Ekvilibrij u financijskoj teoriji u diskretnom vremenu

Svažić, Stela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Stela Svažić

EKVILIBRIJ U FINANCIJSKOJ TEORIJI U DISKRETNOM VREMENU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, ožujak, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima.

Sadržaj

Uvod

U drugoj polovici 19. stoljeća francuski matematičar Léon Walras objavio je djelo "Éléments d'économie politique pure" zbog kojeg ga danas smatramo začetnikom opće teorije ekvilibrija. U djelu je komentirao uvjet jednakosti ponude i potražnje koji rezultira egzistencijom ekvilibrija, ali se bavio i problemom određivanja cijena pri tom uvjetu. Naime, razumno je pretpostaviti da cijene rastu kada je potražnja veća od ponude i obrnuto, tj. da cijene padaju kada je ponuda veća od potražnje. Dakle, količine utječu na cijene tako što cijene padaju i rastu sve dok ponuda nije na istoj razini kao i potražnja te tada imamo sustav ekvilibrijskih cijena pri kojima se vrši razmjena. Walras je pokušao pokazati da nema razmjene dok se ne "nađe" vektor cijena pri kojima je ponuda jednaka potražnji. Iz jednakosti broja varijabli i broja (nezavisnih) jednadžbi u svom modelu, zaključio je da postoji ekvilibrij. Walras, ali i mnogi drugi ekonomisti pokazuju kako cijene imaju veliku ulogu u teoriji egzistencije ekvilibrija te kako su one jednake za sve potrošače. Ta činjenica vrlo je važna u ekonomskoj teoriji u smislu dostupnosti informacija jer na temelju njih potrošači mogu donositi individualne odluke o svojoj potrošnji. Takve odluke, prema američkom ekonomistu K. Arrowu, čine agregatne odluke te igraju veliku ulogu u uspostavljanju jednakosti ponude i potražnje. Unatoč tome što je razvio teoriju, L. Walras nije dokazao egzistenciju ekvilibrija. To je godinama bio problem koji je intrigirao mnoge znanstvenike, sve do 1951. godine kada je J. Nash izdao djelo u kojem je kako bi pokazao egzistenciju, kasnije nazvanog prema njemu, Nashovog ekvilibrija u teoriji igara koristio teoriju fiksne točke ili preciznije, teorem o fiksnoj točki. Njegovo otkriće pomoglo je ekonomistima da napokon dokažu egzistenciju Walrasovog ekvilibrija. Ti ekonomisti upravo su bili nobelovci G. Debreu i, već prije spomenuti, K. Arrow. Detaljnije, promotrimo ekonomiju u kojoj vlada savršena konkurencija, preferencije potrošača su konkveksne i potražnja je nezavisna. Arrow i Debreu pokazali su da pod tim uvjetima postoji skup cijena takav da je u svakom stanju agregatna ponuda jednaka agregatnoj potražnji. Taj ekonomski model je, naravno, nazvan Arrow-Debreuov model. Istaknimo kako model ne uzima u obzir postojanje racionalnih očekivanja, ali kao osnovu uzima postojanje potrošačevih preferencija. Također, valja spomenuti da je, u godinama kada su navedeni ekonomisti intenzivno radili na temi egzistencije ekvilibrija, primjena teorema o fiksnoj točki dovela do velikog napretka i u samoj teoriji fiksne točke.

U središtu našeg zanimanja bit će odgovoriti na pitanje postoji li sustav cijena, odnosno pokazati da postoji, pri kojima bi količine koje prodavatelji žele prodati bile jednake količinama koje potrošači žele kupiti. Budući da su nam osnovne veličine od interesa potrošači i dobra, modelirat ćemo na skupovima $\mathbb{R}^m_+$ i $\mathbb{R}^l_+$ realnih brojeva s nenegativnim vrijednostima dimenzija m i l, respektivno. Neke od veličina bit će elementi skupa $\mathbb{R}^l_{++}$, realnih brojeva sa strogo pozitivnim vrijednostima dimenzije l. U prvom ćemo poglavlju navesti opće rezultate financijskog modeliranja i funkcionalne analize koji će nam biti potrebni za razvoj teorije u drugom poglavlju. Zatim prelazimo na drugo poglavlje u kojem dajemo osnovne definicije financijske teorije u okviru problema koji razmatramo te uvjetujemo na veličine kojima baratamo kako bismo došli do krucijalnih rezultata vezanih za našu temu. Povezujemo pojam ekvilibrija s efikasnom raspodjelom usluga i dobara u ekonomiji te ga razmatramo u kontekstu različitih tržišta među kojima, na samom kraju, obrađujemo i poznati Capital Asset Pricing Model.
Također, naglasimo da su definicije i ostali rezultati u diplomskom radu preuzeti iz [1], [2], [3], [4] i [5], ukoliko nije navedeno drugačije.

Poglavlje 1

Preliminarije

1.1 Osnovni vjerojatnosni rezultati

Slučajnost ishoda modeliramo pomoću vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiramo slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ s diskretnim vremenom i prostorom stanja E (gdje je E skup) kao familiju slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u E. Dakle, za svaki $n \geq 0$ je $X_n \colon \Omega \to E$ slučajna varijabla.

Definicija 1.1.1. *Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geq 0$ zove se filtracija.*

Definicija 1.1.2. *Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zove se adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je za svaki $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n - izmjeriva$.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $\mathbb{F}$ filtracija na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Slučajni proces $H = (H_n : n \geq 0)$ zove se predvidiv s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako je H_0 $\mathcal{F}_0 - izmjeriva$ te H_n $\mathcal{F}_{n-1} - izmjeriva$ slučajna varijabla za sve $n \geq 1$.*

Tipično, veličina koja će nam se stalno javljati jest veličina S koja predstavlja vektor cijena financijske imovine koja se javlja u portfelju.

Definicija 1.1.4. *Dinamički portfelj (strategija trgovanja) je predvidiv slučajni proces $\phi = \left\{(\phi_t^0, \phi_t^1, ..., \phi_t^d) : t \in \{0, ..., T\}\right\}$, gdje ϕ_t^i predstavlja i-tu financijsku imovinu u trenutku t, za i=0,1,...,d. Vrijednost dinamičkog portfelja[1] definiramo[2] s $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d S_t^i \phi_t^i$.*

[1] Uočimo, S_t^i je oznaka cijene i-te financijske imovine u trenutku t.

[2] Sa $x \cdot y$ označavat ćemo skalarno množenje, odnosno skalarni produkt (vidi poglavlje 1.2) vektora x i y.

Definicija 1.1.5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija,* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je* X *adaptiran s obzirom na* $\mathbb{F}$ *te da je* $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ *za sve* $n \geq 0$.
(a) X *se zove martingal (preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P}) -$ *martingal) ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \ g.s., \ za \ sve \ n \geq 0.$$

(b) X *se zove supermartingal (preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P}) -$ *supermartingal) ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \ g.s., \ za \ sve \ n \geq 0.$$

(c) X *se zove submartingal (preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P}) -$ *submartingal) ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \ g.s., \ za \ sve \ n \geq 0.$$

Uočimo da je sljedeća definicija vezana uz izbor procesa S.

Definicija 1.1.6. *Vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *naziva se martingalna mjera (u odnosu na* S_t*) ili mjera neutralna na rizik ako vrijedi*

$$S_0^i = \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right], \ i = 0, 1, ..., d, \tag{1.1}$$

gdje je $r = const. \in \mathbb{R}$ *kamatna stopa.*

Primijetimo da je, u kontekstu financijskog modeliranja, $\frac{S_1^i}{1+r}$ diskontirana vrijednost i-te financijske imovine u trenutku $t = 1$. Definicija 1.1.6 govori nam da je cijena financijske imovine u trenutku $t = 0$ upravo jednaka očekivanju spomenute diskontirane vrijednosti. Na jednadžbu (1.1) možemo gledati kao na formulu određivanja cijene imovine, ali uz martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Za vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ kažemo da je ekvivalentna s vjerojatnošću $\mathbb{P}$ i pišemo $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ ukoliko za $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}^*[A] = 0$ ako i samo ako $\mathbb{P}[A] = 0$. Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru Ω na kojem je $\mathbb{P}\{\omega\} > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ vrijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$, ako i samo ako je $\mathbb{P}^*\{\omega\} > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Familiju svih martingalnih mjera ekvivalentnih s $\mathbb{P}$ označavamo s:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{P}^* : \mathbb{P}^* \ je \ martingalna \ mjera \ i \ \mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}\}.$$

Definicija 1.1.7. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor s filtracijom* $\mathbb{F}$*. Funkcija* $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ *zove se vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F}$ *(ili* $\mathbb{F}$*-vrijeme zaustavljanja), ako vrijedi*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \ za \ sve \ n \geq 0.$$

Definicija 1.1.8. *Slučajni zahtjev je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je*

$$0 \leq C < \infty \ \mathbb{P} - g.s.$$

Definicija 1.1.9. *Slučajni zahtjev C zove se dostižan (u odnosu na S) ako postoji portfelj $\phi \in \mathbb{R}^{d+1}$ takav da vrijedi*

$$C = \phi \cdot S_1 = \phi^0(1+r) + \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i.$$

Takav portfelj ϕ zove se replicirajući portfelj.

1.2 Funkcionalna analiza

U ovom odjeljku iskazat ćemo rezultate koji će nam biti važni za razumijevanje i dokaz egzistencije ekvilibrija u drugom poglavlju. Rezultate navodimo bez dokaza polazeći od pretpostavke da su poznati sa studija. U nastavku ćemo iskazati neke od teorema teorije o fiksnoj točki, a kako bismo ih u potpunosti razumjeli, za početak ćemo definirati Lipschitzovo svojstvo. Ono će nas navesti na definiciju kontrakcije, a koja je važna pretpostavka na funkciju u Banachovom teoremu o fiksnoj točki [3].

Definicija 1.2.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ kažemo da je Lipschitzova na A (ili Lipschitz-neprekidna na A) ako postoji konstanta $L \geq 0$ takva da vrijedi*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,,\ \forall x, y \in A. \tag{1.2}$$

Napomena 1.2.2. *Ako je $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ Lipschitzova funkcija, definiramo*

$$L_f = inf\,\{L \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,,\ \forall x, y \in A\}\,.$$

Tada je $L = L_f$ najmanja konstanta za koju vrijedi (1.2) *i zovemo ju Lipschitzova konstanta.*

Definicija 1.2.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ kažemo da je kontrakcija ako je ona Lipschitzova s konstantom $L_f < 1$.*

Teorem 1.2.4. *(Banachov teorem) Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren i neka je $f\colon A \to A$ kontrakcija. Tada f ima jedinstvenu fiksnu točku u A, tj. postoji jedinstveni $x \in A$ takav da je $f(x) = x$.*

---

[3] Rezultati koji slijede, vezani za teorem o fiksnoj točki, preuzeti su iz fakultetske skripte *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*; I.Gogić, P.Pandžić, J.Tambača; 24.veljače 2019.

Neka je $\Delta^{l-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+, \sum_{i=1}^l x_i = 1\right\}$.

Teorem 1.2.5. *(Brouwerov teorem) Svako neprekidno preslikavanje $f\colon \Delta^{l-1} \to \Delta^{l-1}$ ima fiksnu točku.*

Podsjetimo se, korespondencija F sa X u Y je preslikavanje sa X u $\mathcal{P}(Y)$, gdje je $\mathcal{P}(Y)$ skup svih podskupova od Y. Kod korespondencije, za razliku od funkcije, F(x) može poprimiti više od jedne vrijednosti. Uočimo da je funkcija zapravo specijalan slučaj korespondencije budući da svakom elementu domene pridružuje točno jedan element kodomene dok korespondencija svakom elementu domene pridružuje jedan ili više elemenata kodomene. Tako je njen graf skup

$$graph\ F = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}. \tag{1.3}$$

Primjer 1.2.6. *Navedimo dva vrlo jednostavna primjera korespondencije:*
i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x, -x\}$,
ii) $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} \left[x, \frac{1}{3}\right], 0 \le x \le \frac{5}{7} \\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], x = \frac{5}{7} \\ \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], x \ge \frac{5}{7}. \end{cases}$

U nastavku navodimo Kakutanijev teorem, koji će nam pod određenim pretpostavkama na skup A i funkciju f garantirati egzistenciju fiksne točke. Neke su od pretpostavki da je f konveksna i neprazna korespondencija. Za korespondenciju kažemo da je neprazna i konveksna ako je $f(x)$ neprazan konveksan skup, za svaki $x \in A$.

Teorem 1.2.7. *(Kakutanijev teorem) Neka je A neprazan, kompaktan i konveksan podskup od $\mathbb{R}^l$, $f\colon A \to A$ konveksna i neprazna korespondencija čiji je graf zatvoren. Tada f ima fiksnu točku, tj. postoji $x \in A$ takav da vrijedi $x \in f(x)$.*

U zadnjem poglavlju, pri zapisivanju minimizacijskog problema, koristit ćemo skalarni produkt i Rieszov teorem pa definirajmo za početak skalarni produkt, a zatim ćemo iskazati Rieszov teorem.
Prisjetimo se pojmova unitarnog prostora te skalarnog produkta tako da na vektorskom prostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo funkciju $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva:
i) $\langle x, x \rangle \ge 0,\ x \in X$,
ii) $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako $x = 0$,
iii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,\ x, y, z \in X$,
iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,\ x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$,
v) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,\ x, y \in X$.
Tada $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazivamo unitarni prostor, a funkciju $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt.

Teorem 1.2.8. *(Rieszov teorem) Ako imamo konačnodimenzionalni unitarni prostor X nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ onda svaki neprekidni linearni funkcional f možemo prikazati u obliku $f(x) = \left\langle x, a_f \right\rangle$, $a_f \in X$, za svaki $x \in X$.*

Poglavlje 2

Ekvilibrij

2.1 Ekvilibrij u ekonomiji razmjene

Mnogo je naroda u prošlosti poznato po trgovini. Jedan od njih zasigurno su i Feničani koji su živjeli u doba prije Krista, a ime su dobili po ljubičastoj boji koju su proizvodili. Za razliku od prijašnjih vremena, danas se trgovina može odvijati i bez prisutnosti robe. No, može se odvijati i bez izravnog dodira kupca i prodavača. Mjesto na kojem se susreću ponuda i potražnja nazivamo tržište. S obzirom na broj poduzeća dijeli se na savršenu konkurenciju, monopol, monopolističku konkurenciju i oligopol. Savršena konkurencija označava tržište na kojem sve tvrtke proizvode identične proizvode, a broj kupaca i prodavatelja je takav da nijedan od njih ne može određivati uvjete razmjene (najčešće se to odnosi na cijene).
Za početak, definiramo ekonomiju razmjene kao ekonomiju u kojoj nema proizvodnje već samo razmjene postojećih dobara. Promotrimo sada ekonomiju razmjene s m potrošača i l dobara. U uvjetima savršene konkurencije, znamo da potrošači ne mogu utjecati na cijene. S obzirom da su potrošači i dobra naše osnovne veličine, definiramo:
$-$potrošačev skup potražnje za koji pretpostavljamo da je jednak $\mathbb{R}^l_+$ budući da potrošač može potraživati l dobara, a očito je da potraživana dobra moraju biti nenegativna (inače ne bi postojala potražnja već ponuda tih dobara) te potražnja poprima realne vrijednosti što je također očito jer robu ne morate kupovati u cjelobrojnim iznosima,
$-$sredstva kojima i-ti potrošač raspolaže sa $\boldsymbol{e_i} \in \mathbb{R}^l_{++}$ obzirom da potrošač za svako od l dobara raspolaže nekim sredstvima[1],
$-$skup potrošačevih preferencija na skupu od l dobara koje stoga opisuju funkcije korisnosti $\boldsymbol{u_i}\colon \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$,
gdje $i = 1, 2, ..., m$.

[1] Uočimo ovdje važnu pretpostavku na e_i koja kaže da svaki potrošač raspolaže strogo pozitivnim sredstvima, odnosno da nužno ima neki početni nenegativni iznos sredstava različit od 0.

S obzirom da su potrošačeva sredstva te potrošačeva korisnost osnovne veličine ekonomije razmjene, označavamo je sa $\boldsymbol{\epsilon = ((u_i, e_i)}, i = 1, 2, ..., m)$.
Zadržimo se malo na preferencijama i funkcijama korisnosti potrošača.Teorija egzistencije ekvilibrija uzima u obzir potrošačeve preferencije koje odražavaju poželjnost pojedinih dobara. Preferencije možemo predstaviti pomoću relacije preferencija potrošača. Uz određena svojstva na relaciju preferencija potrošača (potpunost, refleksivnost, tranzitivnost, neprekidnost) slijedi egzistencija funkcije korisnosti [2]. Dakle, funkcija korisnosti $u_i \colon \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ odražava potrošačeve preferencije, a kao argument uzima košaricu na skupu od l dobara. Pretpostavimo da funkcija korisnosti zadovoljava:

(U1) funkcija u_i je neprekidna, strogo konkavna i rastuća, za svaki $i = 1, 2, ..., m$.

Sada pogledajmo primjer koji će nas intuitivno odvesti do jednog od značajnijih pojmova u financijskoj teoriji.

Primjer 2.1.1. *Neka je Zvonimir sudionik novčanog (štoviše, deviznog) tržišta koji je uočio priliku za zaradu. Stoga on na tržištu A kupuje valutu te je prodaje na tržištu B skuplje nego što ju je platio na tržištu A. Time ostvaruje dobit, odnosno strogo pozitivan profit.*

Ovakav način ostvarivanja dobiti nazivamo arbitraža. Preciznije, definicija glasi:

Definicija 2.1.2. ***Arbitraža*** *ili* ***mogućnost arbitraže*** *je portfelj $\theta = (\theta^0, \theta^1, ..., \theta^d)$ s nepozitivnom početnom vrijednošću $S \cdot \theta = \sum_{i=0}^{d} \theta^i S^i$ i vrijednošću $V\theta \geq 0$ u trenutku 1 s barem jednom strogom nejednakošću. Drugim riječima, ili vrijedi $S \cdot \theta < 0$ i $V\theta \geq 0$ ili $S \cdot \theta = 0$ i $V\theta \geq 0$ sa strogom nejednakošću za barem jedno stanje.*

Važno je napomenuti da je situacija opisana u primjeru specijalan slučaj kod kojeg tržišta uvijek unaprijed prepoznaju takvu mogućnost arbitraže i štite se od rizika tako što je otklanjaju prije nego sudionik na tržištu iskoristi mogućnost iste. Međutim, općenito, arbitraža se često javlja i prije nego je tržišta prepoznaju. Iako se mogućnost arbitraže brzo otklanja, činjenica da se ona javlja i da je sudionici ponekad i realiziraju, problem je mnogih tržišta. U ovom radu polazimo od pretpostavke o nepostojanju arbitraže.
S obzirom da smo definirali potrošačev skup potražnje, definirat ćemo i vektor potražnje potrošača na tom skupu, no definirajmo za početak njegov budžetski prostor.
Budžetski prostor[3] i-tog potrošača definiramo kao $\boldsymbol{B_i(p)} = \left\{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{l}}_+ : \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e_i}\right\}$, gdje je $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p^1}, ..., \boldsymbol{p^l}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{l}}_{++}$ **vektor cijena** prilikom čega pretpostavljamo da se svako od l dobara prodaje po cijeni koja je strogo pozitivna. Uočimo da to znači da potrošač ne može

[2]Detaljniju razradu možete pronaći u G.A.Jehle, P.J.Reny, *Advanced Microeconomic Theory*, Pearson Education Limited, Harlow, 2011.

[3]Uočite da se u nejednakosti budžetskog ograničenja javlja skalarni produkt jer su p, c i e_i vektori dimenzije l. Dakle, nejednakost možemo zapisati i kao $\sum_{k=1}^{l} p_k c_k \leq \sum_{k=1}^{l} p_k e^i_k$.

dobiti besplatno neko dobro ili primiti naknadu za uzimanje nekog dobra. Dakle, budžetski prostor ili skup ostvarive potrošnje je skup svih dobara koje i-ti potrošač može kupiti pri danoj cijeni p obzirom na sredstva kojima raspolaže. Drugim riječima, to je potrošnja (ili košara dobara) koja je dostupna potrošaču (i poželjna) obzirom na njegova sredstva. Obzirom da je[4] za $p >> 0$ budžetski prostor konveksan i kompaktan[5] te funkcija korisnosti ima svojstvo **(U1)** (neprekidna je, strogo konkavna i rastuća, za svaki $i = 1, 2, ..., m$), jasno je da ona postiže maksimum[6] na danom skupu $B_i(p)$. To nas intuitivno navodi na pretpostavku da i-ti potrošač maksimizira svoju funkciju korisnosti u_i obzirom na budžetsko ograničenje te na temelju cijene p izabire neku potražnju, a tu potražnju ne čini ništa drugo nego točke koje maksimiziraju u_i. Dakle, uz zadanu cijenu dolazimo do jedinstvenog vektora potražnje koji se dobije maksimizacijom funckije korisnosti u_i pod uvjetom budžetskog ograničenja. Taj jedinstveni vektor dobara koji potrošač izabire označavamo sa $\boldsymbol{d_i(p)} \in \mathbb{R}^l_+$ i nazivamo ga potrošačeva **potražnja** pri cijeni p; stoga kako preferencije potrošača rastu, budžetsko ograničenje se veže uz potražnju $d_i(p)$ te imamo $p \cdot d_i(p) = p \cdot e_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Ova jednakost navodi nas na sljedeću definiciju.

Definicija 2.1.3. *Uređeni par* $(p, d_i(p))$, $i = 1, 2, ..., m$ *je* ***ekvilibrij*** *ako:*
i)$p >> 0$
ii)$\sum_{i=1}^m d_i(p) = \sum_{i=1}^m e_i := e.$

Gornja definicija nam zapravo kaže da bez obzira što potrošač maksimizira individualnu korisnost kao odgovor na dani vektor cijena ekvilibrij se postiže kada je suma svih tako dobivenih potražnji u ekonomiji jednaka sumi svih sredstava m potrošača u toj istoj ekonomiji.

Primjer 2.1.4. *Pogledajmo na trenutak ekonomiju s dva dobra i dva potrošača. Ukoliko prvi potrošač potražuje određenu količinu drugog dobra koju posjeduje drugi potrošač, no ta je količina veća od one koju drugi potrošač nudi, kažemo da za drugim dobrom postoji višak potražnje. Analogno, ako je potražnja za nekim dobrom manja od ponude tog istog dobra kažemo da postoji višak ponude tog dobra. Za našu teoriju od interesa će nam biti postojanje viška potražnje. Važno je uočiti da će kada su potražnja i ponuda na jednakoj razini (tzv. market clearing), dakle kada ne postoji višak potražnje (odnosno kada je višak potražnje jednak* 0*) ekonomija biti u stanju ekvilibrija (to ćemo pokazati u korolaru u nastavku).*

Definicija 2.1.5. ***Funkciju viška potražnje*** *i-tog potrošača* $z_i : \mathbb{R}^l_{++} \to \mathbb{R}^l$ *definiramo kao*

$$z_i(p) = d_i(p) - e_i,$$

[4] $x >> y$ *akko* $x_i > y_i$, za svaki $i = 1, 2, ..., m$.

[5] Za dokaz vidi Dodatak.

[6] Slijedi iz važnog rezultata, posebice u primjenama, koji kaže da je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu ograničena te dostiže minimum i maksimum.

gdje je $d_i(p)$ funkcija potražnje i-tog potrošača, a e_i sredstva kojima raspolaže. Također, definiramo ***agregatnu funkciju viška potražnje*** $z\colon \mathbb{R}^l_{++} \to \mathbb{R}^l$ *kao*

$$z(p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i).$$

Korolar 2.1.6. *Vektor cijena p je cijena pri ekvilibriju ako i samo ako vrijedi:*

$$p >> 0 \ i \ z(p) = 0.$$

Dokaz. Prema definiciji ekvilibrija, ako je p cijena pri ekvilibriju, vrijedi $p >> 0$ te $\sum_{i=1}^{m} d_i(p) = \sum_{i=1}^{m} e_i$. Prebacimo li obje jednakosti na istu stranu dobivamo $\sum_{i=1}^{m} d_i(p) - \sum_{i=1}^{m} e_i = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) = 0$, odnosno prema definiciji funkcije viška potražnje $z(p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) = 0$. Pokazali smo da vrijedi $p >> 0 \ i \ z(p) = 0$. Obrnuto, pokažimo ako vrijedi $p >> 0 \ i \ z(p) = 0$, onda je $(p, d_i(p))$ ekvilibrij. Pod danim nam pretpostavkama zadovoljen je uvjet uvjet i) iz definicije ekvilibrija. Kada raspišemo $z(p) = 0$ dobivamo $z(p) = \sum_{i=1}^{m} d_i(p) - \sum_{i=1}^{m} e_i = 0$ što povlači $\sum_{i=1}^{m} d_i(p) = \sum_{i=1}^{m} e_i$ i zadovoljava uvjet ii) iz definicije ekvilibrija. Dakle, $(p, d_i(p))$ je ekvilibrij. □

Ranije spomenuta teorija fiksne točke od ključne je važnosti kako u različitim područjima matematike tako i u drugim naukama. Kombinacija je analize, geometrije i topologije, a svoj procvat doživjela je posljednjih 50 godina otkad je sama teorija znatno napredovala. Kolika je njena ogromna važnost i široka primjena u znanosti govori nam i sama činjenica da se gotovo svaki student tijekom svog fakultetskog obrazovanja susreo s pojmom fiksne točke koji jest središnji pojam te teorije. Iako sam teorem o fiksnoj točki ima najvažniju primjenu za dokaz egzistencije rješenja Cauchyjeve zadaće za običnu diferencijalnu jednadžbu, u ovom će nas radu njegova primjena dovesti do dokaza egzistencije ekvilibrija. Dokaze egzistencije ekvilibrija svrstavamo u tri kategorije. U prvoj se kategoriji nalaze oni koji se uglavnom oslanjaju na teorem o fiksnoj točki i ne zahtijevaju nikakve pretpostavke o diferencijabilnosti. Ti su dokazi izneseni $50 - ih$ godina prošlog stoljeća. U drugoj kategoriji nailazimo na dokaze kod kojih kombinatornim algoritmima pronalazimo fiksnu točku i vremenski ih smještamo u $70 - te$ godine prošlog stoljeća. Treća kategorija bazira se na diferencijalnoj topologiji i to je zapravo najnovija teorija egzistencije ekvilibrija razvijena kako bi se prvenstveno proučavala kvalitativna svojstva ekvilibrija. Kako se, imajući na umu Korolar 2.1.6, dokaz egzistencije ekvilibrija svodi na traženje rješenja jednadžbe $z(p) = 0$, navodimo za početak svojstva funkcije viška potražnje.

Propozicija 2.1.7. *Neka je z agregatna funkcija viška potražnje. Tada z ima sljedeća svojstva:*
i) z je homogena stupnja 0 *($z(\gamma p) = z(p)$ za svaki $p >> 0$ i $\gamma > 0$).*
ii) z je neprekidna na $\mathbb{R}^l_{++}$.

iii) z zadovoljava Walrasov zakon ($p \cdot z(p) = 0$ *za svaki* $p >> 0$).
iv) Ako $p_n \overset{n\to\infty}{\to} p$ *i* $p^j = 0$, *tada* $\|z(p_n)\| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$.
v) z je ograničena odzodo ($z(p) \geq -e$, *za svaki* p).

Dokaz. i) Slijedi iz činjenice da je potrošačeva potražnja[7] $d_i(p)$ homogena stupnja 0.
ii) Svojstvo neprekidnosti slijedi iz neprekidnosti $d_i(p)$ za $p >> 0$.
iii) Kako je u_i rastuća (za svaki $i = 1, 2, ..., m$), nejednadžba ograničenja iz budžetnog skupa postiže jednakost pa tada imamo

$$p \cdot d_i(p) = p \cdot e_i,$$

odnosno $p \cdot d_i(p) - p \cdot e_i = 0$. Kada raspišemo po komponentama imamo

$$\sum_{j=1}^{l} p_j d_j^i(p) - \sum_{j=1}^{l} p_j e_j^i = 0,$$

odnosno

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(d_j^i(p) - e_j^i) = 0.$$

Sumiramo li po svim potrošačima dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} p_j(d_j^i(p) - e_j^i) = 0.$$

Sada možemo zamijeniti sume pa dobivamo

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} p_j(d_j^i(p) - e_j^i) = 0.$$

Obzirom da cijena ne ovisi o potrošačima, gornji izraz možemo zapisati kao

$$\sum_{j=1}^{l} p_j \sum_{i=1}^{m} (d_j^i(p) - e_j^i) = 0.$$

Uočavamo u gornjoj jednadžbi funkciju viška potražnje i zapisujemo ju kao

$$\sum_{j=1}^{l} p_j \sum_{i=1}^{m} z_j^i(p) = 0.$$

[7] Kako je budžetni skup isti pri cijeni p i pri cijeni γp, $d_i(p)$ je homogena stupnja 0.

Sada uočavamo agregatnu funkciju viška potražnje pa imamo

$$\sum_{j=1}^{l} p_j z_j(p) = 0$$

što povlači

$$p \cdot z(p) = 0.$$

iv) Ovo je svojstvo zapravo vrlo intuitivno. Kako se, prema pretpostavci, cijena nekih dobara približava nuli, potrošači koji raspolažu nekim sredstvima za ta dobra, potraživat će što je više moguće tih dobara.
v) Obzirom da je agregatna funkcija viška potražnje definirana kao $z(p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i)$, a $d_i(p) \in \mathbb{R}_+^l$, odnosno $d_i(p) \geq 0$, za svaki p, $i = 1, 2, ..., m$ imamo[8] $z(p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) \geq \sum_{i=1}^{m}(0 - e_i) = -\sum_{i=1}^{m} e_i = -e$. □

Napomena 2.1.8. *Treće je svojstvo vrlo važna i čvrsta pretpostavka. Promotrimo ekonomiju s dva dobra. Obzirom da je agregatna funkcija viška potražnje jednaka sumi potrošačevih funkcija viška potražnje, Walrasov zakon kaže da ukoliko postoji višak ponude za jednim dobrom (manjak potražnje), tada za drugim postoji višak potražnje jer funkcije viška potražnje u sumi moraju rezultirati nulom. Također, ako je jedno tržište u ekvilibriju (funkcija viška potražnje jednaka je* 0*), tada isto mora vrijediti i za drugo. Navedeni rezultati mogu se poopćiti i na n dimenzija pa npr. drugi kaže ako imamo* $(n-1)$ *tržišta koja su u ekvilibriju (suma njihovih funkcija viška potražnje jednaka je* 0*), n-to tržište će također biti u ekvilibriju (funkcija viška potražnje bit će jednaka* 0*) jer je agregatna funkcija viška potražnje, prema Walrasovom zakonu, jednaka* 0.

U nastavku, s obzirom da je funkcija viška potražnje pozitivno homogena (svojstvo i) u Propoziciji 2.1.7), možemo normirati vektor cijena[9]. Umjesto da normiramo postavivši neku vrijednost na 1 ($p_i = 1$), kao što smo to uobičajeno radili na fakultetu, prikladnije nam je normirati cijeli vektor cijena tako da je njegova suma jednaka 1 pa pretpostavljamo

$$p \in \Delta^{l-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^l, \sum_{i=1}^{l} p_i = 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Ideja ove teorije je da postavljanjem analitičkih uvjeta na funkcije u_i želimo dobiti opće rezultate. Uz pretpostavku **(U1)** slijedit će egzistencija ekvilibrija. Kako bismo to pokazali, za početak, navodimo lemu koja slijedi iz Kakutanijeva teorema (vidi 1.2.7), a koja će nam poslužiti kao pomoćni alat u dokazu egzistencije. Nakon toga bavimo se samim dokazom egzistencije.

[8] U ovom izvodu 0 označava nulvektor.

[9] Jer ono što nam je važno su relativne cijene.

Lema 2.1.9. *(Gale-Nikaido-Debreu lema) Neka je S konveksan i zatvoren podskup jediničnog simpleksa Δ^{l-1} te neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^l$ neprekidna funkcija takva da vrijedi $p \cdot f(p) = 0$, za svaki p. Tada postoji $p^* \in S$ takav da $p \cdot f(p^*) \leq 0$, za svaki $p \in S$.*

Dokaz. Uzmimo korespondenciju $\mu\colon f(S) \to S$ definiranu s

$$\mu(z) := \{p \in S : p \cdot z = max\{q \cdot z : q \in S\}\}.$$

Vrijednosti korespondencije su konveksne i kompaktne i lako se pokaže da je graf od μ zatvoren[10]. Sada uzmimo korespondenciju sa $S \times f(S)$ u $S \times f(S)$ definiranu s $(p, z) \mapsto (\mu(z), f(p))$. Njene su vrijednosti također konveksne i kompaktne, a graf zatvoren. Iz Kakutanijevog teorema slijedi da postoji (p^*, z^*) t.d. $p^* \in \mu(z^*)$ *i* $z^* = f(p^*)$. Stoga $p \cdot f(p^*) = p \cdot z^* \leq p^* \cdot z^* = p^* \cdot f(p^*) = 0,\ \forall p \in S$. Uočimo da nejednakost slijedi iz definicije korespondencije μ, a zadnja jednakost slijedi iz pretpostavke leme. □

Teorem 2.1.10. *Pod pretpostavkom* ***(U1)*** *(funkcija u_i je neprekidna, strogo konkavna i rastuća za svaki $i = 1, 2, ..., m$) postoji ekvilibrij.*

Dokaz. Kada bismo mogli primijeniti 2.1.9 (Gale-Nikaido-Debreu) na simpleks Δ^{l-1} i funkciju z, dokaz bi bio gotov. Naime, u tom slučaju bismo bili u uvjetima GND leme budući da bismo imali neprekidnu funkciju z takvu da vrijedi $p \cdot z(p) = 0, \forall\ p$. Tada bi, prema lemi, vrijedilo $p \cdot z(p^*) \leq 0, \forall p \in \Delta^{l-1}$. Dakle, ako vrijedi $p \cdot z(p^*) \leq 0$ za svaki $p \in \Delta^{l-1}$, tada $z(p^*) \leq 0$. Međutim, kako vrijedi Walrasov zakon ($p^* \cdot z(p^*) = 0$), nužno slijedi $z(p^*) = 0$, a samim time prema Korolaru 2.1.6 slijedi egzistencija ekvilibrija. Nažalost, GND lemu ne možemo primijeniti na agregatnu funkciju viška potražnje jer ona nije neprekidna na rubovima simpleksa. To nas navodi na reduciranje simpleksa i puštanje limesa. Za $n \in \mathbb{N}$, neka je

$$\Delta_n^{l-1} = \left\{p \in \Delta^{l-1} : p^j \geq \frac{1}{n}, j = 1, 2, ..., l.\right\} \tag{2.2}$$

S obzirom da je restrikcija z na Δ_n^{l-1} neprekidna te imamo $p \cdot z(p) = 0, \forall p$ (Walrasov zakon), iz GND leme slijedi da postoji $p_n^* \in \Delta_n^{l-1}$ t.d.

$$p \cdot z(p_n^*) \leq 0, \quad za\ p \in \Delta_n^{l-1}. \tag{2.3}$$

Kako je niz (p_n^*) u Δ^{l-1}, ima konvergentan[11] podniz $(p_n^{*\prime})$ te postoji točka p^* kojoj on teži. Pokažimo da vrijedi $p^* >> 0$. Prema 2.1.7 iv), dovoljno je pokazati da je niz $z(p_n^{*\prime})$ omeđen jer će tada slijediti $p^* \neq 0$. Prema 2.1.7 v), omeđen je odozdo s $-e$. Ako $z(p_n^{*\prime}) = (z^k(p_n^{*\prime}))_{k=1}^l$, primjenjujući (2.3) na $p^j = \frac{1}{l}$, za svaki j i n dovoljno velik, dobivamo:

$$z^1(p_n^{*\prime}) \leq -\sum_{k=2}^{l} z^k(p_n^{*\prime}) \leq \sum_{k=2}^{l} e^k. \tag{2.4}$$

[10] Vidi Dodatak.

[11] Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan akko svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji limes je u A.

Stoga je niz $z^1(p_n^{*\prime})$ omeđen odozgo. Analognim zaključivanjem slijedi da su nizovi $z^k(p_n^{*\prime})$, $k = 2, 3, ..., l$ također omeđeni odozgo. Stoga imamo $p^* >> 0$ te prema 2.1.7 ii) $z(p_n^{*\prime}) \to z(p^*)$. Kako je niz reduciranog simpleksa rastući, imamo $p \cdot z(p^*) \leq 0 \ \forall p \in \Delta_n^{l-1}$ te puštanjem limesa kada $n \to \infty$ imamo $p \cdot z(p^*) \leq 0, \forall p \in \Delta^{l-1}$. Stoga $z(p^*) \leq 0$. Kako je $p^* \cdot z(p^*) = 0$ (Walrasov zakon), zaključujemo $z(p^*) = 0$ te slijedi egzistencija ekvilibrija prema Korolaru 2.1.6. □

2.2 Pareto optimalnost i ekvilibrij

Sada, uz prethodnu pretpostavku **(U1)**, dodatno pretpostavljamo:

(U2) $u_i \in C^2$ *na* R_{++}^l, za svaki $i = 1, 2, ..., m$,

(U3) za svaki $i = 1, 2, ..., m$, u_i zadovoljava $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}(x) \to \infty$ ako $x^j \to 0$, za ostale komponente od x fiksne.

Svojstva **(U2)** i **(U3)** uvjetujemo na funkcije korisnosti u_i jer su to ujedno svojstva diferencijabilnosti, a drugi dokaz egzistencije ekvilibrija koji navodimo u nastavku počiva na prilično restriktivnim pretpostavkama o diferencijabilnosti funkcija korisnosti u_i. Također počiva na Prvom i Drugom osnovnom teoremu ekonomike blagostanja (o tome ćemo detaljnije malo kasnije), a sam dokaz razvijen je unutar tzv. Negishi metode. Metoda je vrlo korisna jer pojednostavljuje pronalaženje konkurencijskog ekvilibrija. Konkretno, u ekonomiji s n potrošača reducira na sustav $(n - 1)$ jednadžbi i $(n - 1)$ nepoznanica. Jedan od problema koji se pojavljuje u metodi je problem socijalnog planera. Naime, socijalni planer je osoba koja donosi odluke o potrošnji u korist interesa svih potrošača u ekonomiji pa je tako problem socijalnog planera pronaći optimalnu raspodjelu potrošnje maksimiziranjem ukupne korisnosti svih potrošača pod uvjetom da je potrošnja ograničena sredstvima. Za početak, kakva je to optimalna raspodjela?
Kada govorimo o optimalnoj raspodjeli zapravo mislimo na Pareto optimalnu raspodjelu. To je način raspodjele resursa čiji naziv dolazi od tvorca Paretovog pravila [12], talijanskog ekonomista, Vilfreda Pareta. U takvoj se raspodjeli položaj jednog pojedinca ne može poboljšati bez da se naruši položaj drugog pojedinca stoga teorija kaže da je bolji izraz Pareto efikasnost. Napomenimo, kada kažemo da je neka alokacija Pareto optimalna ne znači da je dobra nego da osigurava efikasnost.

Definicija 2.2.1. *Raspodjela* $(c_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ *je* ***Pareto optimalna*** *ukoliko ne postoji neka druga raspodjela* $(c_i')_{i=1}^m \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ *za koju vrijedi* $\sum_{i=1}^m c_i' \leq e$ *takva da* $u_i(c_i') \geq u_i(c_i)$ *za svaki* i, *te* $u_j(c_j') > u_j(c_j)$ *za neki* j.

[12] Prema Paretovom pravilu 80% rezultata postiže se u 20% vremena, a za postizanje preostalih 20% rezultata potrebno je najviše uloženog truda.

Primjer 2.2.2. *Sljedeće situacije primjeri su Pareto optimalnosti:*
i) Jednaka paušalna subvencija dana je bogatoj i siromašnoj obitelji. Siromašnu obitelj izbavlja iz siromaštva dok bogatoj ne čini razliku.
ii) Obitelj Naši voli isključivo kruške dok obitelj Vaši voli isključivo jabuke. Dostupna je jednaka količina krušaka i jabuka te sve kruške pripadaju Našima dok sve jabuke pripadaju Vašima.
iii) Mladić ima ružu, a ne voli ruže. Djevojka koja sjedi na klupi, kraj njega, voli ruže. Mladić joj pruža ružu.

Općenito nas zanima poveznica između Pareto optimalne raspodjele i konkurencijskog ekvilibrija te može li se ta poveznica iskoristiti kako bismo dokazali egzistenciju ekvilibrija. Poveznica je dana sljedećom definicijom u kojoj se uređeni par sastoji od vektora $\overline{p}_i \in \mathbb{R}^l_{++}$ i $(\overline{c}_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^l_+)^m$, gdje je $(\mathbb{R}^l_+)^m$ skup uređenih m-torki l-dimenzionalnih vektora s nenegativnim vrijednostima.

Definicija 2.2.3. *Uređeni par* $(\overline{p}_i, (\overline{c}_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^l_+)^m)$ *je* ***ekvilibrij s transfernim cijenama*** *ako za svaki* $i = 1, 2, ..., m$ *vrijedi*

$$\begin{cases} \overline{c}_i \ \ maksimizira \ \ u_i(c_i) \ pod \ uvjetom \\ \overline{p}_i \cdot c_i \leq \overline{p}_i \cdot \overline{c}_i \end{cases}$$

te ako $\sum_{i=1}^m \overline{c}_i = e$.

Uočimo da je množenje u gornjoj definiciji upravo skalarno množenje obzirom da se radi o vektorima. Definicija nam zapravo govori da pri potrošačevim inicijalnim sredstvima $\overline{c}_i$, uređeni par $(\overline{p}_i, (\overline{c}_i)_{i=1}^m)$ je ekvilibrij[13]. U suprotnom, kako bi se ekvilibrij postigao, potrošaču je potrebno dati[14] transfer $\overline{p}_i \cdot (e_i - \overline{c}_i)$. 1960. godine Takashi Negishi razvio je (već spomenutu Negishi) metodu pronalaženja ekvilibrija, u ekonomijama koje se nalaze u uvjetima Prvog i Drugog osnovnog teorema, rješavanjem problema socijalnog planera koristeći gore navedenu poveznicu. Definirajmo sada s matematičkog stajališta problem socijalnog planera.
Neka je $\alpha \in \Delta^{m-1}$ vektor težina korisnosti koji će nam koristiti prilikom konstrukcije funkcije korisnosti u određivanju težina α_i pridruženih i-tom potrošaču [15]. Promotrimo problem P_α za dani e:

$$P_\alpha \begin{cases} \max \ \alpha_1 u_1(c_1) + ... + \alpha_m u_m(c_m) \\ \mathrm{c}_i \geq 0 \text{ za svaki } i = 1, 2, ..., m \text{ te } \sum_{i=1}^m c_i \leq e. \end{cases} \tag{2.5}$$

[13] Uočimo da ekvilibrij možemo definirati i kao Pareto optimalan niz s transfernim cijenama 0.
[14] Zbog toga definicija kaže ekvilibrij s transfernim cijenama.
[15] α nam govori koliku važnost ima korisnost i-tog potrošača u usporedbi s korisnosti drugih potrošača.

Dakle, prvi korak metode kaže rješavanjem problema socijalnog planera izračunaj Pareto optimalnu raspodjelu za vektor težina α. Nadalje, želimo dobiti konkurencijski ekvilibrij pa preostaje među Pareto optimalnim izolirati one raspodjele koje su ekvilibrij, a to činimo kroz iduća tri koraka:
i) generiraj transfere koji ovise o α, a čine Pareto optimalnu raspodjelu dostupnu potrošačima,
ii) nađi[16] težinu α^* takvu da transfer iznosi 0,
iii) Pareto optimalne raspodjele, uz vektor težina α^*, su konkurencijski ekvilibrij.
U nastavku provodimo gore navedene korake dok ne dokažemo egzistenciju konkurencijskog ekvilibrija. Za početak, dajemo dvije karakterizacije Pareto optimalnosti, no prije nego što ih iskažemo komentirat ćemo ih u kontekstu ekonomike blagostanja [17]. Teorija je pokazala da postoji poveznica između Pareto optimalnosti i tržišta, a izražena je preko dva rezultata:
i) Ako postoji konkurencijski ekvilibrij, Pareto je optimalan.
ii) Pareto optimalnost rezultat je konkurencijske ravnoteže ostvarene preraspodjelom dohotka među pojedincima.
Tvorcem gore navedene teorije smatramo Adama Smitha [18], a gornji rezultati prikladno su nazvani Prvi i Drugi osnovni teorem ekonomike blagostanja. Arrow i Debreu su pokazali da vrijedi i obrnuti smjer navedenih tvrdnji što je objedinjeno u propozicijama u nastavku.

Propozicija 2.2.4. $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ *je Pareto optimalan ako i samo ako postoji vektor težina korisnosti* $\alpha \in \Delta^{m-1}$ *takav da je* $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ *optimalno rješenje problema* P_α.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je rješenje problema P_α Pareto optimalno [19]. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji raspodjela $(c'_i)_{i=1}^m$ t.d.

$$\sum_{i=1}^m c'_i \leq e \text{ i } u_i(c'_i) \geq u_i(\overline{c}_i),\ \forall\ i = 1, 2, ..., m \text{ te } u_j(c'_j) > u_j(\overline{c}_j) \text{ za barem jedan } j. \tag{2.6}$$

Tada bi prema ograničenju iz Definicije 2.2.3 vrijedilo $\overline{p} \cdot c'_i \geq \overline{p} \cdot \overline{c}_i$, $\forall i = 1, 2, ..., m$.
Pretpostavimo li ponovo suprotno, tj. da postoji $i = 1, 2, ..., m$ t.d. $\overline{p} \cdot c'_i < \overline{p} \cdot \overline{c}_i$. Tada iz $\overline{p} \cdot \overline{c}_i = \overline{p} \cdot e_i$ zbog prethodne nejednakosti slijedi $\overline{p} \cdot c'_i < \overline{p} \cdot e_i$ što implicira da postoji $\epsilon > 0$ t.d.

$$\overline{p} \cdot (c'_i + \epsilon * 1) < \overline{p} \cdot e_i, \tag{2.7}$$

gdje je $1^T = (1, ..., 1)$ jedinični vektor. (2.6) i (2.7) povlače $u_i(c'_i + \epsilon 1) > u_i(\overline{c}_i)$ što je u kontradikciji s Definicijom 2.2.3 da, pod uvjetom $\overline{p} \cdot c'_i < \overline{p} \cdot \overline{c}_i$, $\overline{c}_i$ maksimizira $u_i(c_i)$.

[16] U ovom se koraku reducira dimenzija.
[17] Grana ekonomike koja proučava utjecaj djelovanja ekonomske politike na dobrobit društva.
[18] Škotski ekonomist i etičar koji je začetnik ideje slobodnog tržišta.
[19] Dostupno na http://econ.lse.ac.uk/staff/lfelli/teach/EC487%20Slides%20Lecture%204.pdf, (listopad 2019.).

Prema početnoj kontradikcijskoj pretpostavci za barem jedan i vrijedi $u_i(c_i') > u_i(\overline{c}_i)$, a tada za te i vrijedi $\overline{p} \cdot c_i' > \overline{p} \cdot \overline{c}_i$. Pretpostavimo li da gornja tvrdnja ne vrijedi, moguće je naći košaricu c_i' koja je dostupna i-tom potrošaču

$$\overline{p} \cdot c_i' \leq \overline{p} \cdot \overline{c}_i = \overline{p} \cdot e_i$$

i ima veću razinu korisnosti $u_i(c_i') > u_i(\overline{c}_i)$. To je, ponovo, kontradikcija s Definicijom 2.2.3 (odnosno da $\overline{c}_i$ maksimizira $u_i(c_i)$). Sumirajući po potrošačima dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{p} \cdot c_i' > \sum_{i=1}^{m} \overline{p} \cdot \overline{c}_i,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{p} \cdot c_i' > \sum_{i=1}^{m} \overline{p} \cdot \overline{c}_i = \overline{p} \cdot e.$$

što povlači

$$\overline{p} \cdot [\sum_{i=1}^{m} c_i' - e] > 0.$$

S obzirom da znamo da $\overline{p} \geq 0$, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ t.d. $\sum_{i=1}^{m} c_{i,k}' > e_k$. Nailazimo na kontradikciju s dostupnošću c_i'.
Obrnuto, pokažimo da za proizvoljni $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ postoji vektor težina korisnosti $\alpha \in \Delta^{m-1}$ takav da je $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ optimalno rješenje polaznog problema P_α. Za početak, nađimo $\alpha \in \Delta^{m-1}$, a nakon toga pokažimo da je, uz takav α, $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ optimalno rješenje problema P_α. Pogledajmo skupove:

$$A = \left\{ (c_i)_{i=1}^m : c_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^{m} c_i \leq e \right\},$$

$$U = \{ (u_i(c_i))_{i=1}^m : (c_i)_{i=1}^m \in A \},$$

$$V = \left\{ z \in \mathbb{R}^m : z^i \geq u_i(\overline{c}_i) \ \forall i, z^j > u_j(\overline{c}_j) \ za\ barem\ jedan\ j \right\}.$$

Lako se pokaže da je U konveksan i kompaktan te V neprazan konveksan skup [20] i po definiciji Pareto optimalnosti $U \cap V = \emptyset$ (nema identičnih raspodjela u skupovima U i V jer su raspodjele iz V pareto optimalne). Iz teorema Minkowskog [21] slijedi da postoji

[20]Vidi Dodatak.

[21]Neka su C_1 i C_2 dva neprazna disjunktna konveksna skupa u $\mathbb{R}^k$, gdje je C_1 zatvoren, a C_2 kompaktan. Tada postoji familija koeficijenata $(a_1, ..., a_k)$ koji nisu svi jednaki nuli i dva različita broja b_1 *i* b_2 takvi da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \leq b_1 < b_2 \leq \sum_{j=1}^{k} a_j y_j, \ \forall x \in C_1, \ \forall y \in C_2.$$

familija koeficijenata $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ za koje vrijedi da nisu svi jednaki nuli i zadovoljava

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z^i \quad w \in U, z \in V. \tag{2.8}$$

Primijenimo (2.8) na $w = [u_i(\overline{c}_i)]$ i $z = [u_1(\overline{c}_1) + t, u_2(\overline{c}_2), .., u_m(\overline{c}_m)]$ *za* $t > 0$. Prebacimo li oba izraza na istu stranu nejednakosti imamo $t\alpha_1 \geq 0$ $\forall t > 0$ iz čega slijedi $\alpha_1 \geq 0$, a stoga (zbog simetrije) i $\alpha_i \geq 0, \ \forall i$. Kako je (2.8) homogeno u α i kako nisu svi α_i jednaki nula, možemo pretpostaviti da je $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \Delta^{m-1}$. Sada, obzirom da je $[u_i(\overline{c}_i)]_{i=1}^m \in \overline{V}$, gdje je $\overline{V}$ zatvarač skupa V, (2.8) povlači

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(c_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(\overline{c}_i) \tag{2.9}$$

za svaki $(c_i)_{i=1}^m$ takav da $c_i \geq 0$ za svaki i te $\sum_{i=1}^m c_i \leq e$. Slijedi, prema P_α, $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ je rješenje problema P_α. □

Napomena 2.2.5. *Uočimo da bez obzira što potrošači maksimiziraju svoje individualne korisnosti, ekvilibrij koji se postiže rezultira Pareto efikasnošću, dakle socijalnom efikasnošću.*

Fiksirajmo $\alpha \in \Delta^{m-1}$. Ako je korisnost i-tog potrošača nevažna za promatrani problem, maksimizaciju agregatne korisnosti uz poznate nam uvjete, onda optimalni izbor potrošnje ne uključuje potrošnju i-tog potrošača. Drugim riječima, ako $\alpha_i = 0$, tada $\overline{c}_i(\alpha)$[22] $= 0$. Pod pretpostavkom da vrijedi svojstvo **(U3)**, ako je korisnost i-tog potrošača relevantna ($\alpha_i > 0$), tada je optimalni izbor potrošnje $\overline{c}_i(\alpha) >> 0$. Stoga postoji vektor Lagrangeovih multiplikatora[23] $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l), \lambda \geq 0$ takav da za svaki i, takav da $\alpha_i > 0$, vrijedi[24]:

$$\alpha_i \ grad \ u_i(\overline{c}_i) = \lambda. \tag{2.10}$$

Uočimo da gornju jednakost možemo zapisati u obliku

$$\alpha_i \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(\overline{c}_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_l}(\overline{c}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{bmatrix},$$

[22]Uočimo, vektor težina α koji je pridružen problemu socijalnog planera ukazuje na to da rješenje ovisi o tome koliko je važna korisnost pojedinog potrošača u odnosu na korisnost svih potrošača, odnosno optimalni izbor potrošnje su funkcije od α.

[23]λ_i označava koliko se poveća korisnost prvog potrošača kad je oduzmemo i-tom potrošaču i taj iznos mora biti jednak za svakog potrošača.

[24]grad $\mathrm{u}_i(\overline{c}_i) = (\frac{\partial u_i}{\partial x_1}(\overline{c}_i) \cdots \frac{\partial u_i}{\partial x_l}(\overline{c}_i))$.

za svaki $i = 1, 2, ..., m$. (2.10) implicira da je vektor težina korisnosti jedinstven. Pretpostavimo li da $\overline{c}_{p+1} = ... = \overline{c}_m = 0$, tada vrijedi $\alpha_{p+1} = ... = \alpha_m = 0$, a ako sa $[grad\ u_i(\overline{c_i})]^1$ označimo prvu komponentu od $grad\ u_i(\overline{c}_i)$, imamo $\alpha_1[grad\ u_1(\overline{c}_1)]^1 = \alpha_2[grad\ u_2(\overline{c}_2)]^1 = ... = \alpha_p[grad\ u_p(\overline{c}_p)]^1$. Kako je $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,\ \alpha_i$ su jedinstveno određeni.
Definiramo funkciju agregatne korisnosti:

$$\begin{cases} \mathrm{u}(\alpha, e) = max\{\alpha_1 u_1(c_1) + ... + \alpha_m u_m(c_m)\} \\ \mathrm{c}_i \geq 0,\ \forall i \text{ te } \sum_{i=1}^m c_i \leq e. \end{cases}$$

Propozicija 2.2.6. *Raspodjela $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ je Pareto optimalna ako i samo je $(p(\alpha), (\overline{c}_i)_{i=1}^m)$ ekvilibrij s transfernim cijenama, gdje je $p(\alpha) = grad\ u(\alpha, e) = \alpha_i\ grad\ u_i(\overline{c}_i)$ za svaki $i = 1, 2, ..., m$ te α vektor težina korisnosti.*

Dokaz. Pokažimo ako je $(p(\alpha), (\overline{c}_i)_{i=1}^m)$ ekvilibrij s transfernim cijenama, tada je $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ Pareto optimalan. Kada to ne bi vrijedilo, postojao bi $(c_i')_{i=1}^m \in (\mathbb{R}_+^l)^m$, za koji vrijedi $\sum_{i=1}^m (c_i') \leq e$ takav da $u_i(c_i') \geq u_i(\overline{c}_i)$, za svaki i, sa strogom nejednakošću za neki j. Tada bi, prema Definiciji 2.2.3, imali $p(\alpha) \cdot c_i' \geq p(\alpha) \cdot \overline{c}_i$ za svaki i te $p(\alpha) \cdot c_j' > p(\alpha) \cdot \overline{c}_j$ za barem jedan j. Stoga bi vrijedilo $p(\alpha) \cdot \sum_{i=1}^m c_i' > p(\alpha) \cdot e$ što je u kontradikciji sa $\sum_{i=1}^m c_i' \leq e$. Dakle, $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ je Pareto optimalan.
Neka je sada $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ Pareto optimalan i α pripadni vektor težina korisnosti. Pokažimo prvo da je takav $(\overline{c}_i)_{i=1}^m$ rješenje optimizacijskog problema kojeg prepoznajemo u Definiciji 2.2.3 te prema tome i $(p(\alpha), (\overline{c}_i)_{i=1}^m)$ ekvilibrij. Pretpostavimo da je $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p > 0$ te $\alpha_{p+1} = ... = \alpha_m = 0$. Pogledajmo sustav $(p+1)l$ jednadžbi s $(p+1)l$ nepoznanica $(\overline{c}_i, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^l)^p \times \mathbb{R}_{++}^l$:

$$\begin{cases} \alpha_1\ grad\ u_1(\overline{c}_1) = \lambda \\ \vdots \\ \alpha_p\ grad\ u_p(\overline{c}_p) = \lambda \\ \sum_{i=1}^p \overline{c}_i = e. \end{cases}$$

Kao što smo već vidjeli, prvu jednadžbu u gornjem sustavu možemo zapisati kao

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\overline{c}_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_l}(\overline{c}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{bmatrix},$$

a to je ekvivalentno sustavu

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\overline{c}_1) - \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_l}(\overline{c}_1) - \lambda_l = 0 \end{cases}$$

Uočimo da analogno vrijedi i za ostale jednadžbe polaznog sustava.
Neka je

$$G = \begin{bmatrix} \alpha_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x_1^2}(\overline{c}_1) & 0 & \dots & 0 & I \\ 0 & \alpha_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x_2^2}(\overline{c}_2) & \dots & 0 & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial^2 x_p^2}(\overline{c}_p) & I \\ I & I & \dots & I & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je $I \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ jedinična matrica. Podsjetimo se, sa $L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ označavamo skup svih linearnih operatora sa $\mathbb{R}^l$ u $\mathbb{R}^l$. U matrici G dijagonalni blokovi sačinjeni su od derivacija prethodnog sustava po komponentama $x_1, ..., x_l$ (s negativnim predznakom) i tako za sve jednadžbe polaznog sustava, a zadnji stupac i redak predstavljaju blokove derivacija po komponentama $\lambda_1, ..., \lambda_l$ također s negativnim predznakom.
Sada G možemo zapisati kao $G = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathrm{B}^T & 0 \end{bmatrix}$, gdje je $A \in L(\mathbb{R}^{pl}, \mathbb{R}^{pl})$ negativno definitna i $B \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^{pl})$ ranga l. Pokažimo da je $Ker\ G = \{0\}$ tako da uzmemo $(X, Y) \in \mathbb{R}^{pl} \times \mathbb{R}^l$ t.d. $G \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0$, odnosno $(X, Y) \in Ker\ G$, i pokažemo $X = Y = 0$. Jer G $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0$, imamo $AX + BY = 0$ i $B^T X = 0$. Prebacimo li AX na drugu stranu imamo $-AX = BY$ te pomnožimo li (matrično) s A^{-1} slijeva imamo $-X = A^{-1}BY$, a primjenom te tri jednadžbe i $Y^T B^T A^{-1} BY = Y^T B^T X = 0$ (zbog $B^T X = 0$) slijedi $BY = 0$. B je injektivna (jer joj je rang jednak broju stupaca pa je njena jezgra trivijalna) pa slijedi $Y = 0$ što povlači $-X = A^{-1}BY = 0$, dakle $X = 0$. Po teoremu o inverziji za funkcije više varijabli[25] slijedi da je $((\overline{c}_i)_{i=1}^m, \lambda)$, kao inverz, diferencijabilna u e pa je i $u(\alpha, \cdot)$ diferencijabilna u e. Stoga je funkciju agregatne korisnosti (sjetimo se, to je suma funkcija više varijabli) opravdano napasti diferencijalom[26]

$$du = \sum_{i:\alpha_i>0} \alpha_i\ grad\ u_i(\overline{c}_i) d\overline{c}_i = \sum_{i:\alpha_i>0} \lambda d\overline{c}_i = \lambda \sum_{i:\alpha_i>0} d\overline{c}_i = \lambda de,$$

gdje druga jednakost slijedi iz definicije (2.10), treća jer λ ne ovisi o i, a četvrta iz $\sum_{i=1}^p \overline{c}_i = e$. Stoga

$$\lambda = grad\ u(\alpha, e). \tag{2.11}$$

[25]Vidi skriptu *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, 86; I.Gogić, P.Pandžić, J.Tambača; 24.veljače 2019.

[26]Vidi skriptu *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, 50 – 59; I.Gogić, P.Pandžić, J.Tambača; 24.veljače 2019.

Definiramo

$$p(\alpha) = grad\ u(\alpha, e) = \alpha_i\ grad\ u_i(\overline{c}_i)\ za\ svaki\ i\ t.d.\ \alpha_i > 0. \tag{2.12}$$

Iz (2.12) sada slijedi da je, za svaki i t.d. $\alpha_i > 0$, $\overline{c}_i$ rješenje optimizacijskog problema P_i :

$$P_i \begin{cases} max\ u_i(c_i) \\ p(\alpha) \cdot c_i \leq p(\alpha) \cdot \overline{c}_i. \end{cases} \tag{2.13}$$

U slučaju $\alpha_i = 0$, trivijalno je da je $\overline{c}_i = 0$ optimalno rješenje problema P_i stoga je prema Definiciji 2.2.3 $(p(\alpha), \overline{c}_i; i = 1, 2, ..., m)$ ekvilibrij s transfernim cijenama. □

Napomena 2.2.7. *Primijetimo da gornja propozicija kaže da za svaku Pareto optimalnu raspodjelu postoji način preraspodjele cijene i sredstava kako bi ona rezultirala ekvilibrijem, i obrnuto.*

U iduća dva teorema provodimo treći i četvrti korak Negishi metode.

Teorem 2.2.8. *Pod pretpostavkama **(U1)**, **(U2)** i **(U3)**, postoji ekvilibrij.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in \Delta^{m-1}$ i $[\overline{c}_i(\alpha)]_{i=1}^m$ optimalno rješenje problema P_α te neka je $(p(\alpha) \cdot (\overline{c}_i(\alpha) - e_i))_{i=1}^m$ dani transfer. Pokažimo da postoji α^*, tzv. težina ekvilibrija, t.d. su transferi svim potrošačima jednaki 0. Neka je $\phi\colon \Delta^{m-1} \to \mathbb{R}^l$ funkcija transfera definirana kao skalarni produkt:

$$\phi_i(\alpha) = p(\alpha) \cdot (\overline{c}_i(\alpha) - e_i), \forall i. \tag{2.14}$$

Po definiciji, α^* je težina ekvilibrija ako i samo ako $\phi(\alpha^*) = 0$. Pokažimo prvo da je ϕ neprekidna. Za početak, uočimo da iz teorema o maksimumu[27] slijedi da je $[\overline{c}_i(\alpha)]_{i=1}^m$, kao rješenje problema P_α, neprekidno u α. Kako je $p(\alpha) = \alpha_i\ grad\ u_i[\overline{c}_i(\alpha)]$ za svaki i t.d. $\alpha_i > 0$, preslikavanje $\alpha \mapsto p(\alpha)$ je također neprekidno (kao kompozicija neprekidnih), a samim time slijedi da je i ϕ neprekidna (jer je razlika produkta neprekidnih ponovo neprekidna). Nadalje, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(\alpha) = p(\alpha) \cdot (-e + \sum_{i=1}^m \overline{c}_i(\alpha)) = 0, \tag{2.15}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz jednakosti $\sum_{i=1}^m \overline{c}_i = e$ u Definiciji 2.2.3. Dakle, pokazali smo da postoji težina ekvilibrija takva da su transferi svim potrošačima jednaki 0. Preostaje još pogledati slučaj $\alpha_i = 0$. Kao što smo već zaključili u prethodnoj propoziciji, u slučaju $\alpha_i = 0$, imamo $\overline{c}_i(\alpha) = 0$ te stoga zbog $p(\alpha), e_i >> 0$ $\phi_i(\alpha) = -p(\alpha) \cdot e_i < 0$.[28] □

[27] Za više pogledati [2], 214-215.

[28] Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x > y$ akko $x \geq y$ i $x \neq y$.

Idući teorem govori nam da čak i u slučaju kada je $\phi_i(\alpha) < 0$, postoji fiksna točka $\alpha_0 >> 0$, odnosno $\alpha_0 >> 0$ takav da $\phi_i(\alpha_0) = 0$ pa imamo da su sve transferne cijene jednake 0.

Teorem 2.2.9. *Neka je $\phi\colon \Delta^{m-1} \to H$, $H = \{c \in \mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^m c_i = 0\}$, neprekidna i neka zadovoljava granični uvjet*

$$(\alpha_i = 0 \Rightarrow \phi_i(\alpha) < 0).$$

Tada postoji $\alpha_0 >> 0$ t.d. $\phi(\alpha_0) = 0$.

Dokaz. Neka je $\phi_i^- = max(-\phi_i, 0)$ (uočimo $\phi_i^-(\alpha) = 0$ *akko* $\phi_i(\alpha) \geq 0$). Pogledajmo neprekidno preslikavanje s Δ^{m-1} u Δ^{m-1} definirano sa

$$G_i(\alpha) = \frac{\alpha_i + \phi_i^-(\alpha)}{1 + \sum_{i=1}^m \phi_i^-(\alpha)}. \tag{2.16}$$

Iz Brouwerovog teorema 1.2.5, jer je G neprekidno preslikavanje s Δ^{m-1} u Δ^{m-1}, direktno slijedi da G ima fiksnu točku. Označimo je s α_0. Dva su moguća slučaja. Ili je $\phi_i(\alpha_0) = 0$, $\forall i$ te je dokaz gotov, ili postoji i t.d. $\phi_i(\alpha_0) > 0$ (s obzirom da prema definiciji skupa H vrijedi $\sum_{i=1}^m \phi_i(\alpha_0) = 0$, ne može vrijediti $\phi_i \leq 0$ za svaki i). Iz graničnog uvjeta, $\alpha_{0i} \neq 0$. Prema tome, jer je α_0 fiksna točka, imamo

$$\alpha_{0i} = \frac{\alpha_{0i}}{1 + \sum_{i=1}^m \phi_i^-(\alpha_0)}. \tag{2.17}$$

Stoga $\sum_{i=1}^m \phi_i^-(\alpha_0) = 0$. To povlači da je $\phi_i^-(\alpha_0) = 0$ pa je $\phi_i(\alpha_0) \geq 0$ za svaki i. Kako je $\sum_{i=1}^m \phi_i(\alpha_0) = 0$ (ponovo prema definiciji skupa H), imamo $\phi_i(\alpha_0) = 0$ za svaki i. Granični uvjet povlači $\alpha_0 >> 0$. □

Napomena 2.2.10. *Da ϕ postiže nulu ekvivalentno je tome da preslikavanje $\phi + Id$ ima fiksnu točku samo što to preslikavanje tada postiže vrijednosti iz skupa $\{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ (zbog $\sum_{i=1}^m \phi_i = 0$). Taj skup nije ništa drugo nego zraka koja sadrži jedinični simpleks Δ^{m-1}. Prema tome, traženje fiksne točke neprekidnog preslikavanja sa simpleksa u samog sebe (kao u Brouwerovom teoremu) može se svesti na traženje fiksne točke neprekidnog preslikavanja sa simpleksa u zraku koja sadrži jedinični simpleks. S obzirom da vektorsko polje $\phi + Id$ na rubovima simpleksa gleda u smjeru van simpleksa, uvjet u nastavku nazivamo vanjski: Ako $\alpha_i = 0$, onda $(\phi + Id)_i(\alpha) = \phi_i(\alpha) < 0$.*

Napomena 2.2.11. *Pretpostavimo da je preslikavanje $\phi\colon \Delta^{m-1} \to H$ neprekidno te da zadovoljava unutarnji uvjet na rubu:*

$$(\alpha_i = 0 \Rightarrow \phi_i(\alpha) > 0).$$

Tada ϕ postiže strogo pozitivne vrijednosti. Uočimo, dovoljno je ϕ zamijeniti sa $-\phi$.

2.3 Tržišta

U ovom poglavlju promatramo različita tržišta te ispitujemo postiže li se na njima ekvilibrij te koja su mu svojstva. Tako izvodimo rezultate u okviru slučajnih tržišta, jednoperiodnog modela te potpunih i nepotpunih tržišta. Iskazujemo definicije Arrow-Debreuovog i Radnerovog[29] ekvilibrija, povezujemo ih te donosimo važne rezultate egzistencije ekvilibrija na gore navedenim tržištima. Na samom kraju potpoglavlja raspravljamo o efektima uvođenja financijskih tržišta u ekonomiju. Kako i zašto je nastala ideja o uvođenju financijskih tržišta? Sjetimo se da je opća teorija ekvilibrija u početku bila statička i deterministička. No, godine 1953. Arrow i Debreu tu su teoriju proširili na slučaj s neizvjesnom budućnošću uvođenjem koncepta slučajnih dobara. Teoriju su proširili u svojim radovima ”Le rôle des valeurs boursières pour la repartition la meilleure des risques” i ”Economie de l'incertain”, respektivno. Samo uvođenje slučajnih dobara, koje zahtijeva velik broj otvorenih tržišta, potaknulo je Arrowa na ideju o uvođenju financijskih tržišta kako bi se smanjila potreba za velikim brojem otvorenih tržišta. Upravo zbog toga ne bi nas trebala iznenaditi činjenica da je moderna teorija ekvilibrija na financijskim tržištima bazirana upravo na njegovoj ideji. Kasnijih godina, točnije 1972., Radner svojim djelom ”Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets” Arrowovu i Debreuovu teoriju premješta u dinamički okvir te poopćuje sam pojam imovine. Pokazuje da se ekvilibrij na financijskim tržištima u ekonomiji razmjene može postići čak i kad postoji samo nekolicina imovine. Time se otvara poglavlje teorije nepotpunih tržišta. Radner također proširuje Arrowov model uzimajući u obzir postojanje racionalnih očekivanja čime znatno doprinosi razvitku teorije. Opišimo prvo koncept slučajnih tržišta.

Slučajna tržišta

Arrow, a kasnije i Debreu poopćili su teoriju ekvilibrija na višeperiodni slučaj i slučaj neizvjesnosti pod uvjetom da su dobra definirana obzirom na stanje u kojem se nalaze[30], obzirom na datum uporabe te pod uvjetom da za sva dobra postoje otvorena tržišta. I dalje promatramo ekonomiju razmjene sa m potrošača i l dobara, ali sada s jednim periodom. U nastavku, obzirom da razvijamo teoriju u diskretnom vremenu, sa t_1 označavamo trenutak $t = 0$, a sa t_2 trenutak $t = 1$. U trenutku t_1 ne postoje nikakve informacije o trenutku t_2 te u trenutku t_2 imamo k mogućih stanja. Kao što smo malo prije spomenuli, pretpostavljamo da postoje otvorena tržišta za sva dobra u svim stanjima. Postojanje otvorenih tržišta znači da potrošač može kupiti ugovor za isporuku određene robe u određenom stanju te pri tome plaća taj ugovor bez obzira hoće li se isporuka izvršiti. Sada je potrošač u mogućnosti

[29] Roy Radner bio je američki ekonomist, točnije mikroekonomski teoretičar, koji je dao velik doprinos teoriji egzistencije ekvilibrija.

[30] Skije ako ima snijega i skije ako ga nema nisu isto dobro.

planirati svoju potrošnju pa $c_i(j) \in \mathbb{R}^l_+$ označava plan potrošnje i-tog potrošača u j-tom stanju[31], a vektor $c_i = (c_i(1), c_i(2), \ldots, c_i(k)) \in (\mathbb{R}^l_+)^k$ označava potrošnju, izraženu u nenegativnim realnim brojevima, u svakom od k mogućih stanja za l dobara te ga nazivamo slučajni plan potrošnje. Kao što smo već spomenuli u prvom potpoglavlju s početka ovog poglavlja potrošači izražavaju svoje preferencije na skupu slučajnih planova potrošnje koje su predstavljene funkcijama korisnosti $u_i\colon (\mathbb{R}^l_+)^k \to \mathbb{R}$. Funkcije korisnosti definirane su na skupu $(\mathbb{R}^l_+)^k$ budući da imamo l dobara u k mogućih stanja, dakle kl dobara. Nadalje, $e_i = (e_i(1), \ldots, e_i(k))$ je, ponovo, vektor sredstava i-tog potrošača, samo što sada imamo k mogućih stanja pa sa $e_i(j)$ označavamo sredstva i-tog potrošača u j-tom stanju. Ekonomiju razmjene sada možemo definirati sa

$$\epsilon = ((\mathbb{R}^l_+)^k, u_i, e_i : i = 1, 2, ..., m).$$

Kako bismo definirali ekvilibrij u kontekstu slučajnih tržišta, potreban nam je budžetski prostor pa nas zanima kako je on definiran. Naime, struktura mu je kao i u poglavlju 2.1, no još preostaje definirati i vektor cijena. Označimo li sa $p^l(j)$ cijenu dobra l koje se isporučuje ako se postigne stanje j, vektor $p = [p(1), \ldots, p(k)] \in (\mathbb{R}^l_+)^k$ prigodno nazivamo skup slučajnih cijena. Uz dani $p \in (\mathbb{R}^l_+)^k$, definiramo budžetski prostor

$$B_i(p) = \left\{c_i \in (\mathbb{R}^l_+)^k : p \cdot c_i \leq p \cdot e_i\right\},$$

gdje je $p \cdot c_i = \sum_{j=1}^k p(j)c(j)$. Uočimo, uz dani vektor cijena p, $B_i(p)$ je skup planova potrošnje i-tog potrošača koji odgovaraju sredstvima koje i-ti potrošač ima na raspolaganju. Sada smo spremni definirati ekvilibrij.

Definicija 2.3.1. ***Slučajni Arrow-Debreuov ekvilibrij*** *skup je slučajnih cijena $p^* \in (\mathbb{R}^l_+)^k$ i slučajnih planova $(c_i^*)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^l_+)^{km}$ takav da:*
1) c_i^* maksimizira $u_i(c_i)$ pod uvjetom $c_i \in B_i(p^*)$, za svaki $i = 1, 2, ..., m$,
2) $\sum_i^m c_i^* = \sum_i^m e_i$.

Napomena 2.3.2. *Uočimo da je niz slučajnih planova, $(c_i^*)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^l_+)^{km}$, element prostora nenegativnih realnih brojeva, gdje je svaki član niza dimenzije l. Članova ukupno ima km budući da imamo m slučajnih planova, po jedan za svakog potrošača i k stanja za svaki slučajni plan, dakle km.*

Pretpostavimo li da vrijedi **(U1)**, postoji slučajan Arrow-Debreuov ekvilibrij. Općenito, postoje dvije mane koncepta slučajnih tržišta. Prva mana jest potreba otvorenosti kl tržišta, a druga je da slučajna dobra nisu uvijek na prodaju s obzirom da njihova prodaja ovisi o nepredvidivim situacijama, odnosno o događajima koji se mogu, a i ne moraju dogoditi. S

[31] Uočimo da je potrošnja i-tog potrošača u j-tom stanju opravdano definirana na $\mathbb{R}^l_+$ jer potrošnja ne može biti negativna.

obzirom na mane slučajnih tržišta, kako bi se izbjeglo otvaranje kl slučajnih tržišta Arrow je predstavio model koji uključuje k vrijednosnica. One omogućuju organizaciju ekonomije kroz $k + l$ tržišta. Taj model opisujemo u nastavku.

Arrow-Radnerov ekvilibrij u jednoperiodnom modelu

Općenito, u financijskoj teoriji razlikujemo realnu i nominalnu vrijednost imovine pri čemu je realna izražena u jedinicama dobara, a nominalna u novčanoj vrijednosti. Ovdje je imovina izražena u nominalnoj vrijednosti, osim ako nije navedeno drugačije. Kao što i sam naslov kaže, radi se o modelu s jednim periodom, odnosno dva datuma. Za trenutak t_1 vrijedi da je budućnost neizvjesna, a u trenutku t_2 ima k mogućih stanja. Sredstva kojima potrošač raspolaže su slučajna te sa $e_i(j)$, kao i prije, označavamo sredstva i-tog potrošača u j-tom stanju. Ovdje ne postoji tržište dobara koja će biti isporučena u budućnosti, ali potrošači mogu u trenutku t_1 kupiti vrijednosnice. Obzirom na cijene koje predviđaju, prihode od vrijednosnica te sredstva kojima raspolažu potrošači mogu planirati svoju potrošnju. Pretpostavljamo postojanje racionalnih očekivanja što znači da su predviđene cijene jednake onima koje će biti ostvarene. Spot tržište naziv je za tržište gdje se dobra isporučuju odmah. Ovdje tržišta možemo specificirati kao spot tržišta obzirom da se dobra isporučuju u trenutku t_1. Opišimo sada model.
Imamo d vrijednosnica, a svaka imovina je karakterizirana svojom dividendom u svakom stanju. U nastavku imamo matricu V, tzv. matricu dividendi čiji i-ti stupac predstavlja dividendu i-te imovine u različitim stanjima.

$$V = \begin{bmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^i & \dots & v_1^d \\ \vdots & & & & \\ v_j^1 & \dots & v_j^i & \dots & v_j^d \\ \vdots & & & & \\ v_k^1 & \dots & v_k^i & \dots & v_k^d \end{bmatrix}$$

Pretpostavljamo da potrošači sami upravljaju svojim portfeljem. Portfelj θ jest vektor u $\mathbb{R}^d$ čije komponente mogu biti i negativne (u tom slučaju radi se o short poziciji [32]). Matrica V služi nam za određivanje isplate portfelja u trenutku j, a to je upravo $(V\theta)_j$. Uz ovu interpretaciju matrice V, ono što smo prije označavali sa $V\theta$ kao vrijednost portfelja sada ima smisao $V \cdot \theta$, ali je i dalje vrijednost portfelja (to će sada zapravo biti očekivana vrijednost portfelja). Vrijednosnicama se u trenutku t_1 trguje po cijeni $S \in \mathbb{R}^d_+$, a s obzirom da ćemo pretpostaviti da se potrošač ne može zadužiti vrijedi $S \cdot \theta_i \leq 0$ za svaki i, gdje je θ_i portfelj i-tog potrošača. Uz dane očekivane cijene $p = [p(1), \dots, p(k)] \in (\mathbb{R}^l_+)^k$ te

[32] Investitor je u short poziciji ili poziciji short sellinga ukoliko je prodao imovinu koju ne posjeduje i mora ju vratiti.

oznaku $c(j)$ za potrošnju u trenutku j, potrošačev plan potrošnje u trenutku t_2 definiran je s $c = [c(1), c(2), ..., c(k)] \in (\mathbb{R}^l_+)^k$. Kako bismo jednostavnije definirali budžetski prostor, poslužit ćemo se sljedećom definicijom:

Definicija 2.3.3. *Kažemo da je uređeni par* $(c_i, \theta_i) \in \mathbb{R}^{lk}_+ \times \mathbb{R}^d$ ***izvediv*** *(engl. feasible) ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete*

$$\begin{cases} S \cdot \theta_i \leq 0 \\ p(j)c(j) \leq (V\theta_i)_j + p(j)e(j), \forall j = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{2.18}$$

Uočimo da gornja definicija objedinjuje uvjet o nemogućnosti zaduživanja te ograničenost ostvarive potrošnje obzirom na prihode od vrijednosnica i sredstva kojima potrošač raspolaže. Sada možemo definirati budžetski prostor kao

$$B_i(p, S) = \left\{ c_i \in \mathbb{R}^{lk}_+ : \exists\, \theta_i \in \mathbb{R}^d, (c_i, \theta_i)\ zadovoljava\ (2.18) \right\}.$$

Vidimo da je budžetski prostor upravo skup planova potrošnje koje si potrošač može priuštiti uz sredstva kojima raspolaže i prihode od vrijednosnica koje je kupio u trenutku t_1. Ponovo, funkcije korisnosti $u_i \colon (\mathbb{R}^l_+)^k \to \mathbb{R}$ predstavljaju potrošačeve preferencije na skupu svih planova potrošnje te zadovoljavaju pretpostavku **(U1)**. Definirajmo sada ekvilibrij u kontekstu promatranog modela.

Definicija 2.3.4. ***Radnerov ekvilibrij*** *sastoji se od skupa cijena vrijednosnica* $\overline{S} \in \mathbb{R}^d_+$, *očekivanih cijena* $\overline{p} \in (\mathbb{R}^l_+)^k$, *portfelja imovina* $(\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_m)$ *te planova potrošnje* $(\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_m)$ *takvih da*
$1a)$ $\overline{c}_i$ *maksimizira* $u_i(c_i)$ *pod uvjetom* $c_i \in B_i(\overline{p}, \overline{S})$, *za svaki* $i = 1, 2, ..., m$,
$1b)$ $(\overline{c}_i, \overline{\theta}_i)$ *zadovoljava* (2.18).
2 *Pretpostavljamo*
$2a)$ $\sum_{i=1}^m \overline{c}_i = \sum_{i=1}^m e_i$,
$2b)$ $\sum_{i=1}^m \theta_i = 0$.

Uz određene pretpostavke neka od gornjih svojstva povlače druga. Ukoliko pretpostavimo injektivnost matrice V, ako vrijede $1a)$, $1b)$ i $2a)$, vrijedi i $2b)$. Naime, kako su preferencije rastuće i budžetsko ograničenje se pri optimumu veže (dakle imamo jednakost) vrijedi $\overline{p}(j) \cdot (\overline{c}_i(j) - e_i(j)) = (V\overline{\theta}_i)_j$, za svaki i, j. Zapišemo li u $2a)$ oba izraza s iste strane jednakosti dobivamo $\sum_{i=1}^m \overline{c}_i - \sum_{i=1}^m e_i = \sum_{i=1}^m (\overline{c}_i - e_i) = 0$. Uvrstimo li to u prethodnu jednakost nakon što je sumiramo po i, dobivamo $\sum_{i=1}^m (V\overline{\theta}_i) = \sum_{i=1}^m \overline{p}(j) \cdot (\overline{c}_i(j) - e_i(j)) = \overline{p}(j) \cdot \sum_{i=1}^m (\overline{c}_i(j) - e_i(j)) = \overline{p}(j) \cdot 0 = 0$, odnosno $V(\sum_{i=1}^m \overline{\theta}_i) = 0$. Kako smo pretpostavili da je V injektivna, slijedi $\sum_{i=1}^m \overline{\theta}_i = 0$, a stoga vrijedi i $2b)$.

Neka je $(\overline{p}, \overline{S}, \overline{c}_i, \overline{\theta}_i; i = 1, 2, ..., m)$ Radnerov ekvilibrij. Tada prema teoremu u [2] koji kaže da je uvjet o nepostojanju arbitraže ekvivalentan egzistenciji niza $(\beta_j)_{j=1}^k$ strogo pozitivnih brojeva (tzv. cijena stanja[33]) takvih da $S^i = \sum_{j=1}^{k} v_j^i \beta_j, i = 0, 1, ..., d$, slijedi[34] da postoji $\beta \in \mathbb{R}_{++}^k$ t.d. $\overline{S} = V^T \beta$. Ovo nas navodi da u nastavku promatramo dva slučaja. Prvi nazivamo slučaj potpunih tržišta i za taj slučaj vrijedi $dimIm(V) = k$, a drugi nepotpuna tržišta te vrijedi $dimIm(V) < k$.

Potpuna tržišta

Prvo ćemo sagledati potpuna tržišta (ili Arrow-Debreuova tržišta) kod kojih je $dimIm(V) = k$. Ta se tržišta održavaju na dva uvjeta:
i) dostupnosti svih informacija (razlog tome leži u neznatnim transakcijskim troškovima),
ii) postoji cijena za svaku imovinu u svakom mogućem stanju.
Za početak, prisjetimo se 2.3.3, uvjeti da bi uređeni par $(c_i, \theta_i) \in \mathbb{R}_+^{lk} \times \mathbb{R}^d$ bio izvediv su:

$$\begin{cases} S \cdot \theta_i \leq 0 \\ p(j)c(j) \leq (V\theta_i)_j + p(j)e(j), \forall j = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{2.19}$$

Pomnožimo li drugu nejednakost s β_j te potom sumiramo po j, koristeći činjenicu $\overline{S} = V^T \beta$, dobivamo:

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j \overline{p}(j)[c_i(j) - e_i(j)] \leq 0. \tag{2.20}$$

Time smo eliminirali θ. Sada definiramo $p^*(j) := \beta_j \overline{p}(j)$ te imamo

$$\sum_{j=1}^{k} p^*(j)[c_i(j) - e_i(j)] \leq 0. \tag{2.21}$$

Uz dani vektor cijena p^*, definirajmo budžetski prostor sa $\overline{B}_i(p^*) := \left\{c \in \mathbb{R}_+^{lk} : p^* \cdot c \leq p^* \cdot e_i\right\}$. Kako bismo odredili poveznicu između Radnerova i Arrow-Debreuova ekvilibrija za početak ćemo pokazati da vrijedi jednakost $B_i(\overline{p}, \overline{S}) = \overline{B}_i(p^*)$, gdje je $B_i(\overline{p}, \overline{S})$ budžetski prostor iz prošlog potpoglavlja, a pri tome primijetimo da smo upravo pokazali $B_i(\overline{p}, \overline{S}) \subseteq \overline{B}_i(p^*)$. Pokažimo sada obrnuto, odnosno $\overline{B}_i(p^*) \subseteq B_i(\overline{p}, \overline{S})$, gdje je $\overline{S} = V^T \beta, \beta \in \mathbb{R}_{++}^k$ i $\overline{p}(j) = \frac{p^*(j)}{\beta_j}$. Uzmimo $c_i \in \overline{B}_i(p^*)$. S obzirom da promatramo slučaj gdje je $dimIm(V) = k$, postoji θ_i takav da[35]

$$(V\theta_i)_j = \frac{p^*(j)}{\beta_j}[c_i(j) - e_i(j)] = \overline{p}(j)[c_i(j) - e_i(j)] \ \forall j.$$

[33] β_j je cijena u trenutku 0 kako bi u trenutku 1 imali jednu jedinicu (npr. jedan euro) u stanju j i ništa u drugim stanjima.

[34] Pretpostavka o nepostojanju arbitraže u ovom radu (izrečena u poglavlju 2.1) je nužan uvjet za ekvilibrij jer bi u suprotnom bogatstvo svih potrošača bilo beskonačno veliko i trivijalno ne bi postojao ekvilibrij.

[35] Pri optimumu se postiže jednakost u nejednadžbi budžetskog ograničenja.

Sada (2.20) i $\overline{S} = V^T\beta$ povlači

$$\overline{S} \cdot \theta_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j (V\theta_i)_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \overline{p}(j)[c_i(j) - e_i(j)] \leq 0, \tag{2.22}$$

a iz (2.20) i (2.22) slijedi $c_i \in B_i(\overline{p}, \overline{S})$. Dakle, pokazali smo $B_i(\overline{p}, \overline{S}) = \overline{B}_i(p^*)$. Na temelju prethodno pokazanog izvodimo teorem ekvivalencije:

Teorem 2.3.5. *Ako je $(\overline{p}, \overline{S}, \overline{c}_i, \overline{\theta}_i; i = 1, 2, ..., m)$ Radnerov ekvilibrij tada postoji $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$ takav da je $\overline{S} = V^T\beta$ i $(p^*, c_i; i = 1, 2, ..., m)$ slučajan Arrow- Debreuov ekvilibrij, gdje $p^*(j) = \overline{p}(j)\beta_j$. Obrnuto, ako je $(p^*, \overline{c}_i^*; i = 1, 2, ..., m)$ slučajan Arrow- Debreuov ekvilibrij, tada za bilo koji $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$ postoji $\overline{\theta}_i, i = 1, 2, ..., m$ takav da je $(\overline{p}, V^T\beta, \overline{c}_i, \overline{\theta}_i; i = 1, 2, ..., m)$ Radnerov ekvilibrij, gdje je $\overline{p}(j) = \frac{p^*(j)}{\beta_j}$.*

Dokaz. Prva implikacija slijedi iz gore pokazane jednakosti $B_i(\overline{p}, \overline{S}) = \overline{B}_i(p^*)$, gdje je $(\overline{S} = V^T\beta)$. Obrnuto, pretpostavimo da je prvih k stupaca matrice V linearno nezavisno. Zapisat ćemo V kao $V = (V^1, V^2)$ gdje je V^1 matrica koja se sastoji od prvih k stupaca matrice V, a θ_i zapisujemo kao $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$. Budući da je prvih k stupaca linearno nezavisno, V^1 je injektivna. Definirajmo $\overline{\theta}_i^1$ za svaki i sa

$$(V^1\overline{\theta}_i^1)_j = \overline{p}(j)[\overline{c}_i(j) - e_i(j)] \text{ i } \overline{\theta}_i^2 = 0.$$

Prema raspravi s kraja prošlog potpoglavlja, zbog injektivnosti V^1, $\sum_{i=1}^m \overline{c}_i = \sum_{i=1}^m e_i$ povlači $\sum_{i=1}^m \theta_i^1 = 0$. Trivijalno je da vrijedi $\sum_{i=1}^m \overline{\theta}_i^2 = 0$ obzirom da je $\overline{\theta}_i^2 = 0$, za svaki i. Sada prema Definiciji 2.3.4 slijedi tvrdnja. □

Kako postoji Arrow- Debreuov ekvilibrij i vrijedi pretpostavka o neprekidnosti, strogoj konkavnosti i rastu funkcija korisnosti te $e_i(j) >> 0$ slijedi:

Korolar 2.3.6. *Pod pretpostavkom **(U1)** (funkcija korisnosti u_i je neprekidna, strogo konkavna i rastuća), ako $dimIm(V) = k$ (odnosno ako je tržište potpuno), za svaki $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$ postoji ekvilibrij na financijskim tržištima, gdje $S = V^T\beta$.*

Specijalan slučaj ekonomije s jednim dobrom

Pretpostavimo da postoji samo jedno dobro u svakom stanju te da su vrijednosti dividendi realne i spot cijena identički jednaka 1. Prethodni teorem (Teorem 2.3.5) vrijedi i u slučaju ekonomije s jednim dobrom. Iz toga zaključujemo da ekvilibrijskih cijena u ekonomiji ima koliko i slučajnih Arrow-Debreuovih ekvilibrijskih cijena. Važno je naglasiti da općenito ekvilibrij nije jedinstven, ali pod određenim uvjetima on jest jedinstven. Do tog zaključka došao je upravo Debreu koji je pokazao kako za funkcije korisnosti koje su fiksirane obzirom na sredstva kojima potrošač raspolaže, ekonomija razmjene ima konačan broj ekvilibrija. Takva se situacija naziva deterministička. Obrnuta situacija, gdje je broj ekvilibrija beskonačan naziva se nedeterministička. Ekvilibrij je također jedinstven i u nekim specijalnim slučajevima. Jedan od njih je slučaj kada su funkcije korisnosti aditivno separabilne. U tom slučaju se uvjetuje na koeficijente potrošačeve relativne averzije prema riziku te sredstva kojima raspolaže.

Napomena 2.3.7. *Kako je tržište potpuno, postoji bezrizični portfelj. Njegova je isplata jednaka* 1 *u svim stanjima. Obično se ta imovina indeksira nulom. Oznaka za njenu cijenu je* S^0. *Sa* $S^0 = \frac{1}{1+r}$ *definirana je kamatna stopa. Iz prethodno viđene jednakosti* $S = V^T\beta$ *i jer je isplata jednaka* 1 *u svim stanjima vidimo da* $S^0 = \frac{1}{1+r}$ *možemo zapisati kao* $\sum_{j=1}^{k}\beta_j = \frac{1}{1+r}$. *Stoga* $\beta_j(1+r)$ *možemo interpretirati kao vjerojatnosti. Iz Debreuovog zaključka slijedi da postoji konačan broj kamatnih stopa r i vjerojatnosti koje su kompatibilne s jednakošću ponude i potražnje. U nekim specijalnim slučajevima, ako postoji jedinstveni slučajni Arrow- Debreuov ekvilibrij, kamatna stopa i gornje vjerojatnosti su u potpunosti određene jednakošću ponude i potražnje.*

Nepotpuna tržišta

Sada gledamo slučaj u kojem je $dimIm(V) = d' < k$, dakle broj vrijednosnica je manji nego broj stanja, te V zapisujemo kao $V = (V^1, V^2)$, gdje je $dimIm(V) = dimIm(V^1) = d'$. Potrošači na ovim tržištima ugovaraju prodaju ili kupnju vrijednosnica najčešće kako bi se osigurali od budućih rizika. Bez obzira na trud koji se ulaže, tržišta su nepotpuna. Jedan od glavnih razloga tome je asimetričnost informacija.
Egzistenciju Radnerova ekvilibrija dokazat ćemo kao što smo to učinili u poglavlju 2.1. Prvo ćemo za dani vektor cijena definirati budžetski prostor koji ima određena svojstva (njih ćemo i pokazati). Maksimizacijom funkcije korisnosti nad budžetskim prostorom uz dani vektor cijena dobivamo vektor potražnje. Definirat ćemo agregatnu funkciju viška potražnje te pod pretpostavkom da vrijedi **(U1)** dokazati egzistenciju ekvilibrija na nepotpunim financijskim tržištima.
Neka je $p \in \mathbb{R}^{lk}_{++}$, $(c, p) \in (\mathbb{R}^l_+)^k \times (\mathbb{R}^l_+)^k$, gdje sa $p\square c$ označavamo vektor $[p(1)\cdot c(1), ..., p(k)\cdot c(k)]$ iz $\mathbb{R}^k_+$ te neka je $\beta \in \mathbb{R}^{lk}_{++}$ fiksan vektor. Definiramo budžetski prostor i-tog potrošača sa:

$$B_i(p) = \left\{c_i \in \mathbb{R}^{lk}_+ : \exists\theta_i \in \mathbb{R}^d,\ \beta^T V\theta_i \leq 0\ i\ p\square(c_i - e_i) \leq V\theta_i\right\}.$$

Analogno imamo i

$$B_i(p) = \left\{c_i \in \mathbb{R}^{lk}_+ : \exists\theta^1_i \in \mathbb{R}^{d'},\ \beta^T V^1\theta^1_i \leq 0\ i\ p\square(c_i - e_i) \leq V^1\theta^1_i\right\}.$$

Lema 2.3.8. *1. $B_i(p)$ je neprazan, kompaktan i konveksan skup, za svaki $p \in \mathbb{R}^{lk}_{++}$.*
2. Korespondencija $B_i(p)$ ima zatvoren graf.

Dokaz. Uočimo ograničenost skupa $\theta_i^1 - eva \in \mathbb{R}^d$. Znamo da vrijedi $\beta^T V^1 \theta_i^1 \leq 0$ te postoje $p \in \Delta^{lk-1}$ i $c_i \in \mathbb{R}^{lk}_+$ takvi da $p\square(c_i - e_i) \leq V^1\theta_i^1$ (iz definicije budžetskog prostora). Stvarno, neka je

$$a_j^i = \max_{p \in \Delta^{lk-1}} p(j) \cdot e_i(j)$$

i $a^i = (a_j^i)$ skup u $\mathbb{R}^k_+$. Tada imamo $-a_i \leq V^1\theta_i^1$ i $\beta^T V^1 \theta_i^1 \leq 0$. Pretpostavimo da je skup $\theta_i^1 - eva$ koji zadovoljava ta dva uvjeta neograničen. Tada postoji niz θ_i^{1n} takav da $\left\|\theta_i^{1n}\right\| \to \infty$. Neka $\frac{\theta_i^{1n}}{\|\theta_i^{1n}\|}$ teži u θ_i^1. Iz nejednakosti

$$-\frac{-a_i}{\left\|\theta_i^{1n}\right\|} \leq V^1 \frac{\theta_i^{1n}}{\left\|\theta_i^{1n}\right\|} \; i \; \beta^T V^1 \frac{\theta_i^{1n}}{\left\|\theta_i^{1n}\right\|} \leq 0,$$

kad pustimo $n \to \infty$, slijedi $V^1\theta_i^1 \geq 0$ i $\beta^T V^1 \theta_i^1 \leq 0$ te stoga $V^1\theta_i^1 = 0$ ($\beta \in R^{lk}_{++}$). Kako je V^1 injektivna, $\theta_i^1 = 0$ što je u kontradikciji s $\left\|\theta_i^1\right\| = 1$. Pokažimo sada da korespondencija B_i ima zatvoren graf. To ćemo pokazati tako što ćemo uzeti proizvoljni konvergentni niz iz grafa B_i i pokazati da mu je i limes u tom skupu[36]. Neka $p^n \to p$, $c_i^n \in B_i(p^n)$ te $c_i^n \to c_i$. Neka je θ_i^{1n} portfelj vezan za c_i^n. Niz θ_i^{1n} teži u θ_i^1 koji zadovoljava $p\square(c_i - e_i) \leq V^1\theta_i^1$. Stoga $c_i \in B_i(p)$. Posebno, za svaki $p >> 0$, $B_i(p)$ je zatvoren. Kako je $B_i(p)$ ograničen i zatvoren, kompaktan je. □

Sada, kao i u poglavlju 2.1 možemo definirati potražnju i-tog potrošača pri cijeni $p \in \mathbb{R}^{lk}_{++}$. Dakle, $d_i(p)$ je optimalno rješenje problema $\max\limits_{c_i \in B_i(p)} u_i(c_i)$. Definirajmo agregatnu funkciju viška potražnje:

$$z(p) = \sum_{i=1}^{m} d_i(p) - e_i.$$

Imajmo na umu da će se dokaz egzistencije ekvilibrija ponovo svoditi na traženje p u kojem se postiže nula u agregatnoj funkciji viška potražnje. Agregatna funkcija viška potražnje ponovo ima, poznatih nam, 5 svojstava:

Propozicija 2.3.9. *Funkcija $z\colon \mathbb{R}^{lk}_{++} \to \mathbb{R}$ ima svojstva:*
1. z je homogena stupnja 0,
2. z je neprekidna na $\mathbb{R}^l_{++}$,
3. z zadovoljava pseudo Walrasov zakon ($\sum_{j=1}^k \beta_j p(j) z^j(p) = 0$),
4. Ako $p^n \to p$ i $p^j = 0$, tada $\|z(p^n)\| \to \infty$,
5. z je ograničena odozdo $z(p) \geq -\sum_{i=1}^m e_i$, za svaki p.

[36]Tada zatvorenost slijedi prema teoremu koji kaže da je skup zatvoren akko svaki niz u $A \subseteq \mathbb{R}^n$ koji konvergira u $\mathbb{R}^n$ ima limes u A.

Dokaz. Uočimo da svojstva *i*) i *ii*) ponovo slijede iz homogenosti stupnja 0 i neprekidnosti $d_i(p)$. Ovdje je agregatna funkcija viška potražnje definirana kao i u poglavlju 2.1, samo što imamo k mogućih stanja. Stoga iste zaključke kao i u Propoziciji 2.1.7 možemo donijeti i za svojstva *iv*) i *v*), ponovo uzevši u obzir da sada imamo k mogućih stanja. Pokazujemo svojstvo *iii*) :
Kako su funkcije korisnosti $u_i, i = 1, 2, ..., m$, rastuće, nejednadžba ograničenja iz budžetskog prostora postiže jednakost pa tada, za svaki i, postoji θ_i takav da

$$p\square(d_i(p) - e_i) = V\theta_i \ te \ \beta^T V\theta_i = 0.$$

Sumiramo li po i dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m}(p\square(d_i(p) - e_i)) = \sum_{i=1}^{m}(V\theta_i) = V(\sum_{i=1}^{m}\theta_i) \tag{2.23}$$

te

$$0 = \sum_{i=1}^{m}\beta^T V\theta_i = \beta^T V(\sum_{i=1}^{m}\theta_i), \tag{2.24}$$

gdje prvi izraz u jednakosti (2.24) možemo zapisati kao

$$\sum_{i=1}^{m}(p\square(d_i(p) - e_i)) = p\square\sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) = p\square z(p) \tag{2.25}$$

te stoga iz (2.23) i (2.25) imamo

$$V(\sum_{i=1}^{m}\theta_i) = p\square z(p). \tag{2.26}$$

Uvrstimo li sada jednadžbu (2.26) u jednadžbu (2.24) dobivamo

$$0 = \beta^T V(\sum_{i=1}^{m}\theta_i) = \beta^T p\square z(p),$$

odnosno

$$\beta^T p\square z(p) = 0.$$

Kada raspišemo po komponentama imamo

$$\sum_{j=1}^{k}\beta_j p(j) z^j(p) = 0.$$

Slijedi *iii*). □

Teorem 2.3.10. *Pod pretpostavkom* ***(U1)****, ako dim* $Im(V) < k$*, za svaki* $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$ *postoji ekvilibrij na financijskim tržištima, uz* $S = V^T\beta$*.*

Dokaz. Funkcija $Z(p) = (\beta_j z^j(p))$, $j = 1, 2, ..., k$, zadovoljava sve uvjete Propozicije 2.1.7 stoga postoji $p^* \in \Delta^{lk-1}$ takav da $Z(p^*) = z(p^*) = 0$ (Walrasov zakon), a prema Korolaru 2.1.6, zbog $Z(p^*) = z(p^*) = 0$, i ekvilibrij. Potrošnja je pri ekvilibriju jednaka $d_i(p^*)$ (prisjetimo se poglavlja 2.1) za $i = 1, 2, ..., m$ i portfelji pri ekvilibriju θ_i, $i = 1, 2, ..., m$ određeni su relacijom $p^* \square (d_i(p^*) - e_i) = V\theta_i^*$, obzirom da se pri ekvilibriju postiže jednakost u jednadžbi budžetskog ograničenja. Uzmimo za primjer θ_i^{1*} koji zadovoljava $p^* \square (d_i(p) - e_i) = V^1\theta_i^{1*}$ i $\theta_i^{2*} = 0$, za svaki $i = 1, 2, ..., m$. □

Specijalan slučaj ekonomije s jednim dobrom

Pretpostavljamo da imamo jedno dobro u svakom stanju i isplate izražavamo u jedinici tog dobra (dakle realnoj vrijednosti) te je njegova spot cijena identički jednaka 1. Iz Leme 2.3.8 i Propozicije 2.3.9 te uzimajući β kao parametar izvodimo sljedeći rezultat:

Teorem 2.3.11. *U specijalnom slučaju ekonomije s jednim dobrom, pod pretpostavkom* ***(U1)****, ako dim* $Im(V) < k$*, postoji ekvilibrij na financijskim tržištima u kojem vrijednost izražavamo u jedinici danog dobra, a gdje vrijedi* $S = V^T\beta$*,* $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$*.*

Napomena 2.3.12. *U specijalnom slučaju ekonomije s jednim dobrom dokaz egzistencije ekvilibrija na financijskim tržištima istog je tipa kao i dokaz za egzistenciju Arrow-Debreuovog ekvilibrija. S obzirom na raspravu u prethodnom potpoglavlju, zaključujemo da postoji konačan broj ekvilibrija na financijskim tržištima.*

Na samom početku ovog potpoglavlja najavili smo raspravu o efektima uvođenja financijskih tržišta. Za početak komentiramo efekte na otvorenim tržištima. Potrošačeva se potražnja pri ekvilibriju uvođenjem financijskih tržišta ne mijenja. To iščitavamo iz Teorema 2.3.5 te već spomenute činjenice da vrijedi njegov analogon u ekonomiji s jednim dobrom. Međutim, cilj uvođenja je smanjenje broja tržišta i transakcija. Kada je broj stanja, k, dovoljno velik, u jednoperiodnom modelu slučajnih tržišta potrebno je kl otvorenih tržišta, dok uvođenjem financijskih tržišta u model tu potrebu smanjuje na $d + l$ tržišta. Zašto kada je k dovoljno velik? Zato što u tom slučaju $d + l < kl$. Kada više nemamo jednoperiodni model nego broj datuma raste, u prvom slučaju broj tržišta raste eksponencijalno, a u drugom linearno što je također važna činjenica. Za razliku od slučaja potpunih tržišta, u slučaju nepotpunih tržišta Teorem 2.3.10 te Teorem 2.3.11 ukazuju nam na promjenu potrošnje potrošača pri ekvilibriju. Bez obzira na potpunost tržišta, pod pretpostavkom da postoji samo jedno dobro u svakom stanju, cijene su određene jednakošću ponude i potražnje. Suprotno, pod pretpostavkom da postoji više dobara u svakom stanju te ako su cijene izražene u nominalnoj vrijednosti, one su neodređene te ovise o uvjetu nepostojanja arbitraže.

Poglavlje 3

CAPM

Capital Asset Pricing Model (CAPM) ili model procjenjivanja kapitalne imovine, vrlo je raširen model u pogledu svjetskih financija te je specijalan slučaj Arrow-Radnerovog ekvilibrija u jednoperiodnom modelu s beskonačnim brojem stanja u trenutku t_2. Razvili su ga W.F. Sharpe, J. Litner i J. Mossin sredinom šezdesetih godina godina prošlog stoljeća, a počiva na prilično restriktivnim pretpostavkama na potrošačeve preferencije. Investitor prilikom ulaganja (investitor ovdje ima istu ulogu kao u prethodnoj teoriji potrošač, u smislu potražnje za određenim dobrima) očekuje kompenzaciju zbog rizika i vremenske vrijednosti novca. Bezrizična stopa u CAPM jednadžbi, koju izvodimo u nastavku, predstavlja rizik zbog vremenske vrijednosti novca, a ostale komponente predstavljaju dodatne rizike na koje investitor pristaje. Model zapravo opisuje vezu između sistematskog rizika i očekivanog povrata na imovinu (povrat ćemo ubrzo i definirati). U ovom dijelu nećemo raspravljati o egzistenciji ekvilibrija, CAPM je nužan uvjet za ekvilibrij. O dovoljnim uvjetima možete više pročitati u djelima L. T. Nielsena i M. Alinghama [1]. Razmotrit ćemo model u kontekstu postojanja jednog dobra i m potrošača. I dalje se nalazimo na istom vjerojatnosnom prostoru kao i na početku, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. U trenutku t_1 imamo tržište dionica s d različitih imovina, a u trenutku t_2 je isplata j-te imovine definirana sa slučajnom varijablom d^j koja ima konačnu varijancu što znači da je ona element $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mi ćemo gledati konačnodimenzionalni vektorski prostor C u $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, generiran sa $\left\{d^1, ..., d^d\right\}$ pa u kontekstu toga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su isplate linearno nezavisne. Sredstva kojima potrošač u trenutku t_2 raspolaže definiramo kao slučajne varijable e_i, što znači da su e_i raspoloživa sredstva i-tog potrošača te su ona nepredvidiva. U trenutku t_1, za razliku od trenutka t_2, potrošač može sam utjecati na budućnost izborom portfelja $\theta_i = (\theta_i^1, ..., \theta_i^d)$, uz pretpostavku nemogućnosti zaduživanja koja i dalje vrijedi.

[1]L. T. Nielsen, *Asset Market equilibrium with short-selling*, Review of Economic Studies 56 (1987), 467 – 474; L. T. Nielsen, *Existence of equilibrium in CAPM*, Journal of Economic Theory 52 (1987), 223 – 231; M. Allingham, *Existence theorems in the Capital Asset Pricing Model*, Econometrica 59 (1991), 1169 – 1174.

Obzirom na njegov izbor portfelja i sredstva kojima raspolaže, on u trenutku t_2 raspolaže iznosom $c_i = e_i + \sum_{j=1}^{d} \theta_i^j d^j$, dakle sredstvima koja su nepredvidiva uvećanim za sve isplate imovina koje posjeduje. Vektorskom prostoru C pridružujemo skalarni produkt definiran sa[2] $\langle c, c' \rangle = \mathbb{E}(cc')$, a $||c||_2$ je pripadajuća norma.

Navodimo tri pretpostavke na kojima model počiva:
(i) $e_i \in C$, za svaki i,
(ii) $e = \sum_{i=1}^{m} e_i \neq const.$,
(iii) $d^1 = 1$ (podsjetimo se, ovo označava bezrizičnu imovinu).

Neka sada za bilo koji par $(c, c') \in C^2$ koji zadovoljava $\mathbb{E}(c) = \mathbb{E}(c')$, $Var(c) < Var(c')$ povlači $U_i(c) > U_i(c')$. Drugim riječima, potrošači, uz pretpostavku o jednakom očekivanju, radije biraju elemente iz C s manjom varijancom. Takvu situaciju nazivamo averzijom prema varijanci. To se koristi u **(U4)**.

(U4) potrošači imaju preferencije na elemente skupa C i one su predstavljene funkcijama korisnosti $U_i \colon C \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, koje imaju averziju prema varijanci.

Uzevši u obzir skup cijena imovina ($S \in \mathbb{R}^d$), i-ti potrošač konstruira svoj portfelj θ_i tako da maksimizira svoju korisnost obzirom na iznos s kojim će raspolagati u trenutku t_2 pod uvjetom da se ne zadužuje, tj.

$$\max_{S\theta_i \leq 0} U_i(e_i + \sum_{j=1}^{d} \theta_i^j d^j).$$

Napomenimo da sada budžetski prostor više nije ograničen zbog čega gornji problem ne mora nužno imati rješenje.

Definicija 3.0.1. *Kažemo da je uređeni par* $(\overline{S}, \overline{\theta}_i; i = 1, 2, ..., m)$ ***ekvilibrij*** *ako*
1. *Za svaki i,* $\overline{\theta}_i$ *maksimizira* $U_i(e_i + \sum_{j=1}^{d} \theta_i^j d^j)$ *pod uvjetom* $\overline{S} \cdot \theta_i \leq 0$,
2. $\sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i = 0$.

Neka je sada $(\overline{S}, \overline{\theta}_i; i = 1, 2, ..., m)$ ekvilibrij. Definirajmo linearni funkcional na C

$$\overline{\varphi}(z) = \overline{S} \cdot \theta, \ za \ z = \sum_{j=1}^{d} \theta^j d^j. \tag{3.1}$$

Uočimo:
1) ako je z vrijednost portfelja u trenutku t_2, tada je $\overline{\varphi}(z)$ njegova cijena u trenutku t_1,
2) $\overline{\varphi}$ je dobro definiran obzirom da su d^j linearno nezavisni.
Sada iz Rieszova teorema 1.2.8 slijedi da postoji $\varphi \in C$ takav da $\overline{\varphi}(z) = \langle \varphi, z \rangle$. Uočimo

[2] Uočimo $\langle 1, c \rangle = \mathbb{E}(c)$.

da i-ti potrošač pri ekvilibriju minimizira $Var(e_i + \sum_{j=1}^{d} \theta_i^j d^j)$ pod uvjetima $\overline{S} \cdot \theta_i \leq 0$ i $\mathbb{E}(e_i + \sum_{j=1}^{d} \theta_i^j d^j) = \mathbb{E}(e_i + \sum_{j=1}^{d} \overline{\theta}_i^j d^j)$.
Kako bismo lakše baratali izrazima u nastavku, označimo: $c_i = e_i + \sum_{j=1}^{d} \theta_i^j d^j$ te $\overline{c}_i = e_i + \sum_{j=1}^{d} \overline{\theta}_i^j d^j$.
Prema (3.1) imamo

$$\overline{\varphi}(c_i - e_i) = \langle \varphi, c_i - e_i \rangle = \overline{S} \cdot \theta_i.$$

S obzirom da je očekivanje fiksirano, minimizacijski problem svodi se na[3]

$$min\, \|c_i\|_2 \; pod\; uvjetima$$

$$\langle \varphi, c_i \rangle \leq \langle \varphi, e_i \rangle = a_0,$$
$$\langle 1, c_i \rangle = \langle 1, \overline{c}_i \rangle = a_1,$$
$$c_i \in C.$$

Sada vidimo da postoje dva Lagrangeova multiplikatora $\mu_i \geq 0$ te $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (za svaki i) takvi da

$$\overline{c}_i = \lambda_i - \mu_i \varphi \; g.s.$$

Stoga postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\mu \geq 0$ t.d.

$$e = \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i = \lambda - \mu\varphi \; g.s., \tag{3.2}$$

gdje prva jednakost slijedi iz druge od tri pretpostavke na kojima model počiva te iz činjenice da je $\overline{c}_i$ potrošnja pri ekvilibriju. Uočimo da je μ strogo pozitivan (to slijedi iz $e \neq const$). Jer je μ strogo pozitivan, jednadžbu možemo podijeliti sa μ_i pa za svaki i postoji $\alpha_i \geq 0$ i $b_i \in \mathbb{R}$ t.d.

$$\overline{c}_i = a_i e_i + b_i \; g.s. \tag{3.3}$$

Analogno, podijelimo li (3.2) sa μ te izrazimo φ, imamo

$$\varphi = -ae + b, \;\; a \geq 0, \tag{3.4}$$

gdje će $b \in \mathbb{R}$ imati ulogu u označavanju potražnje za bezrizičnom imovinom. Pomnožimo li jednadžbu (3.4) skalarno sa z dobivamo

$$\langle \varphi, z \rangle = \langle -ae + b, z \rangle = -a\mathbb{E}(ez) + b\mathbb{E}(z) = -a(Cov(e, z) + \mathbb{E}(e)\mathbb{E}(z)) + b\mathbb{E}(z) =$$

[3]Vidi dodatak, Napomena 4.0.4.

$$= -aCov(e,z) - a\mathbb{E}(e)\mathbb{E}(z) + b\mathbb{E}(z) = -aCov(e,z) + \mathbb{E}(z)(-a\mathbb{E}(e) + b).$$

Sada vidimo da postoji $K \in \mathbb{R}$ t.d.

$$\overline{\varphi}(z) = -aCov(e,z) + K\mathbb{E}(z), z \in C \tag{3.5}$$

te

$$\overline{S}^j = -aCov(e,d^j) + K\mathbb{E}(d^j), \forall j = 1,2,...,d. \tag{3.6}$$

Kako je $\overline{S}$ održiva (engl. viable), $\overline{S}^1 = \overline{\varphi}(1)$ je strogo pozitivna. Uvrstimo li za $j = 1$ $\overline{S}^1 = \frac{1}{1+r}$ u (3.6) te zbog $\mathbb{E}(d^1) = \mathbb{E}(1) = 1$ i $Cov(e,d^1) = Cov(e,1) = 0$, imamo $K = \frac{1}{1+r}$ te (3.6) možemo zapisati kao

$$\overline{S}^j = -aCov(e,d^j) + \frac{\mathbb{E}(d^j)}{1+r}. \tag{3.7}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je cijena imovine, koja je pozitivno korelirana s ukupnim sredstvima svih potrošača, niža nego diskontirano očekivanje njezinog povrata.
Neka je sada $\theta \in \mathbb{R}^d$ portfelj takav da $\overline{S} \cdot \theta \neq 0$, definiramo njegov povrat R_θ kao

$$R_\theta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\theta^j d^j}{\overline{S} \cdot \theta}.$$

Sa $M = (M^1, ..., M^j)$ označimo tržišni portfelj t.d. $e = \sum_{j=1}^{d} M^j d^j$.
Sada je povrat tržišnog portfelja dan sa

$$R_M = \frac{e}{\overline{S} \cdot M}.$$

Pretpostavimo da

$$\overline{S} \cdot M = \overline{\varphi}(e) > 0.$$

Sada iz (3.7) izvodimo formulu

$$\mathbb{E}(R_\theta) = (1+r)[1 + aCov(e,R_\theta)]. \tag{3.8}$$

Posebno, vrijedi

$$\mathbb{E}(R_M) = (1+r)[1 + aCov(e,R_M)]. \tag{3.9}$$

Izjednačavanjem prethodnih dviju jednadžbi imamo

$$\mathbb{E}(R_\theta) - (1+r) = [\mathbb{E}(R_M) - (1+r)]\frac{Cov(e,R_\theta)}{Cov(e,R_M)} = [\mathbb{E}(R_M) - (1+r)]\frac{Cov(R_M,R_\theta)}{VarR_M}. \tag{3.10}$$

U analizi tržišnog portfelja važan nam je odnos kovarijance i varijance. To se naziva beta tržišnog portfelja i potreban nam je kako bismo mjerili rizik koji će neka investicija navući na tržišni portfelj. Definiramo betu tržišnog portfelja kao

$$\beta_\theta = \frac{Cov(R_M, R_\theta)}{Var R_M}.$$

Prepoznajemo betu u jednadžbi (3.10) te iz nje zapisujemo poznatu beta formulu:

$$\mathbb{E}(R_\theta) - (1+r) = \beta_\theta[\mathbb{E}(R_M) - (1+r)]. \tag{3.11}$$

Na kraju, iz (3.10) i (3.9) imamo

$$\mathbb{E}(R_M) - (1+r) = \frac{a}{1+r} Cov(e, R_M) > 0. \tag{3.12}$$

Jednakost je strogo veća od 0 jer $a \geq 0$, $r > 0$ te $Cov(e, R_M) > 0$ (obzirom da su povrat tržišnog portfelja i sredstva pozitivno korelirani). Stoga, ako je θ portfelj takav da $\beta_\theta > 0$, iz 3.11 slijedi $\mathbb{E}(R_\theta) > 1 + r$. $\mathbb{E}(R_\theta) - (1 + r)$ zovemo premija rizika portfelja. U suštini β_θ je mjera rizika koji će neka investicija navući na tržišni portfelj. Razlikujemo dva slučaja:
1) $\beta_\theta \geq 1$, dionica je rizičnija od tržišta,
2) $\beta_\theta < 1$, investicija će smanjiti rizik portfelja.
Nadalje, uočimo da formula (3.12) daje očekivani povrat tržišnog portfelja koji potrošaču pomaže da odredi vrijednost imovine. Pomoću (3.3) i (3.11) može se dokazati da vrijede sljedeći teoremi[4]:

Teorem 3.0.2. *(The Mutual Fund teorem) Pri ekvilibriju, potrošačeva potražnja može se prikazati kao suma strogo pozitivne potražnje za tržišnim portfeljem i potražnje za bezrizičnom imovinom.*

Teorem 3.0.3. *Premija rizika portfelja linearna je funkcija bete u ukupnim sredstvima. Ako tržišni portfelj ima pozitivnu cijenu te ako je povrat na portfelj pozitivno (negativno) koreliran s ukupnim sredstvima, premija rizika je pozitivna (negativna). Ako nije koreliran s ukupnim sredstvima, očekivanje njegova povrata jednako je povratu bezrizične imovine.*

Napomena 3.0.4. *Ako ne postoji bezrizična imovina, izvod je jednak prethodnome, samo što je sada funkcija koja je jednaka* 1 *u svakom stanju zamijenjena svojom projekcijom h na vektorski prostor generiran s d^j. Dakle, pri ekvilibriju potrošač*

$$minimizira \, \|c_i\|_2 \quad pod \; uvjetima$$

[4]Za dokaz Teorema 3.0.2 vidi https://ibs.bfsu.edu.cn/ding/Part_2.pdf (veljača 2020.), dok se Teorem 3.0.3 može pokazati koristeći (3.8) i pretpostavke navedene u teoremu.

$$\langle \varphi, c_i \rangle \leq a_0,$$
$$\mathbb{E}(c_i) = \langle 1, c_i \rangle = \langle h, c_i \rangle = a_1.$$

Sada je (3.3) *oblika za svaki i postoji* $a_i \geq 0$ *i* b_i *t.d.*

$$\overline{c}_i = a_i e + b_i h$$

te dobivamo rezultat 3.0.2. Jednadžba (3.4) *postaje*

$$\varphi = -ae + bh, \ a \geq 0, b \in \mathbb{R},$$

dok je (3.5) *nepromijenjena. Pod pretpostavkom* $0 < \overline{\varphi}(e)$ *imamo* $K > 0$. *Uz* $K \leq 0$ *imali bismo*

$$0 < \overline{\varphi}(e) = -aVar(e) + K\mathbb{E}(e) < 0,$$

što vodi na kontradikciju. Imovina koja nije korelirana sa e ima isti očekivani povrat $R' = \frac{1}{K}$. *Naime, uvrstimo li* $aCov(e, R_\theta) = 0$ *u* $K\mathbb{E}(R_\theta) = 1 + aCov(e, R_\theta)$ *i podijelimo s K (prisjetimo se,* $K > 0$*) dobivamo gornju tvrdnju. Nova beta formula sada glasi:*

$$\mathbb{E}(R_\theta) - R' = \beta_\theta[\mathbb{E}(R_M) - R'].$$

Uočimo da gornja formula ukazuje na postojanje linearne veze između očekivanog povrata na portfelj i bete vezane za tržišni portfelj.

Poglavlje 4

Dodatak

Pokažimo tvrdnju iz poglavlja 2.1 koja kaže da je budžetski prostor, pod određenim uvjetima na p, konveksan i kompaktan.

Korolar 4.0.1. *Za $p >> 0$ budžetski prostor $B_i(p) = \left\{c \in \mathbb{R}^l_+ : p \cdot c \leq p \cdot e_i\right\}$ je konveksan i kompaktan.*

Dokaz. Pokažimo prvo kompaktnost. Znamo, sa studija, da je skup kompaktan ako je ograničen i zatvoren. Zatvorenost pokazujemo tako što ćemo uzeti proizvoljan niz $c_n \in B_i(p)$ takav da $c_n \to c \in \mathbb{R}^l_+$ te pokazati $c \in B_i(p)$[1].
Neka je sada $c_n \in B_i(p)$ takav da $c_n \in \mathbb{R}^l_+$. Pretpostavimo suprotno, tj. $c \notin B_i(p)$. To povlači $p \cdot c > p \cdot e_i$, što povlači $\sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c_k - e^i_k) = \epsilon > 0$. Prethodnu jednadžbu možemo zapisati kao $\sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c_k - c^k_n + c^k_n - e^i_k) = \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c_k - c^k_n) + \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c^k_n - e^i_k) = \epsilon > 0$. Prebacimo li drugi sumand iz prethodne jednakosti na drugu stranu dobivamo $\sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c^k_n - e^i_k) = \epsilon - \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c_k - c^k_n) \geq \epsilon - \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot \left|c_k - c^k_n\right|$[2].
Zbog $c_n \to c$, za dovoljno velik n je $\left|c_k - c^k_n\right| < \frac{\epsilon}{2lmax\{p_1,...,p_l\}}$, za svaki $k = 1, 2, ..., l$.
Za dovoljno velik n imamo:
$\sum_{k=1}^{l} p_k \cdot \left|c_k - c^k_n\right| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c_k - c^k_n) = \epsilon - \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot (c_k - c^k_n) \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow$ $p \cdot c_n > p \cdot e_i$, za dovoljno velik n.
Slijedi $c_n \notin B_i(p)$ što je u kontradikciji s $c_n \in B_i(p)$. Dakle $c \in B_i(p)$.
Sada pokazujemo ograničenost. Neka je $c \in B_i(p)$. To povlači $c = (c^1, ..., c^l) \in \mathbb{R}^l_+$, $p \cdot c \leq p \cdot e_i$, a obzirom da je p također oblika $p = (p^1, ..., p^l)$ prethodna nejednadžba ekvivalentna je $p^1c^1 + \ldots + p^lc^l \leq p \cdot e_i$.
Iz toga slijedi $c^jp^j \leq p^1c^1 + \ldots + p^lc^l \leq p \cdot e_i$ što povlači $\left|c^j\right| \leq \frac{1}{p^j}\left|p \cdot e_i\right|$ za svaki $j = 1, 2, ..., l$.
Prema tome, $\left|c^j\right| \leq \frac{1}{\min\limits_{j=1,...,l} p^j}\left|p \cdot e_i\right|$, a to je ekvivalentno $\sqrt{\sum_{j=1}^{l}(c^j)^2} \leq \frac{|p \cdot e_i|}{\min\limits_{j=1,...,l} p^j}\sqrt{l}$ pri čemu

[1] Skup je zatvoren akko svaki niz u $A \subseteq \mathbb{R}^n$ koji konvergira u $\mathbb{R}^n$ ima limes u A.
[2] Naprosto zbog $c_k - c^k_n \leq \left|c_k - c^k_n\right|$.

znamo da je $||c||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{l}(c^j)^2}$. Dakle, $B_i(p)$ je ograničen. Slijedi, $B_i(p)$ je kompaktan. Pokažimo sada konveksnost. Neka su $c_1, ..., c_n \in B_i(p)$. To povlači $p \cdot c_k \leq p \cdot e_i$, za svaki $k = 1, 2, ..., n$. Uzmimo $t_1, ..., t_n \geq 0$ t.d. $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$. Sada imamo $p \cdot (\sum_{j=1}^{n} t_j c_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j p \cdot c_j \leq \sum_{j=1}^{n} t_j p \cdot e_i = p \cdot e_i(\sum_{j=1}^{n} t_j) = p \cdot e_i$. Slijedi $\sum_{j=1}^{n} t_j c_j \in B_i(p)$. Dakle, $B_i(p)$ je konveksan. □

Korolar 4.0.2. *Pokažimo da je graf od μ iz Leme 2.1.9 zatvoren.*

Dokaz. Uočimo da korespondenciju $\mu\colon f(S) \to S$ definiranu s

$$\mu(z) := \{p \in S : p \cdot z = max\{q \cdot z : q \in S\}\}$$

možemo definirati i kao

$$\mu(z) := \{p \in S : p \cdot z \geq q \cdot z, \forall q \in S\}.$$

Pokazat ćemo da je graf zatvoren tako što ćemo za proizvoljne nizove $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz S, takve da $s_n \to s$ i $t_n \to t$, uzeti $(f(s_n), t_n) \in graph\ \mu$ t.d. $(f(s_n), t_n) \to (f(s), t)$ te pokazati $(f(s), t) \in graph\ \mu$. Uočimo, opravdano je pisati $f(s_n) \to f(s)$ jer je f, prema pretpostavci iz leme, neprekidna.
Općenito je graf korespondencije definiran kao u (1.3), stoga kako bismo pokazali $(f(s), t) \in graph\ \mu$, pokazujemo $t \in \mu(f(s))$ koristeći $t_n \in \mu(f(s_n))$ (jer $(f(s_n), t_n) \in graph\ \mu$). Uz oznake kao gore imamo

$$q \cdot f(s) = q \cdot \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty} q \cdot f(s_n) \leq \lim_{n\to\infty} t_n \cdot f(s_n) = \lim_{n\to\infty} t_n \cdot \lim_{n\to\infty} f(s_n) = t \cdot f(s),$$

što povlači $t \in \mu(f(s))$, odnosno $(f(s), t) \in graph\ \mu$. Dakle graf od μ je zatvoren. □

Sada pokazujemo tvrdnju o skupovima iz Propozicije 2.2.4 iz poglavlja 2.1.

Korolar 4.0.3. *Skup U iz Propozicije 2.2.4 je konveksan i kompaktan, a skup V je konveksan.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je U kompaktan. Kako je U slika kompakta po neprekidnoj funkciji (slijedi iz **(U1)**) slijedi da je i sam U kompaktan[3]. Pokažimo da je U konveksan. Uzmimo dva niza $(a_i)_{i=1}^{m}$ i $(b_i)_{i=1}^{m}$ iz A. Neka je $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$.

$$\lambda\,(u_i(a_i)) + (1-\lambda)\,(u_i(b_i)) = (\lambda u_i(a_i) + (1-\lambda)(u_i(b_i)) \leq (u_i(\lambda a_i + (1-\lambda)b_i)) \in U \quad (4.1)$$

gdje nejednakost slijedi iz konkavnosti funkcije u_i(pretpostavka **(U1)**). Uočimo, označimo li $(c_i)_i = (\lambda a_i + (1-\lambda)b_i)_i$, a jer su $(a_i)_i$ i $(b_i)_i$ iz A, slijedi $c_i \geq 0$ te $\sum c_i = \lambda \sum a_i + (1-\lambda)b_i \leq e$.

[3]Prema teoremu koji kaže ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan i $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija, tada je $f(A)$ kompaktan.

Pokažimo sada konveksnost skupa V. Neka su $z_1, z_2 \in V$. Dakle $z^i_{1,2} \geq u_i(\overline{c}_i)$, a prema tome $\lambda z^i_1 + (1-\lambda)z^i_2 \geq u_i(\overline{c}_i)$, za $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Jasno je da za neki j vrijedi $\lambda z^j_1 + (1-\lambda)z^j_2 > u_j(\overline{c}_j)$ (npr. za onaj j za koji je $z^j_1 > u_j(\overline{c}_j)$). Slijedi V je konveksan. □

Napomena 4.0.4. *Poznato nam je da varijancu možemo zapisati kao*

$$minVar(c_i) = min\left[\mathbb{E}(c_i^2) - (\mathbb{E}(c_i))^2\right]. \tag{4.2}$$

Budući da je jedan od uvjeta minimizacijskog problema $\mathbb{E}(c_i) = \mathbb{E}(\overline{c}_i)$, *jednadžbu* (4.2) *zapisujemo kao*

$$minVar(c_i) = min\left[\mathbb{E}(c_i^2) - (\mathbb{E}(c_i))^2\right] = min\left[\mathbb{E}(c_i^2) - (\mathbb{E}(\overline{c}_i))^2\right]. \tag{4.3}$$

Sada obzirom da je očekivanje fiksirano slijedi da se naš minimizacijski problem može svesti na

$$min\mathbb{E}(c_i^2), \tag{4.4}$$

a prema tome kako je definiran skalarni produkt i iz činjenice da je $\| \|_2$ *pripadajuća mu norma vrijedi*

$$min\mathbb{E}(c_i^2) = min\,\|c_i\|_2^2\,. \tag{4.5}$$

Na kraju, korijen je strogo rastuća funkcija pa primijenimo li je na zadnji izraz u prethodnoj jednadžbi minimizacijski problem možemo svesti na

$$min\,\|c_i\|_2\,. \tag{4.6}$$

Bibliografija

[1] J. Levin, *General Equilibrium*, Stanford University, 2006.

[2] M. Jeanblanc R.A. Dana, *Financial Markets in Continuous Time*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[3] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, PMF Zagreb, 2008.

[4] ______, *Markovljevi lanci*, PMF Zagreb, 2008.

[5] ______, *Slučajni procesi*, PMF Zagreb, 2010.

Sažetak

U ovom radu pokazali smo osnovne rezultate egzistencije ekvilibrija u financijskoj teoriji u diskretnom vremenu. Započeli smo uvođenjem matematičkih definicija i rezultata s financijskom interpretacijom. Zatim smo postavili uvjete poput nepostojanja arbitraže i svojstava funkcija korisnosti te uveli agregatnu fuknciju viška potražnje na temelju čega smo razvili teoriju i dokazali egzistenciju ekvilibrija. Ekvilibrij smo povezali s efikasnošću pomoću Pareto optimalnosti. Slijedili smo Arrowovu ideju uvođenja financijskih tržišta te tako iskazivali rezultate egzistencije ekvilibrija za pojedine slučajeve tržišta i na temelju njih izvodili zaključke. Na kraju, izveli smo poznatu beta jednadžbu CAPM modela koji je danas često u uporabi.

Summary

In this study we proved the fundamental results of equilibrium in financial theory in discrete time. We started by introducing mathematical definitions and results with financial interpretation. Then we set conditions such as non-arbitrage, characteristics of utility functions and introduced the aggregate excess demand function that helped us develop the theory and prove the existence of the equilibrium. Pareto optimal allocation helped us link the equilibrium to efficiency. We followed Arrow's idea of introducing financial markets, subsequently showing the results of equilibrium existence on certain market cases and according to them made conclusions. In the end, we derived the well-known beta equation through the Capital Asset Princing Model which is commonly used today.

Životopis

Rođena sam 7. svibnja 1994. godine u Zaboku. Odrasla sam u Krapinskim Toplicama gdje sam i pohađala istoimenu osnovnu školu. U jesen 2009. upisala sam prirodoslovno-matematički smjer Gimnazije Antuna Gustava Matoša u Zaboku koji sam završila 2013. godine. Tijekom svog osnovnoškolskog i srednješkolskog obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima znanja, a i stvaralaštva, iz gotovo svih predmeta. Po završetku srednje škole, akademske godine 2013./2014. upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu. Isti sam završila 2017. godine te u jesen iste godine upisala Diplomski sveučilišni studij Poslovne i financijske matematike, također na PMF-u u Zagrebu, a koji završavam u ožujku 2020., ovom rečenicom.