Procesi obnavljanja u teoriji rizika

Lubina, Zorana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Zorana Lubina

PROCESI OBNAVLJANJA U TEORIJI RIZIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Zoran Vondraček

Zagreb, veljača 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima i blizanki Aneli u znak zahvalnosti za neizmjernu ljubav i podršku.

Sadržaj

Uvod

Tijekom svog života susrećemo se s različitim oblicima neživotnog osiguranja - osiguranjem od nezgode, osiguranjem imovine ili na primjer osiguranjem cestovnih vozila koje je zakonski regulirano. Usluge neživotnog osiguranja pružaju financijske institucije - društva za osiguranje koja su dobila odobrenje za rad od regulatora - Hrvatske agencije za nadzor financijskih usluga. U svojem poslovanju osiguravajuće društvo (osiguratelj) preuzima rizik i za to naplaćuje premiju od svog klijenta (osiguranika). Prema posljednjim podacima (rujan 2019.) u Hrvatskoj je ukupno 15 osiguravajućih društava koja nude usluge neživotnog osiguranja sa zaračunatom bruto premijom od gotovo 5.8 mlrd HRK za razdoblje 1.1.2019. – 30.9.2019. Kako bismo pobliže objasnili kako osiguranje funkcionira, uzmimo primjer osiguranja cestovnih vozila. Prema ugovoru osiguratelja i osiguranika, osiguranik plaća određenu svotu novca (premiju) osiguratelju na početku perioda trajanja osiguranja, obično jedne godine. Ukoliko se tijekom trajanja osiguranja dogodi nesreća koja je uzrokovala štetu na vozilu, osiguratelj pokriva troškove popravka vozila. Dva su izvora neizvjesnosti za osiguratelja: koliko će šteta osiguranik prijaviti i koliki su iznosi tih šteta. Teorija rizika, kao dio aktuarske znanosti, daje nam matematički model za ukupan broj šteta i matematički model za ukupan iznos tih šteta. Zajedno, ova dva modela čine sastavni dio modela rizika teorije propasti. Glavni dijelovi ovoga rada upravo su gornja tri modela strukturno podijeljena u pet poglavlja. Za početak, navedimo glavne pretpostavke koje koristimo u nastavku, pri čemu vjerojatnosni prostor označavamo s $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Štete se događaju u trenutcima T_i za koje vrijedi $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ Nazivamo ih vremena dolazaka šteta.
- Šteta u trenutku T_i uzrokuje iznos štete X_i. Niz $\{X_i : i \geq 1\}$ je niz nezavisnih, jednako distribuiranih nenegativnih slučajnih varijabli.
- Nizovi slučajnih varijabli $\{T_i : i \geq 1\}$ i $\{X_i : i \geq 1\}$ su međusobno nezavisni.

U prvom poglavlju uvodimo pojam *procesa ukupnog broja šteta* koji predstavlja ukupan broj šteta koje su nastupile do određenog trenutka t. Opisan je matematički model za taj brojeći proces - Poissonov proces, pri čemu je poseban naglasak stavljen na homogeni

Poissonov proces. Povijesno gledano, švedski aktuar Filip Lundberg prvi je 1903. godine u svom radu opisao *proces ukupnog broja šteta* homogenim Poissonovim procesom. Stoga se u literaturi često ta godina smatra početkom razvoja teorije rizika. U drugom poglavlju proširujemo analizu brojećeg procesa i uvodimo pojam procesa obnavljanja. Proces obnavljanja predstavlja sveobuhvatni model za *proces ukupnog broja šteta* kojeg je 1957. godine predložio danski matematičar Erik Sparre Andersen. Navedeni su i dokazani granični teoremi teorije obnavljanja koji su ključni u razumijevanju osnovnih svojstava *procesa ukupnog broja šteta*. Treće poglavlje daje pregled distribucija iznosa štete, pri čemu su posebno izdvojene distribucije teškog repa - regularno varirajuće i subeksponencijalne distribucije, koje su sve više korištene u praksi. U četvrtom poglavlju uvodimo pojam *procesa ukupnog iznosa šteta* koji predstavlja ukupan iznos šteta koje su nastupile do određenog trenutka t. Poseban doprinos u modeliranju ovog procesa dao je švedski matematičar Harald Cramér. Prikazana svojstva matematičkog modela za taj proces pomoći će nam u formiranju principa računanja premija. Dio poglavlja posvećen je i određivanju distribucije ukupnog iznosa šteta do trenutka t uz određene pretpostavke. Posljednje, peto poglavlje opisuje *proces rizika* te objašnjava osnovne rezultate teorije propasti. Istaknimo kako je cilj ovoga rada prikazati osnovne koncepte teorije rizika te dobivene rezultate interpretirati u kontekstu neživotnog osiguranja. Za praćenje i razumijevanje sljedećeg sadržaja potrebna su osnovna znanja teorije vjerojatnosti i teorije mjere.

Poglavlje 1

Proces ukupnog broja šteta

U ovom poglavlju fokusiramo se na vremena dolazaka šteta u osiguranju koja smo u uvodnom dijelu označili s T_i. Često je od interesa znati koliko šteta je osiguravajuće društvo isplatilo do određenog trenutka t. U tu svrhu definiramo brojeći proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ kojega nazivamo *proces ukupnog broja šteta*:

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}.$$

Primijetimo da vrijedi:

(1) Za dano $t \geq 0$, $N(t)$ je slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$.

(2) Za $0 \leq t_1 < t_2$ vrijedi $N(t_1) \leq N(t_2)$.

(3) $N(t_1, t_2] := N(t_2) - N(t_1)$ je ukupan broj šteta u intervalu $(t_1, t_2]$.

Cilj nam je naći matematički model za proces N. Jedan od najvažnijih primjera brojećih procesa u primijenjenoj teoriji stohastičkih procesa je Poissonov proces kojega u nastavku proučavamo. Poglavlje je podijeljeno u dva dijela. U prvom dijelu definiramo i navodimo osnovna svojstva homogenog Poissonovog procesa. U drugom dijelu dajemo općenitu definiciju Poissonovog procesa te objašnjavamo vezu homogenog i nehomogenog Poissonovog procesa.

1.1 Homogeni Poissonov proces

Homogeni Poissonov proces je polazni primjer Poissonovog procesa zbog veoma poželjnih teorijskih svojstava i povijesne važnosti. Istaknut ćemo njegovu interpretaciju u kontekstu teorije rizika kao modela za *proces ukupnog broja šteta*. Za početak, podsjetimo se nekih osnovnih pojmova iz teorije stohastičkih procesa koje ćemo koristiti u nastavku.

Definicija 1.1.1. *Neka je* $X = (X(t))_{t\geq 0}$ *stohastički proces na* $[0, \infty)$.

(1) (Nezavisnost prirasta) Neka su $t_i \geq 0$ *za* $i = 0, 1, \dots, n$ *proizvoljni takvi da je* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *za* $n \geq 1$. *Ako su slučajne varijable* $X(t_i) - X(t_{i-1})$ *za* $i = 1, 2, \dots, n$ *nezavisne, tada slučajni proces* X *ima nezavisne priraste.*

(2) (Stacionarnost prirasta) Neka su $0 \leq t_1 < t_2$ *i* $s \geq 0$ *proizvoljni. Ako su slučajne varijable* $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ *i* $X(t_2) - X(t_1)$ *jednako distribuirane, tada slučajni proces* X *ima stacionarne priraste.*

Definicija 1.1.2. *Neka je* X *nenegativna slučajna varijabla. Laplaceova transformacija slučajne varijable* X *definirana je sa* $\mathcal{L}_X(t) = \mathbb{E}[e^{-tX}]$, $t \geq 0$.

Primjer 1.1.3. *Neka je* $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, *Poissonova slučajna varijabla s parametrom* λ. *Tada je* $\mathcal{L}_X(t) = e^{\lambda(e^{-t}-1)}$ *za* $t \geq 0$.

Definicija 1.1.4. *Brojeći proces* $N = (N(t))_{t\geq 0}$ *je homogeni Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *ako je:*

(1) $N(0) = 0$.

(2) N *ima nezavisne priraste.*

(3) Broj događaja u bilo kojem intervalu duljine t *je Poissonova slučajna varijabla s parametrom* λt, *tj. za svaki* $s, t \geq 0$ *vrijedi:*

$$\mathbb{P}(N(s, t+s] = n) = \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{1.1}$$

Ako je $\lambda = 1$, *tada govorimo o standardnom homogenom Poissonovom procesu.*

Iz relacije (1.1) slijedi:

(1) N ima stacionarne priraste jer distribucija $N(t+s) - N(s)$ ne ovisi o s.

(2) Uzmimo $s = 0$. Dobivamo da je:

$$N(t) = N(t+0) - N(0) \sim \mathrm{Pois}(\lambda t), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

U praksi, za dani brojeći proces, nije uvijek jednostavno provjeriti uvjet (1.1) iz definicije 1.1.4. Zato ćemo navesti još jednu definiciju homogenog Poissonovog procesa koja se u nekim situacijama pokazuje korisnom. Zatim, u nastavku, pokazujemo da su definicije ekvivalentne.

Definicija 1.1.5. *Brojeći proces* $N = (N(t))_{t\geq 0}$ *je homogeni Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *ako je:*

(1) $N(0) = 0$.

(2) N *ima nezavisne i stacionarne priraste.*

(3)

$$\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), \tag{1.3}$$

$$\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h), \tag{1.4}$$

gdje je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Teorem 1.1.6. *Definicije 1.1.4 i 1.1.5 su ekvivalentne.*

Dokaz. Već smo komentirali da iz definicije 1.1.4 slijedi svojstvo stacionarnosti prirasta i relacija (1.2). Sada uz pomoć relacije (1.2) i Taylorovog razvoja funkcije e^x dobivamo relacije (1.3) i (1.4). Time smo pokazali da definicija 1.1.4 povlači definiciju 1.1.5. Obratno, fiksirajmo $u \geq 0$ i stavimo:

$$g(t) = \mathbb{E}[e^{-uN(t)}].$$

Izvedimo diferencijalnu jednadžbu za $g(t)$ koristeći svojstva nezavisnosti i stacionarnosti prirasta procesa N:

$$\begin{aligned} g(t+h) &= \mathbb{E}[e^{-uN(t+h)}] = \mathbb{E}[e^{-uN(t)}e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \\ &\overset{nez.}{=} \mathbb{E}[e^{-uN(t)}]\mathbb{E}[e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \\ &\overset{stac.}{=} g(t)\mathbb{E}[e^{-uN(h)}]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Uzimajući u obzir događaje $\{N(t) = 0\}$, $\{N(t) = 1\}$ i $\{N(t) \geq 2\}$ te relacije (1.3) i (1.4) dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-uN(h)}] &= 1 - \lambda h + o(h) + e^{-u}(\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= 1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h + o(h). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sada iz relacija (1.5) i (1.6) slijedi:

$$g(t+h) = g(t)(1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h) + o(h), \tag{1.7}$$

odnosno

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = g(t)\lambda(e^{-u} - 1) + \frac{o(h)}{h}. \tag{1.8}$$

Sada pustimo $h \to 0$ i dobivamo:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(e^{-u} - 1). \tag{1.9}$$

Integrirajući i uvažavajući $g(0) = 1$ slijedi:

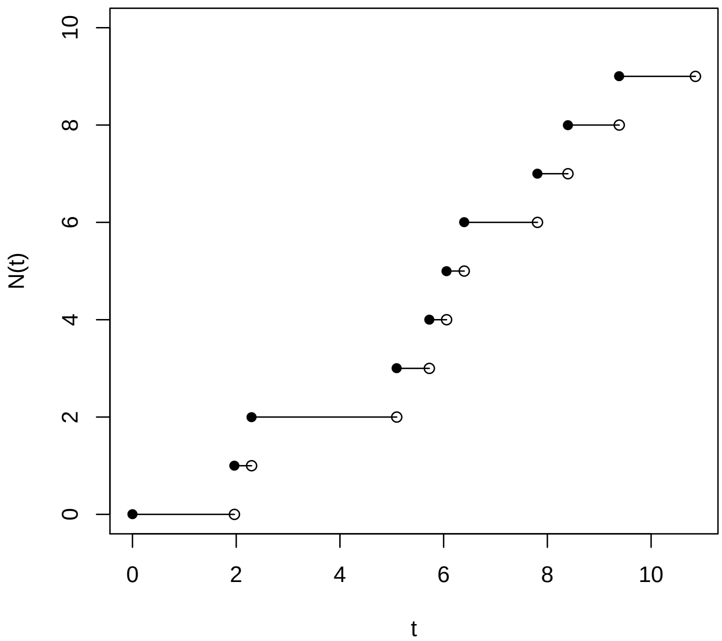
$$\log(g(t)) = \lambda t(e^{-u} - 1), \tag{1.10}$$

odnosno

$$g(t) = e^{\lambda t(e^{-u}-1)}. \tag{1.11}$$

Dobili smo da je funkcija g Laplaceova transformacija Poissonove slučajne varijable. Slijedi da je $N(t)$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom λt. Uz pomoć te tvrdnje i svojstva stacionarnosti prirasta procesa N dobivamo relaciju (1.1). Time smo pokazali da definicija 1.1.5 povlači definiciju 1.1.4. □

Primijetimo još jednu posljedicu iz relacije (1.4): vjerojatnost dolaska više od jedne štete u proizvoljnom intervalu duljine h je reda $o(h)$. Kako smanjujemo duljinu intervala h tako se i pripadna vjerojatnost smanjuje, što znači da je „vrlo malo" vjerojatno da u kratkom vremenskom intervalu homogeni Poissonov proces ima više od jednog skoka.



Slika 1.1: Trajektorija standardnog homogenog Poissonovog procesa

Propozicija 1.1.7. *Neka su $N_1 = (N_1(t))_{t\geq 0}$ i $N_2 = (N_2(t))_{t\geq 0}$ dva nezavisna homogena Poissonova procesa s intenzitetima λ_1 i λ_2 redom. Proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ definiran sa*

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad \forall t \geq 0,$$

je homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Dokaz. Dokaz se provodi direktnom provjerom uvjeta iz definicije 1.1.4. Trivijalno vrijedi $N(0) = 0$. Nezavisnost prirasta procesa N slijedi iz nezavisnosti prirasta procesa N_1 i N_2 te iz njihove međusobne nezavisnosti. Posljednji uvjet iz definicije slijedi iz činjenice da je zbroj dviju nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli ponovo Poissonova slučajna varijabla čiji je intenzitet zbroj intenziteta slučajnih varijabli koje zbrajamo. □

Prethodna propozicija lako se poopćava na slučaj od j nezavisnih homogenih Poissonovih procesa za $j = 2, 3, \ldots$. Obratno, homogeni Poissonov proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ s intenzitetom λ možemo razložiti na j nezavisnih homogenih Poissonovih procesa (za detalje vidi [5, str. 235–236]).

Definicija 1.1.8. *Neka je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces. Slučajne varijable $W_i = T_i - T_{i-1}$ za $i = 1, 2, \ldots$, uz konvenciju $T_0 = 0$, nazivamo vremena međudolazaka šteta, gdje je T_i vrijeme dolaska i-te štete.*

Propozicija 1.1.9. *Neka je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. Slučajne varijable W_i, $i = 1, 2, \ldots$ su nezavisne, jednako distribuirane s eksponencijalnom distribucijom s parametrom λ. Nadalje,*

$$f_{W_1,W_2,\ldots,W_n}(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \lambda^n e^{-\lambda(w_1+w_2+\cdots+w_n)}, \quad w_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.12}$$

gdje je f funkcija gustoće slučajnog vektora $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$.

Dokaz. Uzmimo $t \geq 0$ i primijetimo da je $\{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$. Slijedi da je:

$$\mathbb{P}(W_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \tag{1.13}$$

odnosno $\mathbb{P}(W_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Zaključujemo da slučajna varijabla W_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Nadalje, za svaki $t \geq 0$ i $n \geq 1$ vrijedi:

$$\{W_n > t\} = \{N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0\}.$$

Sada iz nezavisnosti prirasta procesa N slijedi nezavisnost slučajnih varijabli W_i. Iz svojstva stacionarnosti prirasta procesa N dobivamo:

$$\mathbb{P}(W_n > t) = \mathbb{P}(N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}. \tag{1.14}$$

Zaključujemo da su slučajne varijable W_i jednako distribuirane s eksponencijalnom razdiobom s parametrom λ. Posljednja tvrdnja propozicije je jednostavna posljedica pokazanog. □

Iz propozicije 1.1.9 slijedi:

(1) $T_i < T_{i+1}$ *g.s.* za $i \geq 1$, odnosno s vjerojatnošću 1 homogeni Poissonov proces nema skokove veće od 1.

(2) Slučajna varijabla $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ za $n \geq 1$ ima gamma distribuciju s parametrima n i λ. Pišemo $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

(3) Koristeći relaciju (1.12) i transformaciju

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \xrightarrow{S} (z_1, z_2 - z_1, \dots, z_n - z_{n-1}),$$

uz $\det(\partial S(\mathbf{z})/\partial \mathbf{z}) = 1$, dobivamo funkciju gustoće slučajnog vektora $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ za $0 < x_1 < \cdots < x_n$:

$$f_{T_1,T_2,\dots,T_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{W_1,W_2,\dots,W_n}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}. \quad (1.15)$$

Propozicija 1.1.10. *Neka je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. Vrijeme dolaska prve štete T_1 uvjetno na događaj $\{N(t) = 1\}$ ima uniformnu distribuciju na intervalu $(0, t]$, pišemo: $T_1 \,|\, \{N(t) = 1\} \sim \mathrm{Unif}(0, t]$.*

Dokaz. Za $0 < s \leq t$ imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq s \,|\, N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\
&\overset{nez.\, i\, stac.}{=} \frac{(\lambda s e^{-\lambda s}) e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.
\end{aligned} \quad (1.16)$$

□

Sada ćemo generalizirati prethodnu propoziciju na način da ćemo odrediti distribuciju slučajnog vektora $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ uvjetno na događaj $\{N(t) = n\}$. Krećemo sa slučajem $n = 2$. Neka je $0 < t_1 < t_2 \leq t$. Računamo:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, N(t) = 2) \\
&= \mathbb{P}(N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) = 1, N(t) - N(t_2) = 0) + \mathbb{P}(N(t_1) = 2, N(t) - N(t_1) = 0) \\
&\overset{nez.\, i\, stac.}{=} \left(\lambda t_1 e^{-\lambda t_1} \lambda(t_2 - t_1) e^{-\lambda(t_2 - t_1)} e^{-\lambda(t - t_2)}\right) + \left(\frac{(\lambda t_1)^2}{2!} e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t - t_1)}\right) \\
&= \left(\lambda^2 t_1 (t_2 - t_1) + \frac{(\lambda t_1)^2}{2!}\right) e^{-\lambda t}.
\end{aligned} \quad (1.17)$$

Koristeći relaciju (1.17) slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2 \,|\, N(t) = 2) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, N(t) = 2)}{\mathbb{P}(N(t) = 2)} \\ &= \frac{(\lambda^2 t_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(\lambda t_1)^2)e^{-\lambda t}}{\frac{1}{2}(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{2t_1(t_2 - t_1) + {t_1}^2}{t^2},\end{aligned} \tag{1.18}$$

odnosno

$$f_{T_1,T_2\,|\,N(t)}(t_1, t_2 \,|\, 2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left\{\frac{2t_1(t_2 - t_1)}{t^2} + \frac{{t_1}^2}{t^2}\right\} = \frac{2}{t^2}, \quad 0 < t_1 < t_2 \leq t.$$

Propozicija 1.1.11. *Neka je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. Funkcija gustoće slučajnog vektora $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ uvjetno na događaj $\{N(t) = n\}$ dana je sa:*

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_n\,|\,N(t)}(t_1, t_2, \ldots, t_n \,|\, n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t.$$

Dokaz. Analognim postupkom kao u slučaju $n = 2$ dobivamo traženu funkciju gustoće za proizvoljan n. Dokaz se može vidjeti u [5, str. 241–242]. Ovdje ćemo sada pokazati drugi, intuitivniji dokaz koristeći tvrdnju iz propozicije 1.1.10 da vrijeme dolaska štete u intervalu $(0, t]$ uvjetno na $\{N(t) = 1\}$ ima uniformnu distribuciju na tom intervalu. Sada promatramo n takvih dolazaka šteta kao vrijednosti n nezavisnih uniformnih slučajnih varijabli na intervalu $(0, t]$ u rastućem redoslijedu. Označimo uniformne slučajne varijable sa U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Postoji ukupno $n!$ načina na koja možemo slučajne varijable U_i poredati u rastućem redoslijedu. Nadalje, uz argument nezavisnosti slučajnih varijabli U_i, funkcija gustoće slučajnog vektora $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ je umnožak funkcija gustoće slučajnih varijabli U_i. Za $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t$ imamo sljedeće:

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_n\,|\,N(t)}(t_1, t_2, \ldots, t_n \,|\, n) = n! f_{U_1,U_2,\ldots,U_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}.$$

□

Na kraju ovoga dijela istaknimo najvažnije zaključke. Vidjeli smo da homogeni Poissonov proces ima svojstvo stacionarnosti prirasta. U kontekstu neživotnog osiguranja, očekivani broj šteta u vremenskom periodu ovisi samo o duljini tog perioda. Nadalje, pokazali smo da je distribucija vremena dolazaka šteta u uskoj vezi sa uniformnom distribucijom. Mogli bismo postaviti pitanje koliko je to u skladu sa stvarnim svijetom osiguranja. Primjerice, nije nerazumno pretpostaviti da se u osiguranjima od različitih vremenskih nepogoda više šteta događa u pojedinom periodu godine nego u ostalima. To nam je motivacija za definiranje nehomogenog Poissonovog procesa. Ideja je da dopustimo da intenzitet λ ovisi o vremenu.

1.2 Nehomogeni Poissonov proces

Uvedimo sljedeću notaciju radi jednostavnosti: za realnu funkciju f na $[0, \infty)$ pišemo:

$$f(s, t] = f(t) - f(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Definicija 1.2.1. *Stohastički proces $N = (N(t))_{t \geq 0}$ je Poissonov proces ako vrijedi sljedeće:*

(1) $N(0) = 0$ g.s.

(2) Proces ima nezavisne priraste.

(3) Postoji neopadajuća, neprekidna zdesna funkcija $\mu \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\mu(0) = 0$, takva da prirasti $N(s, t]$ za $0 \leq s < t < \infty$ imaju Poissonovu distribuciju $\mathrm{Pois}(\mu(s, t])$. Funkciju μ zovemo funkcijom očekivanja Poissonovog procesa.

(4) S vjerojatnošću 1, trajektorije $(N(t, \omega))_{t \geq 0}$ procesa N su zdesna neprekidne za $t \geq 0$ i imaju limes slijeva za $t > 0$.

Napomena 1.2.2. *(1) Uočimo: Poissonov proces kojemu je funkcija očekivanja oblika $\mu(t) = \lambda t$ za $\lambda > 0$ je homogeni Poissonov proces. Inače, govorimo o nehomogenom Poissonovom procesu.*

(2) Općenito, kažemo da N ima funkciju intenziteta λ ako je funkcija μ apsolutno neprekidna, odnosno za $s < t$ prirast $\mu(s, t]$ ima reprezentaciju:

$$\mu(s, t] = \int_s^t \lambda(y)\, dy,$$

za nenegativnu izmjerivu funkciju λ. Posljedica toga je da je μ neprekidna.

(3) Iz definicije 1.2.1 slijedi:

$$N(t) = N(t) - N(0) = N(0, t] \sim \mathrm{Pois}(\mu(0, t]) = \mathrm{Pois}(\mu(t)). \tag{1.19}$$

(4) Za Poissonov proces N s neprekidnom funkcijom intenziteta λ korištenjem definicije 1.2.1 i Taylorovog razvoja funkcije e^x u red pokaže se da za $t \geq 0$, $s \geq 0$ vrijedi (vidi [6, str. 14]):

$$\mathbb{P}(N(t, t + s] \geq 2) = o(s), \tag{1.20}$$

$$\mathbb{P}(N(t, t + s] = 1) = \lambda(t)s + o(s). \tag{1.21}$$

Zaključujemo da N ima stacionarne priraste akko $\lambda(t) = \lambda$ za $\lambda > 0$. Nadalje „vrlo malo" je vjerojatno da u kratkom vremenskom intervalu N ima više od jednog skoka.

Sljedeća propozicija nam daje vezu između homogenog i nehomogenog Poissonovog procesa. Pokazujemo da se u većini slučajeva determinističkom promjenom vremena možemo prebaciti s nehomogenog Poissonovog procesa na homogeni Poissonov proces.

Propozicija 1.2.3. *Neka je μ funkcija očekivanja Poissonovog procesa N i neka je $\tilde{N}$ standardni homogeni Poissonov proces. Tada vrijedi sljedeće:*

(1) Proces $(\tilde{N}(\mu(t)))_{t\geq 0}$ je Poissonov s funkcijom očekivanja μ.

(2) Ako je μ neprekidna, strogo rastuća i $\lim_{t\to\infty}\mu(t) = \infty$ onda je $(N(\mu^{-1}(t)))_{t\geq 0}$ standardni homogeni Poissonov proces.

Dokaz. Dokaz se provodi direktnom provjerom definicijskih uvjeta Poissonovog procesa.

(1) Definiramo $\hat{N}(t) := \tilde{N}(\mu(t))$.

- $\hat{N}(0) = \tilde{N}(\mu(0)) = \tilde{N}(0) = 0$.
- Uzmimo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n \geq 1$. Budući da je funkcija μ neopadajuća vrijedi: $0 = \mu(t_0) \leq \mu(t_1) \leq \cdots \leq \mu(t_n)$. Sada iz nezavisnosti prirasta standardnog homogenog Poissonovog procesa $\tilde{N}(\mu(t_{i-1}), \mu(t_i)]$ slijedi nezavisnost prirasta $\hat{N}(t_{i-1}, t_i]$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Uzmimo $0 < s < t < \infty$. Ponovno koristeći činjenicu da je funkcija μ neopadajuća i da je $\tilde{N}$ standardni homogeni Poissonov proces dobivamo: $\hat{N}(s,t] = \tilde{N}(\mu(s), \mu(t)] \sim \mathrm{Pois}(\mu(t) - \mu(s)) = \mathrm{Pois}(\mu(s,t])$.
- Iz činjenice da je funkcija μ neopadajuća i zdesna neprekidna i $\tilde{N}$ standardni homogeni Poissonov proces slijedi da su trajektorije procesa $\hat{N}$ zdesna neprekidne za $t \geq 0$ i imaju limes slijeva za $t > 0$.

Zaključujemo da je $\hat{N}$ ponovo Poissonov proces na $[0, \infty)$. S obzirom da je distribucija Poissonovog procesa određena njegovom funkcijom očekivanja i da vrijedi:

$$\hat{\mu}(t) = \mathbb{E}\hat{N}(t) = \mathbb{E}\tilde{N}(\mu(t)) = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

zaključujemo da je $N \stackrel{d}{=} \hat{N}$, u smislu jednakosti konačno-dimenzionalnih distribucija dvaju stohastičkih procesa.

(2) Za ovaj dio dokaza imamo pretpostavku da je funkcija μ neprekidna i strogo rastuća što nam osigurava postojanje njezinog inverza μ^{-1}. Definiramo $\tilde{N}(t) := N(\mu^{-1}(t))$. Analogno kao gore koristeći svojstva iz definicije Poissonovog procesa pokaže se da je $\tilde{N}$ standardni homogeni Poissonov proces na $[0, \infty)$.

□

Napomena 1.2.4. *U drugom dijelu gornje propozicije pretpostavljamo da je* $\lim_{t\to\infty}\mu(t) = \infty$. *Ukoliko inverz funkcije* μ *postoji, taj uvjet nam osigurava da je* μ^{-1} *definirana na* $[0,\infty)$. *U slučaju konačnog limesa,* $\lim_{t\to\infty}\mu(t) = y$ *za neki* $y > 0$, μ^{-1} *je definirana na* $[0, y)$ *i tada* $(N(\mu^{-1}(t)))_{t\geq 0}$ *možemo interpretirati kao standardni homogeni Poissonov proces na intervalu* $[0, y)$.

Zadržimo oznake T_i i W_i za vremena dolazaka odnosno međudolazaka šteta Poissonovog procesa i izvedimo jednostavnu posljedicu gornje propozicije. Označimo sa $\tilde{T}_i$ vremena dolazaka šteta standardnog homogenog Poissonovog procesa $\tilde{N}$ i μ funkciju očekivanja Poissonovog procesa N koja je neprekidna i strogo rastuća. Tada njezin inverz postoji i $\hat{N} \stackrel{d}{=} N$, gdje je

$$\hat{N} = \#\{i \geq 1 : \tilde{T}_i \leq \mu(t)\} = \#\{i \geq 1 : \mu^{-1}(\tilde{T}_i) \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Zaključujemo da za vremena dolazaka šteta T_n Poissonovog procesa N vrijedi:

$$T_n = \mu^{-1}(\tilde{T}_n). \tag{1.22}$$

Sada pokažimo kako uz pomoć relacije (1.22) rezultate o homogenom Poissonovom procesu možemo primijeniti na slučaj nehomogenog Poissonovog procesa.

Propozicija 1.2.5. *Neka je* N *Poissonov proces na* $[0,\infty)$ *s neprekidnom i pozitivnom funkcijom intenziteta* λ. *Tada vrijedi:*

(1) Funkcija gustoće slučajnog vektora $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ *dana je sa:*

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-\mu(x_n)} \prod_{i=1}^{n} \lambda(x_i), \quad 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n. \tag{1.23}$$

(2) Funkcija gustoće slučajnog vektora $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ *dana je sa:*

$$f_{W_1,W_2,\ldots,W_n}(w_1, w_2, \ldots, w_n) = e^{-\mu(w_1+w_2+\cdots+w_n)} \prod_{i=1}^{n} \lambda(w_1 + w_2 + \cdots + w_i), \quad w_i \geq 0. \tag{1.24}$$

Dokaz. (1) S obzirom da je λ pozitivna i neprekidna, slijedi da je μ strogo rastuća te postoji njezin inverz. Štoviše, μ je diferencijabilna i vrijedi $\mu'(t) = \lambda(t)$. Uzmimo sada $0 < x_1 < \cdots < x_n$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq x_1, \ldots, T_n \leq x_n) &= \mathbb{P}(\mu^{-1}(\tilde{T}_1) \leq x_1, \ldots, \mu^{-1}(\tilde{T}_n) \leq x_n) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{T}_1 \leq \mu(x_1), \ldots, \tilde{T}_n \leq \mu(x_n)) \\
&= \int_0^{\mu(x_1)} \cdots \int_0^{\mu(x_n)} f_{\tilde{T}_1,\ldots,\tilde{T}_n}(y_1, \ldots, y_n)\, dy_n \cdots dy_1 \\
&= \int_0^{\mu(x_1)} \cdots \int_0^{\mu(x_n)} e^{-y_n} \mathbb{1}_{\{y_1 < \cdots < y_n\}}\, dy_n \cdots dy_1
\end{aligned}$$

gdje smo koristili relaciju (1.15) uz $\lambda = 1$. Sada deriviranjem dobivamo traženu gustoću.

(2) Relacija (1.24) slijedi iz pokazane relacije (1.23) primjenom transformacije

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \xrightarrow{S} (y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

pri čemu je $\det(\partial S(\mathbf{y})/\partial \mathbf{y}) = 1$,

$$f_{W_1, W_2, \ldots, W_n}(w_1, w_2, \ldots, w_n) = f_{T_1, T_2, \ldots, T_n}(w_1, w_1 + w_2, \ldots, w_1 + \cdots + w_n).$$

$\square$

Poglavlje 2

Procesi obnavljanja

Procesi obnavljanja modeliraju pojavljivanja događaja kojeg promatramo u vremenu. Zbog svoje strukture i svojstava te primjene u različitim područjima čine važan dio teorije vjerojatnosti. U kontekstu neživotnog osiguranja, poslužit će nam kao općeniti model za *proces ukupnog broja šteta*. Poglavlje je podijeljeno u tri dijela. Na početku definiramo osnovne pojmove i pokazujemo da je homogeni Poissonov proces specijalan slučaj procesa obnavljanja. Zatim navodimo i dokazujemo granične teoreme teorije obnavljanja. Na kraju uvodimo pojam jednadžbe obnavljanja.

2.1 Definicija i polazni primjer

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(W_n : n \geq 1)$ *niz nenegativnih, nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Dodatno, pretpostavimo da nisu identički jednake nuli:* $\mathbb{P}(W_n < 0) = 0$, $\mathbb{P}(W_n = 0) < 1$ *za* $n \geq 1$*. Niz (proces) obnavljanja* $T = (T_n : n \geq 0)$ *definiran je sa:*

$$T_0 = 0, \quad T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \quad n \geq 1.$$

Proces $N = (N(t))_{t \geq 0}$ *definiran sa* $N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$, $t \geq 0$ *naziva se brojeći proces obnavljanja.*

Slučajne varijable T_i i W_i predstavljanju vremena obnavljanja i međuobnavljanja, odnosno u neživotnom osiguranju, vremena dolazaka i međudolazaka šteta.

Definicija 2.1.2. *Prvo vrijeme prelaska preko nivoa t je proces* $\nu = (\nu(t))_{t \geq 0}$ *definiran sa:*

$$\nu(t) = \min\{n \geq 1 : T_n > t\}, \quad t \geq 0.$$

Uočimo da vrijedi: $\nu(t) = N(t) + 1$ za $t \geq 0$. Nadalje, $N(t)$ nije vrijeme zaustavljanja u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n = \sigma(W_1, W_2, \cdots, W_n)$ zbog $\{N(t) \leq n\} = \{T_{n+1} > t\}$. Zatim, lako uočavamo da je $\nu(t)$ vrijeme zaustavljanja u odnosu na $\mathcal{F}_n$. Ta će nam činjenica biti važna prilikom dokazivanja elementarnog teorema obnavljanja.
Istaknimo vezu između procesa obnavljanja T i pripadnog brojećeg procesa N sljedećim relacijama:

$$\{N(t) \leq n\} = \{T_{n+1} > t\}, \ n \geq 0, \tag{2.1}$$

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}, \tag{2.2}$$

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \ n \geq 0. \tag{2.3}$$

Polazni primjer procesa obnavljanja je homogeni Poissonov proces kojega smo proučili u prethodnom poglavlju.

Teorem 2.1.3. *Neka su brojeći proces* $N = (N(t))_{t\geq 0}$ *i niz obnavljanja* $T = (T_n : n \geq 0)$ *dani sa:*

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \ t \geq 0,$$

$$T_0 = 0, \ T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \ n \geq 1,$$

gdje su slučajne varijable W_i*, za* $i = 1, 2, \ldots,$ *nezavisne i jednako distribuirane s eksponencijalnom razdiobom s parametrom* $\lambda > 0$*. Tada je* N *homogeni Poissonov proces s intenzitetom* λ*.*

Dokaz. Dokaz provodimo tako da direktno provjeravamo uvjete iz definicije 1.1.4. S obzirom da je $W_1 > 0\, g.s.$ slijedi da je $N(0) = 0\, g.s.$ Sada pokazujemo da $N(t)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt. Uočimo da T_n ima gamma distribuciju s parametrima n i λ, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, stoga je:

$$\mathbb{P}(T_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, \ x \geq 0. \tag{2.4}$$

Korištenjem relacije (2.3) dobivamo:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \tag{2.5}$$

Nadalje, pokazujemo svojstva nezavisnosti i stacionarnosti prirasta. Radi lakšeg zapisa fokusiramo se na slučaj od dva prirasta. Opći slučaj ide analogno. Uzmimo $t, h > 0$ i pokažimo da za sve $k, l \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t, t+h) &= \mathbb{P}(N(t) = k, N(t, t+h] = l) \\ &= \mathbb{P}(N(t) = k)\mathbb{P}(N(t, t+h] = l) \\ &= \mathbb{P}(N(t) = k)\mathbb{P}(N(h) = l) \\ &= \frac{(\lambda t)^k (\lambda h)^l}{k!\, l!} e^{-\lambda(t+h)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Slučaj $l = k = 0$ je trivijalan, stoga uzmimo $l = 0, k \geq 1$. Vrijedi sljedeća relacija:

$$\{N(t) = k, N(t, t+h] = l\} = \{N(t) = k, N(t+h) = k+l\}. \tag{2.7}$$

Korištenjem (2.3) i (2.7) uz $l = 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t, t+h) &= \mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1}, T_k \leq t+h < T_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_k \leq t, t+h < T_k + W_{k+1}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sada iskoristimo činjenicu da je $T_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ i $W_{k+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t, t+h) &= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t+h-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx\, dz \\ &= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t+h-z)} dz \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda(t+h)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Time smo dobili relaciju (2.6) za $l = 0$. Za $l \geq 1$ ideja dokaza je analogna i može se pronaći u [6, str. 18]. Sada iz pokazane relacije (2.6) slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t, t+h] = l) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = k, N(t, t+h] = l) \\ &= \frac{(\lambda h)^l}{l!} e^{-\lambda h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda h)^l}{l!} e^{-\lambda h}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\mathbb{P}(N(t) = k, N(t, t+h] = l) = \mathbb{P}(N(t) = k)\mathbb{P}(N(t, t+h] = l). \tag{2.11}$$

Time su uvjeti iz definicije 1.1.4 zadovoljeni. □

Homogeni Poissonov proces je brojeći proces obnavljanja gdje su slučajne varijable W_i eksponencijalno distribuirane. U prethodnom poglavlju smo objasnili da on nije uvijek realističan model za *proces ukupnog broja šteta*. Stoga, u idućem poglavlju, razmotrit ćemo još neke vjerojatnosne distribucije za slučajne varijable W_i, često korištene u praksi. U tom smislu, proces obnavljanja predstavlja sveobuhvatan model za *proces ukupnog broja šteta*.

2.2 Granični teoremi

U ovom dijelu navodimo neke od najosnovnijih teorema teorije obnavljanja. Motivacija za to je činjenica da u općenitom slučaju distribucija $N(t)$ nije poznata, stoga su sljedeći rezultati od velike važnosti. U dokazima ćemo se pozivati na granične teoreme iz teorije mjere (vidi [14, str. 44–47]) te na fundamentalne teoreme iz teorije vjerojatnosti (vidi [10, str. 416, 507]).

Lema 2.2.1. $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ *g.s.*

Dokaz. Slijedi iz činjenice $\{N(t) > n\} = \{T_{n+1} \leq t\}$ i $T_{n+1} < \infty$ *g.s.* □

Teorem 2.2.2. *(Jaki zakon velikih brojeva za brojeći proces) Pretpostavimo da je* $\mu := \mathbb{E}W_1 < \infty$ *g.s. Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \ g.s.$$

Dokaz. Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mu \ g.s. \tag{2.12}$$

Iskoristimo sada relaciju (2.2):

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)}. \tag{2.13}$$

Pustimo $t \to \infty$ i uvažavajući (2.12) i lemu 2.2.1 dobivamo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mu \ g.s. \tag{2.14}$$

□

Prije sljedećeg rezultata koji govori da se i prosječni očekivani broj obnavljanja asimptotski ponaša kao $1/\mu$ navodimo pomoćni rezultat u literaturi poznat kao Waldova jednakost (dokaz vidi u [8, str. 47]).

Propozicija 2.2.3. *Neka je* $\{X_n : n \geq 1\}$ *niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je* $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. *Pretpostavimo da je* α *vrijeme zaustavljanja u odnosu na niz* $\{X_n : n \geq 1\}$ *i* $\mathbb{E}(\alpha) < \infty$. *Tada je:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\alpha} X_i\right] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[\alpha].$$

Teorem 2.2.4. *(Elementarni teorem obnavljanja) Neka je $\mu := \mathbb{E}(W_1) \leq \infty$. Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Dokaz. Pokazujemo prvo da je:

$$\frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t}. \tag{2.15}$$

Ako je $\mu = \infty$, tvrdnja je očita uz konvenciju $1/\infty = 0$. Za $\mu < \infty$, primjenom teorema 2.2.2 i Fatouove leme dobivamo:

$$\frac{1}{\mu} = \mathbb{E}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right) \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t}. \tag{2.16}$$

Sada pokažimo da je:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}. \tag{2.17}$$

Uzmimo $b > 0$ i definirajmo:

$$W_i^{(b)} = \min(W_i, b), \quad T_0^{(b)} = 0, \; T_i^{(b)} = W_1^{(b)} + W_2^{(b)} + \cdots + W_i^{(b)}, \quad i \geq 1.$$

Očito je $T^{(b)} = (T_n^{(b)} : n \geq 0)$ niz obnavljanja i $T_n \geq T_n^{(b)}$ za $n \geq 0$. Iz toga slijedi da za pripadne brojeće procese vrijedi $N_b(t) \geq N(t)$ za $t \geq 0$, gdje je:

$$N_b(t) = \#\{i \geq 1 : T_i^{(b)} \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Sada je:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N_b(t)}{t}. \tag{2.18}$$

Nadalje, primijetimo da je po definiciji od $N_b(t)$:

$$T_{N_b(t)}^{(b)} = W_1^{(b)} + W_2^{(b)} + \cdots + W_{N_b(t)}^{(b)} \leq t. \tag{2.19}$$

Sjetimo se sada da je prvo vrijeme prelaska preko nivoa t, $\nu_b(t)$ vrijeme zaustavljanja u odnosu na prirodnu filtraciju generiranu nizom $(W_i^{(b)})$ i da vrijedi $\nu_b(t) = N_b(t) + 1$ za $t \geq 0$. Zato iskoristimo sada Waldovu jednakost:

$$\mathbb{E}(T_{N_b(t)+1}^{(b)}) = \mathbb{E}(N_b(t) + 1)\mathbb{E}W_1^{(b)}. \tag{2.20}$$

Uz pomoć relacije (2.19) i činjenice da je $W_i^{(b)} \leq b$ za $i \geq 1$, dobivamo:

$$T_{N_b(t)+1}^{(b)} \leq t + b. \tag{2.21}$$

Sada iz relacija (2.18), (2.20) i (2.21) slijedi:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(T^{(b)}_{N_b(t)+1})}{t\mathbb{E}W_1^{(b)}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{t+b}{t\mathbb{E}W_1^{(b)}} = \frac{1}{\mathbb{E}W_1^{(b)}}. \tag{2.22}$$

Puštanjem $b \to \infty$ i primjenom Lebesqueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi rezultat. □

Teorem 2.2.5. *(Centralni granični teorem za brojeći proces) Ako je* $\mu := \mathbb{E}(W_1) < \infty$ *i* $\sigma^2 := \mathrm{Var}(W_1) < \infty$, *tada* $N(t)$ *ima asimptotski normalnu razdiobu,* $\mathrm{AN}(t\mu^{-1}, t\sigma^2\mu^{-3})$, *odnosno:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \le x\right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je Φ *funkcija distribucije standardne normalne razdiobe.*

Dokaz. Iz centralnog graničnog teorema za niz $(T_n : n \ge 0)$, uniformno za $x \in \mathbb{R}$, vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x). \tag{2.23}$$

Sada računamo:

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \le x\right) = \mathbb{P}\left(N(t) \le \left\lfloor x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right\rfloor\right). \tag{2.24}$$

Uvedimo oznaku $h(t) := \left\lfloor x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right\rfloor$ i primijenimo (2.1) u (2.24). Imamo sljedeće:

$$\mathbb{P}(T_{h(t)+1} > t) = \mathbb{P}\left(\frac{T_{h(t)+1} - \mu(h(t)+1)}{\sigma\sqrt{h(t)+1}} > \frac{t - \mu(h(t)+1)}{\sigma\sqrt{h(t)+1}}\right). \tag{2.25}$$

Ako pokažemo da $h(t) \to \infty$ i $z(t) := \frac{t-\mu(h(t)+1)}{\sigma\sqrt{h(t)+1}} \to -x$ kada $t \to \infty$, tada iz centralnog graničnog teorema i uniformne konvergencije slijedi:

$$\mathbb{P}\left(\frac{T_{h(t)+1} - \mu(h(t)+1)}{\sigma\sqrt{h(t)+1}} > z(t)\right) \to 1 - \Phi(-x) = \Phi(x). \tag{2.26}$$

Vrijedi:

$$h(t) = x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} + \epsilon(t), \quad |\epsilon(t)| \le 1. \tag{2.27}$$

Očito, $h(t) \sim \frac{t}{\mu} \to \infty$. Nadalje, za $z(t)$ imamo:

$$z(t) = \frac{t - \mu x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}} - t - \mu(\epsilon(t) + 1)}{\sigma\sqrt{h(t) + 1}} \sim \frac{-\mu x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} = -x. \tag{2.28}$$

□

Istaknimo još rezultat o asimptotskom ponašanju varijance brojećeg procesa (za dokaz vidi [4, str. 56–59]):

Propozicija 2.2.6. *Neka je* $\mu := \mathbb{E}(W_1)$ *i* $\sigma^2 := \mathrm{Var}(W_1) < \infty$. *Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(N(t))}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}.$$

2.3 Jednadžba obnavljanja

Prije samih definicija funkcije obnavljanja i jednadžbe obnavljanja, ukratko ćemo objasniti integraciju u odnosu na neopadajuću funkciju i pojam konvolucije funkcija.
Neka je $U\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija. Proširimo U na $(-\infty, 0)$ sa $U(t) = 0$ za sve $t < 0$ (takvu konvenciju pretpostavljamo u cijelom odjeljku). Neka je μ mjera na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ takva da za sve $-\infty < a \le b < \infty$ vrijedi:

$$\mu((a,b]) = U(b) - U(a).$$

Zatim, neka je $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Uvedimo oznaku:

$$\int_0^\infty g(x)dU(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)g(x)\mu(dx).$$

Primjećujemo da je gornji integral zapravo integral u odnosu na Lebesque-Stieltjesovu mjeru μ. Za detalje o načinu računanja ovoga integrala vidi [8, str. 177–178].

Definicija 2.3.1. *Neka je* $U\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija te neka je* $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *lokalno ograničena funkcija (ograničena na svakom ograničenom intervalu). Konvolucija funkcija* U *i* g *definira se kao:*

$$(U * g)(t) = \int_0^t g(t-x)dU(x), \quad t \ge 0.$$

Uočimo da je definicija integrala dobra s obzirom da je funkcija g ograničena na $[0,t]$.

Propozicija 2.3.2. *Neka je* $U\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija te* $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *lokalno ograničena funkcija. Tada je:*

(1) $U * g$ *lokalno ograničena i vrijedi:*

$$\sup_{0\le s\le t} |(U*g)(s)| \le \left(\sup_{0\le s\le t} |g(s)|\right) U(t).$$

(2) Ako je g *neprekidna zdesna, tada je* $U * g$ *neprekidna zdesna.*

Dokaz. (1) Neka je $s \le t$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} |(U*g)(s)| &= \left| \int_0^s g(s-x)dU(x) \right| \le \int_0^s |g(s-x)| dU(x) \\ &\le \left(\sup_{0\le s\le t} |g(s)|\right) \int_0^s dU(x) = \left(\sup_{0\le s\le t} |g(s)|\right) U(s) \\ &\le \left(\sup_{0\le s\le t} |g(s)|\right) U(t). \end{aligned}$$

(2) Neka je $t \ge 0$ i $(t_n : n \ge 1)$ opadajući niz takav da je $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Vrijedi:

$$(U*g)(t_n) = \int_0^{t_n} g(t_n - x)dU(x) = \int_0^{t_1} \mathbb{1}_{[0,t_n]}(x) g(t_n - x) dU(x). \tag{2.29}$$

Primijetimo da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[0,t_n]}(x) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x)$ za sve $x \in [0, t_1]$. Nadalje, g je zdesna neprekidna, pa je $\lim_{n\to\infty} g(t_n - x) = g(t - x)$ za sve $x \in [0, t_1]$. Sada korištenjem činjenice da je g lokalno ograničena i uz pomoć Lebesqueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, puštanjem $n \to \infty$ u (2.29) slijedi tvrdnja.

□

Uočimo da je iz gornje propozicije dobro definirana n-struka konvolucija $U^{n*} = U^{(n-1)*} * U$ za $n \ge 1$, uz $U^{0*} = \mathbb{1}_{[0,\infty)}$. Nadalje, ako dodatno pretpostavimo da je g neprekidna zdesna, dobro je definirano $U*(U*g) = (U*U)*g$. Općenito, $U*(U^{(n-1)*}*g) = U^{n*}*g$ za $n \ge 1$. Istaknimo još sljedeće: Neka su X_1 i X_2 nenegativne, nezavisne slučajne varijable s funkcijama distribucije F_1 i F_2. Tada je:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 \le t) = \int_0^t \int_0^{t-x} F_2(dy)\, F_1(dx) = \int_0^t F_2(t-x) F_1(dx) = F_1 * F_2.$$

U slučaju n nenegativnih, nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F, indukcijom se pokaže da vrijedi:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le t) = F^{n*}. \tag{2.30}$$

Definicija 2.3.3. *Neka je $T = (T_n : n \geq 0)$ niz obnavljanja i $N = (N(t))_{t\geq 0}$ pripadni brojeći proces obnavljanja. Funkcija obnavljanja dana je sa: $U(t) = \mathbb{E}N(t)$.*

Uz oznake kao u definiciji 2.1.1, neka je F funkcija distribucije slučajnih varijabli W_i, $i \geq 1$. Tada uz pomoć relacije (2.30) imamo:

$$U(t) = \mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t). \tag{2.31}$$

Definicija 2.3.4. *Neka je $F\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija takva da je $F(t) = 0$ za sve $t < 0$ te $\lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty) < \infty$. Nadalje, neka je $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija takva da je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$. Jednadžba obnavljanja je konvolucijska jednadžba oblika:*

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)dF(x), \quad t \geq 0.$$

Funkcija $Z\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija koja se traži. Kraće pišemo: $Z = z + F * Z$.

Primjer 2.3.5. *Funkcija obnavljanja zadovoljava jednadžbu obnavljanja uz $z = F$:*

$$\begin{aligned}
U(t) &= F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F^{n*}(t) \\
&= F(t) + \left(F * \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n-1)*}\right)(t) \\
&= F(t) + \left(F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}\right)(t) \\
&= F(t) + (F * U)(t).
\end{aligned}$$

Na kraju dajemo rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja jednadžbe obnavljanja (dokaz vidi u [15, str. 94, 100–101]).

Teorem 2.3.6. *Neka je $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija takva da je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$. Nadalje, neka je F neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija takva da je: $F(\infty) \leq 1$, $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$ te neka je $U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$ za $t \geq 0$. Tada je $z + U * z$ jedinstveno lokalno ograničeno rješenje jednadžbe obnavljanja:*

$$Z = z + F * Z.$$

Poglavlje 3

Distribucije u teoriji rizika

Svako osiguravajuće društvo suočava se s podacima o iznosima šteta X_i koji nastupaju u trenutcima T_i. Postavlja se pitanje koji su modeli realistični za njihov opis, da nisu „previše” komplicirani, ali da nam ujedno pružaju dovoljno informacija. Nije nam cilj ulaziti u dubinu statističke analize, nego dajemo pregled najčešćih distribucija iz aktuarske prakse te ističemo njihova najvažnija svojstva. Distribucije koje ćemo navesti su podosta fleksibilne i na zadovoljavajuć način rješavaju probleme iz prakse. Osim za iznose šteta, primjenjuju se i na opis vremena međudolazaka šteta W_i u modelu obnavljanja. Na kraju poglavlja definiramo funkciju očekivanog manjka koja će nam poslužiti kao grafička metoda u razlikovanju klasa distribucija.

3.1 Klase distribucija

Obično je prvi korak u aktuarskoj praksi, pri analizi podataka, odlučiti se između različitih familija vjerojatnosnih distribucija. U ovom dijelu napravit ćemo najčešću podjelu distribucija na distribucije lakih i teških repova. Pri tome uzimamo eksponencijalnu distribuciju kao prirodnu granicu između ovih klasa. Unutar klase distribucija teškog repa navodimo dvije podklase: regularno varirajuće i subeksponencijalne distribucije.

Definicija 3.1.1. *Neka je s F zadana distribucija. Označimo sa $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ za $x \geq 0$, rep distribucije F. Kažemo da je F:*

(1) lakog repa ako je:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty \quad \text{za neki } \lambda > 0.$$

(2) teškog repa ako je:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0 \quad \text{za sve } \lambda > 0.$$

Standardni primjeri distribucija lakog repa su dobro poznate eksponencijalna, gamma i normalna distribucija. Istaknimo kako se u aktuarskoj literaturi takve distribucije nazivaju distribucijama malih šteta. Klasična matematika neživotnog osiguranja upravo je bila koncentrirana na ove distribucije zbog poželjnih svojstava, primjerice nalaze se u eksponencijalnoj familiji distribucija i na njih možemo primijeniti standardne metode procjene parametara. Njihovom eksponencijalnom transformacijom dobivamo distribucije teškog repa: log-gamma i log-normalnu, tj. ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tada je $Y = e^X$ log-normalna.

Primjer 3.1.2. *(Distribucije teškog repa)*

(1) Jednoparametarska Pareto distribucija, oznaka $\mathrm{Par}(\alpha)$*:*

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad \alpha > 0,\ x \geq 1.$$

(2) Dvoparametarska Pareto distribucija, oznaka $\mathrm{Par}(\alpha, k)$*:*

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0,\ k > 0,\ x > 0.$$

(3) Burrova distribucija, oznaka $\mathrm{Bur}(\alpha, k, \tau)$*:*

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^{\tau}}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0,\ k > 0,\ \tau > 0,\ x > 0.$$

Regularno varirajuće distribucije

Log-gamma, Paretova i Burrova distribucija primjeri su regularno varirajućih distribucija, stoga dijele neka zajednička svojstva koja navodimo u nastavku.

Definicija 3.1.3. *Neka je L pozitivna, izmjeriva funkcija na* $(0, \infty)$*. Kažemo da je L sporo varirajuća u* $+\infty$ *ako vrijedi:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1, \quad \textit{za sve } c > 0.$$

Neki od primjera sporo varirajućih funkcija su: konstante, logaritmi i potencije logaritama. Svaka sporo varirajuća funkcija ima sljedeću reprezentaciju (vidi [7, str. 17-19]):

$$L(x) = c_0(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{\epsilon(t)}{t} dt\right\}, \quad \text{za neki } x_0 > 0, x \geq x_0, \tag{3.1}$$

gdje $\epsilon(t) \to 0$ kada $t \to \infty$ i $c_0(t)$ je pozitivna funkcija za koju vrijedi da $c_0(t) \to c_0$, c_0 je pozitivna konstanta. Koristeći tu reprezentaciju pokaže se da za svaki $\delta > 0$ vrijedi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(x)}{x^{\delta}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to \infty} x^{\delta} L(x) = \infty.$$

Definicija 3.1.4. *Neka je L sporo varirajuća funkcija.*

(1) *Za svaki $\delta \in \mathbb{R}$ kažemo da je funkcija*

$$f(x) = x^{\delta} L(x), \quad x > 0,$$

regularno varirajuća s indeksom δ.

(2) *Pozitivna slučajna varijabla X i njezina distribucija su regularno varirajuće s indeksom $\alpha \geq 0$ ako je:*

$$\overline{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = L(x)x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Regularno varirajuće distribucije imaju jako teške repove, stoga nam u osiguranju služe za modeliranje velikih šteta. Poznato je da, ukoliko je X regularno varirajuća s indeksom $\alpha > 0$, tada:

$$\mathbb{E}X^{\delta} = \begin{cases} +\infty, & \delta > \alpha, \\ < \infty, & \delta < \alpha. \end{cases}$$

Gornji rezultat direktna je posljedica reprezentacije sporo varirajuće funkcije (3.1) i rezultata o integralima regularno varirajućih funkcija (vidi [7, str. 17, 19-21]). Postavlja se pitanje, ukoliko štete u osiguranju modeliramo regularno varirajućim distribucijama, kako to utječe na njihovu sumu. O tome govori sljedeći rezultat.

Propozicija 3.1.5. *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, jednako distribuirane regularno varirajuće s indeksom $\alpha > 0$ slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Neka je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ i $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Tada je S_n regularno varirajuća s indeksom α i vrijedi:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $o(1)$ za funkciju $h(x)$ za koju je $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. Propoziciju pokazujemo za $n = 2$. Općeniti slučaj ide analogno. Neka je $G(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)$. Koristeći $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}$ slijedi:

$$\overline{G}(x) \geq 2\overline{F}(x)(1 - o(1)). \tag{3.2}$$

Uzmimo sada $0 < \delta < 1/2$, tada iz

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\}, \tag{3.3}$$

slijedi:

$$\overline{G}(x) \leq 2\overline{F}((1-\delta)x) + \overline{F}(\delta x)\overline{F}(\delta x) = \Big(2\overline{F}((1-\delta)x)\Big)(1 + o(1)). \tag{3.4}$$

Sada pomoću relacija (3.2) i (3.4) dobivamo:

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{2\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{2\overline{F}(x)} \leq (1-\delta)^{-\alpha}. \tag{3.5}$$

Puštanjem $\delta \to 0$ slijedi tvrdnja. Istaknimo još kako je za $n \geq 2$ i $x \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n > x) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = 1 - F^n(x) \\ &= (1 - F(x)) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) = n\overline{F}(x)(1 + o(1)).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Time je propozicija dokazana. □

Zaključimo, pod pretpostavkom regularne varijacije, rep distribucije maksimuma iznosa šteta određuje rep distribucije ukupnog iznosa šteta.

Subeksponencijalne distribucije

Gornja propozicija nam je motivacija za definiranje veće klase distribucija teškog repa koje zovemo subeksponencijalne distribucije. Skup svih subeksponencijalnih distribucija označavmo sa $\mathcal{S}$.

Definicija 3.1.6. *Pozitivna slučajna varijabla X i njezina distribucija su subeksponencijalne ukoliko za niz $\{X_i : i \geq 1\}$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s istom distribucijom kao X vrijedi:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1 \quad \text{za sve } n \geq 2.$$

Primjer subeksponencijalne distribucije koja nije regularno varirajuća je Weibullova distribucija s parametrima $c > 0$ i $0 < \tau < 1$ (vidi [3, str. 51-52, 574]):

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^{\tau}}, \quad x \geq 0.$$

Neka svojstva subeksponencijalne familije distribucija dana su sljedećom propozicijom. Dokaz je dan u [3, str. 41-42].

Propozicija 3.1.7. *(Osnovna svojstva subeksponencijalnih distribucija) Neka je $F \in \mathcal{S}$.*

(1) Za svaki $y > 0$ vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1. \tag{3.7}$$

(2) Za svaki $\epsilon > 0$, $e^{\epsilon x}\overline{F}(x) \to \infty$ *kada* $x \to \infty$.

(3) Za dani $\epsilon > 0$ *postoji konstanta* K *takva da za svaki* $n \geq 2$ *vrijedi:*

$$\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n, \quad x \geq 0. \tag{3.8}$$

Istaknimo nekoliko važnih komentara koji slijede direktno iz gornje propozicije. Iz prvog dijela propozicije uočimo kako repovi $\mathbb{P}(X > x)$ i $\mathbb{P}(X + y > x)$ nisu značajno različiti za veliki x i bilo koji fiksan $y > 0$, tj.

$$\frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{\mathbb{P}(X > x + y, X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \mathbb{P}(X > x + y \,|\, X > x) \to 1.$$

Dakle, u osiguranju, ako štete poprime veliku vrijednost x, vrlo je vjerojatno da će poprimiti još veću vrijednost $x + y$. Nadalje, drugi dio propozicije opravdava ime subeksponencijalne klase distribucija. Rep subeksponencijalne distribucije pada sporije u nulu od bilo koje eksponencijalne funkcije $e^{-\epsilon x}$ za $\epsilon > 0$. Vrijedi:

$$\mathbb{E}\Big(e^{\epsilon X}\Big) \geq \mathbb{E}\Big(e^{\epsilon X}\mathbb{1}_{(y,\infty)}\Big) \geq e^{\epsilon y}\overline{F}(y), \quad y \geq 0.$$

Sada, ukoliko je $F \in \mathcal{S}$, propozicija 3.1.7 povlači $\mathbb{E}(e^{\epsilon X}) = \infty$ za sve $\epsilon > 0$. Za kraj ove diskusije, istaknimo kako subeksponencijalne distribucije imaju veliku ulogu u teoriji ekstremnih vrijednosti. Njihova važnost u osiguranju je modeliranje velikih šteta i zapravo se kaže da su sinonim za distribucije teškog repa. Više rezultata o regularno varirajućim i subeksponencijalnim distribucijama može se naći u [3] i [7].

3.2 Funkcija očekivanog manjka

U aktuarskoj praksi, funkcija očekivanog manjka ima veliki značaj u upravljanju i kontroli rizika zajedno sa *VaR*-om. Na ovom mjestu, pokazat ćemo na koji način nam može poslužiti kao grafička metoda u razlikovanju distribucija lakog i teškog repa.

Definicija 3.2.1. *Neka je* X *nenegativna slučajna varijabla s konačnim očekivanjem i* F *njezina funkcija distribucije. Označimo:* $x_l = \inf\{x : F(x) > 0\}$ *i* $x_r = \sup\{x : F(x) < 1\}$. *Funkcija očekivanog manjka (eng. mean excess loss function ili expected shortfall) dana je sa:*

$$e_F(u) = \mathbb{E}[X - u \,|\, X > u], \quad u \in (x_l, x_r).$$

U kontekstu osiguranja, funkcija očekivanog manjka interpretira se kao očekivani gubitak iznad neke zadane vrijednosti. Za računanje je korisna sljedeća relacija:

Lema 3.2.2.
$$e_F(u) = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^\infty \overline{F}(x)dx, \quad u \in [0, x_r). \tag{3.9}$$

Dokaz. Po definiciji uvjetnog očekivanja slijedi:

$$e_F(u) = \mathbb{E}[X - u \,|\, X > u] = \frac{1}{\mathbb{P}(X > u)} \mathbb{E}[(X - u)\mathbb{1}_{\{X>u\}}] = \frac{1}{\overline{F}(u)} \mathbb{E}[(X - u)_+]. \tag{3.10}$$

Primjenom parcijalne integracije dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - u)_+] &= \int_0^\infty (x - u)_+ dF(x) = \int_u^\infty (x - u)dF(x) = -\int_u^\infty (x - u)d\overline{F}(x) \\ &= -(x - u)\overline{F}(x)\Big|_u^\infty + \int_u^\infty \overline{F}(x)dx = \int_u^\infty \overline{F}(x)dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sada iz relacija (3.10) i (3.11) slijedi tvrdnja. □

Istaknuli smo kako je eksponencijalna distribucija prirodna granica između distribucija lakog i teškog repa. Jedan razlog tome je i sljedeće svojstvo. Neka je $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ za $\lambda > 0$, $x > 0$ eksponencijalna distribucija. Primjena relacije (3.9) vodi do sljedećeg rezultata:

$$e_F(u) = \frac{1}{e^{-\lambda u}} \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Bigg|_u^\infty = \frac{1}{\lambda}. \tag{3.12}$$

Gornje svojstvo nije iznenađujuće ako se prisjetimo „zaboravljivosti” eksponencijalne distribucije, tj. za $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ vrijedi $\mathbb{P}(Y > u + x \,|\, Y > u) = \mathbb{P}(Y > x)$ za $x, u > 0$.

Eksponencijalna (λ)	$\frac{1}{\lambda}$
Gamma (α,β)	$\frac{1}{\beta}(1 + \frac{\alpha-1}{\beta u} + o(\frac{1}{u}))$
Log-gamma (α,β)	$\frac{u}{\alpha-1}(1 + o(1)), \quad \alpha > 1$
Log-normalna (μ,σ^2)	$\frac{\sigma^2 u}{\log u - \mu}(1 + o(1))$
Pareto (α,k)	$\frac{k+u}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1$
Burr (α,k,τ)	$\frac{u}{\alpha\tau-1}(1 + o(1)), \quad \alpha\tau > 1$
Weibull (c,τ)	$\frac{u^{1-\tau}}{c\tau}(1 + o(1))$

Tablica 3.1: Funkcije očekivanog manjka navedenih distribucija

Funkcije očekivanog manjka nekih ostalih distribucija dane su u tablici 3.1 koja je preuzeta iz [6, str. 90]. Sada intuitivno zaključujemo: ako $e_F(u) \to \infty$ kada $u \to \infty$, onda je F distribucija teškog repa, u suprotnom F je distribucija lakog repa.
Ukoliko distribucija iznosa šteta X_i nije poznata, što je čest slučaj u praksi, funkciju distribucije iznosa šteta F zamjenjujemo empirijskom funkcijom distribucije F_n:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(X_i), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je niz $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak iz distribucije F. Opravdanje za to je dobro poznata Glivenko-Cantelli lema:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\, F_n(x) - F(x) \,| \overset{g.s.}{\to} 0.$$

Dobivenu funkciju očekivanog manjka nazivamo empirijska funkcija očekivanog manjka:

$$\begin{aligned} e_{F_n}(u) &= \mathbb{E}_{F_n}[X - u \,|\, X > u] = \frac{\mathbb{E}_{F_n}(X-u)_+}{\overline{F}_n(u)} \\ &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)_+}{\overline{F}_n(u)}, \quad u \in [X_{(1)}, X_{(n)}), \end{aligned} \tag{3.13}$$

gdje su $X_{(1)}$ i $X_{(n)}$ uređajne statistike uzorka $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Alternativno,

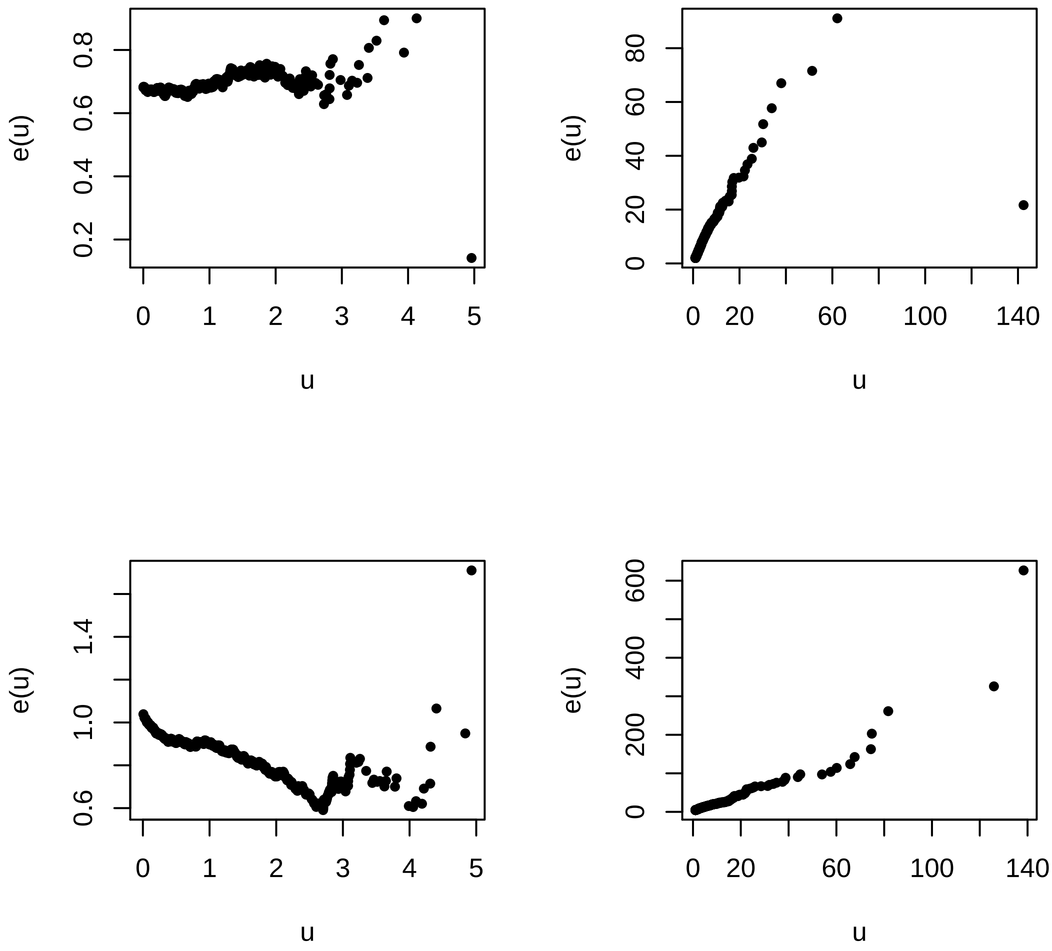
$$e_{F_n}(u) = \frac{\sum_{i:i\le n, X_i>u}(X_i - u)}{\#\{i \le n : X_i > u\}}, \quad u \in [X_{(1)}, X_{(n)}). \tag{3.14}$$

Primjena jakog zakona velikih brojeva u relaciji (3.13) vodi do sljedećeg rezultata ([6, str. 91]):

Propozicija 3.2.3. *Neka su X_i nezavisne, jednako distribuirane, nenegativne slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Ako je $\mathbb{E}X_1 < \infty$, tada za svaki $u > 0$, $e_{F_n}(u) \overset{g.s.}{\to} e_F(u)$ kada $n \to \infty$.*

Istaknuli smo da će nam funkcija očekivanog manjka poslužiti kao grafička metoda u razlikovanju klasa distribucija. U tu svrhu dan je graf očekivanog manjka (*ME-plot*) na temelju uzorka:

$$\{\, (X_{(k)}, e_{F_n}(X_{(k)})) : k = 1, 2, \ldots, n-1 \,\}.$$



Slika 3.1: Graf očekivanog manjka za 1000 simuliranih podataka iz eksponencijalne(1.5) (gore lijevo), Pareto(1.5) (gore desno), gamma(1.5, 1.5) (dolje lijevo) i log-gamma(1.5,1.5) distribucije (dolje desno).

Poglavlje 4

Proces ukupnog iznosa šteta

U prethodnim poglavljima uveli smo pojam *procesa ukupnog broja šteta* te smo naveli i opisali najvažnija svojstva matematičkih modela za taj proces. Za osiguravajuće društvo nije bitan samo podatak o ukupnom broju šteta do određenog trenutka t, nego i ukupni iznosi šteta X_i do trenutka t. Iznosima šteta posvećuje se posebna pažnja s obzirom da uzrokuju odljev sredstava te time predstavljaju rizik za osiguravajuće društvo. Stoga, definiramo proces $S = (S(t))_{t\geq 0}$ kojega nazivamo *proces ukupnog iznosa šteta*:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Pretpostavljamo sljedeće:

(1) Iznosi šteta X_i su nenegativne, nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

(2) *Proces ukupnog broja šteta* $N = (N(t))_{t\geq 0}$ nezavisan je od niza $\{X_i : i \geq 1\}$.

Poglavlje je podijeljeno na tri dijela. Za početak, kao i ranijim pristupom, krećemo od slučaja kada je N homogeni Poissonov proces. Zatim, navodimo i pokazujemo asimptotska svojstva procesa S kada je N proces obnavljanja te dajemo pregled principa računanja premija u osiguranju. Na kraju, poglavlje zaključujemo razmatranjem distribucije od $S(t)$.

4.1 Cramér-Lundbergov model

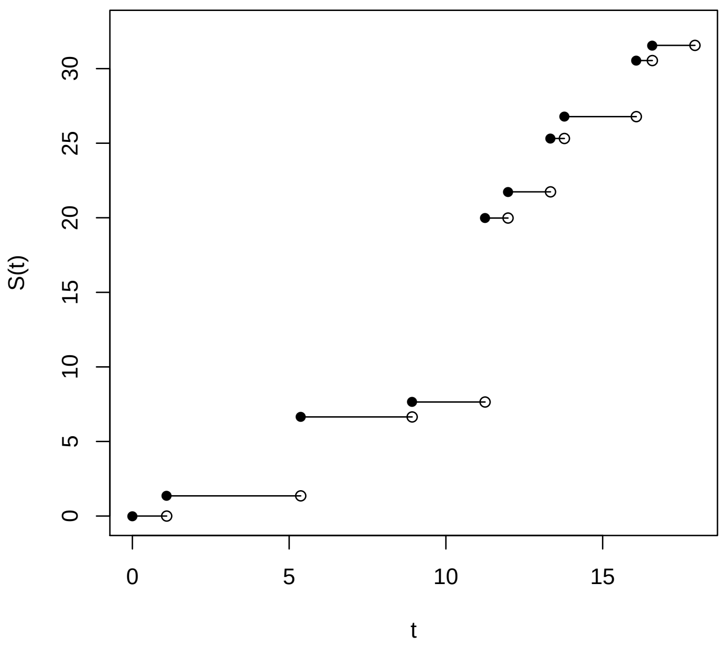
U ovom dijelu opisat ćemo osnovna svojstva procesa S kada je N homogeni Poissonov proces. Takav pristup ima povijesni značaj, stoga se u literaturi taj model naziva Cramér-Lundbergov model, po švedskim matematičarima Haraldu Craméru i Filipu Lundbergu koji se smatraju osnivačima teorije rizika. Razmatranja započinjemo s nekoliko pojmova koji će nam koristiti u nastavku.

Definicija 4.1.1. *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Karakteristična funkcija slučajne varijable X je funkcija $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana sa:*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) dF(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) dF(x).$$

Budući da je $|e^{itx}| \leq 1$, karakteristična funkcija je dobro definirana za svaki $t \in \mathbb{R}$ i za svaku slučajnu varijablu X. Štoviše, karakteristična funkcija slučajne varijable na jedinstven način određuje njezinu distribuciju.

Definicija 4.1.2. *Neka je $\{p_i : i \geq 1\}$ niz takav da je $p_i \geq 0$ za $i = 1, 2, \ldots$ i $\sum_i p_i = 1$. Nadalje, neka je $\{F_i : i \geq 1\}$ niz distribucija realnih slučajnih varijabli. Funkcija G dana sa $G(x) = \sum_i p_i F_i$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ je funkcija distribucije i naziva se miješana distribucija.*



Slika 4.1: Trajektorija procesa S gdje je N standardni homogeni Poissonov proces i $X_i \sim$ Par(1)

Definicija 4.1.3. *Neka je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ te neka je $\{X_i : i \geq 1\}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F, nezavisan od procesa N. Slučajni proces $S = (S(t))_{t\geq 0}$ dan sa:*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0,$$

naziva se složeni Poissonov proces. Za fiksni $t \geq 0$ kažemo da slučajna varijabla $S(t)$ ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrima $(\lambda t, F)$.

Za početak ćemo izvesti karakterističnu funkciju slučajne varijable $S(t)$ i taj ćemo rezultat koristiti prilikom dokazivanja najvažnijih svojstava složenog Poissonovog procesa. Neka je $u \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Računamo:

$$\begin{aligned}
\phi_{S(t)}(u) &= \mathbb{E}[e^{iuS(t)}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[e^{iuS(t)} \,|\, N(t)]\,] \\
&\overset{nez.}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{j=1}^{k} X_j}\right]\mathbb{P}(N(t)=k) \overset{nez.}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}[e^{iuX_1}]\right)^k \mathbb{P}(N(t)=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\phi_{X_1}(u)\right)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t(1-\phi_{X_1}(u))}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Propozicija 4.1.4. *Složeni Poissonov proces ima nezavisne i stacionarne priraste.*

Dokaz. Neka su $t, s \geq 0$ proizvoljni. Pomoću karakteristične funkcije određujemo distribuciju $S(s, t+s]$.

$$\begin{aligned}
\phi_{S(s,t+s]}(u) &= \mathbb{E}[e^{iuS(s,t+s]}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{j=N(s)+1}^{N(t+s)} X_j} \,|\, N(s), N(t+s)\right]\right] \\
&\overset{nez.}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{j=k+1}^{n} X_j}\right]\mathbb{P}(N(s)=k, N(t+s)=n) \\
&\overset{nez.}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\phi_{X_1}(u)\right)^{n-k} \mathbb{P}(N(s)=k)\mathbb{P}(N(s,t+s]=n-k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\phi_{X_1}(u)\right)^{n-k}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda(s+t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda s)^k(\lambda t\phi_{X_1}(u))^{n-k} \\
&= e^{-\lambda(s+t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda s + \lambda t\phi_{X_1}(u))^n = e^{-\lambda t(1-\phi_{X_1}(u))} = \phi_{S(t)}(u).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pokazali smo da distribucija od $S(s, t+s]$ ne ovisi o s i da je $S(s, t+s] \overset{D}{=} S(t)$. Time smo dokazali svojstvo stacionarnosti prirasta. Za svojstvo nezavisnosti prirasta treba pokazati da je za $0 \leq s < t$:

$$\phi_{S(s),S(s,t]}(u_1, u_2) = \phi_{S(s)}(u_1)\phi_{S(s,t]}(u_2), \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Dokaz se provodi analogno kao gore uz korištenje svojstva stacionarnosti prirasta. □

Sjetimo se da smo u prvom poglavlju pokazali da je zbroj nezavisnih homogenih Poissonovih procesa ponovo homogeni Poissonov proces. Ta tvrdnja nam pomaže da pokažemo analogan rezultat u slučaju složenog Poissonovog procesa.

Propozicija 4.1.5. *Neka su složeni Poissonovi procesi $S_i = (S_i(t))_{t\geq 0}$ dani sa:*

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_j^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdje su $N_i = (N_i(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonovi procesi s intenzitetima λ_i i $\{X_j^{(i)} : j \geq 1\}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli za svako fiksno i. Tada je proces $\tilde{S} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ ponovo složeni Poissonov proces s reprezentacijom:

$$\tilde{S}(t) \overset{D}{=} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

gdje je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ i $\{Y_i : i \geq 1\}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s miješanom razdiobom $p_i := \lambda_i/\lambda$ i $F_i = F_{X_1^{(i)}}$, nezavisan od N.

Dokaz. Uvažavajući gornje definicije od λ, p_i i F_i definiramo slučajnu varijablu J nezavisnu od $X_1^{(i)}$ na način da je $\mathbb{P}(J = i) = p_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Uočimo da je miješana distribucija slučajne varijable Y definirane sa:

$$Y = \mathbb{1}_{\{J=1\}} X_1^{(1)} + \mathbb{1}_{\{J=2\}} X_1^{(2)} + \cdots + \mathbb{1}_{\{J=n\}} X_1^{(n)}$$

jednaka $G_Y(x) = p_1 F_1 + p_2 F_2 + \cdots + p_n F_n$. Njezina karakteristična funkcija dana je sa:

$$\phi_Y(s) = p_1 \phi_{X_1^{(1)}}(s) + p_2 \phi_{X_1^{(2)}}(s) + \cdots + p_n \phi_{X_1^{(n)}}(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Koristeći nezavisnost od S_i i relaciju (4.1) računamo karakterističnu funkciju od $\tilde{S}(t)$ za $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_{\tilde{S}(t)}(s) &= \phi_{S_1(t)}(s)\phi_{S_2(t)}(s) \cdots \phi_{S_n(t)}(s) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \exp\Big\{ -\lambda_j t(1 - \phi_{X_1^{(j)}}(s))\Big\} = \exp\Big\{ -\lambda t\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} p_j \phi_{X_1^{(j)}}(s)\Big)\Big\} \qquad (4.4) \\
&\overset{(4.3)}{=} \exp\{-\lambda t(1 - \phi_Y(s))\}.
\end{aligned}$$

□

4.2 Model obnavljanja

Sada razmatramo općenitiji slučaj procesa S kada je N brojeći proces obnavljanja. Jedno od najvažnijih pitanja u osiguranju je pitanje „veličine” od $S(t)$. Ta informacija je potrebna osiguravajućem društvu u određivanju premija koje pokrivaju gubitke predstavljene procesom S. Idealno bi bilo znati distribuciju od $S(t)$. Stoga, neka je $t \geq 0$ fiksan i $G(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x)$. Uočimo da vrijedi:

$$\mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S(t) \leq x, N(t) = n). \tag{4.5}$$

Nadalje, uz $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$, slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S(t) \leq x, N(t) = n) &= \mathbb{P}(S(t) \leq x \,|\, N(t) = n)\mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right)\mathbb{P}(N(t) = n) = F^{n*}(x)\mathbb{P}(N(t) = n). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sada uvrštavanjem relacije (4.6) u (4.5) slijedi:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)\mathbb{P}(N(t) = n). \tag{4.7}$$

Vidimo da nam je za računanje distribucije od $S(t)$ potrebno znati i distribuciju od $N(t)$. Međutim, napomenuli smo da je u općenitom slučaju distribucija brojećeg procesa obnavljanja nepoznata. Čak i ako je znamo, kao u slučaju homogenog Poissonovog procesa, dodatni problem stvara konvolucija F^{n*} koja ne postoji u zatvorenoj formi za distribucije šteta koje su nam od velikog značaja kao što su Paretova i log-normalna distribucija. Stoga ćemo, na ovom mjestu, dati pregled graničnih rezultata za $S(t)$. Ključnu ulogu imaju granični teoremi teorije obnavljanja. Pitanju distribucije od $S(t)$ vraćamo se na kraju poglavlja.

Propozicija 4.2.1. *Neka je N brojeći proces obnavljanja. Kao i prije, neka su W_i vremena međudolazaka šteta.*

(1) Pretpostavimo da je $\mathbb{E}W_1 := \mu < \infty$ *i* $\mathbb{E}X_1 < \infty$. *Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}.$$

(2) Pretpostavimo da je $\mathrm{Var}(W_1) < \infty$ *i* $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$. *Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(S(t))}{t} = \frac{1}{\mu}\left(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(W_1)\frac{(\mathbb{E}X_1)^2}{\mu^2}\right).$$

U Cramér-Lundbergovom modelu gornje relacije svode se na identitete za svaki $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}S(t) = t\frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}, \quad \mathrm{Var}(S(t)) = t\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{\mu}.$$

Dokaz. (1) Iz činjenice da je N nezavisan od X_i i jednake distribucije slučajnih varijabli X_i imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S(t)) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,|\, N(t)\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \,|\, N(t) = n\right]\mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}X_1\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X_1.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Sada tvrdnja slijedi dijeljenjem relacije (4.8) sa t i puštanjem limesa $t \to \infty$ uz korištenje tvrdnje Elementarnog teorema obnavljanja (Teorem 2.2.4).

(2) Uočimo da je:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,|\, N(t)\right] = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathrm{Var}(X_i \,|\, N(t)) = N(t)\mathrm{Var}(X_1 \,|\, N(t)) = N(t)\mathrm{Var}(X_1), \tag{4.9}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,|\, N(t)\right] = N(t)\mathbb{E}X_1. \tag{4.10}$$

Sada računamo $\mathrm{Var}(S(t))$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S(t)) &= \mathbb{E}[N(t)\mathrm{Var}(X_1)] + \mathrm{Var}(N(t)\mathbb{E}X_1) \\ &= \mathbb{E}N(t)\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N(t))(\mathbb{E}X_1)^2,\end{aligned} \tag{4.11}$$

gdje smo koristili relacije (4.9), (4.10) i formulu:

$$\mathrm{Var}(S(t)) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(S(t) \,|\, N(t))] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}(S(t) \,|\, N(t))]. \tag{4.12}$$

Sada tvrdnja slijedi dijeljenjem relacije (4.11) sa t i puštanjem limesa $t \to \infty$ uz korištenje tvrdnje Elementarnog teorema obnavljanja i asimptotskog rezultata za varijancu brojećeg procesa (Propozicija 2.2.6).

Specijalno, ukoliko je N homogeni Poissonov proces, znamo da su $W_i \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$ te $N(t) \sim \mathrm{Pois}(t/\mu)$ za svaki $t \geq 0$. Stoga, korištenjem činjenice da je $\mathbb{E}N(t) = t/\mu$ i $\mathrm{Var}(N(t)) = t/\mu$ u relacijama (4.8) i (4.11) slijedi posljednja tvrdnja propozicije o Cramér-Lundbergovom modelu. □

Teorem 4.2.2. *Neka je N brojeći proces obnavljanja.*

(1) (Jaki zakon velikih brojeva) Pretpostavimo da je $\mathbb{E}W_1 := \mu < \infty$ *i* $\mathbb{E}X_1 < \infty$. *Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mu} \ g.s.$$

(2) (Centralni granični teorem) Pretpostavimo da je $\mathrm{Var}(W_1) < \infty$ *i* $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$. *Tada je:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S(t))}} \leq x \right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je Φ *funkcija distribucije standardne normalne razdiobe.*

Dokaz. Pokazujemo samo prvi dio teorema. Za drugi dio teorema vidi [3, str. 108]. Imamo sljedeće:

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t)}{N(t)} \frac{N(t)}{t}. \tag{4.13}$$

Označimo sada događaje:

$$\Omega_1 = \{\omega : N(t)/t \to 1/\mu\}, \quad \Omega_2 = \{\omega : S(t)/N(t) \to \mathbb{E}X_1\}.$$

Iz teorema 2.2.2 slijedi da je $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$. Primjenom leme 2.2.1 i jakog zakona velikih brojeva dobivamo da je $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$. Sada tvrdnja teorema slijedi iz $\mathbb{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$. □

Principi računanja premija

Sada dajemo pregled teorijskih principa računanja premija koji se najčešće spominju u aktuarskoj literaturi. Motivacija su nam prethodni rezultati gdje smo pokazali da u modelu obnavljanja očekivanje i varijanca ukupnog iznosa šteta rastu ugrubo linearno za veliki t. U praksi, osiguravajuća društva prilikom računanja premija uzimaju u obzir i neke druge faktore, npr. iznos premija njihove konkurencije, što je izvan okvira ovog teksta. Označimo sa $p(t)$ ukupni dohodak od premija do trenutka t. Neka poželjna svojstva od $p(t)$ su sljedeća:

(1) *Nenegativan dodatak*: $p(t) \geq \mathbb{E}S(t)$.

(2) *Konzistentnost*: Premija za $S(t) + c$ je $p(t) + c$.

(3) *Aditivnost*: Za nezavisne $S_1(t)$ i $S_2(t)$ s pripadnim premijama $p_1(t)$ i $p_2(t)$, premija za $S_1(t) + S_2(t)$ je $p_1(t) + p_2(t)$.

(4) *Homogenost*: Neka je $c > 0$, premija za $cS(t)$ je $cp(t)$.

Principi:

(1) *Neto princip*: $p_{Net}(t) = \mathbb{E}(S(t))$. Premija pokriva očekivani gubitak. U literaturi se još naziva fer tržišna premija. S ekonomskog stajališta nije poželjan princip jer osiguravajuće društvo ne ostvaruje profit. Štoviše, zanemarena su odstupanja gubitka od njegovog očekivanja što se može nepovoljno odraziti na osiguravajuće društvo.

(2) *Princip očekivane vrijednosti*: $p_{EV}(t) = (1 + \theta)\mathbb{E}S(t)$, za neki $\theta > 0$ kojeg interpretiramo kao stopu zarade. S obzirom na izvedene asimptotske rezultate u modelu obnavljanja jasno je da veći θ pruža veću sigurnost osiguravajućem društvu. S druge strane „prevelik” θ čini osiguravajuće društvo manje konkurentnim.

(3) *Princip varijance*: $p_{\mathrm{Var}}(t) = \mathbb{E}S(t) + \alpha\mathrm{Var}(S(t))$, za neki $\alpha > 0$. U modelu obnavljanja, ovaj princip je ekvivalentan principu očekivane vrijednosti u asimptotskom smislu. Uz pomoć propozicije 4.2.1 pokaže se da omjer premija po ovim dvama principima konvergira prema pozitivnoj konstanti kada $t \to \infty$.

(4) *Princip standardne devijacije*: $p_{SD}(t) = \mathbb{E}S(t) + \alpha\sqrt{\mathrm{Var}(S(t))}$, za neki $\alpha > 0$. Motivacija za ovaj princip je centralni granični teorem u modelu obnavljanja (Teorem 4.2.2) kojim se pokaže da kada $t \to \infty$, $\mathbb{P}(S(t) - p_{SD}(t) \leq x) \to \Phi(\alpha)$ za $x \in \mathbb{R}$, gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe. Nadalje, iz propozicije 4.2.1 slijedi da $p_{Net}(t)/p_{SD}(t) \to 1$ kada $t \to \infty$.

Istaknimo kako samo neto princip zadovoljava sva gornja svojstva.

4.3 Panjerova rekurzija

U ovom dijelu vraćamo se pitanju distribucije slučajne varijable $S(t)$ za fiksni $t \geq 0$. Radi jednostavnije notacije, t izostavljamo i pišemo: $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ imajući na umu da se radi o slučajnoj varijabli, a ne o slučajnom procesu. Napomenuli smo kako S ima poprilično kompliciranu strukturu, stoga očekivano računamo distribuciju od S uz restrikcije:

(1) Iznosi šteta X_i su slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$.

(2) Ukupan broj šteta N ima distribuciju iz klase $(a, b, 0)$.

Uz gornje pretpostavke egzaktna metoda određivanja distribucije od S je rekurzivna i dobila je ime po Harryju Panjeru. Jedan je od najvažnijih rezultata u teoriji rizika s velikom primjenom u praksi.

Definicija 4.3.1. *Neka je Y diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$ i označimo sa $q_n := \mathbb{P}(Y = n)$. Kažemo da Y ima distribuciju iz klase $(a, b, 0)$ ukoliko je:*

$$q_0 > 0, \quad q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)q_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Postoje točno tri netrivijalne distribucije u klasi $(a, b, 0)$. Za detaljan dokaz te tvrdnje vidi [2, str. 64–66]:

(a) Poissonova distribucija s parametrom λ za $a = 0$, $b = \lambda \geq 0$.

(b) Binomna distribucija s parametrima n i p za $a = -p/(1-p) < 0$, $b = -a(n+1)$, $n \geq 0$.

(c) Negativna binomna s parametrima p i v za $0 < a = 1 - p < 1$, $b = (1-p)(v-1)$ i $a + b > 0$.

Teorem 4.3.2. *Pretpostavimo da N ima distribuciju iz klase $(a, b, 0)$ te da su iznosi šteta X_i slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$. Tada vjerojatnosti $p_n := \mathbb{P}(S = n)$ zadovoljavaju sljedeće:*

$$p_0 = \begin{cases} q_0, & \text{ako } \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0, \\ \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{P}(X_1 = 0)\right)^N\right], & \text{inače}, \end{cases}$$

$$p_n = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{i=1}^{n} \left(a + \frac{bi}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) p_{n-i}, \quad n \geq 1.$$

Dokaz. Označimo $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ za $n \geq 1$. U prethodnom dijelu izveli smo relaciju (4.7) za distribuciju od S. U diskretnom slučaju imamo relaciju:

$$p_n = \mathbb{P}(S = n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_i = n)\mathbb{P}(N = i), \quad n \geq 0. \tag{4.14}$$

Dokaz počinjemo sa:

$$p_0 = \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(S = 0, N > 0) \tag{4.15}$$

što je jednako q_0 ukoliko je $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$. Inače vrijedi:

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_i = 0)\mathbb{P}(N = i) \\ &= q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(X_1 = 0)\right)^i \mathbb{P}(N = i) = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{P}(X_1 = 0)\right)^N\right]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sada prelazimo na slučaj p_n za $n \geq 1$. Koristimo relaciju (4.14) i činjenicu da distribucija od N pripada klasi $(a, b, 0)$ te $S_0 = 0$:

$$p_n = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_i = n) q_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_i = n)\left(a + \frac{b}{i}\right) q_{i-1}. \tag{4.17}$$

Nadalje, zbog nezavisnosti i jednake distribuiranosti od X_i vrijedi:

$$1 = \mathbb{E}\left(\frac{S_i}{S_i} \,|\, S_i\right) = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{E}\left(\frac{X_k}{S_i} \,|\, S_i\right) = i\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{S_i} \,|\, S_i\right). \tag{4.18}$$

Iskoristimo taj rezultat da dobijemo sljedeće:

$$\mathbb{E}\left(a + \frac{bX_1}{n} \,|\, S_i = n\right) = \mathbb{E}\left(a + \frac{bX_1}{X_1 + X_2 + \cdots + X_i} \,|\, S_i = n\right) = a + \frac{b}{i}. \tag{4.19}$$

Nadalje, računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(a + \frac{bX_1}{n} \,|\, S_i = n\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k \,|\, S_i = n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, S_i - X_1 = n - k)}{\mathbb{P}(S_i = n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(S_{i-1} = n - k)}{\mathbb{P}(S_i = n)}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Sada uvrštavamo relacije (4.19) i (4.20) u relaciju (4.17):

$$\begin{aligned}
p_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(S_{i-1} = n - k) q_{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{i-1} = n - k) q_{i-1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(S = n - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) p_{n-k},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

odnosno

$$p_n = a\mathbb{P}(X_1 = 0) p_n + \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) p_{n-k}. \tag{4.22}$$

□

Napomenimo kako sličnim postupkom dobivamo distribuciju od S kada je distribucija od N iz neke druge klase diskretnih distribucija. Definiramo još dvije takve.

Definicija 4.3.3. *Neka je Y diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}$ i označimo sa $q_n := \mathbb{P}(Y = n)$. Kažemo da Y ima distribuciju iz klase $(a, b, 1)$ ukoliko je:*

$$q_1 > 0, \quad q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Lako uočavamo da iz distribucije iz klase $(a, b, 0)$ možemo dobiti distribuciju iz klase $(a, b, 1)$ raspodjelom mase u 0. Sljedeći primjer veće klase je Schröterova klasa diskretnih distribucija.

Definicija 4.3.4. *Neka je Y diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$ i označimo sa $q_n := \mathbb{P}(Y = n)$. Kažemo da Y ima distribuciju iz Schröterove klase ukoliko je:*

$$q_0 > 0, \quad q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1} + \frac{c}{n} q_{n-2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

uz konvenciju $q_{-1} = 0$.

Vratimo se sada zahtjevu da slučajna varijabla X_i poprima vrijednosti u $\mathbb{N}_0$. U prethodnom poglavlju naveli smo najčešće korištene distribucije za modeliranje šteta. Sve one bile su neprekidne. To znači da, ukoliko želimo primijeniti Panjerovu rekurzivnu formulu, moramo na neki način neprekidnu distribuciju aproksimirati diskretnom distribucijom s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$. Zapravo, možemo napraviti bolju aproksimaciju za $d > 0$ na skupu $d\mathbb{N}_0$. U tom slučaju, $S = d \sum_{i=1}^{N} (X_i/d)$, gdje slučajne varijable X_i/d poprimaju vrijednosti u $\mathbb{N}_0$ kako se i zahtijeva u Teoremu 4.3.2. Cilj ove diskusije je pokazati da je Panjerova rekurzija općenitija nego što se na prvi pogled čini. Što se tiče aproksimacijskih metoda za određivanje distribucije od S moguće je koristiti centralni granični teorem ili metode temeljene na simulacijama poput Monte Carlo i bootstrapa.

Poglavlje 5

Teorija propasti

Nakon što smo proučili *proces ukupnog broja šteta* i *proces ukupnog iznosa šteta*, sada smo spremni istražiti osnovne koncepte teorije propasti. Znamo da priljev sredstava osiguravajućeg društva čine premije koje uplaćuju njegovi osiguranici, a odljev sredstava čine isplate šteta ukoliko nastupi osigurani slučaj. Cilj osiguravajućeg društva je da bude u mogućnosti, u svakom trenutku, pokriti svoje obveze. Štoviše, poželjno je da premije premašuju isplate šteta kako bi osiguravajuće društvo imalo prostora za zaradu. Stoga, glavni fokus teorije propasti je *proces rizika* $R = (R(t))_{t\geq 0}$ definiran sa:

$$R(t) = k + p(t) - S(t),$$

gdje je $k > 0$ početni kapital, $p(t)$ ukupan iznos premija do trenutka t i $S(t)$ ukupan iznos šteta do trenutka t. Istaknimo kako je početni kapital zakonski propisan od strane regulatora zaduženog za nadzor tržišta osiguranja. Pretpostavit ćemo da su premije dane linearnom funkcijom $p(t) = ct$ za $t \geq 0$, gdje je $c > 0$ stopa premije. Nadalje, za *proces ukupnog iznosa šteta* $S = (S(t))_{t\geq 0}$ pretpostavljamo model obnavljanja. Poglavlje je podijeljeno na četiri dijela. Za početak, navodimo osnovne pojmove i pretpostavke. U nastavku pokazujemo Lundbergovu nejednakost koja nam daje gornju ogradu za vjerojatnost propasti. Zatim, glavni dio poglavlja čini vjerojatnost propasti i njezina eksponencijalna aproksimacija u Cramér-Lundbergovom modelu.

5.1 Uvodni pojmovi

Na ovom mjestu prisjetimo se notacije i pretpostavki koje smo uveli u prethodnim poglavljima. *Proces ukupnog broja šteta* $N = (N(t))_{t\geq 0}$ dan je sa:

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\},$$

gdje su T_i vremena dolazaka šteta, a $W_i = T_i - T_{i-1}$ vremena međudolazaka šteta za $i = 1, 2, \ldots$, uz konvenciju $T_0 = 0$. Vremena međudolazaka šteta su nezavisne, jednako distribuirane, pozitivne g.s. slučajne varijable. *Proces ukupnog iznosa šteta* $S = (S(t))_{t\geq 0}$ dan je sa:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

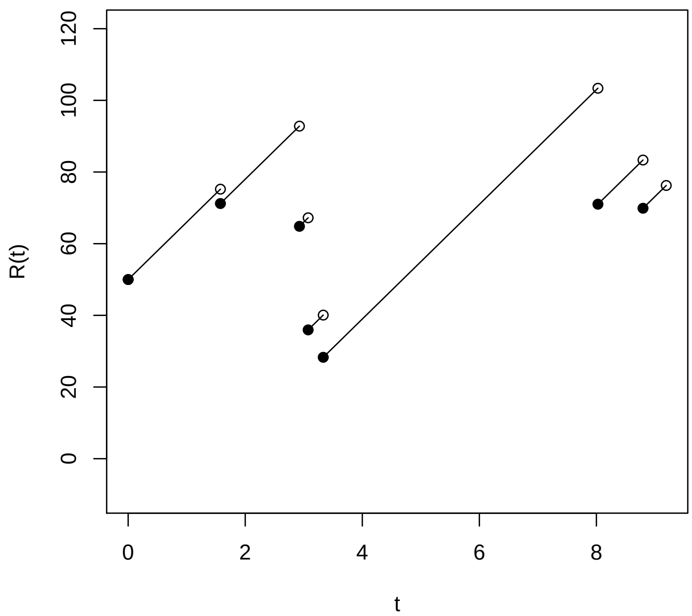
gdje su iznosi šteta X_i nenegativne, nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Pretpostavljamo da su nezavisne od N.

Definicija 5.1.1. *(Propast, vrijeme propasti, vjerojatnost propasti)*

(1) Propast je događaj $\Upsilon = \{R(t) < 0 \text{ za neki } t > 0\}$.

(2) Vrijeme propasti je $\tau = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$.

(3) Vjerojatnost propasti je $\psi(k) = \mathbb{P}(\Upsilon \,|\, R(0) = k) = \mathbb{P}(\tau < \infty), \quad k > 0$.



Slika 5.1: Trajektorija procesa rizika gdje je N standardni homogeni Poissonov proces, $X_i \sim \text{Exp}(1/15)$, $k = 50$ i $c = 16$.

Primijetimo da slučajna varijabla τ nije nužno realna jer može poprimiti vrijednost ∞ s pozitivnom vjerojatnošću. Nadalje, uvjetna vjerojatnost u definiciji vjerojatnosti propasti iskazuje ovisnost vjerojatnosti propasti o početnom kapitalu $k > 0$ koji je konstanta. Nije teško uočiti kako je propast moguća samo u trenutcima T_i za neki $i \geq 1$, s obzirom da u svakom intervalu $[T_i, T_{i+1})$ proces R raste linearno. Obično se niz $(R(T_i))_{i\geq 1}$ naziva *kosturni proces* procesa R. Na temelju ovoga razmatranja imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\Upsilon = \bigcup_{t\geq 0}\{R(t) < 0\} &= \left\{\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} R(T_n) < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\geq 1}\Big(k + p(T_n) - S(T_n)\Big) < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\geq 1}\left(k + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) < 0\right\}.
\end{aligned}$$

Uvedimo sada sljedeće oznake:

$$Y_n = X_n - cW_n, \quad Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1, \quad Z_0 = 0.$$

Uzimajući u obzir da je $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ za $n \geq 1$ imamo:

$$\Upsilon = \left\{\inf_{n\geq 1}(k - Z_n) < 0\right\},$$

odnosno

$$\psi(k) = \mathbb{P}\left(\inf_{n\geq 1}(-Z_n) < -k\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} Z_n > k\right).$$

Vidimo da je određivanje vjerojatnosti propasti ekvivalentno problemu vjerojatnosti da supremum slučajne šetnje Z_n prijeđe nivo k. Za početak, pogledajmo u kojim slučajevima se propast događa s vjerojatnošću 1.

Propozicija 5.1.2. *Pretpostavimo da je $\mathbb{E}W_1 < \infty$ i $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Ukoliko je $\mathbb{E}Y_1 \geq 0$, tada za svaki fiksni $k > 0$ vrijedi $\psi(k) = 1$.*

Dokaz. Primijetimo prvo da je $\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < \infty$. Nadalje, slučajna šetnja $(Z_n)_{n\geq 1}$ zadovoljava jaki zakon velikih brojeva:

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mathbb{E}Y_1, \quad n \to \infty.$$

U slučaju kada je $\mathbb{E}Y_1 > 0$, slijedi da $Z_n \xrightarrow{g.s.} +\infty$, odnosno $\psi(k) = 1$. Za slučaj kada je $\mathbb{E}Y_1 = 0$ koristimo rezultat iz teorije slučajnih šetnji (vidi [12, str. 155]) koji kaže da za g.s. ω postoje podnizovi $(n_k(\omega))$ i $(m_k(\omega))$ takvi da $Z_{n_k}(\omega) \to +\infty$ i $Z_{m_k}(\omega) \to -\infty$. Ponovo dobivamo da je $\psi(k) = 1$. $\square$

Iz gornje propozicije zaključujemo da osiguravajuće društvo, kako bi izbjeglo propast koja se događa s vjerojatnošću 1, treba odrediti premiju $p(t)$ tako da je $\mathbb{E}Y_1 < 0$. Taj uvjet nazvat ćemo uvjet neto profita. Za ilustraciju pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 5.1.3. *(Uvjet neto profita i principi računanja premija) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S. Iz propozicije 4.2.1 znamo da je:*

$$\mathbb{E}S(t) = t\frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}, \quad \mu := \mathbb{E}W_1.$$

Ako premiju računamo po neto principu $p(t) = \mathbb{E}S(t)$ dobivamo da je $c = \mathbb{E}X_1/\mu$. Tada je $\mathbb{E}Y_1 = 0$ te iz prethodne propozicije zaključujemo da je u tom slučaju $\psi(k) = 1$. Taj rezultat u skladu je s intuitivnim razmatranjima o neto principu iz prethodnog poglavlja. Pretpostavimo sada da premiju računamo po principu očekivane vrijednosti:

$$p(t) = (1+\theta)\mathbb{E}S(t), \quad \theta > 0.$$

Dobivamo da je stopa premije tada jednaka:

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}.$$

Tada je uvjet neto profita zadovoljen jer je $\mathbb{E}Y_1 < 0$.

5.2 Lundbergova nejednakost

U ovom dijelu izvest ćemo gornju ogradu za $\psi(k)$ koja se u literaturi naziva Lundbergova nejednakost. Pretpostavljamo model obnavljanja za S i uvjet neto profita. Prije samog rezultata trebaju nam dodatne pretpostavke. Za početak, prisjetimo se definicije funkcije izvodnice momenta slučajne varijable.

Definicija 5.2.1. *Neka je X slučajna varijabla. Pretpostavimo da postoji $h_0 > 0$ takav da je $\mathbb{E}\left(e^{hX}\right) < \infty$ za sve $h \in (-h_0, h_0)$. Funkcija $m_X\colon (-h_0, h_0) \to \mathbb{R}$ definirana sa:*

$$m_X(h) := \mathbb{E}\left(e^{hX}\right)$$

naziva se funkcija izvodnica momenta od X.

Dobro poznato svojstvo funkcije izvodnice momenta iz teorije vjerojatnosti je da ima derivacije svakog reda i da vrijedi ${m_X}^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ za $n \geq 1$. U nastavku pretpostavljamo da funkcija izvodnica momenta slučajne varijable Y_i postoji, što povlači postojanje funkcije izvodnice momenta iznosa šteta X_i. Primijetimo kako iz propozicije 3.1.7 slijedi da ova pretpostavka ne vrijedi za subeksponencijalne distribucije. Dakle, daljnju analizu ograničavamo na „distribucije malih šteta."

Propozicija 5.2.2. *Pretpostavimo da postoji* $0 < h_1 \leq \infty$ *takav da je* $m_{Y_1}(h) < \infty$ *za* $h < h_1$ *i* $\lim_{h \to h_1} m_{Y_1}(h) = \infty$. *Tada postoji jedinstven* $r > 0$ *takav da je* $m_{Y_1}(r) = 1$. *Nadalje,* r *se naziva koeficijent prilagodbe ili Lundbergov koeficijent.*

Dokaz. Označimo sa $f(h) = m_{Y_1}(h)$ za $h \in (-h_0, h_0)$, $h_0 > 0$. Primijetimo prvo da je $f(0) = 1$. Zbog uvjeta neto profita vrijedi: $f'(0) = \mathbb{E}Y_1 < 0$, što zajedno s neprekidnošću od f povlači da f strogo pada na nekoj okolini oko nule. Nadalje, $f''(h) = \mathbb{E}({Y_1}^2 \exp\{hY_1\}) > 0$ zbog $Y_1 \neq 0$ g.s. Iz toga zaključujemo da je f konveksna. Sada uz pomoć pretpostavke da je $\lim_{h \to h_1} m_{Y_1}(h) = \infty$ slijedi tvrdnja. □

Teorem 5.2.3. *(Lundbergova nejednakost) Pretpostavimo model obnavljanja za* S, *uvjet neto profita i postojanje Lundbergovog koeficijenta* $r > 0$. *Tada za svaki* $k > 0$ *vrijedi:*

$$\psi(k) \leq e^{-rk}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Označimo:

$$\psi_n(k) = \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} Z_i > k) = \mathbb{P}(Z_i > k \text{ za neki } i \in \{1, 2, \ldots, n\}). \tag{5.1}$$

Primijetimo da $\psi_n(k) \to \psi(k)$ kada $n \to \infty$ za svaki $k > 0$. Stoga je dovoljno pokazati da:

$$\psi_n(k) \leq e^{-rk}, \quad \forall n \geq 1, k > 0. \tag{5.2}$$

Krenimo sa slučajem $n = 1$. Funkcija $f(y) = e^{ry}$ je strogo rastuća i pozitivna, pa po Markovljevoj nejednakosti imamo:

$$\psi_1(k) = \mathbb{P}(Y_1 > k) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{rY_1})}{e^{rk}} = e^{-rk}. \tag{5.3}$$

Sada pretpostavimo da tvrdnja (5.2) vrijedi za neki $n = j \geq 1$. Provodimo korak indukcije:

$$\begin{aligned} \psi_{j+1}(k) &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq j+1} Z_i > k \right) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 > k) + \mathbb{P}\left(\max_{2 \leq i \leq j+1} (Y_1 + (Z_i - Y_1)) > k, Y_1 \leq k \right) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 > k) + \int_{-\infty}^{k} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq j} (y + Z_i) > k \right) dF_{Y_1}(y) \\ &:= p_1 + p_2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Iskoristimo pretpostavku indukcije kako bismo odredili p_2:

$$\begin{aligned} p_2 &= \int_{-\infty}^{k} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq j} Z_i > k - y \right) dF_{Y_1}(y) = \int_{-\infty}^{k} \psi_j(k - y) dF_{Y_1}(y) \\ &\leq \int_{-\infty}^{k} e^{r(y-k)} dF_{Y_1}(y). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nadalje,

$$p_1 = \int_k^{+\infty} dF_{Y_1}(y) \leq \int_k^{+\infty} e^{r(y-k)} dF_{Y_1}(y). \tag{5.6}$$

Po definiciji Lundbergovog koeficijenta zaključujemo:

$$\psi_{j+1}(k) = p_1 + p_2 \leq e^{-rk} m_{Y_1}(r) = e^{-rk}. \tag{5.7}$$

□

Primjer 5.2.4. *(Lundbergova nejednakost za eksponencijalno distribuirane štete) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S, odnosno neka je N homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. U tom slučaju znamo da su $W_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Nadalje, neka su $X_i \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$. Funkcija izvodnica momenta slučajne varijable $A \sim \mathrm{Exp}(a)$ dana je sa:*

$$m_A(h) = \int_0^{\infty} e^{hx} a e^{-ax} dx = a \int_0^{\infty} e^{(h-a)x} dx = \frac{a}{h-a} e^{(h-a)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a-h}, \quad h < a. \tag{5.8}$$

Sada možemo odrediti funkciju izvodnicu momenta slučajne varijable $Y_1 = X_1 - cW_1$:

$$m_{Y_1}(h) = m_{X_1}(h) m_{cW_1}(-h) = \frac{\gamma}{\gamma - h} \frac{\lambda}{\lambda + ch}, \quad \frac{-\lambda}{c} < h < \gamma. \tag{5.9}$$

Uvjet neto profita je zadovoljen ukoliko je $\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0$, odnosno:

$$\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = \frac{\lambda}{\gamma} < c. \tag{5.10}$$

Pod ovim uvjetom postoji jedinstveno pozitivno rješenje jednadžbe $m_{Y_1}(h) = 1$:

$$\frac{\gamma}{\gamma - h} = \frac{\lambda + ch}{\lambda} = 1 + h\frac{c}{\lambda}, \tag{5.11}$$

i dano je sa (Lundbergov koeficijent):

$$r = \gamma - \frac{\lambda}{c} > 0. \tag{5.12}$$

U slučaju računanja premije po principu očekivane vrijednosti, iz primjera 5.1.3 dobivamo:

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = (1+\theta)\frac{\lambda}{\gamma}. \tag{5.13}$$

Sada je

$$r = \gamma - \frac{\gamma}{1+\theta} = \frac{\gamma\theta}{1+\theta}. \tag{5.14}$$

Zaključujemo da u ovom primjeru Lundbergova nejednakost poprima oblik:

$$\psi(k) \leq \exp\left\{ -\frac{\gamma\theta}{1+\theta} k \right\}, \quad k > 0. \tag{5.15}$$

5.3 Vjerojatnost propasti u Cramér-Lundbergovom modelu

U cijelom ovom dijelu pretpostavljat ćemo Cramér-Lundbergov model za S. Intenzitet homogenog Poissonovog procesa N označit ćemo sa λ. Nadalje, pretpostavljamo uvjet neto profita kojega ćemo izraziti preko principa očekivane vrijednosti kao u primjeru 5.1.3:

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1},$$

odnosno

$$\theta = c\frac{\mathbb{E}W_1}{\mathbb{E}X_1} - 1 > 0,$$

gdje smo parametar $\theta > 0$ iz principa očekivane vrijednosti interpretirali kao stopu zarade ili, možemo reći, da je to dodatak za sigurnost. Dodatno, uvodimo pojam vjerojatnosti opstanka (vjerojatnost preživljenja):

$$\varphi(k) = 1 - \psi(k), \quad k > 0.$$

Cilj nam je izvesti integralnu jednadžbu za φ te na primjerima pokazati kako je možemo primijeniti na računanje vjerojatnosti propasti u Cramér-Lundbergovom modelu.

Teorem 5.3.1. *(Fundamentalna integralna jednadžba za vjerojatnost opstanka) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S i uvjet neto profita te $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Nadalje, pretpostavimo da slučajne varijable X_i imaju gustoću. Tada $\varphi(k)$ zadovoljava sljedeću integralnu jednadžbu:*

$$\varphi(k) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\theta)\mathbb{E}X_1}\int_0^k \overline{F}_{X_1}(y)\varphi(k-y)dy.$$

Dokaz. Prisjetimo se da je uz oznake $Y_n = X_n - cW_n$, $Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ za $n \geq 1$ vjerojatnost propasti dana sa:

$$\psi(k) = \mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq 1} Z_n > k\Big) = 1 - \varphi(k), \tag{5.16}$$

odnosno

$$\varphi(k) = \mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq 1} Z_n \leq k\Big) = \mathbb{P}(Z_n \leq k \text{ za svaki } n \geq 1). \tag{5.17}$$

Sada je:

$$
\begin{aligned}
\varphi(k) &= \mathbb{P}(Y_1 \le k, Z_n - Y_1 \le k - Y_1 \text{ za sve } n \ge 2) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{Y_1 \le k\}} \mathbb{P}(Z_n - Y_1 \le k - Y_1 \text{ za sve } n \ge 2 \,|\, Y_1)\Big) \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{x=0}^{k+cw} \mathbb{P}(Z_n - Y_1 \le k - (x - cw) \text{ za sve } n \ge 2) dF_{X_1}(x) dF_{W_1}(w) \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{x=0}^{k+cw} \mathbb{P}(Z_n \le k - (x - cw) \text{ za sve } n \ge 1) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda w} dw.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Primijetimo da smo u gornjoj relaciji iskoristili nezavisnost slučajne varijable Y_1 od niza $(Z_n - Y_1)_{n\ge2}$. Nadalje, niz $(Z_n - Y_1)_{n\ge2}$ je jednako distribuiran kao niz $(Z_n)_{n\ge1}$. U zadnjoj jednakosti iskoristili smo činjenicu da je $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ zbog pretpostavke o Cramér-Lundbergovom modelu. Primijenimo sada relaciju (5.17) u (5.18):

$$
\varphi(k) = \int_{w=0}^{\infty} \int_{x=0}^{k+cw} \varphi(k - x + cw) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda w} dw. \tag{5.19}
$$

Uvodimo supstituciju $z = k + cw$:

$$
\varphi(k) = \frac{\lambda}{c} e^{k\lambda/c} \int_{z=k}^{\infty} e^{-\lambda z/c} \int_{x=0}^{z} \varphi(z - x) dF_{X_1}(x) dz. \tag{5.20}
$$

Iz pretpostavke da X_i ima gustoću, funkcija

$$
g(z) = \int_0^z \varphi(z - x) dF_{X_1}(x) \tag{5.21}
$$

je neprekidna. Štoviše,

$$
\varphi(k) = \frac{\lambda}{c} e^{k\lambda/c} \int_{z=k}^{\infty} e^{-\lambda z/c} g(z) dz \tag{5.22}
$$

je diferencijabilna. Diferenciranjem relacije (5.20) dobivamo:

$$
\varphi'(k) = \frac{\lambda}{c} \varphi(k) - \frac{\lambda}{c} \int_0^k \varphi(k - x) dF_{X_1}(x). \tag{5.23}
$$

Sada integrirajmo posljednju relaciju i primijenimo parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)-\varphi(0)-\frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(k)dk \\
&=-\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^k \varphi(k-x)dF_{X_1}dk \\
&=-\frac{\lambda}{c}\int_0^t\left[\varphi(k-x)F_{X_1}(x)\Big|_0^k+\int_0^k \varphi'(k-x)F_{X_1}(x)dx\right]dk \\
&=-\frac{\lambda}{c}\int_0^t\left[\varphi(0)F_{X_1}(k)+\int_0^k \varphi'(k-x)F_{X_1}(x)dx\right]dk.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

U zadnjem koraku koristili smo da je $F_{X_1}(0)=0$ zbog $X_1>0$ g.s. Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)-\varphi(0) \\
&=\frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(k)dk-\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t F_{X_1}(k)dk-\frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\Big(\varphi(t-x)-\varphi(0)\Big)dx \\
&=\frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(t-k)dk-\frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\varphi(t-x)dx \\
&=\frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{F}_{X_1}(x)\varphi(t-x)dx.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Primijetimo sada da iz uvjeta neto profita i diskusije s početka ovog dijela slijedi:

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{\lambda}{(1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}}=\frac{1}{(1+\theta)\mathbb{E}X_1}, \tag{5.26}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Napomena 5.3.2. *Označimo sada sa $\tilde{F}_{X_1}$ integrirani rep distribucije F_{X_1}, odnosno*

$$\tilde{F}_{X_1}(y)=\frac{1}{\mathbb{E}X_1}\int_0^y \overline{F}_{X_1}(z)dz, \quad y>0.$$

Primijetimo da je $\tilde{F}_{X_1}$ funkcija distribucije jer $\tilde{F}_{X_1}(y)\to 1$ kada $y\to\infty$, s obzirom da je X_1 nenegativna slučajna varijabla, pa je njezino očekivanje dano sa $\mathbb{E}X_1=\int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(y)dy$. Sada pišemo:

$$\varphi(k)=\varphi(0)+\frac{1}{1+\theta}\int_0^k \varphi(k-y)d\tilde{F}_{X_1}(y).$$

Lema 5.3.3. *Uz pretpostavke kao u teoremu 5.3.1 vrijedi: $\varphi(0)=\theta(1+\theta)^{-1}$.*

Dokaz. Iz uvjeta neto profita i činjenice da $Z_n \to -\infty$ g.s. slijedi da je $\sup_{n\geq 1} Z_n < \infty$ g.s. Stoga, $\varphi(k) \to 1$ kada $k \to \infty$. Uz pomoć napomene 5.3.2 i Lebesqueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{k\to\infty} \varphi(k) = \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta} \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y\leq k\}} \varphi(k-y) d\tilde{F}_{X_1}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^\infty 1 d\tilde{F}_{X_1}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

□

Uz oznaku $q = 1/(1+\theta)$ i $\varphi(k) = 1 - \psi(k)$ dobivamo jednadžbu obnavljanja za $\psi(k)$:

$$\psi(k) = q(1 - \tilde{F}_{X_1}(k)) + \int_0^k \psi(k-x) d(q\tilde{F}_{X_1}(x)). \tag{5.28}$$

Primijetimo da je $\lim_{x\to\infty}(q\tilde{F}_{X_1}(x)) = q < 1$ i da pomoću teorema 2.3.6 možemo riješiti gornju jednadžbu. No, zbog jednostavnosti i sljedećeg važnog primjera i rezultata primijenit ćemo Esscherovu transformaciju kojom ćemo dobiti funkciju distribucije u gornjoj jednadžbi. Definiramo:

$$F^{(r)}(x) := \int_0^x e^{ry} d(q\tilde{F}_{X_1}(y)) = q \int_0^x e^{ry} d\tilde{F}_{X_1}(y) = \frac{q}{\mathbb{E}X_1} \int_0^x e^{ry} \overline{F}_{X_1}(y) dy, \tag{5.29}$$

gdje je r Lundbergov koeficijent. Uočimo da je $F^{(r)}$ neopadajuća. Nadalje, po definiciji Lundbergovog koeficijenta i parcijalnom integracijom pokaže se da kada $x \to \infty$ vrijedi:

$$\frac{q}{\mathbb{E}X_1} \int_0^\infty e^{ry} \overline{F}_{X_1}(y) dy = 1. \tag{5.30}$$

Zaključujemo da je $F^{(r)}$ funkcija distribucije. Pomnožimo sada jednadžbu (5.28) sa e^{rk}:

$$\begin{aligned} e^{rk}\psi(k) &= qe^{rk}(1 - \tilde{F}_{X_1}(k)) + \int_0^k e^{r(k-x)} \psi(k-x) e^{rx} d(q\tilde{F}_{X_1}(x)) \\ &= qe^{rk}(1 - \tilde{F}_{X_1}(k)) + \int_0^k e^{r(k-x)} \psi(k-x) dF^{(r)}(x). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Označimo sada sa $z(t) := qe^{rt}(1 - \tilde{F}_{X_1}(t))$ i $U(t) := \sum_{n=1}^\infty F^{(r)n*}(t)$. Tada je po teoremu 2.3.6 rješenje gornje jednadžbe obnavljanja dano sa:

$$e^{rt}\psi(t) = z(t) + (U * z)(t). \tag{5.32}$$

Iz gornjega primjećujemo da vjerojatnost propasti nije eksplicitno dana. Međutim, ukoliko pretpostavimo da su štete eksponencijalno distribuirane, možemo je prilično jednostavno izračunati. Pogledajmo to u sljedećem primjeru.

Primjer 5.3.4. *(Vjerojatnost propasti u Cramér-Lundbergovom modelu s eksponencijalno distribuiranim štetama) Pretpostavimo da su* $X_i \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$. *Izračunajmo prvo* $z(t)$*:*

$$z(t) = qe^{rt}\left[1 - \gamma \int_0^t e^{-\gamma y} dy\right] = qe^{rt}\left[1 + e^{-\gamma y}\Big|_0^t\right] = qe^{(r-\gamma)t}.$$

Iz primjera 5.2.4, gdje smo računali Lundbergovu nejednakost za slučaj eksponencijalnih šteta, Lundbergov koeficijent jednak je (uz oznaku $q = 1/(1+\theta)$*):*

$$r = \frac{\gamma\theta}{1+\theta} = \gamma(1-q).$$

Sada računamo $F^{(r)}(t)$*:*

$$F^{(r)}(t) = q\gamma \int_0^t e^{(r-\gamma)y} dy = \frac{q\gamma}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)t} - 1\right) = 1 - e^{(r-\gamma)t}.$$

Zaključujemo da je $F^{(r)}$ *funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable s parametrom* $\gamma - r = \gamma q$. *Sada uz pomoć definicije funkcije obnavljanja (definicija 2.3.3) i relacije* (2.31) *funkciju* $U(t)$ *možemo interpretirati kao funkciju obnavljanja* $U(t) = \mathbb{E}N^{(r)}(t)$ *gdje je* $N^{(r)}$ *homogeni Poissonov proces s parametrom* γq. *Slijedi da je* $U(t) = \gamma qt$. *Konačno:*

$$e^{rt}\psi(t) = qe^{(r-\gamma)t} + \int_0^t qe^{(r-\gamma)(t-y)}\gamma q dy = q.$$

Dakle, dobili smo vjerojatnost propasti $\psi(t) = qe^{-rt}$, $t > 0$.

Istaknimo za kraj ovog dijela jedan od fundamentalnih rezultata teorije rizika koji slijedi iz relacije (5.32) korištenjem dodatnih rezultata iz teorije obnavljanja (objašnjenje vidi u [6, str. 62, 166-167]).

Teorem 5.3.5. *(Cramérova aproksimacija) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S i uvjet neto profita. Nadalje, neka slučajne varijable* X_i *imaju gustoću i funkciju izvodnicu momenta na* $(-h_0, h_0)$ *za neki* $h_0 > 0$ *te neka je* $r \in (0, h_0)$ *Lundbergov koeficijent. Tada postoji konstanta* $C > 0$ *takva da je:*

$$C = \lim_{k\to\infty} e^{rk}\psi(k) = \lambda q \int_0^\infty e^{ry}(1 - \tilde{F}_{X_1}(y))dy.$$

5.4 Aproksimacija vjerojatnosti propasti u Cramér-Lundbergovom modelu

U prethodnom dijelu odredili smo vjerojatnost propasti u Cramér-Lundbergovom modelu kada su štete eksponencijalno distribuirane. Sada ćemo opisati jednostavnu metodu koja koristi taj rezultat kao aproksimaciju vjerojatnosti propasti kada štete nisu eksponencijalno distribuirane. Neka je $R(t) = k + ct - S(t)$ *proces rizika* gdje pretpostavljamo Cramér-Lundbergov model za S, odnosno sa λ označavamo intenzitet homogenog Poissonovog procesa N. Nadalje, neka je F distribucija šteta X_i takva da su momenti $u_n := \mathbb{E}[X_1^n]$ konačni za $n = 1, 2, 3$. *Proces rizika* $R = (R(t))_{t\geq 0}$ aproksimiramo *procesom rizika* $\tilde{R} = k + \tilde{c}t - \tilde{S}(t)$, gdje intenzitet homogenog Poissonovog procesa označavamo sa $\tilde{\lambda}$. Štete $\tilde{X}_i$ imaju eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\tilde{\gamma}$. Vjerojatnost propasti za *proces rizika* $\tilde{R}$ dana je sa:

$$\tilde{\psi}(k) = \tilde{q}e^{-\tilde{r}k}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{1+\tilde{\theta}}, \quad \tilde{r} = \tilde{\gamma}(1-\tilde{q}).$$

Sjetimo se da iz uvjeta neto profita imamo sljedeće:

$$\tilde{c} = (1+\tilde{\theta})\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}},$$

odnosno

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}}, \quad \tilde{r} = \tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}.$$

Sada je eksponencijalna, odnosno De Vylderova aproksimacija vjerojatnosti propasti za *proces rizika* R dana sa:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}}\exp\left\{-\left(\tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)k\right\}, \quad k > 0.$$

Parametre $(\tilde{c}, \tilde{\lambda}, \tilde{\gamma})$ dobivamo izjednačavanjem momenata procesa R i $\tilde{R}$. Prvo stavimo:

$$\mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}[\tilde{R}(t)]$$

$$k + ct - \mathbb{E}S(t) = k + \tilde{c}t - \mathbb{E}\tilde{S}(t).$$

Iz propozicije 4.2.1 slijedi da je $\mathbb{E}S(t) = \lambda u_1 t$ i $\mathbb{E}\tilde{S}(t) = \tilde{\lambda}t/\tilde{\gamma}$. Sada iz gornjega slijedi:

$$k + ct - \lambda u_1 t = k + \tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}t}{\tilde{\gamma}}, \tag{5.33}$$

iz čega dobivamo da je

$$\tilde{c} = c - \lambda u_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}}. \tag{5.34}$$

Sljedeći uvjet je:

$$\mathbb{E}\Big[(R(t) - \mathbb{E}[R(t)])^2\Big] = \mathbb{E}\Big[(\tilde{R}(t) - \mathbb{E}[\tilde{R}(t)])^2\Big],$$

koji je ekvivalentan

$$\mathrm{Var}(S(t)) = \mathrm{Var}(\tilde{S}(t)).$$

Ponovo iz propozicije 4.2.1 slijedi:

$$\lambda u_2 = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}^2}. \tag{5.35}$$

Konačno, treći uvjet dan je sa:

$$\mathbb{E}\Big[(R(t) - \mathbb{E}[R(t)])^3\Big] = \mathbb{E}\Big[(\tilde{R}(t) - \mathbb{E}[\tilde{R}(t)])^3\Big],$$

koji je ekvivalentan

$$\mathbb{E}\Big[(S(t) - \mathbb{E}[S(t)])^3\Big] = \mathbb{E}\Big[(\tilde{S}(t) - \mathbb{E}[\tilde{S}(t)])^3\Big].$$

Pomoću funkcije izvodnice momenta lako se pokaže da vrijedi (vidi [2, str. 57]):

$$\mathbb{E}\Big[(S(t) - \mathbb{E}[S(t)])^3\Big] = \lambda u_3 t. \tag{5.36}$$

Sada gornji uvjet glasi:

$$\lambda u_3 = \frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}^3}. \tag{5.37}$$

Iz relacija (5.35) i (5.37) dobivamo parametre $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\gamma} = \frac{3u_2}{u_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\lambda u_2^3}{2u_3^2}. \tag{5.38}$$

Za ilustraciju ove aproksimacije pogledajmo sljedeći primjer gdje ćemo usporediti točne i aproksimativne vjerojatnosti propasti za različite $k > 0$.

Primjer 5.4.1. *Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S, gdje sa λ označavamo intenzitet homogenog Poissonovog procesa. Nadalje, neka su $X_i \sim \Gamma(2, 2)$ te stopa premije dana sa $c = 1.2\lambda$. Gustoća slučajnih varijabli X_i dana je sa:*

$$f(x) = 4xe^{-2x}, \quad x > 0,$$

a za momente $u_n := \mathbb{E}[X_1^n]$ vrijedi sljedeće:

$$u_n = \frac{\Gamma(2+n)}{\Gamma(2)2^n},$$

gdje Γ *označava gamma funkciju danu sa:*

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}dx, \quad \beta > 0.$$

Računanjem momenata za $n = 1,2,3$ *pomoću gornjeg integrala dobivamo:* $u_1 = 1$*,* $u_2 = 3/2$*,* $u_3 = 3$*. Iz gornjih relacija* (5.34) *i* (5.38) *dobivamo parametre* $\tilde{c}$*,* $\tilde{\lambda}$ *i* $\tilde{\gamma}$*.*

$$\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda u_2^3}{2u_3^2} = \frac{9\lambda \times 1.5^3}{2 \times 3^2} = \frac{27\lambda}{16},$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{3u_2}{u_3} = \frac{3 \times 1.5}{3} = \frac{3}{2},$$

$$\tilde{c} = c - \lambda u_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}} = 1.2\lambda - \lambda + \frac{9\lambda}{8} = \frac{53\lambda}{40}.$$

Sada je aproksimacija vjerojatnosti propasti dana sa:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}}\exp\left\{-\left(\tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)k\right\} = \frac{45}{53}\exp\left\{-\frac{12}{53}k\right\}.$$

Kako bismo našli točnu vjerojatnost propasti u ovom primjeru, poslužit će nam Laplaceove transformacije, koje se u nekim situacijama pokazuju izuzetno korisnom tehnikom. Kratak podsjetnik na svojstva Laplaceovih transformacija dan je u [2, str. 138-139]. Sjetimo se sada vjerojatnosti opstanka $\varphi(k) = 1 - \psi(k)$ *i teorema 5.3.1. U dokazu tog teorema dobili smo sljedeću relaciju* (5.23)*:*

$$\varphi'(k) = \frac{\lambda}{c}\varphi(k) - \frac{\lambda}{c}\int_0^k \varphi(k-x)f(x)dx. \tag{5.39}$$

Primijenimo sada Laplaceove transformacije na gornju jednakost, pri čemu oznaka f^* *označava Laplaceovu transformaciju funkcije* f*:*

$$s\varphi^*(s) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\varphi^*(s) - \frac{\lambda}{c}f^*(s)\varphi^*(s), \tag{5.40}$$

odnosno

$$\varphi^*(s) = \frac{c\varphi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))}. \tag{5.41}$$

U našem slučaju f^* *dana je sa:*

$$f^*(s) = 4\int_0^\infty e^{-sx}xe^{-2x}dx = \frac{4}{(2+s)^2}. \tag{5.42}$$

Nadalje, iz leme 5.3.3 računamo $\varphi(0)$*:*

$$\varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{1}{1+\theta}. \tag{5.43}$$

Sada iz uvjeta neto profita

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}, \tag{5.44}$$

uvažavajući da je $c = 1.2\lambda$ *i* $\mathbb{E}X_1 = 1$ *slijedi:*

$$\varphi(0) = 1 - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{6}. \tag{5.45}$$

Konačno, uz izostavljanje tehničkih detalja, imamo:

$$\varphi^*(s) = \frac{0.2\lambda}{1.2\lambda s - \lambda\Big(1 - 4(2+s)^{-2}\Big)} = \frac{(1/6)(2+s)^2}{s(s+C_1)(s+C_2)}, \tag{5.46}$$

gdje su konstante $C_1 = 0.2268$ *i* $C_2 = 2.9399$*. Rastavljanjem na parcijalne razlomke dobivamo:*

$$\varphi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.8518}{s+C_1} + \frac{0.0185}{s+C_2}. \tag{5.47}$$

Invertiranjem Laplaceovih transformacija slijedi:

$$\varphi(k) = 1 - 0.8518e^{-C_1 k} + 0.0185e^{-C_2 k}, \tag{5.48}$$

odnosno

$$\psi(k) = 0.8518e^{-C_1 k} - 0.0185e^{-C_2 k}. \tag{5.49}$$

k	$\psi(k)$	$\tilde{\psi}(k)$
0	0.8333	0.8491
3	0.4314	0.4305
6	0.2185	0.2182
9	0.1107	0.1107
12	0.0560	0.0561
15	0.0284	0.0284
18	0.0144	0.0144

Tablica 5.1: Usporedba točnih i aproksimativnih vrijednosti vjerojatnosti propasti.

Bibliografija

[1] *Hrvatska agencija za nadzor financijskih usluga*. `https://www.hanfa.hr/publikacije/mjesecna-izvjesca/`. (studeni 2019.).

[2] Dickson, D.C.M: *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press, 2005.

[3] Embrechts, P., C. Kluppelberg i T. Mikosch: *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 1997.

[4] Gut, A.: *Stopped Random Walks*. Springer, 1988.

[5] Lefebvre, M.: *Applied Stochastic Processes*. Springer, 2005.

[6] Mikosch, T.: *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer, 2009.

[7] Resnick, S.I.: *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer, 1987.

[8] Resnick, S.I.: *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, 1992.

[9] Ross, S.M.: *Introduction to Probability Models*. Academic Press, an imprint of Elsevier Science, 2010.

[10] Sarapa, N.: *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga, 2002.

[11] Schmidli, H.: *Risk Theory*. Springer, 2017.

[12] Spitzer, F.: *Principles of Random Walk*. Springer, 1976.

[13] Straub, E.: *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer, 1997.

[14] Šikić, H.: *Mjera i integral (skripta)*. dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/mii_predavanja.pdf`. (rujan 2019.).

[15] Vondraček, Z.: *Slučajni procesi (skripta)*. dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp19-predavanja.html`. (rujan 2019.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu prezentirani su osnovni koncepti teorije rizika koja modelira dva izvora neizvjesnosti neživotnog osiguranja: koliko će šteta osiguranik prijaviti i koliki su iznosi tih šteta. U skladu s time, definirani su *proces ukupnog broja šteta* i *proces ukupnog iznosa šteta*. Zajedno, ta dva procesa čine sastavni dio *procesa rizika* koji prati odnos uplaćenih premija i isplaćenih šteta. Rad je podijeljen u pet poglavlja. U prva dva poglavlja opisana su osnovna svojstva matematičkih modela za *proces ukupnog broja šteta* - homogenog Poissonovog procesa i procesa obnavljanja. U trećem poglavlju dan je pregled distribucija iznosa štete, pri čemu je poseban naglasak stavljen na distribucije teškog repa - regularno varirajuće i subeksponencijalne distribucije. U četvrtom poglavlju objašnjena su osnovna svojstva modela za *proces ukupnog iznosa šteta* - Cramér-Lundbergovog modela i modela obnavljanja. Dio poglavlja posvećen je i određivanju distribucije ukupnog iznosa šteta do određenog trenutka t. Posljednje poglavlje prikazuje fundamentalne rezultate teorije propasti čiji je glavni fokus *proces rizika*.

Summary

This thesis presents the basic concepts of risk theory that models two sources of non-life insurance uncertainty: how many claims an insured person will report and what are the amounts of those claims. Accordingly, *claim number process* and *total claim amount process* are defined. Together, these two processes form a constitutive part of the *risk process* that monitors the relation between premiums and claims paid. The paper is divided into five chapters. The first two chapters describe the basic properties of the mathematical models for the *claim number process* - homogeneous Poisson process and renewal process. The third chapter provides an overview of the claim size distributions with particular emphasis on heavy-tailed distributions - regularly varying and subexponential distributions. The fourth chapter explains the basic model properties for the *total claim amount process* - Cramér-Lundberg model and renewal model. Part of the chapter is also devoted to determining the distribution of the total claim amount up to a certain moment t. The last chapter presents the fundamental results of the ruin theory whose main focus is the *risk process*.

Životopis

Rođena sam 18.12.1995. godine u Splitu. Svoje djetinjstvo provela sam u rodnom mjestu u Runoviću, gdje sam završila osnovnu školu. Nakon toga, školovanje nastavljam u Gimnaziji dr. Mate Ujevića u Imotskom, gdje sam pohađala prirodoslovno-matematički smjer. Uspješno položenom državnom maturom osiguravam upis na preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, u srpnju 2014. godine. Prvostupnica matematike postala sam u srpnju 2017. godine te u rujnu iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. Tijekom studija vodila sam demonstrature iz kolegija: Numerička matematika, Euklidski prostori i Modeli geometrije. Na kraju prve godine diplomskog studija odradila sam studentske stručne prakse u Hrvatskoj agenciji za nadzor financijskih usluga - Sektor za investicijske i mirovinske fondove i u Hrvatskoj narodnoj banci - Sektor istraživanja. Pri kraju studija, odrađujem praksu u Erste&Steiermärkische banci - Sektor upravljanja aktivom i pasivom. Na moju veliku čast i ponos, dobitnica sam Nagrade Prirodoslovno-matematičkog fakulteta najboljim studentima i Priznanja Matematičkog odsjeka za iznimàn uspjeh na diplomskom studiju.