Perturbacije diferencijalnih jednadžbi

Vidović, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Vidović

PERTURBACIJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Eduard Marušić-Paloka

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik
2. ____ , član
3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ___________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________________
2. ______________________________________
3. ______________________________________

Sadržaj

Uvod

U mnogim matematičkim problemima zadane jednadžbe nisu egzaktno rješive pa posežemo za alternativnim metodama, npr. **metodom perturbacija**. Perturbacijske metode koriste se u diferencijalnim (običnim i parcijalnim), algebarskim, integralnim i mnogim drugim vrstama jednadžbi koje se javljaju u primijenjenoj matematici. Često se koriste u problemima koji sadrže mali parametar i koji su proizašli iz fizikalnih procesa.

Koeficijenti u perturbacijskim razvojima dobivaju se kao rješenja niza linearnih problema. Članovi najnižeg reda određeni su problemima koji proizlaze iz linearizacije početnog problema, dok do članova višeg reda dolazimo rješavanjem linearnih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi.

Razlikujemo dvije različite metode perturbacija - metodu **regularnih perturbacija** koja se primjenjuje u problemima u kojima direktna primjena perturbacijskog razvoja vodi do uniformne aproksimacije i metodu **singularnih perturbacija** koju koristimo kada metoda regularnih perturbacija ne daje zadovoljavajuće aproksimativno rješenje.

Cilj ovog rada je upoznati čitatelja s gore navedenim metodama i, kroz razne primjere, ukazati na nedostatke regularnih perturbacija.

Poglavlje 1

Regularne perturbacije

Metoda regularnih perturbacija djeluje samo u iznimnim slučajevima i općenito nije učinkovita.

1.1. Algebarske jednadžbe

Prije promatranja diferencijalnih jednadžbi, osnovnu ideju perturbacijske metode lako možemo pokazati na jednostavnim algebarskim jednadžbama.

Primjer 1.1.1.

Razmotrimo alegbarsku jednadžbu

$$x^2 + 2\varepsilon x - 3 = 0,$$

pri čemu je ε dovoljno mali pozitivan parametar. Pretpostavimo da je korijen jednadžbe oblika asimptotičkog reda

$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots. \tag{1.1}$$

Zamijenimo li x iz početne jednadžbe s $x(\varepsilon)$ dobivamo

$$(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots)^2 + 2\varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots) - 3 = 0.$$

Provedbom naznačenih računskih operacija dobivamo

$$x_0^2 + x_1^2\varepsilon^2 + x_2^2\varepsilon^4 + \cdots + 2x_0x_1\varepsilon + 2x_0x_2\varepsilon^2 + \cdots + 2x_1x_2\varepsilon^3 + \cdots + 2x_0\varepsilon + 2x_1\varepsilon^2 + 2x_2\varepsilon^3 + \cdots - 3 = 0.$$

Grupiramo li članove uz jednake potencije ε

$$x_0^2 - 3 + 2x_0(x_1 + 1)\varepsilon + (x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_1)^2\varepsilon^2 + \cdots = 0$$

i izjednačimo koeficijente, uz odgovarajuće potencije parametra ε, s nulom dobivamo

$$x_0^2 = 3, \qquad x_1 = -1, \qquad x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_1 = 0 \,, \dots$$

Riješimo gornje jednadžbe

$$x_0 = \pm\sqrt{3}, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}, \dots$$

i rješenja uvrstimo u (1.1). Na taj način dobivamo dva aproksimativna rješenja

$$x_1(\varepsilon) = \sqrt{3} - \varepsilon + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon^2 + \cdots,$$

$$x_2(\varepsilon) = -\sqrt{3} - \varepsilon - \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon^2 + \cdots \,.$$

Usporedimo aproksimativna rješenja s egzaktnim rješenjima. Egzaktna rješenja početne algebarske jednadžbe naći ćemo pomoću formule za rješenja kvadratne jednadžbe.

$$x_{1,2} = \frac{-2\varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon^2 + 12}}{2} = -\varepsilon \pm \sqrt{3 + \varepsilon^2}$$

Raspišemo li korijen $\sqrt{3+\varepsilon^2}$ pomoću binomne formule, dobit ćemo

$$\sqrt{3+\varepsilon^2} = \sqrt{3}\left(1 + \tfrac{\varepsilon^2}{2\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}(1 + \tfrac{\varepsilon^2}{2\sqrt{3}} + \cdots).$$

Sada egzaktna rješenja možemo zapisati kao

$$x_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{3}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{3}} + \cdots\right)$$

i vidjeti da su tako dobivena rješenja jednaka rješenjima dobivenima metodom perturbacije.

1.2. Gibanje u sredstvu s otporom

Pretpostavimo da se tijelo mase m, s početnom brzinom V_0, giba pravocrtno u sredstvu koje pruža otpor $av - bv^2$, gdje je $v = v(\tau)$ funkcija koja predstavlja brzinu tijela u ovisnosti o vremenu τ. Neka su $a > 0$ i $b > 0$ konstante takve da je $b \ll a$. Stoga je nelinerani dio sile otpora mali u usporedbi s linearnim dijelom. Konstante a i b, redom, imaju mjernu jedinicu sile po brzini i mjernu jedinicu sile po brzini na kvadrat.

Po drugom Newtonovom zakonu (Temeljni zakon gibanja), jednadžba gibanja glasi

$$m\frac{dv}{dt} = -av + bv^2, \qquad v(0) = V_0.$$

U daljnjem promatranju ove diferencijalne jednadžbe koristit ćemo numeričke vrijednosti fizikalnih veličina neovisno o izboru mjernih jedinica (bezdimenzionirali smo varijable). Početna brzina tijela V_0 je ujedno i maksimalna brzina jer se brzina gibanja tijela u sredstvu smanjuje djelovanjem otpora sredstva. Bez prisustva nelinearnog člana bv^2 brzina bi se smanjivala poput $e^{-\frac{a\tau}{m}}$. Tada je karakteristično vrijeme jednako m/a. Uvedimo bezdimenzionalne varijable

$$y = \frac{v}{V_0}, \qquad t = \frac{\tau}{m/a},$$

pa zadani problem postaje

$$\frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon y^2, \qquad t > 0, \tag{1.2}$$

$$y(0) = \frac{v(0)}{V_0} = 1, \tag{1.3}$$

gdje je

$$\varepsilon \equiv \frac{bV_0}{a} \ll 1.$$

Jednadžba (1.2) je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba do čijeg egzaktnog rješenja možemo doći pomoću supstitucije $w = y^{-1}$. Nakon supstitucije dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda čije je rješenje

$$y_{ex} = \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon(e^{-t} - 1)}.$$

Jednadžba (1.2) je u izmijenjenoj (perturbiranoj) formi u odnosu na jednadžbu sa separiranim varijablama

$$\frac{dy}{dt} = -y, \qquad y(0) = 1, \tag{1.4}$$

čije je rješenje $y = e^{-t}$. Kako je ε mali i nelinearan član εy^2 također mali, čini se da je funkcija e^{-t} dobra aproksimacija ovog problema, pod uvjetom da je skaliranje izvedeno ispravno. Egzaktno rješenje y_{ex} moguće je razviti u Taylorov red potencija od ε kao

$$y_{ex} = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \cdots \tag{1.5}$$

Ako je ε mali, vodeći član glavnog reda $y_0 = e^{-t}$ je dobra aproksimacija rješenja ovog problema, ali ne uključuje učinke nelinearnog člana početne jednadžbe. Da bismo dobili aproksimativno rješenje metodom perturbacije koristimo asimptotički red. Pretpostavimo da je rješenje jednadžbe (1.2) moguće prikazati u obliku

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots . \tag{1.6}$$

Funkcije $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ćemo odrediti tako da supstituiramo (1.6) u diferencijalnu jednadžbu (1.2) uz početni uvjet (1.3)

$$y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \cdots = -(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)^2,$$

izjednačimo koeficijente uz jednake potencije od ε i dobijemo niz linearnih diferencijalnih jednadžbi

$$y_0' = -y_0,$$

$$y_1' = -y_1 + y_0^2,$$

$$y_2' = -y_2 + 2y_0y_1, \dots$$

Početni uvjet glasi

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \cdots = 1.$$

Izjednačimo li koeficijente uz jednake potencije od ε, dobivamo niz uvjeta

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(0) = y_2(0) = \cdots = 0.$$

Dobivamo skup linearnih početnih problema za $y_0, y_1, y_2, \dots$ koje možemo jednostavno razriješiti

$$y_0 = e^{-t},$$

$$y_1 = e^{-t} - e^{-2t},$$

$$y_2 = e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}, \dots$$

Uočimo da su y_1 i y_2 članovi prvog i drugog reda koji poboljšavaju aproksimaciju glavnog reda $y_0 = e^{-t}$ što se poklapa s (1.5) . Dobivamo tročlano perturbacijsko rješenje

$$y_a = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) \tag{1.7}$$

koje je aproksimacija rješenja y_{ex} i koje uključuje nelinearan efekt člana εy^2 iz početne jednadžbe. Uočimo da je aproksimativno rješenje y_a jednako prvim trima članovima egzaktnog rješenja. U ovom problemu poznato nam je egzaktno rješenje pa ga možemo usporediti s aproksimativnim rješenjem. Greška aproksimacije (1.7) dana je razlikom

$$y_{ex} - y_a = m_1(t)\varepsilon^3 + m_2(t)\varepsilon^4 + \cdots, \qquad t > 0,$$

za ograničene funkcije $m_1, m_2, \ldots$ Za fiksan $t > 0$ greška teži nuli kada $\varepsilon \to 0$ istom brzinom kao što ε^3 ide k nuli. Na intervalu $0 \le t < \infty$ može se pokazati da je konvergencija uniforma kada $\varepsilon \to 0$.

1.3. Nelinearne oscilacije

U prethodnom primjeru regularnim perturbacijama došli smo do rješenja koje je dovoljno dobro u usporedbi s egzaktnim rješenjem. U sljedećem primjeru pristupit ćemo problemu na isti način, ali ovaj put rješenje neće biti zadovoljavajuće. To će nas potaknuti da modificiramo regularne perturbacije i razvijemo singularne perturbacije. U primjeru koji slijedi, aproksimacija dobivena perturbacijskom metodom će biti dovoljno dobra samo ako su određena dodatna ograničenja na vremenskom intervalu.

Primjer 1.3.1. (Oscilator)

Neka je tijelo mase m pričvršćeno na oprugu (zanemarive mase) čija je povratna (elastična) sila iznosa $ky + ay^3$. Svojstva krutosti opruge okarakterizirana su pozitivnim konstantama k i a. Pretpostavimo da je nelinearni dio povratne sile mali u odnosu na njezin linearni dio, tj. $a \ll k$. Ako se tijelo odmakne od ravnotežnog položaja za $A > 0$, tada gibanje tijela, dano funkcijom $y = y(\tau)$ koja ovisi o vremenu τ, zadovoljava Newtonov Temeljni zakon gibanja

$$m\frac{d^2y}{d\tau^2} = -ky - ay^3, \quad \tau > 0, \tag{1.8}$$

uz početne uvjete

$$y(0) = A, \qquad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \tag{1.9}$$

Do egzaktnog rješenja ovog problema ne možemo doći zbog prisutnosti nelinearnog člana ay^3. Kako je $a \ll k$ pokušat ćemo ovaj problem riješiti perturbacijskom metodom.

Stoga, kako bismo ispravno pristupili problemu, uvedimo bezdimenzionalne varijable. Konstante, k, a, m i A, danog problema imaju dimenzije

$$[k] = \frac{\text{masa}}{\text{vrijeme}^2}, \qquad [a] = \frac{\text{masa}}{\text{duljina}^2 \cdot \text{vrijeme}^2}, \qquad [m] = \text{masa}, \qquad [A] = \text{duljina}.$$

Ako zanemarimo mali nelinearni član ay^3 dobivamo diferencijalnu jednadžbu $my'' = -ky$, koja ima periodično rješenje oblika $\cos\sqrt{k/mt}$ čiji je period proporcinalan s $\sqrt{m/k}$. Očito je da ćemo y skalirati amplitudom A početnog odmaka. Uvodimo bezdimenzionalne varijable

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{m/k}}, \quad u = \frac{y}{A}.$$

Uvedemo li ove varijable u jednadžbu (1.8) i početne uvjete (1.9) dobivamo

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \qquad t > 0$$

$$u(0) = 1, \qquad \dot{u}(0) = 1, \tag{1.10}$$

gdje $\ddot{u}$ i $\dot{u}$ prestavljaju derivacije po vremenu τ, a ε bezdimenzionalni mali parametar

$$\varepsilon \equiv \frac{aA^2}{k} \ll 1.$$

Sada postaje jasna pretpostavka o veličini nelinearnog člana povratne sile, točnije $aA^2 \ll k$. Jednadžba (1.10) je Duffingova diferencijalna jednadžba. Tražimo rješenje oblika

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots,$$

gdje nam preostaje odrediti $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Supstituiramo li $u(t)$ u jednadžbu i početne uvjete (1.10), izjednačimo koeficijente uz jednake potencije od ε, dobivamo niz linearnih problema

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \qquad u_0(0) = 1, \qquad \dot{u}_0(0) = 0, \tag{1.11a}$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3, \qquad u_1(0) = 0, \qquad \dot{u}_1(0) = 0, \dots \tag{1.11b}$$

Lako se dolazi do rješenja problema (1.11a)

$$u_0(t) = \cos t$$

pa problem (1.11b) postaje

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\cos^3 t, \qquad u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0.$$

Iskoristimo li trigonometrijski identitet $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t), \tag{1.12}$$

koju ćemo riješiti klasičnom metodom. Rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 0$$

je

$$u_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Partikularno rješenje je oblika

$$u_p = C\cos 3t + Dt\cos t + Et\sin t,$$

gdje su C, D i E neodređeni koeficijenti.

Odredimo $\ddot{u}_p$ i uvrstimo u (1.12), izjednačimo koeficijente uz iste članove i dobivamo $C = \frac{1}{32}, D = 0$ i $E = -\frac{3}{8}$. Sada partikularno rješenje glasi

$$u_p = \frac{1}{32}\cos 3t - \frac{3}{8}t\sin t.$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (1.12) dobijemo kao zbroj pripadnog homogenog i partikularnog rješenja

$$u_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{3}{8} t \sin t.$$

Kako bismo odredili realne brojeve C_1 i C_2 uvrstimo početne uvjete iz (1.12) i dobivamo

$$u_1 = \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \sin t.$$

Dakle, uzimajući u obzir skalirane varijable, dvočlano aproksimativno rješenje je oblika

$$y_a = \cos t + \varepsilon \left[\frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \sin t \right]. \tag{1.13}$$

Ponašanje vodećeg člana aproksimativnog rješenja je funkcija $\cos t$, što je oscilacija. Međutim, drugi član koji predstavlja grešku aproksimativnog rješenja nije mali. Za fiksno vrijeme t, taj član teži nuli ako $\varepsilon \to 0$. No, odaberemo li t reda veličine ε^{-1} ili još većeg reda, tada je član $-\frac{3}{8} t \sin t$ velik. Takav se član naziva **sekularni član**. Očekujemo da će amplituda aproksimativnog rješenja rasti, no to se kosi sa fizikalnim zakonima. Doista, lako je pokazati da je amplituda ograničena za svaki $t > 0$. U ovoj aproksimaciji, za dovoljno mali ε, član pogreške ne može biti proizvoljno mali za t iz $(0, \infty)$. Ne možemo poboljšati (1.13) uzimajući u obzir članove višeg reda jer će i oni također sadržavati sekularne članove koji neće poništiti učinke članova nižeg reda. Nameće se pitanje postoji li uopće ijedna vrijednost aproksimativnog rješenja (1.13). Za ograničen slučaj odgovor je potvrdan. Ako restringiramo nezavisnu varijablu t na segment $[0, T]$, tada za dovoljno mali ε član pogreške $\varepsilon \left[\frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \sin t \right]$ postaje također proizvoljno mali, za svaki $t \in [0, T]$. Dakle, za ograničen t i mali ε, koeficijent $\frac{3\varepsilon t}{8}$ je mali pa član vodećeg reda $\cos t$ je dobro aproksimativno rješenje.

1.4. Poincaré-Lindstedtova metoda

Izravna primjena regularne perturbacijske metode na početni problem (1.10) Duffingove jednadžbe dovela je do sekularnog člana koji je narušio aproksimativno rješenje osim za restringirani t. U ovom dijelu predstavit ćemo metodu kako bismo korigirali singularno ponašanje koje se pojavljuje u svim slučajevima periodičkog gibanja. Ključ ove analize je prepoznati da uz to što član pogreške raste s amplitudom, on niti ne ispravlja razliku između egzaktnog perioda oscilacije i aproksimativnog perioda 2π člana vodećeg reda $\cos t$. Nakon nekoliko oscilacija pogreška između perioda raste sve dok aproksimativno i stvarno rješenje ne budu potpuno izvan faze.

Ideja Poincaré-Lindstedtove metode je uvođenje reskaliranog vremena pomoću asimptotičkog reda. Posebno, stavimo

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \cdots, \tag{1.14}$$

gdje je

$$\tau = \omega t, \tag{1.15}$$

i

$$\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots. \tag{1.16}$$

Ovdje je ω_0 odabran kao jedinica, tj. frekvencija rješenja neperturbacijskog problema.

Transformacijom (1.15) početni problem (1.10) postaje

$$\omega^2 u'' + u + \varepsilon u^3 = 0, \qquad \tau > 0, \tag{1.17}$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \tag{1.18}$$

gdje je $u = u(\tau)$. Uvrstimo li (1.14) i (1.16) u (1.17) i (1.18) dobivamo

$$(1 + 2\varepsilon\omega_1\omega_0 + \cdots)(u_0'' + \varepsilon u_1'' + \cdots) + (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots) + \varepsilon(u_0^3 + 3\varepsilon u_0^2 u_1 + \cdots) = 0$$

i

$$u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \cdots = 1, \quad u_0'(0) + \varepsilon u_1'(0) + \cdots = 0.$$

Grupiramo li članove uz iste potencije od ε i izjednačimo li koeficijente, dobivamo

$$u_0'' + u_0 = 0, \qquad u_0(0) = 1, \qquad u_0'(0) = 0, \ldots, \tag{1.19}$$

$$u_1'' + u_1 = -2\varepsilon\omega_1 u_0'' - u_0^3, \quad u_1(0) = u_1'(0) = 0, \ldots . \tag{1.20}$$

Rješenje jednadžbe (1.19) je

$$u_0(\tau) = \cos\tau.$$

Tada diferencijalna jednadžba (1.20) postaje

$$u_1'' + u_1 = -2\varepsilon\cos\tau - \cos^3\tau = \left(2\omega_1 - \tfrac{3}{4}\right)\cos\tau - \tfrac{1}{4}\cos 3\tau. \tag{1.21}$$

Kako je $\cos\tau$ rješenje homogene jednadžbe, izraz uz $\cos\tau$ na desnoj strani jednadžbe dovodi do partikularnog rješenja $\tau\cos\tau$. To partikularno rješenje je sekularni član kojeg možemo izbjeći izaberemo li

$$\omega_1 = \frac{3}{8}.$$

Tada jednadžba (1.21) postaje

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{4}\cos 3\tau,$$

čije je opće rješenje oblika

$$u_1(\tau) = C_1\cos\tau + C_2\sin\tau + \frac{1}{32}\cos 3\tau.$$

Uvrstimo li početne uvjete, dobivamo

$$u_1(\tau) = \frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos \tau).$$

Stoga je perturbacijsko rješenje problema (1.10)

$$u(\tau) = \cos \tau + \frac{1}{32}\varepsilon(\cos 3\tau - \cos \tau) + \cdots,$$

gdje je

$$\tau = t + \frac{3}{8}\varepsilon t + \cdots.$$

Poincaré-Lindstedtova metoda uspješna je i u sličnim problemima. Općenito, pomoću te metode možemo riješiti većinu jednadžbi oblika

$$u'' + \omega_0^2 u = \varepsilon F(t, u, u'), \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Tom jednadžbom opisani su problemi čiji je vodeći red oscilatora frekvencije ω_0. Osnovna tehnika je promijeniti varijable u novu varijablu s različitom frekvencijom, $\tau = (\omega_0 + \omega_1\varepsilon + \cdots)t$ i pretpostaviti da je $u = u(\tau)$ u obliku asimptotičkog reda potencija od ε. Konstante $\omega_0, \omega_1, \ldots$ se biraju u svakom koraku kako bismo izbjegli prisutnost sekularnog člana.

1.5. Asimptotička analiza

U ovom odjeljku definirat ćemo pojmove vezane uz termine konvergencije i uniformnosti. U prethodnim primjerima vidjeli smo da supstitucijom asimptotičkog reda u diferencijalnu jednadžbu ne dolazimo uvijek do točne aproksimacije. Idealno bi bilo kada bismo mogli reći da nekoliko početnih članova asimptotičkog reda, za određeni ε, daje aproksimativno rješenje za cijeli segment varijable t. Kao što smo vidjeli u prijašnjim primjerima, to nije uvijek tako. Nažalost, točna rješenja se dobivaju rjeđe nego pogrešna.

Kako bismo poboljšali analizu aproksimativnog rješenja uvodimo osnovne pojmove i terminologiju pomoću kojih ćemo uspoređivati dvije funkcije u slučaju kada se njihovi argumenti približavaju istoj vrijednosti. Ove usporedbe nazivamo **relacije veličine redova**.

Neka su $f(\varepsilon)$ i $g(\varepsilon)$ definirane u okolini $\varepsilon = 0$. Pišemo

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.22}$$

ako je

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| = 0.$$

Pišemo

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.23}$$

ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$|f(\varepsilon)| \leq M|g(\varepsilon)|$$

za svaki ε u okolini od nule. Funkciju g koju uspoređujemo s funkcijom f zovemo **baždarna funkcija**. U ovoj definiciji, $\varepsilon \to 0$ možemo zamijeniti jednostranim limesom ili s $\varepsilon \to \varepsilon_0$, gdje je ε_0 bilo koji konačan ili beskonačan broj. Ako vrijedi (1.22) kažemo da je f *malo o* od g kada $\varepsilon \to 0$, odnosno ako vrijedi (1.23) kažemo da je g *veliko O* od g kada $\varepsilon \to 0$. Baždarne funkcije su najčešće oblika $g(\varepsilon) = \varepsilon^n$, za neki eksponent n, ili $g(\varepsilon) = \varepsilon^n(\ln\varepsilon)^m$, za neke eksponente n i m. Da je funkcija f ograničena u okolini $\varepsilon = 0$ zapisat ćemo kraće $f(\varepsilon) = O(1)$, dok će $f(\varepsilon) = o(1)$ podrazumijevati da $f(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Ako je $f = o(g)$, tada f teži nuli brže od g kada $\varepsilon \to 0$. Sljedeći primjeri ilustriraju nekoliko metoda za dokazivanje relacija veličine redova.

Primjer 1.4.1.

Pomoću L'Hôspitalovog pravila provjerimo da vrijedi $\varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(\varepsilon)$.

Imamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{\varepsilon} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon = 0.$$

Primjer 1.4.2.

Provjerimo da $\sin \varepsilon = O(\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0^+$.

Po teoremu srednje vrijednosti znamo da postoji broj c između 0 i ε takav da

$$\frac{\sin \varepsilon - \sin 0}{\varepsilon - 0} = \cos c.$$

Odavde je $|\sin \varepsilon| = |\varepsilon \cos c| \leq |\varepsilon|$. Alternativno, mogli smo uočiti da je $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$. Kako limes postoji, funkcija $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ je omeđena s $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, za neki ε_0. Stoga je $\left|\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right| \leq M$, za neku konstantu $M > 0$ pa je $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = O(\varepsilon)$.

Definicije iz ovog odjeljka mogu biti proširene, tj. možemo promatrati funkcije koje ovise o ε i nekoj drugoj varijabli t iz intervala I. Kao prvo vratimo se na pojam uniformne konvergencije. Neka je $h(t, \varepsilon)$ definirana za ε u okolini $\varepsilon = 0$, osim možda za $\varepsilon = 0$, i za t iz intervala I koji može biti konačan ili beskonačan. Kažemo da

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h(t, \varepsilon) = 0 \text{ uniformno na } I,$$

ako je konvergencija k nuli jednaka za svaki t iz I, tj. ako za svaki $\eta > 0$ možemo pronaći ε_0, koji ne ovisi o t, takav da $|h(t, \varepsilon)| < \eta$ za svaki t iz I, kad god je $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Drugim riječima, ako za dovoljno mali ε možemo $h(t, \varepsilon)$ učiniti po volji malim na cijelom intervalu I, tada govorimo o uniformnoj konvergenciji.

Ako je $\lim_{\varepsilon\to 0} h(t,\varepsilon) = 0$ za svaki fiksan t iz I, radi se o *konvergenciji po točkama* na I.

Da bismo pokazali $\lim_{\varepsilon\to 0} h(t,\varepsilon) = 0$ uniformno na I, dovoljno je pronaći funkciju $H(\varepsilon)$ takvu da $|h(t,\varepsilon)| \leq H(\varepsilon)$ za svaki t iz I, gdje $H(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Da bismo pokazali da konvergencija nije uniformna na I, dovoljno je naći $\bar{t}$ iz I takav da $|h(\bar{t},\varepsilon)| \geq \eta$ za neki $\eta > 0$ i svaki $\varepsilon > 0$.

Neka su $f(t,\varepsilon)$ i $g(t,\varepsilon)$ definirane za svaki t iz I i za svaki ε u okolini od $\varepsilon = 0$. Ako je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left|\frac{f(t,\varepsilon)}{g(t,\varepsilon)}\right| = 0 \qquad \text{po točkama na } I \tag{1.24}$$

pišemo

$$f(t,\varepsilon) = o(g(t,\varepsilon)) \qquad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Ako je limes uniforman na I, pišemo $f(t,\varepsilon) = o(g(t,\varepsilon))$ kada $\varepsilon \to 0$ uniformno na I.

Ako postoji pozitivna funkcija $M(t)$ na I takva da

$$|f(t,\varepsilon)| \leq M(t)|g(t,\varepsilon)|$$

za svaki t iz I i za svaki ε u okolini od nule, pišemo

$$f(t,\varepsilon) = O\big(g(t,\varepsilon)\big) \qquad \text{kada } \varepsilon \to 0,\ t \in I.$$

Ako je $M(t)$ ograničena funkcija na I, pišemo

$$f(t,\varepsilon) = O\big(g(t,\varepsilon)\big) \qquad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0, \text{ uniformno na } I.$$

Definicija 1.4.3.

Za funkciju $y_a(t,\varepsilon)$ kažemo da je **uniformna asimptotička aproksimacija** funkcije $y(t,\varepsilon)$ na intervalu I ako greška $E(t,\varepsilon) \equiv y(t,\varepsilon) - y_a(t,\varepsilon)$ konvergira u nulu kada $\varepsilon \to 0$, uniformno za $t \in I$.

Često napominjemo da je $E(t,\varepsilon)$ ili $O(\varepsilon^n)$ ili $o(\varepsilon^n)$, za neki n, kada $\varepsilon \to 0$ da bismo eksplicitno pokazali kojom brzinom greška ide u nulu te da je konvergencija uniformna.

Primjer 1.4.4.

Neka je

$$y(t,\varepsilon) = e^{-t}\ , \quad t > 0, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Prva tri člana Taylorovog razvoja potencija od ε daju nam aproksimativno rješenje

$$y_a(t,\varepsilon) = 1 - t\varepsilon + \frac{1}{2}t^2\varepsilon^2.$$

Greška je

$$E(t,\varepsilon) = e^{-t\varepsilon} - \left(1 - t\varepsilon + \frac{1}{2}t^2\varepsilon^2\right) = -\frac{1}{3!}t^3\varepsilon^3 + \cdots\ .$$

Za fiksan t, grešku možemo učiniti dovoljno malom birajući dovoljno mali ε. Stoga, $E(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ kada $\varepsilon \to 0$. Ako je ε fiksan, možemo odabrati dovoljno veliki t za koji će aproksimacija biti potpuno pogrešna pa nije uniformna na $I = [0,\infty\rangle$. Ako za t odaberemo $t = \frac{1}{\varepsilon}$ tada je greška $E\left(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right) = e^{-1} - \frac{1}{2}$ što nije mala greška. Zato ne smijemo pisati $E(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ kada $\varepsilon \to 0$, uniformno na $[0,\infty\rangle$.

U slučaju diferencijalnih jednadžbi, egzaktna rješenja rijetko su poznata pa ne možemo provesti direktan izračun pogreške pomoću gore navedenih definicija. Prema tome, potrebni su nam neki pokazatelji koji nam govore koliko dobro aproksimativno rješenje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu te njezine rubne i početne uvjete. Promotrimo diferencijalnu jednadžbu

$$F(t, y, y', y'', \varepsilon) = 0, \qquad t \in I.$$

Kažemo da $y_a(t, \varepsilon)$ aproksimativno rješenje zadovoljava gornju diferencijalnu jednadžbu za $t \in I$ kada $\varepsilon \to 0$ ako

$$r(t, \varepsilon) \equiv F(t, y_a(t, \varepsilon), y_a'(t, \varepsilon), y_a''(t, \varepsilon), \varepsilon) \ \to 0$$

uniformno na I kada $\varepsilon \to 0$. $r(t, \varepsilon)$ predstavlja rezidualno odstupanjeza koje se nadamo da mjeri koliko dobro aproksimativno rješenje $y_a(t, \varepsilon)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu.

Primjer 1.4.5.

Promotrimo početni problem

$$\ddot{y} + \dot{y}^2 + \varepsilon y = 0, \qquad t > 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 1.$$

Supstituiramo li asimptotički red $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots$ u početni problem, dobivamo

$$\ddot{y}_0 + \dot{y}_0^2 = 0, \qquad t > 0,$$

$$y_0(0) = 0, \qquad \dot{y}_0(0) = 1,$$

za član vodećeg reda y_0. Lako se dolazi do $y_0(t) = \ln(t+1)$ pa je

$$r(t, \varepsilon) \equiv \ \ddot{y}_0 + \dot{y}_0^2 + \varepsilon y_0 = \varepsilon \ln(t+1).$$

Prema tome, $r(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0$, ali ne uniformno na $[0, \infty\rangle$. Na bilo kojem konačnom segmentu $[0, T]$ vrijedi $|\varepsilon \ln(t+1)| \leq \varepsilon \ln(T+1)$ pa $r(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0$, uniformno na $[0, T]$.

Posebno, regularna perturbacijska metoda daje nam asimptotički razvoj

$$y_0(t) + y_1(t)\varepsilon + y_2(t)\varepsilon^2 + \cdots,$$

iz kojeg možemo dobiti prvih nekoliko članova asimptotičkog rješenja. Takav razvoj potencija od $\varepsilon(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots)$ zovemo **asimptotički red potencija**. U nekim problemima, razvoj je oblika

$$y_0(t) + y_1(t)\sqrt{\varepsilon} + y_2(t)\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

U nekim drugim problemima potreban je razvoj oblika

$$y_0(t)\ln\varepsilon + y_1(t)\varepsilon\ln\varepsilon + y_3(t)\varepsilon^2\ln^2\varepsilon + y_4(t)\varepsilon^2\ln\varepsilon + y_5(t)\varepsilon^2 + \cdots .$$

Oblik razvoja ovisi o problemu koji rješavamo. Općenito, kažemo da je niz baždarnih funkcija $\{g_n(t,\varepsilon)\}$ asimptotički niz kada $\varepsilon \to 0$, $t \in I$, ako

$$g_{n+1}(t,\varepsilon) = o\big(g_n(t,\varepsilon)\big) \qquad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

za $n = 0,1,2 \dots$. Stoga, svaki član niza teži nuli brže nego prethodni član, kada $\varepsilon \to 0$. Za danu funkciju $y(t,\varepsilon)$ i asimptotički niz $\{g_n(t,\varepsilon)\}$ kada $\varepsilon \to 0$, kažemo da je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t,\varepsilon)$$

asimptotički razvoj funkcije $y(t,\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0$, ako

$$y(t,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n g_n(t,\varepsilon) = o(g_N(t,\varepsilon))$$

kada $\varepsilon \to 0$, za svaki N. Vidimo da je za bilo koju parcijalnu sumu ostatak jednak malom o posljednjeg člana. Ako je konvergencija uniformna za $t \in I$, onda kažemo da se radi o uniformnom asimptotičkom nizu i uniformnom asimptotičkom razvoju.

Poglavlje 2

Singularne perturbacije

2.1. Algebarske jednadžbe

Kao što smo vidjeli u Poglavlju 1, jednostavna primjena regularnih perturbacijskih metoda nije dovela do željenih rezultata zbog pojave sekularnih članova u razvojima koji su doveli do neuniformnih aproksimacija. Pokušali smo poboljšati rezultate skaliranjem varijabli u svrhu podešavanja frekvencija oscilacija. U ovom poglavlju ukazat ćemo na drugačiji tip singularnog ponašanja. Promotrimo prvo nekoliko jednostavnih algebarskih problema.

Primjer 2.1.1.

Riješimo kvadratnu jednadžbu

$$\varepsilon x^2 + 2x + 1 = 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Ovu je jednadžbu moguće riješiti egzaktno, ali naš cilj je pokazati grešku regularne perturbacijske metode. Uočimo da je dana jednadžba neznatna promjena neperturbacijske jednadžbe

$$2x + 1 = 0,$$

čije je rješenje $x = -\frac{1}{2}$. Neperturbacijski (linearni) problem je u osnovi drugačiji od početnog (kvadratnog problema). Pokušajmo ga riješiti regularnim perturbacijama. Supstituirajmo asimptotički red

$$x = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots,$$

grupirajmo koeficijente uz iste potencije od ε i izjednačimo ih s nulom. Dobivamo niz jednadžbi

$$2x_0 + 1 = 0,$$

$$x_0^2 + 2x_1 = 0,$$

$$2x_1x_0 + 2x_2 = 0, \dots$$

Odavde dobivamo rješenja $x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = -\frac{1}{8}, x_2 = -\frac{1}{16}, \dots$. Došli smo do jedinog perturbacijskog rješenja

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2 - \cdots .$$

Nameće se prirodno pitanje - što se dogodilo s drugim rješenjem? Regularnom perturbacijom pretpostavili smo red vodećeg člana pa nije čudno da smo dobili samo jedno rješenje. Drugo rješenje može biti drugačijeg reda, ili manjeg ili većeg. Da bismo našli drugo rješenje, moramo pobliže ispitati sljedeća tri člana - $\varepsilon x^2, 2x$ i 1. Zanemarimo li εx^2 dobit ćemo rješenje približno $x = -\frac{1}{2}$ i u tom slučaju je član εx^2 zanemariv u odnosu na $2x$ i 1. Kod drugog je rješenja član εx^2 možda velik, jer je x velik. Kod zanemarivanja članova razlikujemo dva slučaja:

i. εx^2 i 1 su istog reda i $2x \ll 1$
ii. εx^2 i $2x$ su istog reda, te su oba velika u odnosu na 1

U slučaju (i.) je $x = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ što je kontradikcija s $2x \ll 1$.
U slučaju (ii.) je $x = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ pa su εx^2 i $2x$ oba reda $\frac{1}{\varepsilon}$ i velika u odnosu na 1. Stoga je red drugog rješenja $\frac{1}{\varepsilon}$. Odaberimo novu varijablu y reda 1 definiranu sa

$$y := \frac{x}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon x.$$

Uvrstimo varijablu y u početnu jednadžbu koja je sada oblika

$$y^2 + 2y + \varepsilon = 0.$$

Sada zbog pravilnog skaliranja svaki član ima veličinu definiranu svojim koeficijentima. Supstitucijom asimptotičkog reda

$$y = y_0 + y_1\varepsilon + y_2\varepsilon^2 + \cdots,$$

dobivamo niz jednadžbi

$$y_0^2 + 2y_0 = 0,$$

$$2y_0y_1 + 2y_1 + 1 = 0, \dots .$$

Odavde dobivamo rješenja $y_0 = -2, y_1 = \frac{1}{2}, \dots$. Došli smo do

$$y = -2 + \frac{1}{2}\varepsilon + \cdots,$$

odnosno drugog rješenja

$$x = -\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \cdots .$$

Vidimo da su rješenja različitih redova veličine i dobivanjem jednog rješenja ne dolazimo do drugog rješenja.

Napomena 2.1.2.

Razmatranje redova veličine svakog pojedinog člana u odnosu na druge članove nazivamo **dominatno uravnoteženje**.

Primjer 2.1.3.

Pronađimo aproksimaciju vodećeg člana četiriju rješenja jednadžbe

$$\varepsilon x^4 - x - 1 = 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Kada je $\varepsilon = 0$ dobivamo jedinstveno rješenje $x = -1$ reda veličine 1. Za određivanje redova ostalih rješenja koristit ćemo dominantno uravnoteženje. Ako su prvi i treći član u ravnoteži tada je $x = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right)$ što je veliko i kontradiktorno. Ako su prvi i drugi član u ravnoteži tada je $x = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right)$ što je veliko u odnosu na 1 i konzistentno. Stoga, reskaliranje provodimo pomoću $y = \varepsilon^{\frac{1}{3}}x$, što daje

$$y^4 - y - \varepsilon^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Za glavni član $y^4 - y = 0$ je $y = 1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Za $y = 0$ je $x = 0$, ali to ne zadovoljava jednadžbu pa ćemo to rješenje odbaciti. Prema tome, ponašanje glavnih redova četiriju rješenja je

$$x = -1, \quad \varepsilon^{-\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \varepsilon^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Tri od četiri su velika, pa bismo mogli asimptotičkim redom

$$y = y_0 + \varepsilon^{\frac{1}{3}}y_1 + +\varepsilon^{\frac{2}{3}}y_2 + \cdots,$$

dobiti članove višeg reda.

2.2. Diferencijalne jednadžbe

U ovom odjeljku ćemo se susresti sa drugačijim tipom ponašanja, singularnim ponašanjem, koje nastaje zbog pojave sekularnih članova u asimptotičkom redu. Često neki problemi ne dopuštaju izračun člana glavnog reda pomoću asimptotičkog reda jer su perturbacijski problemi različiti od neperturbacijskih.

Pogledajmo sljedeći rubni problem

$$\varepsilon y'' + (1+\varepsilon)y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \tag{2.1}$$

i naivno pretpostavimo da je asimptotički red oblika

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots .$$

Supstituirajući red u početnu jednadžbu dobivamo

$$\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \cdots) + (y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \cdots) + (\varepsilon y_0' + \varepsilon^2 y_1' + \varepsilon^3 y_2' + \cdots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) = 0.$$

Grupirajmo koeficijente uz iste potencije od ε i izjednačimo ih s nulom. Dobili smo niz problema

$$y_0' + y_0 = 0,$$

$$y_1' + y_1 = -y_0'' - y_0', \dots ,$$

s rubnim uvjetima

$$y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = 1,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \dots .$$

Problem vodećeg reda je

$$y_0' + y_0 = 0, y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = 1. \tag{2.2}$$

Već možemo uočiti poteškoće. Radi se o diferencijalnoj jednadžbi prvog reda, a imamo dva rubna uvjeta koja moramo zadovoljiti. Opće rješenje jednadžbe je

$$y_0(x) = Ce^{-x}.$$

Uvrstimo li rubni uvjet $y_0(0) = 0$ u opće rješenje, dobivamo $C = 0$, odnosno $y_0(x) = 0$ koje ne zadovoljava rubni uvjet za $x = 1$. S druge strane, uvrstimo li rubni uvjet $y_0(1) = 1$ u opće rješenje, dobivamo $C = e$, odnosno $y_0(x) = e^{1-x}$ koje ne zadovoljava rubni uvjet za $x = 0$. Ušli smo u slijepu ulicu, metoda regularne perturbacije je neuspješna već u prvom koraku.

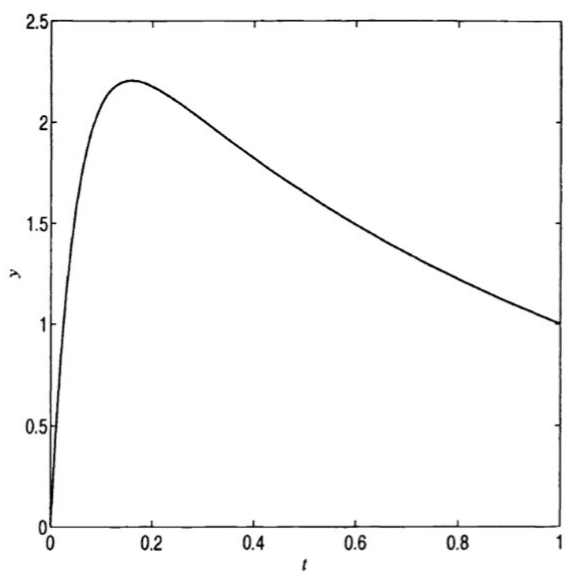
2.3. Rubni slojevi

Pomno promatranje prethodnog problema ukazuje na greške pri odabranoj metodi i put k ispravnoj i sistematičnoj metodi za dobivanje boljeg aproksimativnog rješenja. Kao prvo, trebali smo biti sumnjičavi od samoga početka. Neperturbacijski problem, za $\varepsilon = 0$, je

$$y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{2.3}$$

Taj problem drugačijeg je karaktera od perturbacijskog problema (2.1) u tome što je problem više prvog nego drugog reda. Zbog umnoška malog parametra s derivacijom višeg reda u (2.1), član s drugom derivacijom nestaje za $\varepsilon = 0$. Ovaj tip fenomena ukazuje na neuspjeh regularne perturbacije u gotovo svim slučajevima. Linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima (2.1) može se riješiti egzaktno

$$y(x) = \frac{1}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\left(e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right). \tag{2.4}$$



Slika 1: Graf egzaktnog rješenja (2.4)

Sa grafa egzaktnog rješenja lako možemo vidjeti razlog poteškoća pri rješavanju. Možemo uočiti da se $y(x)$ vrlo brzo mijenja na uskom intervalu, na početku, kojeg nazivamo **rubni sloj**. Malo dalje od početka, vidimo da se $y(x)$ mijenja sporije i taj interval zovemo **vanjski sloj**. Ne možemo jednom prostornom skalom opisati varijacije oba sloja. Radije, uzmimo dvije prostorne skale, zasebno za svaki sloj. Dobro bi bilo izračunati derivacije od y i procijeniti veličinu članova u jednadžbi.

$$y' = \frac{1}{e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\left(e^{-x} - \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right),$$

$$y'' = \frac{1}{e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\left(e^{-x} - \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right).$$

Prvo promotrimo drugu derivaciju. Pretpostavimo da je ε mali i da se x nalazi u uskom rubnom sloju u blizini $x = 0$. Za pokazivanje ograničenosti, pretpostavimo da je $x = \varepsilon$. Tada

$$y''(\varepsilon) = \frac{1}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\left(e^{-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-1}\right) = O(\varepsilon^{-2}).$$

Stoga je y'' vrlo velik na tom uskom intervalu i član $\varepsilon y''$ nije mali, dapače $\varepsilon y'' = O(\varepsilon^{-1})$. Vidimo da je naša pretpostavka kod regularnih perturbacija bila pogrešna jer članovi koji se na prvi pogled čine malim nisu uvijek tako mali. Problem je u tome što diferencijalna jednadžba (2.1) nije ispravno skalirana za mali x i potrebno ju je reskalirati. Za vrijednosti x koje su udaljenije od rubnog sloja, član $\varepsilon y''$ je zaista mali i možemo ga zanemariti. Na primjer, za $x = \frac{1}{2}$ je

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\left(e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}\right) = O(1).$$

Zbog toga, u vanjskome sloju $\varepsilon y''$ je mali i možemo ga zanemariti. Do sličnog zaključka možemo doći vezano za član u prvoj derivaciji. Prema tome, u vanjskom sloju, glavni red problema (2.3) dobiven za $\varepsilon = 0$ je dobra aproksimacija početnog problema za $x = 1$. Stoga,

$$y_0(x) = e^{1-x}. \tag{2.5}$$

Dobivena aproksimacija je konzistentna s egzaktnim rješenjem (2.4). Za mali ε je $e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \approx e^{-1}$ pa y možemo aproksimirati sa

$$y(x) \approx e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}. \tag{2.6}$$

Za x reda 1 imamo $e^{1-\frac{x}{\varepsilon}} \approx 0$ pa

$$y(t) \approx e^{1-t}, \quad x = O(1).$$

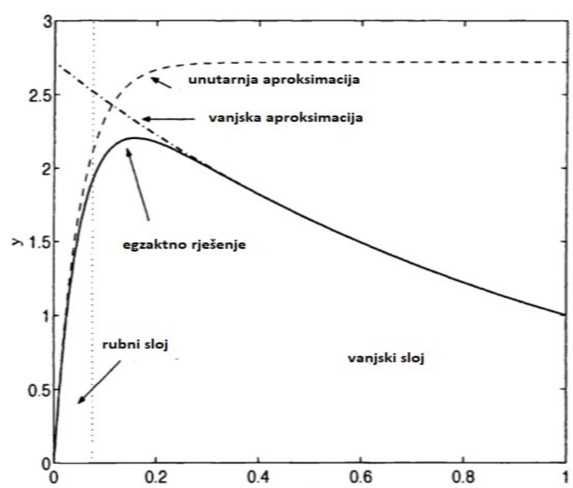
Aproksimativno rješenje (2.4), koje je dobro za vanjski sloj, zovemo **vanjska aproksimacija**.

Što se tiče aproksimativnog rješenja u rubnom sloju blizu $x = 0$, za mali x, iz (2.6), dobivamo

$$y(x) \approx e - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}. \tag{2.7}$$

Aproksimativno rješenje uskog rubnog sloja, gdje su nagle promjene monotonosti funkcije, zovemo **unutarnja aproksimacija** i označavamo $y_u(x)$.

Pogledajmo na Slici 2. ove nove pojmove.



Slika 1: Graf egzaktnog rješenja (2.4) *te unutarnja i vanjska aproksimacija*

U ovome problemu prednost je bila poznavanje egzaktnog rješenja, ali još uvijek nemamo pravu ideju kako odrediti unutarnju aproksimaciju bez poznavanja egzaktnog rješenja. Ključ analize rubnog sloja je u reskaliranju što smo ranije pokazali na algebarskim jednadžbama. Član $\varepsilon y''$ rubnog sloja nije mali kao što smo mislili na početku promatranja. Zato moramo reskalirati nezavisnu varijablu x u rubnom sloju odabirom prostorne skale koja će ukazivati na brze i neočekivane promjene toka funkcije. U sljedećem odlomku razvit ćemo općenite postupke u radu s rubnim slojevima.

Prije nego počnemo s analizom rubnog sloja, sumirajmo naša zapažanja i donesimo neke generalne zaključke. Primijetili smo da ''naivna'' metoda regularnih perturbacija ne donosi uvijek dobra aproksimativna rješenja. Postoji nekoliko znakova koji često ukazuju na pogrešku.

1. Kada mali parametar množi najveću derivaciju problema.
2. Kada mali parametar izjednačimo s nulom, mijenjamo karakter problema. Na primjer, parcijalne diferencijalne jednadžbe u tom slučaju mijenjaju tip, algebarske jednadžbe mijenjaju stupanj. Drugim riječima, rješenje za $\varepsilon = 0$ se bitno razlikuje od rješenja za ε u okolini nule.
3. Kada su problemi zadani na beskonačnim domenama dolazi do pojave sekularnih članova.
4. Kada su prisutne singularne točke u intervalu koji nas zanima.
5. Kada se u jednadžbama fizikalnih procesa javljaju više vremenskih i prostornih skala.

Perturbacijski problemi s takvim značajkama spadaju općenito u singularne perturbacije. Kod običnih diferencijalnih jednadžbi pojava rubnih slojeva je vrlo česta pa ih je potrebno, ako postoje, i locirati. Ako rubni sloj zaista postoji, tada je aproksimacija prihvatljivo rješenje za vanjski sloj za $\varepsilon = 0$. Kasnije ćemo se još pozabaviti aproksimacijom u unutarnjem sloju do koje možemo doći reskaliranjem. Pokazat ćemo da možemo i uskladiti uniformu aproksimaciju na čitavom intervalu. U ovom kontekstu, metodu singularnih perturbacija često nazivamo i *teorijom rubnog sloja.*

Poglavlje 3

Analiza rubnog sloja

3.1. Rubni slojevi

Vratimo se rubnom problemu (2.1)

$$\varepsilon y'' + (1+\varepsilon)y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{3.1}$$

Analizom egzaktnog rješenja u blizini $x = 0$ uočili smo nagle promjene kod y, y' i y'' koje upućuju na malu karakterističnu duljinu. Ponovno napominjemo kako član $\varepsilon y''$ nije mali kao što se čini. Podalje od rubnog sloja, u području gdje je $x = O(1)$, primijetili smo da su članovi $\varepsilon y''$ i $\varepsilon y'$ mali pa rješenje možemo dobro aproksimirati za $\varepsilon = 0$ i tada je jednadžba iz (3.1) oblika

$$y' + y = 0,$$

uz rubni uvjet $y(1) = 1$. Sada možemo doći do vanjske aproksimacije

$$y_0(x) = e^{1-x}. \tag{3.2}$$

Za analiziranje ponašanja unutar rubnog sloja uočimo značajne promjene funkcije y na uskom intervalu koje ukazuju na skaliranje varijable x funkcijom $\delta(\varepsilon)$. Uvedimo nove skalirane varijable

$$\xi = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \quad Y(\xi) = y(\delta(\varepsilon)\xi), \tag{3.3}$$

pomoću kojih diferencijalna jednadžba (3.1) postaje

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}Y''(\xi) + \frac{1+\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}Y'(\xi) + Y(\xi) = 0. \tag{3.4}$$

Koeficijenti četiriju članova diferencijalne jednadžbe (3.4) su

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}, \quad \frac{1}{\delta(\varepsilon)}, \quad \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}, \quad 1. \tag{3.5}$$

Ako je skaliranje pravilno učinjeno, svaki koeficijent utjecat će na red veličine člana u kojemu se pojavljuje. Za određivanje faktora skaliranja $\delta(\varepsilon)$ procjenjujemo redove veličina svih dominantnih ravnoteža među parovima (3.5). U obzir uzimamo i prvi član koji je bio zanemaren kod razmatranja vanjskoga sloja. Zbog pojednostavljenja problema nećemo u obzir uzimati sva tri člana zajedno pa imamo samo tri mogućnosti. Zbog lakše notacije, za članove istog reda koristit ćemo oznaku $\sim$.

i. Članovi $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}$ i $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ istog su reda i većeg u odnosu na članove $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ i 1.
ii. Članovi $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}$ i 1 istog su reda i većeg u odnosu na članove $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ i $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$.
iii. Članovi $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}$ i $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ istog su reda i većeg u odnosu na članove $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ i 1.

Slučaj (ii.) nije moguć jer ako $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim 1$, onda $\delta(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ što je u kontradikciji s $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ je mali naspram 1.

Slučaj (iii.) također nije moguć jer ako $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$, onda $\delta(\varepsilon) = O(1)$ što nas vodi k vanjskoj aproksimaciji.

U slučaju (i.) su$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$, iz čega slijedi $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Tada su oba člana reda $\frac{1}{\varepsilon}$ pa su većeg reda u odnosu na $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ i 1. Prema tome, jedino je moguće skaliranje za

$$\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon). \tag{3.6}$$

Sada skalirana diferencijalna jednadžba (3.4) glasi

$$Y'' + Y' + \varepsilon Y' + \varepsilon Y = 0, \tag{3.7}$$

koju lako i uspješno možemo razriješiti metodom regularne perturbacije. Kako nas zanima samo aproksimacija vodećeg reda, koju ćemo označiti s Y_u, uvrstimo $\varepsilon = 0$ u (3.7) i dobivamo

$$Y_u'' + Y_u'' = 0. \tag{3.8}$$

Opće rješenje (3.8) dano je s

$$Y_u(\xi) = C_1 + C_2 e^{-\xi}.$$

Budući da je rubni sloj blizu $x = 0$, uvrštavajući rubne uvjete $y(0) = 0$ odnosno $Y_u(0) = 0$ dobivamo $C_2 = -C_1$. Sada je

$$Y_u(\xi) = C_1\left(1 - e^{-\xi}\right). \tag{3.9}$$

U terminima x i y,opće rješenje je

$$y_u(x) = C_1\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right), \tag{3.10}$$

i predstavlja unutarnju aproksimaciju za $x = O(\varepsilon)$.

Došli smo do aproksimativnog rješenja

$$y_0(x) = e^{1-x}, \quad x = O(1)$$

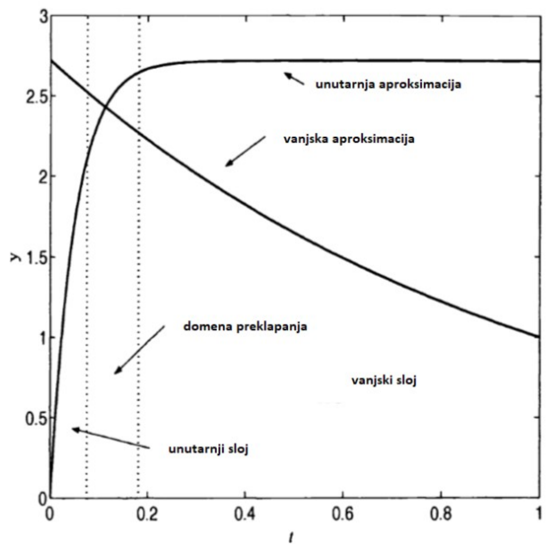
$$y_u(x) = C_1\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right), \quad x = O(\varepsilon). \tag{3.11}$$

Ostaje nam još odrediti konstantu C_1 što ćemo učiniti usklađivanjem dobivenih aproksimacija.

3.2. Usklađivanje

Pod pojmom usklađivanje ne mislimo na odabir vrijednosti ε_0, za koji je $y_0(\varepsilon_0) = y_u(\varepsilon_0)$, u svrhu određivanja konstante C_1. Postupak usklađivanja je u stvari spajanje dviju aproksimacija kako bismo dobili jednu neprekidnu aproksimaciju za neki fiksni $x = \varepsilon_0$. Cilj nam je konstruirati jednu aproksimaciju koja će vrijediti na cijelom segmentu $[0,1]$ kada $\varepsilon \to 0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je širina rubnog sloja jednaka ε. Faktor skaliranja $\delta(\varepsilon)$ određen je širinom rubnog sloja. Međutim, možemo problemu pristupiti i na sljedeći način.

Čini se da se unutarnja i vanjska aproksimacija djelomice podudaraju na domeni preklapanja, odnosno domeni koja se nalazi između rubnog i vanjskog sloja.



Slika 3: Graf egzaktnog rješenja te domena preklapanja

Ako je $x = O(\varepsilon)$ tada se x nalazi u rubnom sloju, a ako je $x = O(1)$ onda je x iz vanjskog sloja. Zato za x iz domene preklapanja uzimamo $x = O(\sqrt{\varepsilon})$. Uvodimo novu nezavisnu varijablu η iz domene preklapanja

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{3.12}$$

Za usklađivanje mora biti zadovoljeno poklapanje unutarnje i vanjske aproksimacije kada $\varepsilon \to 0^+$, u smislu prijelazne varijable η. Simbolima zapisano,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_0(\sqrt{\varepsilon}\eta) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} y_u(\sqrt{\varepsilon}\eta). \tag{3.13}$$

Za naš problem uvjet usklađivanja glasi

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_0(\sqrt{\varepsilon}\eta) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{1-\sqrt{\varepsilon}\eta} = e,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_u(\sqrt{\varepsilon}\eta) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} C_1\left(1 - e^{-\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) = C_1.$$

Usklađivanje zahtjeva $C_1 = e$ te sada naša unutarnja aproksimacija glasi

$$y_u(x) = e\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right). \tag{3.14}$$

Zato što tražimo aproksimaciju samo vodećeg reda, možemo zanemariti prijelaznu varijablu i za **uvjet usklađivanja** pisati

$$\lim_{x\to 0^+} y_0(x) = \lim_{\xi\to\infty} Y_u(\xi). \tag{3.15}$$

3.3. Uniformna aproksimacija

Da bismo došli do uniformne aproksimacije na cijelom segmentu $[0,1]$, pogledajmo zbroj unutarnje i vanjske aproksimacije

$$y_0(x) + y_u(x) = e^{1-x} + e - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \approx \begin{cases} e^{1-x} + e\,; & x = O(1) \\ 2e - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\,; & x = O(\varepsilon) \end{cases}.$$

Oduzimanjem zajedničkog limesa (3.13) dobivamo

$$y_a(x) \equiv y_0(x) + y_u(x) - e = e^{1-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}. \tag{3.16}$$

Za x iz vanjskog sloja, drugi član je mali i $y_a(x) \approx e^{1-x}$, odnosno $y_a(x)$ je vanjska aproksimacija. Za x iz rubnog sloja je $e^{1-x} \approx \varepsilon$ pa iz toga slijedi da je $y_a(x) \approx e\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)$, odnosno $y_a(x)$ je unutarnja aproksimacija. U domeni preklapanja i vanjska i unutarnja aproksimacija približno su jednake e pa je zbroj $y_0(x) + y_u(x)$ približno jednaka $2e$ i zato smo oduzimali limes od zbroja. Uočimo da je $y_a(x)$ uniformna aproksimacija na cijelom segementu $[0,1]$.

Uvrstimo li $y_a(x)$ u početnu diferencijalnu jednadžbu, dobivamo

$$\varepsilon y_a'' + (1+\varepsilon)y_a' + y_a = 0$$

i vidimo da $y_a(x)$ zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu na $(0,1)$. Provjerimo još rubne uvjete

$$y_a(0) = 0, \quad y_a(1) = 1 - e^{1-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Rubni uvjet u nuli je u potpunosti zadovoljen, dok je rubni uvjet u jedinici u $O(\varepsilon^n)$, $n > 0$, zato što je

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{e^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^n} = 0,$$

za svaki $n > 0$. Stoga je y_a dobra uniformna aproksimacija na segmentu $[0,1]$.

Primjer 3.3.1.

Pomoću singularnih perturbacija odredimo aproksimativno rješenje rubnog problema

$$\varepsilon y'' + y' = 2x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Metoda regularnih perturbacija u ovom problemu ne bi nam pomogla jer je neperturbacijski problem

$$y' = 2x,$$

čije je opće rješenje oblika

$$y(x) = x^2 + C,$$

koje ne zadovoljava oba rubna uvjeta. Zato pretpostavimo da je rubni sloj u blizini $x = 0$ i uvrstimo rubni uvjet $y(1) = 1$ kako bismo dobili vanjsku aproksimaciju

$$y_0(x) = x^2, \quad x = O(1).$$

Za određivanje širine faktora skaliranja $\delta(\varepsilon)$, skaliramo područje blizu $x = 0$ sa

$$\xi = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \qquad Y(\xi) = y(x).$$

Sada dana diferencijalna jednadžba glasi

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} Y'' + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} Y' = 2\delta(\varepsilon)\xi.$$

Ako je $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim 2\delta(\varepsilon)$ dominantna ravnoteža, onda je $\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$, a $\frac{1}{\delta(\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right)$ što nije malo naspram dominantnih članova. Zato pretpostavimo da je $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ dominantna ravnoteža. U tom slučaju su $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ i $2\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ istog reda koji je mali u usporedbi s $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} = O(\varepsilon^{-1})$ i $\frac{1}{\delta(\varepsilon)} = O(\varepsilon^{-1})$. Stoga je $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ dobar odabir. Sada skalirana diferencijalna jednadžba glasi

$$Y'' + Y' = 2\varepsilon^2 \xi.$$

Unutarnja aproksimacija prvog reda zadovoljava jednadžbu

$$Y_u'' + Y_u' = 0,$$

čije je opće rješenje

$$Y(\xi) = C_1 + C_2 e^{-\xi}.$$

U terminima x i y

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Uvrštavanjem rubnog uvjeta $y(0) = 1$ dobivamo $C_1 = 1 - C_2$ i unutranja aproksimacija je

$$y_u(x) = (1 - C_2) + C_2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Za određivanje konstante C_2 uvodimo domenu preklapanja reda veličine $\sqrt{\varepsilon}$ i pripadnu prijelaznu varijablu skaliranja

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Tada je $x = \sqrt{\varepsilon}\eta$ i za fiksan η uvjet usklađivanja glasi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0\left(\sqrt{\varepsilon}\eta\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_u\left(\sqrt{\varepsilon}\eta\right),$$

tj.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\eta^2 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(1 - C_2) + C_2 e^{-\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}}\right].$$

Izračunamo li limese, dobivamo $C_2 = 1$ i unutarnja aproksimacija glasi

$$y_u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Zbrajanjem unutarnje i vanjske aproksimacije te oduzimanjem limesa iz domene preklapanja dobivamo uniformnu aproksimaciju

$$y_a(x) = x^2 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

3.4. Opći postupak

U prethodnim primjerima rubni sloj pojavljivao se blizu $x = 0$, tj. na lijevom kraju. Općenito se rubni slojevi mogu pojaviti oko bilo koje točke iz intervala pa tako i na desnom kraju ili u unutrašnjosti intervala. Nije isključeno ni da se rubni slojevi u istom problem javljaju više puta. Prilikom rješavanja problema trebali bismo pretpostaviti postojanje rubnog sloja oko $x = 0$ (odnosno lijevom kraju intervala) i zatim nastaviti s postupkom. Ako smo pogrešno pretpostavili doći ćemo do kontradikcije prilikom usklađivanja unutarnjeg i vanjskog sloja te tada pretpostavimo da se rubni sloj nalazi na desnom kraju intervala. Analiza, za desni kraj, provodi se analogno uz skalu transformacije za definiranje unutarnje varijable rubnog sloja

$$\xi = \frac{x_0 - x}{\delta(\varepsilon)},$$

gdje je x_0 desni kraj intervala i $Y(\xi) = y(x_0 - \delta(\varepsilon)\xi)$. Iako smo u prethodnim primjerima vidjeli da je širina faktora skaliranja bila $\delta(\varepsilon)$, to ne mora uvijek biti tako. Također, za usklađivanje smo koristili samo članove glavnog reda unutarnje i vanjske aproksimacije. Profinjenije usklađivanje može sadržavati i članove višeg reda. Naglasimo samo da ovo nije univerzalna metoda. Za neke klase problema je učinkovita, a za neke probleme ju je potrebno modificirati. Teorija singularnih perturbacija aktivno je područje proučavanja u primijenjenoj matematici i striktna dobro razvijena teorija dostupna je samo za određene vrste diferencijalnih jednadžbi.

Teorem 3.3.2.

Neka je

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \tag{3.17}$$

rubni problem, gdje su p i q neprekidne funkcije na $0 \leq x \leq 1$ i $p(x) > 0$ za $0 \leq x \leq 1$. Tada postoji rubni sloj blizu $x = 0$ s unutarnjom aproksimacijom

$$y_u(x) = C_1 + (a - C_1)e^{-\frac{p(0)x}{\varepsilon}} \tag{3.18}$$

i vanjskom aproksimacijom

$$y_0(x) = be^{\int_x^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds}, \tag{3.19}$$

gdje je

$$C_1 = be^{\int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds}. \tag{3.20}$$

Dokaz:

Za dokaz teorema, pokazat ćemo da je pretpostavka o rubnom sloju oko $x = 0$ konzistentna i dovodi do gore navedenih aproksimacija. Ako je rubni sloj oko $x = 0$, tada će vanjska aproksimacija zadovoljavati

$$p(x)y_0' + q(x)y_0 = 0,$$

$$y_0(1) = b.$$

Separacijom varijabli i uvrštavanjem uvjeta za $x = 1$ dobivamo (3.19). U rubnom sloju uvodimo skaliranu varijablu $\xi = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}$ pri čemu još moramo odrediti $\delta(\varepsilon)$. Za $Y(\xi) = y(\delta(\varepsilon)\xi)$ diferencijalna jednadžba postaje

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}Y'' + \frac{p(\delta(\varepsilon)\xi)}{\delta(\varepsilon)}Y' + q(\delta(\varepsilon)\xi)Y = 0. \tag{3.21}$$

Kada $\varepsilon \to 0^+$ se ponašaju kao

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}, \quad \frac{p(0)}{\delta(\varepsilon)}, \quad q(0).$$

Lako se vidi da je $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{p(0)}{\delta(\varepsilon)}$ dominantna ravnoteža pa je širina rubnog sloja $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Uzmimo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Tada jednadžba (3.21) postaje

$$Y'' + p(\varepsilon\xi)Y' + \varepsilon q(\varepsilon\xi) = 0,$$

koja vodi do člana vodećeg reda

$$Y_u'' + p(0)Y_u' = 0.$$

Opće rješenje jednadžbe je

$$Y_u(\xi) = C_1 + C_2 e^{-p(0)\xi}.$$

Uvrštavanjem rubnog uvjeta $Y_u(0) = a$ dobivamo $C_1 = a - C_1$ pa unutarnju aproksimaciju kao

$$y_u(x) = C_1 + (a - C_1)e^{-\frac{p(0)x}{\varepsilon}}. \tag{3.22}$$

Za usklađivanje uvodimo prijelaznu varijablu $\eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y_u(\sqrt{\varepsilon}\eta) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y_0(\sqrt{\varepsilon}\eta).$$

Uvjet usklađivanja sada glasi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(C_1 + (a - C_1)e^{-\frac{p(0)x}{\varepsilon}} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} be^{\int_{\sqrt{\varepsilon}\eta}^{1} \frac{q(s)}{p(s)} ds}$$

pomoću kojeg dolazimo do

$$C_1 = be^{\int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds}.$$

Stoga je unutarnja aproksimacija dana kao u iskazu teorema (3.18) i (3.20) i gotovi smo s dokazom.

Q.E.D.

Uniformna aproksimacija $y_a(x)$ dana je s

$$y_a(x) = y_0(x) + y_u(x) - C_1.$$

Može se pokazati da je $y_a(x) - y(x) = O(\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0^+$ uniformno na $[0,1]$, gdje je $y(x)$ egzaktno rješenje problema (3.17).

Ako je $p(x) < 0$ na $0 \leq x \leq 1$, tada usklađivanje nije moguće jer bi u tom slučaju $y_u(x)$ raslo eksponencijalno, osim za $C_1 = a$. S druge strane, usklađivanje je moguće ako je $p(x) < 0$ i rubni sloj je oko $x = 1$. Može se pokazati da je rubni sloj oko $x = 0$ ako je $p(x) > 0$ i u $x = 1$ ako je $p(x) < 0$. Pritom je nemoguće da rubni sloj bude oko bilo koje unutarnje točke iz $(0,1)$.

Bibliografija

[1] Bhimsen K. Shivamoggi, *Perturbation Methods for Differential Equations*, Birkhäuser Basel, 2003.

[2] J. D. Logan, *Applied Mathematics*, Wiley, 2006.

[3] J. Kevorkian, J. D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer-Verlag New York, 1993.

Sažetak

Na početku rada, u poglavlju Regularne perturbacije, pokazana je osnovna ideja perturbacijske metode ilustrirana jednostavnom algebarskom jednadžbom čije je egzaktno rješenje unaprijed poznato. Promatranjem fizikalnog procesa, u primjeru Oscilator, i korištenjem regularnih perturbacija došli smo do nezadovoljavajućeg aproksimativnog rješenja zbog pojave sekularnih članova.Poincaré-Lindstedtovom metodom korigirali smo singularno ponašanje koje se pojavljuje u svim slučajevima periodičkog gibanja.U asimptotičkoj analizi definirali smo pojmove vezane uz konvergenciju i uniformnost kako bismo nadopunili analizu aproksimativnog rješenja.

U drugom poglavlju, bavili smo se metodom singularnih perturbacija. Prvo smo uveli pojam dominantnog uravnoteženja kojim smo objasnili izostanak rješenja kod regularnih perturbacija. Zatim smo, kroz primjere, proučavali graf egzaktnog rješenja rubnog problema i predstavili pojmove: rubni sloj, vanjski sloj te unutarnja i vanjska aproksimacija.

U posljednjem, trećem poglavlju, proveli smo analizu rubnog sloja te uskladili vanjsku i unutarnju aproksimaciju pomoću uvjeta usklađivanja. Na samom kraju rada dan je opći postupak za rješavanje rubnih problema.

Summary

In the chapter entitled Regular perturbations at the beginning of this thesis, the basic idea of the perturbation method, illustrated by a simple algebraic equation, in which the exact solution is known upfront, has been demonstrated. By observing the physical process during the Oscillator example and using regular perturbations we reached an approximate solution which was unsatisfactory due to the occurence of secular terms. The singular behaviour which appears in all periodic motion has been corrected by using Poincaré-Lindstedt method. In order to complement the analysis of the approximate solution, terms related to convergence and uniformity have been defined in the asymptotic analysis.

In the second chapter, the singular perturbation method has been dealt with. Firstly, the term dominant balancing was introduced, allowing for the explanation of the absence of the solution in the regular perturbations. Then we studied, across examples, the graph of the exact solution to the boundary problem and introduced the following terms: boundary layer, outer layer and inner and outer approximation.

In the third and last chapter we conducted an analysis of the boundary layer and brought into conformity the outer and inner approximation through matching conditions. At the very end of the thesis a general procedure for solving boundary problems has been provided.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu, 11.12.1993. godine. 2000. godine započeo sam svoje školovanje u Osnovnoj školi Oton Iveković u Zagrebu. Po završetku osnovne škole, 2008. godine, upisao sam X. gimnaziju „Ivan Supek“, a nakon toga, 2012. godine, Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon stjecanja titule univ.bacc.math, 2015. godine upisao sam Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.