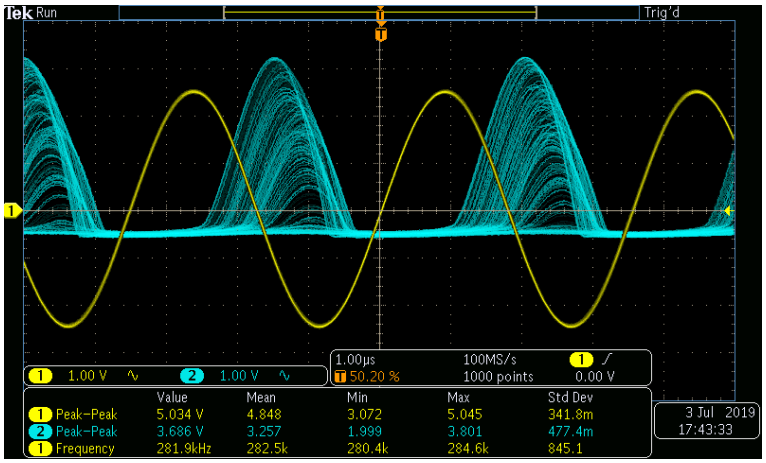
Slika 3.41: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 3.83 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



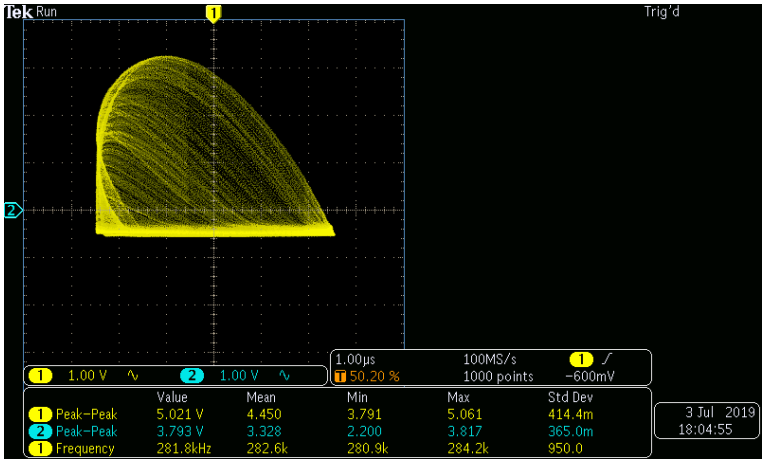
Slika 3.42: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 4.05 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 35 kHz, 71 kHz, 105 kHz, 140 kHz, 175 kHz, 211 kHz,...

signala na diodi sada 71 kHz što je osam puta manje od frekvencije ulaznog signala. Frekvencijski spektar smo opet proučavali na malo većem naponu od napona pri kojem smo prepoznali novu bifurkaciju zbog toga što su tako niske frekvencije teško razlučive zbog rozog šuma pa smo morali povećati amplitudu ulaznog napona kako bismo lakše razlučili tu liniju.

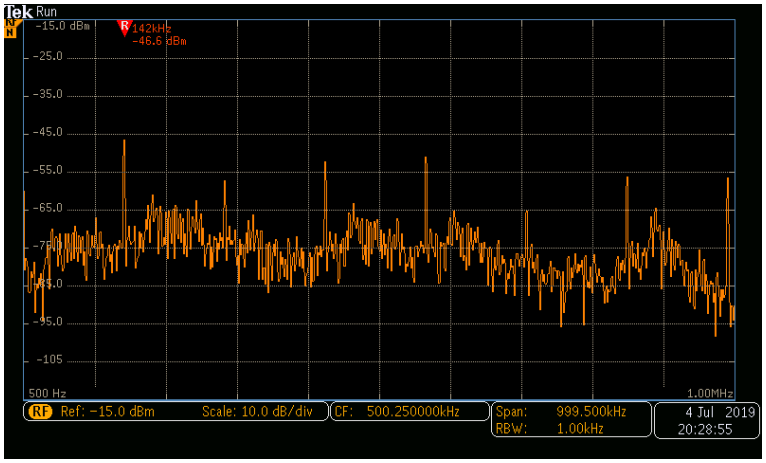
Daljnjim povećavanjem ulaznog napona teško su se identificirale nove bifurkacije. Već pri vrlo maloj promjeni amplitude ulaznog napona, sustav se kvalitativno promijenio, ali nije se moglo točno odrediti u kakvom je točno stanju sustav. U X-Y prikazu nije se mogao izmjeriti točan broj petlji, a u frekvencijskom spektru se, zbog rozog i bijelog šuma, nisu mogle identificirati nove linije koje bi odgovarale višim bifurkacijama. Zato zaključujemo da je sustav vrlo brzo prešao u kaotičan režim rada



Slika 3.43: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 5.00 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



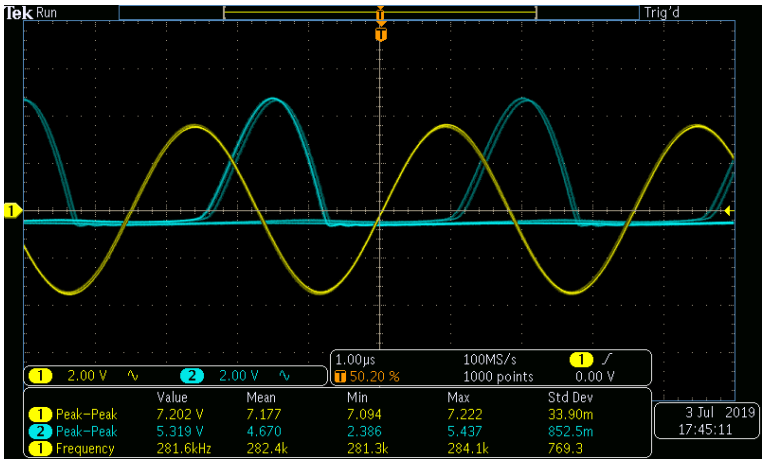
Slika 3.44: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 5.00 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



Slika 3.45: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 5 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

što možemo vidjeti na slikama 3.43, 3.44 i 3.45. Na X-Y prikazu više ne možemo prebrojiti koliko ima petlji, a na frekvencijskom spektru vidimo da su sve frekvencije

pobuđene što su sve obilježja kaotičnog sustava.

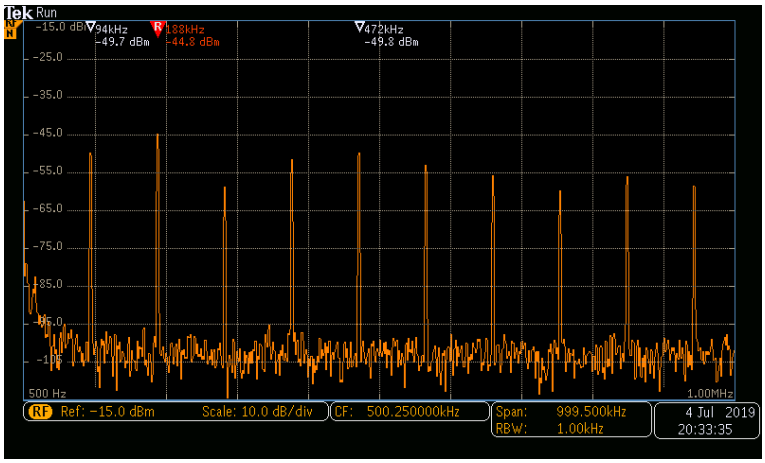


Slika 3.46: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 7.04 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

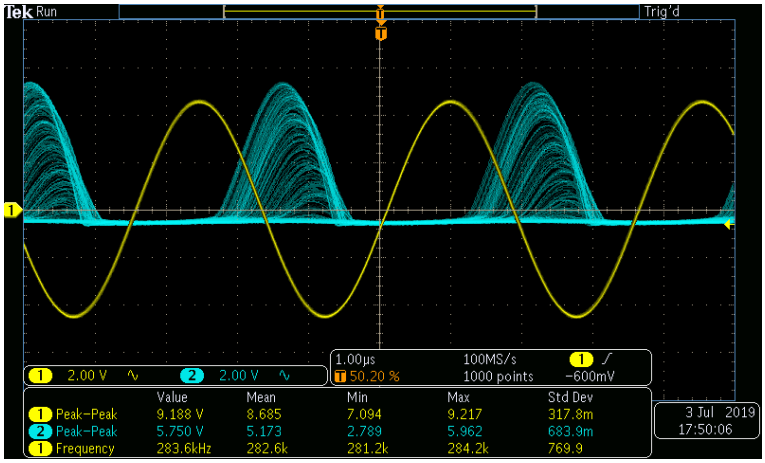
Slika 3.47: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 7.04 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

Kao što možemo vidjeti na slikama 3.46, 3.47 i 3.48, pri ulaznom naponu amplitude 7.04 V više ne primjećujemo kaotično ponašanje. To znači da se sustav nalazi u tzv. otocima reda u kaosu, a to smo predvidjeli u teorijskom uvodu. U vremenskom prikazu opažamo tri amplitude oscilacija napona na diodi, a na X-Y prikazu opažamo tri petlje. Iz frekvencijskog spektra na slici 3.48 vidimo da je osnovna frekvencija ovog sustava pri ulaznom naponu 7.04 V 94 kHz što je tri puta manje od frekvencije ulaznog napona i slaže se s predviđanjima u teorijskom uvodu.

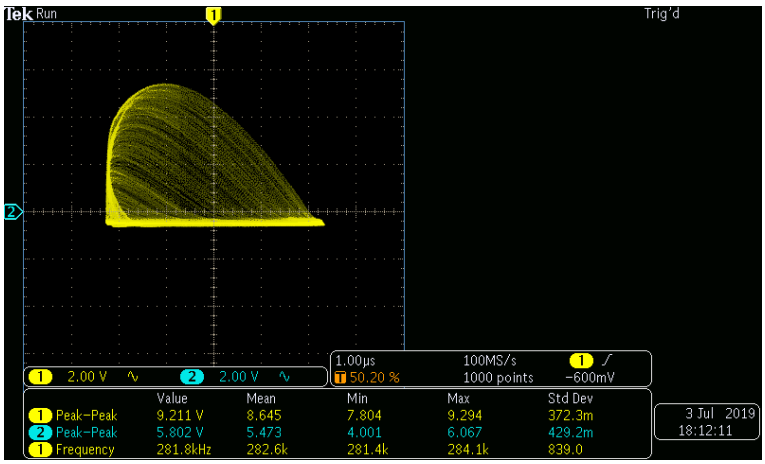
Daljnjim povećanjem napona moglo se primijetiti da se sustav vrlo brzo mijenja kvalitativno, tj. već za male promjene primjećujemo nove bifurkacije sustava. Međutim, te promjene su se teško identificirale i teško smo mogli odrediti u kakvom



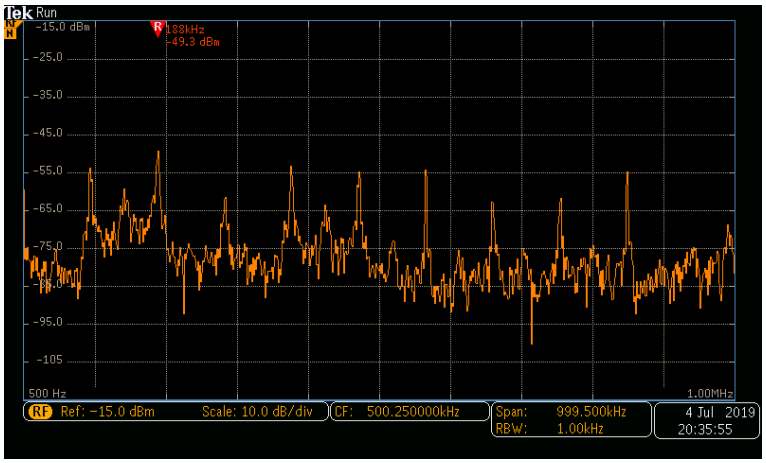
Slika 3.48: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 7.08 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH. Linije, koje se mogu razlučiti, se nalaze na frekvencijama 94 kHz, 188 kHz, 281 kHz, 375 kHz, 469 kHz, 563 kHz,...



Slika 3.49: Vremenski prikaz napona na diodi (plavo) i ulaznog napona (žuto) od 9.0 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



Slika 3.50: X-Y prikaz napona na diodi i ulaznog napona od 9.0 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.



Slika 3.51: Frekvencijski spektar napona na diodi pri ulaznom naponu od 9.03 V sa zavojnicom induktiviteta 2 mH.

je točno stanju sustav (je li je osnovna frekvencija sustava sada šest puta ili devet puta manja od ulazne). Zato zaključujemo, iz slika 3.49, 3.50 i 3.51, da je sustav vrlo brzo pao u kaotično ponašanje. Iz X-Y prikaza vidimo jako puno petlji, a u frekvencijskom spektru da su sve frekvencije pobuđene što je sve karakteristično za kaotični sustav. Vjerojatno bi se moglo i točnije odrediti u kojem je trenutno stanju sustav da smo, na neki od već navedenih načina, smanjili bijeli i rozi šum sustava.

Na kraju možemo i iz ovih rezultata izračunati Feigenbaumovu konstantu za naš sustav. Kao i za sklop sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH, trebamo vrijednosti ulaznih napona za tri uzastopne bifurkacije: $U_{1\to 2} = 1.58\mathrm{V}$, $U_{2\to 4} = 3.36\mathrm{V}$ i $U_{4\to 8} = 3.83\mathrm{V}$. Tada iz jednadžbe 1.3 imamo

$$\delta_2 = \frac{U_{2\to 4} - U_{1\to 2}}{U_{4\to 8} - U_{2\to 4}}$$
$$\delta_2 = \frac{3.36\ \mathrm{V} - 1.58\ \mathrm{V}}{3.83\ \mathrm{V} - 3.36\ \mathrm{V}},$$

iz čega na kraju dobivamo

$$\delta_2 = 3.79. \tag{3.4}$$

I ovdje možemo primijetiti relativno veliko odstupanje od predviđene teorijske vrijednosti ($\delta = 4.669$). No, ta teorijska vrijednost je izračunata za $n \to \infty$ što bi značilo da bi za neki precizniji izračun Feigenbaumove konstante, trebali biti u mogućnosti izmjeriti (tj. razlučiti) više bifurkacija. To bi mogli postići s izvorom sinusoidal-

nog signala koji bi mogao finije mijenjati napon i osciloskopom koji bi imao veću razlučivost. Također, pri identifikaciji novih bifurkacija bi pomoglo smanjenje bijelog šuma tako da sami sklop stavimo u svojevrstan Faradayev kavez.

4 Zaključak

Otkad su se počeli proučavati nelinearni dinamički sustavi, bilježili su od samog početka veliki interes znanstvene (a i šire) zajednice. Znanstvenoj zajednici je bilo zanimljivo istraživati na koliko različitih sustava i grana znanosti se mogu primijeniti neki općeniti koncepti iz kaosa i kako su ti rezultati univerzalni dok su se široj zajednici svidjeli grafički prikazi koji se vežu uz kaotična ponašanja (osobito fraktali). Tako smo i mi u ovom radu htjeli dotaknuti površinu tog svijeta i malo je istražiti.

Kaos se može prepoznati u mnogim sustavima, ali mi smo odabrali RLD električni krug. Najprije smo vidjeli da se u RLD krugu kaotično ponašanje pojavljuje zbog činjenice da dioda ne prestaje odmah voditi struju kada kroz nju teče struja u nepropusnom smjeru. Vrijeme potrebno da dioda potpuno prestane voditi struju nazivamo vrijeme oporavka diode i tu smo pronašli glavni razlog kaotičnog ponašanja RLD kruga.

Zatim smo sastavili dva RLD kruga s različitim zavojnicama i proučavali kako dolazi do kaotičnih oscilacija u RLD krugu. Postupan prelazak sustava u kaotično ponašanje promatrali smo na tri načina: vremenskim prikazom, X-Y prikazom i frekvencijskim spektrom. Potvrdili smo sve pretpostavke iz teorijskog dijela i vidjeli kada se u sustavu pojavljuju bifurkacije, kaotično ponašanje i otoci reda.

Kako smo mogli prepoznati samo tri uzastopne bifurkacije za oba strujna kruga, bili smo u mogućnosti izračunati samo prvu Feigenbaumovu konstantu za oba RLD kruga. Za RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2/3 mH dobili smo vrijednost Feigenbaumove konstante od $\delta_1 = 3.61$ dok smo za RLD krug sa zavojnicom induktiviteta 2 mH dobili $\delta_2 = 3.79$. Oba ova rezultata odstupaju od teorijske vrijednosti $\delta = 4.669$, ali ta je vrijednost dobivena kada promatramo uzastopne bifurkacije visokog reda (kada $n \to \infty$). Da bi se mogla preciznije izmjeriti Feigenbaumova konstanta, potreban je drugačiji eksperimentalni postav koji će biti u stanju razlučiti više bifurkacije.

5 Metodički dio

5.1 Uvod

Teme kao što su deterministički sustavi, bifurkacijski dijagrami, kaos i slični se kao takvi ne spominju u redovnoj nastavi fizike. Više je razloga za to. Jedan od njih (a možda i najvažniji) jest što su to vrlo kompleksne i apstraktne teme koje nisu primjerene za dob učenika koji pohađaju srednju školu. Drugi razlog jest taj što je za takvo proučavanje potrebno veće predznanje iz fizike, ali i iz matematike. Tako bi za proučavanje kaotičnih sustava, koji su predstavljeni u ovom radu, bilo potrebno veliko predznanje iz (R)LC krugova; kako oni funkcioniraju i zašto dolazi do takvih oscilacija. Pokazalo se da učenici u prosjeku stječu slabo konceptualno razumijevanje električnih titraja [17]. Kako su električni titrajni krugovi važni u tehnologiji, smatram da je potrebno da se u srednjim školama kvalitetno obrade te sam stoga odabrao "LC titrajni krug" kao temu za metodički dio.

Iako je sličnost matematičkih izraza za mehaničke i električne sustave vrlo velika, ovdje mora biti jasno da su to potpuno drugačiji sustavi. U mehaničkim sustavima se proučavaju veličine kao što su masa i konstanta elastičnosti opruge dok se u električnim sustavima proučavaju potpuno drugačije veličine kao što su induktivitet zavojnice i kapacitet kondenzatora. Naravno, zbog sličnosti matematičkih izraza mehaničkih i električnih sustava lako se može, po skraćenom postupku, napisati analogna rješenja za električno titranje ako poznajemo rješenja za mehaničko titranje.

Ova tema se nalazi na specifičnom mjestu u gradivu fizike srednje škole. Cijeli LC električni titrajni krug se zasniva na titrajima koji nisu jednostavni za shvatiti. Dodatan problem je što se električna struja te svi pojmovi i koncepti vezani uz tu cjelinu (elektromagnetska indukcija, kondenzator,...) rade u 2. razredu srednjih škola, a potrebni su za dubinsko konceptualno razumijevanje ovih sadržaja. Stoga smatram kako bi na početku nastavnog sata s učenicima trebalo ponoviti o elektromagnetnoj indukciji.

Ishodi ove teme se mogu ostvariti na mnogo načina i puno toga ovisi o opremljenosti te škole raznim instrumentima. Idealno bi bilo da se rade pokusi u grupama (ili barem frontalno), kao i općenito u nastavi fizike, ali kao alternativa uvijek mogu poslužiti računalne simulacije kojih ima jako puno na internetu (osobito na engleskom govornom području). Za ove potrebe ću pretpostaviti idealnu školu koja je

opremljena raznolikom aparaturom (na primjer s osciloskopom) i u kojoj su izvedivi svi pokusi predstavljeni u pripremi.

5.2 Nastavna priprema iz fizike: LC titrajni krug

Ovaj nastavni sat zamišljen je za 3. razred srednjih škola. Može se primijeniti i u gimnazijama i u strukovnim školama. Ishodi, tj. postignuća koja se očekuje da će učenici imati nakon obrađivanja ova nastavne teme su:

OBRAZOVNI ISHODI:

- opisati dijelove LC titrajnog kruga
- objasniti zašto dolazi do titraja u LC krugu
- opisati pretvorbe energije u LC titrajnom krugu
- objasniti kako se mijenjaju struja i napon na elementima LC titrajnog kruga
- opisati o čemu ovisi period titranja i znati ga matematički izraziti
- navesti i objasniti izraz za vlastitu frekvenciju
- opisati kako LC titrajni krug emitira elektromagnetske valove i kako ih može primati
- razvijati sposobnost sistematičnog opažanja
- razvijati sposobnost logičkog mišljenja i znanstvenog zaključivanja.

ODGOJNI ISHODI:

- razvijati komunikacijske vještine
- razvijati sistematičnost
- argumentirano izražavati vlastito mišljenje
- uvažavati tuđe mišljenje.

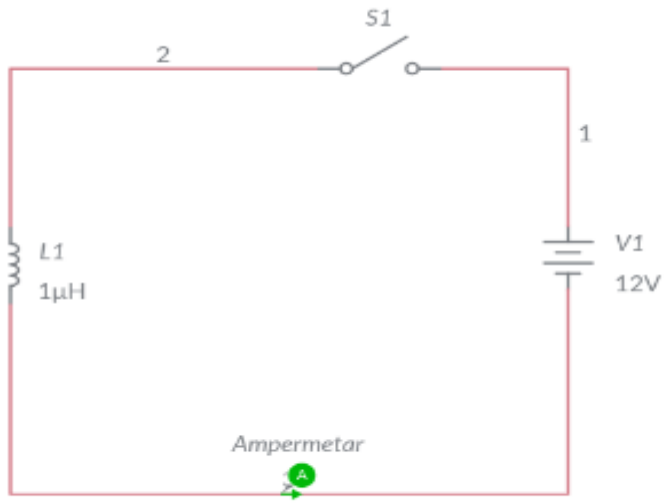
Za ostvarenje ovih ishoda predvidio sam 1 nastavni sat.

5.2.1 Uvodni dio sata

UVODNI PROBLEM: Kako se primaju i emitiraju radio valovi?

Učenici daju svoje ideje o uvodnom pitanju. Nakon toga ću navesti da će u ovom nastavnom satu učiti gradivo koje će im pomoći da na kraju odgovore na ovo pitanje.

Najprije ćemo serijski spojiti zavojnicu, izvor električnog napona, prekidač i ampermetar kao na slici 5.1.

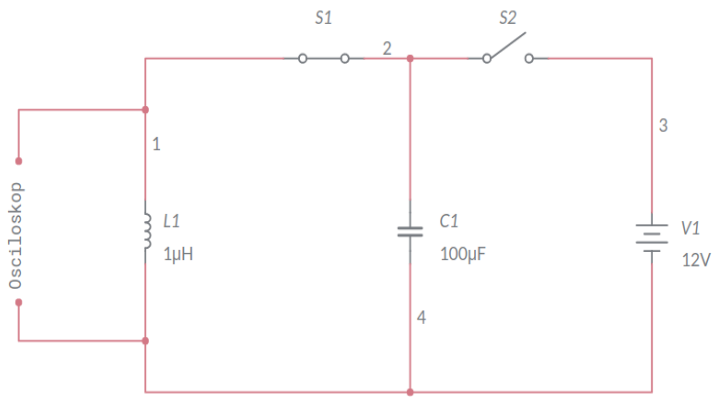


Slika 5.1: Shematski serijski spojenog izvora električnog napona, prekidača, zavojnice i ampermetra.

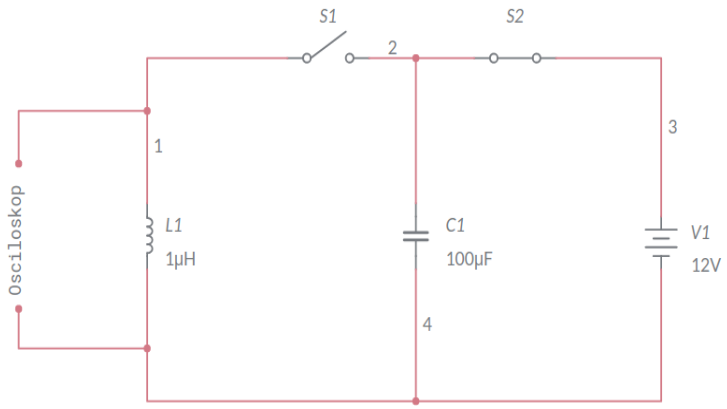
Razlikuje li se uspostavljanje struje kroz zavojnicu (kao na slici 5.1) od situacije kada bi se umjesto zavojnice postavio otpornik jednakog omskog otpora? Nakon učeničkih predviđanja izveo bih taj pokus (nekoliko puta) tako da učenici sami opaze je li uspostavljanje struje kroz zavojnicu sporije nego kroz otpornik. Nakon toga možemo se vratiti na početno pitanje i vođenom raspravom doći do zaključka da će se kroz zavojnicu uspostavljati struja takvog predznaka koja će se protiviti povećanju struje. Zato je uspostavljanje struje u ovom slučaju sporije kada je spojena zavojnica.

Spojit ću strujni krug kao na slici 5.2 (gdje je paralelno sa zavojnicom spojen osciloskop) i pitati učenike što očekuju da će se dogoditi. U ovom trenutku očekujem da će učenici odgovoriti da će se na pločice kondenzatora dovesti naboj i da će kondenzator biti nabijen.

Što očekujete da će se dogoditi (što ćete očitati na osciloskopu) ako zatvo-



Slika 5.2: Električna shema na kojoj je spojen izvor električnog napona, kondenzator, zavojnica i dvije sklopke gdje je sklopka S1 je zatvorena, a sklopka S2 otvorena. Paralelno sa zavojnicom spojen je još i osciloskop.



Slika 5.3: Električna shema na kojoj je spojen izvor električnog napona, kondenzator, zavojnica i dvije sklopke gdje je sklopka S1 je zatvorena, a sklopka S2 zatvorena. Paralelno sa zavojnicom spojen je još i osciloskop.

rimo sklopku S1, a otvorimo sklopku S2? Ovdje ne očekujem da učenici točno predvide titraje, ali se mogu čuti različite ideje i načini razmišljanja. Izvest ćemo pokus nekoliko puta gdje će učenici na osciloskopu opaziti prigušene titraje.

Kakva titranja opažamo? Kako ih prepoznajete? Kroz raspravu učenike vodimo do zaključka da promatramo promjenu struje kroz krug. Primjećujemo da se iznos te struje mijenja na način da su otkloni kazaljke na ampermetru sve manji i manji. Iz toga zaključujemo da su ta titranja prigušena, a gušenje nastaje zbog otpora žica i zavojnice.

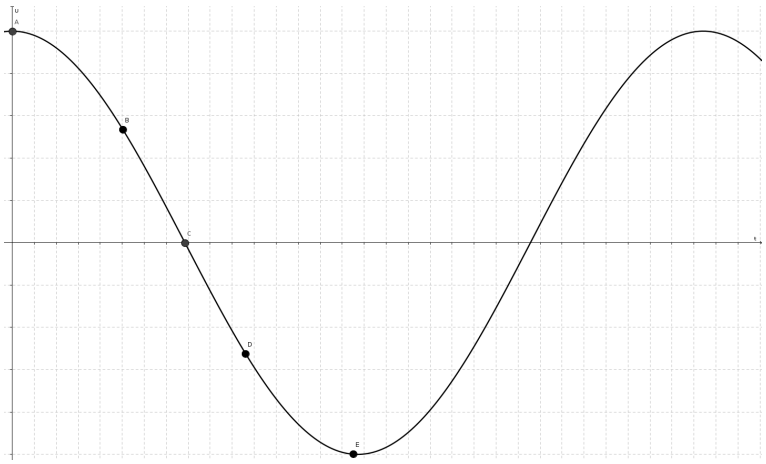
5.2.2 Središnji dio

ISTRAŽIVAČKO PITANJE: Zašto LC krug daje titraje?

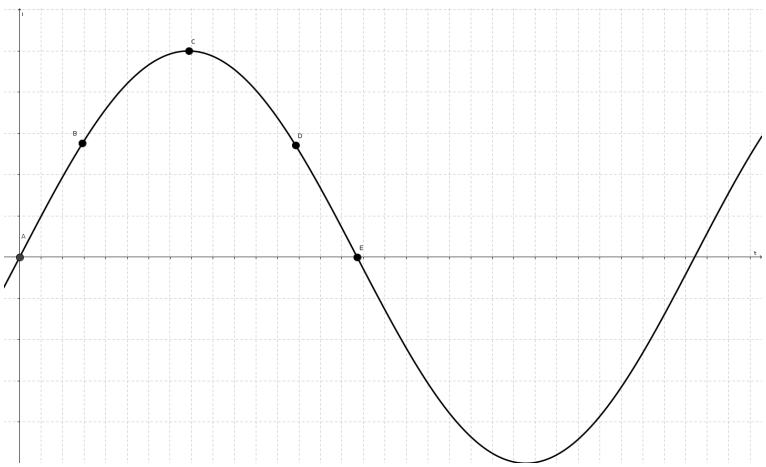
U ovom dijelu sata ćemo istražiti kako (i zašto) dolazi do titraja. Usporedno s ovim pitanjima crtamo ovisnosti struje kroz krug o vremenu (slika 5.5) i ovisnost napona na kondenzatoru o vremenu (slika 5.4). Cijeli problem ćemo kasnije promatrati i preko energije.

Što će se dogoditi ako zatvorimo sklopku S1? Raspravom dolazimo do zaključka da će se kondenzator isprazniti.

Isprazni li se kondenzator trenutno? Vođenom raspravom dolazimo do odgovora da se kondenzator neće trenutno isprazniti zbog induktiviteta zavojnice. Naime, kako se zavojnica opire promjeni struje koja prolazi kroz nju, struja se uspostavlja relativno polako.



Slika 5.4: Ovisnost napona na kondenzatoru o vremenu.



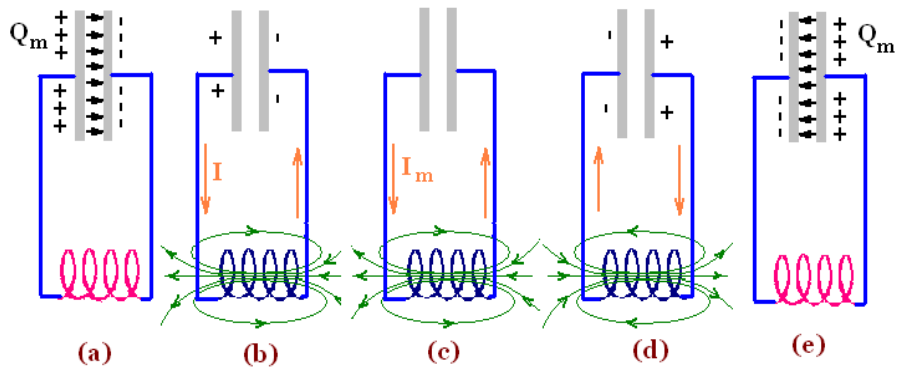
Slika 5.5: Ovisnost struje kroz LC krug o vremenu.

Što se događa s nabojem na kondenzatoru? Kakva je onda struja kroz taj sustav? Učenike vodimo zaključka do će se kondenzator isprazniti te da će struja kroz krug biti maksimalna.

Što se događa sa strujom u krugu kada se kondenzator ispraznio, a struja je maksimalna. Pada li ona na nulu trenutno? Učenici zaključuju da će se kondenzator puniti suprotno od svog početnog stanja, ali će induktivitet zavojnice spriječiti da vrijednost struje kroz krug padne naglo na nulu.

Što očekujemo kada struja padne na nulu? Kako je sada nabijen kondenzator? Što će se sada dogoditi? Vođenom raspravom dolazimo do zaključka da je kondenzator sada opet napunjen i da se ciklus ponavlja, ali je situacija sada obrnuta.

Koje sve oblike energije imamo u ovom LC krugu? Kako se one pretvaraju iz jednog oblika u drugi? Učenici zaključuju da u ovom krugu imamo energiju sadržanu u električnom polju kondenzatora i u magnetskom polju zavojnice. Promatramo cijeli ciklus titraja LC kruga i dolazimo do zaključka da je u početku sva energija sadržana u električnom polju kondenzatora, a nakon što se kondenzator isprazni, sva energija je sadržana u magnetskom polju zavojnice. Usporedno s ovom raspravom skiciramo crtež sličan slici 5.6



Slika 5.6: Shematski prikaz što se događa s energijom kroz kondenzator i zavojnicu tijekom jednog ciklusa titraja LC kruga. Preuzeto iz [22]

ISTRAŽIVAČKO PITANJE: O čemu i kako ovisi period titranja u LC krugu?

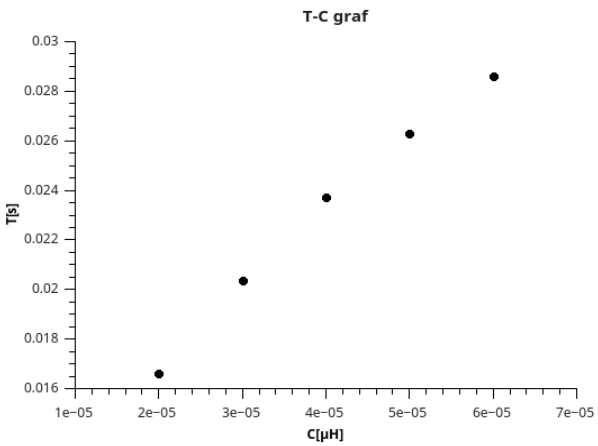
Ovo pitanje možemo istražiti pomoću simulacije na računalu. Konkretno, odlična simulacija se može naći na poveznici [21]. Ono što je dobro kod ove simulacije jest što se mogu promatrati naše oscilacije u realnom vremenu. U ovom dijelu sam zamislio da ćemo promatrati navedenu simulaciju i iz te simulacije izvaditi potrebne podatke. Te podatke bi zatim zapisivali u excel tablicu i iz nje crtali potrebe grafove i zaključivali o ovisnosti perioda o kapacitetu/induktivitetu. No, kako bi uzimanje

tih podataka trajalo predugo, s učenicima bih prošao samo dio simulacije. Kod kuće bih pripremio sve podatke i grafove tako da se ne izgubi previše vremena na samom satu.

O kojim veličinama bi mogao ovisiti period titranja i zašto? Razgovorom s učenicima dolazimo do zaključka da su te veličine kapacitet i induktivitet jer ako je kapacitet veći, kondenzator se duže prazni, a ako je induktivitet veći, onda je opiranje zavojnice veće. Zatim upoznajem učenike sa simulacijom i dogovaramo se za način rada.

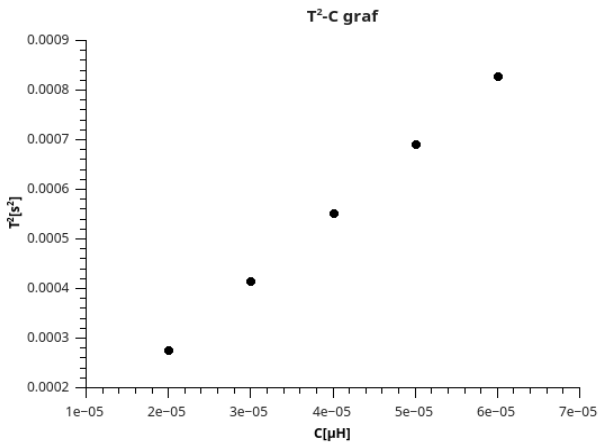
Kako ćemo istraživati ovisnost jedne veličine o drugoj? Na što trebamo paziti? Otvaram simulaciju pred cijelim razredom i upoznajem ih sa značajkama te simulacije. Najprije možemo promatrati ovisnost perioda o kapacitetu. Zajedno s učenicima promatramo kako se mijenja period sustav u ovisnosti o kapacitetu pri čemu induktivitet zavojnice treba ostati konstantan (tj. trebamo paziti na kontrolu varijabli). Međutim, parametri, koje ću odabrati na satu, bit će jednaki onima koje sam odabrao kod kuće, tako da će sama obrada rezultat (crtanje T-C i $T^2 - C$ grafova) proći puno brže nego da se to obrađuje na satu. Nakon što dobijemo rezultate, crtamo T-C graf (slika 5.7).

Jesmo li dobili linearnu ovisnost perioda titranja i kapaciteta? Vođenom raspravom dolazimo do zaključka da nismo dobili linearnu ovisnost i da bismo mogli probati drugačiji graf. Konkretno, možemo probati $T^2 - C$ graf (slika 5.8) i vidimo da dobivamo pravac iz čega možemo zaključiti da postoji linearna ovisnost između T^2 i C.

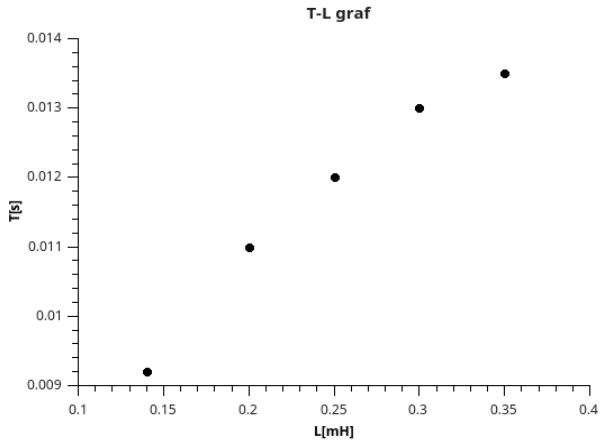


Slika 5.7: Graf ovisnost perioda titranja o kapacitetu kondenzatora.

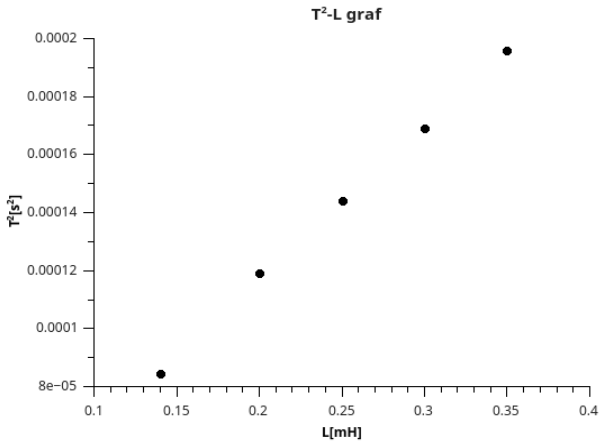
Isti postupak ponovimo za ovisnost perioda o induktivitetu gdje također dolazimo



Slika 5.8: Graf ovisnosti kvadrata perioda titranja o kapacitetu kondenzatora.



Slika 5.9: Graf ovisnosti perioda titranja o induktivitetu zavojnice.



Slika 5.10: Graf ovisnosti kvadrata perioda titranja o induktivitetu zavojnice.

do zaključka da postoji linearna ovisnost između T^2 i L (slike 5.9 i 5.10).

Iz ovih razmatranja možemo vođenom raspravom doći do zaključka da je kvadrat perioda proporcionalan s kapacitetom kondenzatora i induktivitetom zavojnice što znači da možemo napisati izraz za period u LC krugu kao $T = 2\pi\sqrt{LC}$. **Kako**

su povezani frekvencija i period? Kako bi izgledao izraz za frekvenciju LC kruga? Vođenom raspravom dolazimo do zaključka da je izraz frekvencija za LC krug $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Ovu frekvenciju nazivamo vlastitom frekvencijom LC električnog titrajnog kruga.

Ovakav LC električni titrajni krug ima mogućnost emitiranja elektromagnetskih valova koji će imati frekvenciju jednaku vlastitoj frekvenciji titrajnog kruga. Naravno, ako takav jedan titrajni krug može emitirati elektromagnetske signale, on ih može i prihvatiti, tj. može biti i u rezonanciji s nekim drugim električnim titrajnim krugom.

5.2.3 Završni dio

Možete li sada odgovoriti na pitanje iz uvodnog problema? Biste li mogli objasniti kako funkcionira neki radioprijemnik/odašiljač? Prihvaćam učeničke ideje i dolazimo do zaključka kako bi se mogla ugoditi vlastita frekvencija kruga tako da se pogodi frekvencija određene radio stanice. Učenicima opisujem kako okretanje „kotača“ za izbor stanice uzrokuje pomicanje kondenzatorskih ploča. Posljedica toga je promjena kapaciteta, odnosno perioda titrajnog kruga koji rezonancijom „prihvaća“ vanjski signal koji se reproducira putem zvučnika. Mogućnost promjene perioda titrajnog kruga omogućuje „prihvaćanje“ i emitiranje signala raznih frekvencija.

Za kraj sam predvidio da riješimo nekoliko konceptualnih pitanja pomoću ABCD kartica:

1. Ako u titrajnom krugu povećamo kapacitet otpornika 4 puta, kako će se promijeniti vlastita frekvencija kruga?

a. poveća se 4 puta,

b. poveća se 2 puta,

c. smanji se 2 puta,

d. smanji se 4 puta.

2. Ako u titrajnom krugu postojeću zavojnicu zamijenimo drugom zavojnicom 20 puta većeg induktiviteta, a kondenzator zamijenimo onim 5 puta manjeg kapaciteta,

kako se promijenio period?

a. poveća se 4 puta,

b. poveća se 2 puta,

c. smanji se 2 puta,

d. smanji se 4 puta.

Bibliography

[1] Alam, J.; Anwar, S. : Chasing Chaos with an RL-Diode Circuit . LUMS School of science and Engineering, March 23, 2010

[2] Propp, S. : Period Doubling Route to Chaos in a RLD Circuit . The College of Wooster, Physics Department, May 7, 2014

[3] Rollins, R.W; Hunt, E.R.. : Exactly Solvable Model of a Physical System Exhibiting Universal Chaotic Behavior . American Physical Society, Vol 49, 1982, Str. 1295-1298.

[4] Hanias, M.P.; Avgerinos, Z.; Tombras, G.S. : Period doubling, Feigenbaum constant and time series prediction in an experimental chaotic RLD circuit . Chaos, Solitons and Fractals, May 2009.

[5] Linsay, Paul S. : Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator . American Physical Society, Vol 49 (19), 1981, Str. 1349-1352.

[6] Tse, Chi. : Experimental Techniques for Investigating Chaos in Electronics . Department of Electronic and Information Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, June 2002.

[7] Forced oscillations of a non-linear electrical series resonant circuit - chaotic oscillation . Tess expert PHYWE.

[8] King-Smith, Matthew : A Nonlinear Electrical Circuit Exhibiting Period Doubling Bifurcation and Chaotic Behavior . The College of Wooster, Physics Department, December 10, 2014

[9] Strogatz, Steven H . Nonlinear dynamics and chaos. Westview Press, 2015.

[10] Sprott, J.C . Elegant chaos. Algebraically simple chaotic flows. Dedicated to the memory of Edward Norton Lorenz. World Scientific, 2010.

[11] Daniel A . Pink Noise in Physics and Music. The University of Nottingham, School of Physics and Astronomy, 2015.

[12] (05.03.2020.) `https://www.electronicdesign.com/technologies/analog/article/21794903/understanding-noise-terms-in-electronic-circuits`

[13] Smolić, I. Matematičke metode fizike, 2016. Skripta iz kolegija ”Matematičke metode fizike”.

[14] (05.03.2020.) https://www.tek.com/support/faqs/what-fft-fast-fourier-transform-math-function-oscilloscope-useful

[15] (07.03.2020.) https://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/16074/PHILIPS/BB204.html

[16] Radić, D. Nastavna skripta iz kolegija Diferencijalne jednadžbe i dinamički sustavi. 2014.

[17] Krsnik, Rudolf. Metodički priručnik za nastavnike. Školska knjiga, Zagreb 2003.

[18] Krsnik, Rudolf. Fizika 3, udžbenik fizike za III. razred gimnazije, B inačica programa. Školska knjiga, Zagreb 1998.

[19] Paar Vladimir. Fizika 3, udžbenik fizike za III. razred gimnazije, A inačica programa. Školska knjiga, Zagreb 2002.

[20] Labor, Jakov. Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazije, Alfa, Zagreb 2008.

[21] (4.3.2020.) https://www.falstad.com/circuit/e-lrc.html

[22] (07.03.2020.) https://scientificsentence.net/Equations/Electrostatics/index.php?key=yes&Integer=oscillations