SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Gabrijel Tomorad

PRISTRANOST PO VELIČINI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, veljača, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Pretpostavimo da autobusi dolaze na stanicu u skladu sa Poissonovim procesom, tako da su vremena između dvaju dolazaka nezavisne slučajne varijable sa eksponencijalnom distribucijom s očekivanjem $\mathbb{E}X = 1$ tj. $\mathbb{P}(X > s) = e^{-s}$ za $s > 0$. Pretpostavimo da dolazimo na stanicu u trenutku t (neovisno o autobusima) i želimo odrediti očekivano vrijeme $\mathbb{E}W_t$ vremena čekanja W_t do sljedećeg autobusa. Dvije su uvjerljive i proturječne analize:

(a) Nedostatak pamćenja eksponencijalne distribucije, tj. svojstvo $\mathbb{P}(X > r + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > r)$, ukazuje da naše vrijeme čekanja ne bi trebalo ovisiti o trenutku našeg dolaska. U tom slučaju je $\mathbb{E}W_t = \mathbb{E}W_0 = 1$.

(b) Trenutak našeg dolaska je "odabran slučajno" u intervalu između dva dolaska autobusa pa bi zbog simetrije naše očekivano vrijeme čekanja trebalo biti polovina očekivanog vremena između dolazaka, $\mathbb{E}W_t = 1/2$.

Ovo je paradoks vremena čekanja, opisan u [3]. Obje analize, (a) i (b), se čine razumnima i obje se, zbog neznanja ili jednostavnosti, koriste u praksi. Da bismo razumjeli što se točno dogodilo u ovom paradoksu, moramo proučiti pristranost po veličini (eng. size bias). Primijetimo da je za proizvoljno vrijeme t, u kojem dolazimo na stanicu, vjerojatnost dolaska u duži interval veća nego što bi relativne frekvencije ukazivale. Ilustriramo ovu tvrdnju jednostavnijim primjerom.

Pretpostavimo da nam je dana populacija od 200 ljudi. Njih 100 zajedno živi u jednoj zgradi, a drugih 100 žive sami, svaki u svojoj kući. Zanima nas koliko ljudi u prosjeku živi u jednom stambenom objektu. Možemo slučajno odabrati jednog čovjeka i pitati ga koliko ljudi živi na njegovoj adresi, uključujući i njega. Vjerojatnost da nam ispitanik odgovori "100" jednaka je 1/2 jer polovina populacije živi zajedno. Isto tako vjerojatnost da nam odgovori "1" je 1/2 jer polovina ljudi žive sami. U očekivanju dobivamo 50.5 ljudi po jednom stambenom objektu. Ovakva analiza ne dovodi do točnog odgovora koji iznosi $1 \cdot 100/101 + 100 \cdot 1/101$ što je približno 1.98 ljudi po jednom stambenom objektu. Očito se negdje dogodila pogreška.

Ovakvim ispitivanjem vjerojatnost biranja adrese, odn. objekta, proporcionalna je broju ljudi koji tamo žive. Zgrada, u kojoj živi 100 puta više ljudi, ima 100 puta veću vjerojatnost da bude izabrana nego kuća u kojoj živi jedan čovjek. Prilikom uzorkovanja, veća je vjerojatnost da ćemo od ispitanika dobiti veći broj kao odgovor i time uvećavamo prosjek.

Promotrimo slučajne varijable koje su nam od interesa. Neka X određuje broj ljudi u slučajno odabranom stambenom objektu. Tada je $\mathbb{P}(X = 1) = 100/101$ i $\mathbb{P}(X = 100) = 1/101$. Označimo sa X^* broj ljudi koji žive na adresi slučajno odabranog ispitanika. Možemo naslutiti, $\mathbb{P}(X^* = k)$ proporcionalno ovisi o $k \cdot \mathbb{P}(X = k)$. Iz zahtjeva $1 = \sum_k \mathbb{P}(X^* = k) = c \sum_k k\mathbb{P}(X = k) = c\mathbb{E}X$, slijedi da je

$$\mathbb{P}(X^* = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}X};\ k = 1, 100 \tag{1}$$

Distribucija varijable X^* ovisi o vrijednosti varijable X. Takvu slučajnu varijablu ćemo zvati pristranom po veličini. Kao što smo ranije vidjeli, iz $\mathbb{E}X = 200/101$ i gornje jednakosti, dobivamo $\mathbb{P}(X^* = 1) = \mathbb{P}(X^* = 100) = 1/2$.

Iako je pristranost nepoželjna u statističkim procjenama, pokazuje se da pristranost po veličini ima ulogu u rješenju Skorohodovog problema ulaganja, beskonačno djeljivim distribucijama, procesima grananja i Steinovoj metodi. Teorijska pozadina posljednjeg primjera biti će jasna odmah nakon definicije varijable pristrane po veličini, a na paradoks vremena čekanja ćemo se vratiti kasnije.

Poglavlje 1

Osnove pristranosti po veličini

1.1 Definicija

Za početak, definicija općenite pristrane slučajne varijable.

Definicija 1.1.1. *Neka je h nenegativna funkcija i X slučajna varijabla s vrijednostima u domeni od h uz $\mathbb{E}h(X) \in (0, \infty)$. Za takvu X i h, kažemo da X^h ima h-pristranu distribuciju od X ako distribucija od X^h, u odnosu na distribuciju od X, ima Radon-Nikodymovu derivaciju danu sa*

$$\frac{\mathbb{P}(X^h \in dx)}{\mathbb{P}(X \in dx)} = \frac{h(x)}{\mathbb{E}h(X)}. \tag{1.1}$$

Vrijedne spomena su funkcije oblika $h(x) = e^{\beta x}$ za razne β koje su središte eksponencijalnih familija i teorije velikih odstupanja (eng. large deviations). Uz njih, važnu ulogu imaju funkcije $h(x) = x^\beta$ od kojih je slučaj $\beta = 1$ upravo tema ovog rada. Posebno, ako je $h(x) = x$ sa domenom $[0, \infty)$, za h-pristranu varijablu X^h kažemo jednostavno da je pristrana po veličini, s oznakom X^*.

Prema ovoj definiciji, uzorkovati pristrano po veličini može se svaka nenegativna slučajna varijabla čije očekivanje je $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$. Karakterizacija (1.1) reducira se na

$$\frac{\mathbb{P}(X^* \in dx)}{\mathbb{P}(X \in dx)} = \frac{x}{\mathbb{E}X}. \tag{1.2}$$

U slučajevima kada je X diskretna ili apsolutno neprekidna s gustoćom f, po veličini pristrana distribucija slučajne varijable X^* opisana je formulom

$$f_{X^*}(x) = \frac{xf(x)}{\mathbb{E}X}, \tag{1.3}$$

kao što je uvodno poglavlje, tj. formula (1) nagovijestila.

Primjer 1.1.2. *(Poissonova slučajna varijabla)* Neka je X Poissonova s parametrom λ i gustoćom $f(k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Koristeći (1.3) uz $x = k + 1$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$ imamo

$$f_{X^*}(k+1) = \frac{(k+1)f(k+1)}{\lambda} = \frac{k+1}{\lambda}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = f(k). \tag{1.4}$$

Dakle, za $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ vrijedi $X^* \overset{d}{=} X + 1$.

Obratno, pretpostavimo samo da je X nenegativna cjelobrojna slučajna varijabla s očekivanjem $\lambda \in (0, \infty)$ i $X^* \overset{d}{=} X + 1$. Formula (1.3) sada kaže da je, za $k \geq 0$, $f(k+1) = \lambda f(k)/(k+1)$. Po principu indukcije dobijemo $f(k) = f(0)\lambda^k/k!$. Kako funkcija gustoće zadovoljava $1 = \sum_{k\geq 0} f(k)$, slijedi da je $1 = \sum_{k\geq 0} f(0)\lambda^k/k! = f(0)e^{\lambda}$, što znači točno $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Slično se može pokazati da za $X \geq 0$ i $\lambda := \mathbb{E}X \in (0, \infty)$ te $X^* \overset{d}{=} X + 1$ (dakle bez pretpostavke cjelobrojnosti) također vrijedi $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Sada se postavlja pitanje koji su uvjeti na distribuciju od X ako želimo reprezentirati X^* sa

$$X^* = X + Y,\ Y \geq 0 \text{ uz } X \text{ i } Y \text{ nezavisne.} \tag{1.5}$$

Taj problem ćemo riješiti postepeno kroz ovaj rad. Sljedeći primjer pokazuje da preslikavanje razdiobe od X na razdiobu od X^* nije bijektivno.

Primjer 1.1.2. *(Bernoullijeva slučajna varijabla)* Neka je X Bernoullijeva s parametrom $p > 0$. Kako je $X \geq 0$ i $\mathbb{E}X = p \in (0, 1]$, X ima transformaciju pristranu po veličini i, po (1.3), vrijedi $X^* = 1$ neovisno o p.

Kao interpretaciju ovog primjera uočimo da ako bismo internetskom anketom ispitivali koliko ljudi koristi internet, rezultat bi naravno bio - svi. Primijetimo također da uvijek vrijedi $\mathbb{P}(X^* = 0) = 0$.

1.2 Osnovna svojstva

U daljnjem tekstu jedina pristranost kojom ćemo se baviti biti će pristranost po veličini. Iz tog razloga, svi pojmovi vezani za *pristranost, pristrano, uzorkovanje* odnose se na ono *po veličini* osim ako nije drugačije navedeno. S time u skladu, jedna korisna karakterizacija varijable koja ima pristranu transformaciju je sljedeća:

$$\textit{za svaku ograničenu izmjerivu funkciju } g,\ \mathbb{E}g(X^*) = \frac{1}{\mathbb{E}X}\mathbb{E}[Xg(X)]. \tag{1.6}$$

Ova tvrdnja direkno slijedi uvrštavanjem (1.2) u definiciju matematičkog očekivanja.

Neka je ϕ_X karakteristična funkcija od X, ondosno $\phi_X(u) = \mathbb{E}e^{iuX}$. Znamo da $\mathbb{E}|X| < \infty$ omogućava diferencijabilnost ϕ_X i vrijedi $\phi'_X(u) = i\mathbb{E}Xe^{iuX}$ ([4] Teorem 13.7). Stavimo $g(x) = e^{iux}$ i iz (1.6) odmah slijedi

$$\phi_{X^*}(u) := \mathbb{E}e^{iuX^*} = \frac{1}{\mathbb{E}X}\mathbb{E}[Xe^{iuX}] = \frac{1}{i\mathbb{E}X}\phi'_X(u). \tag{1.7}$$

Kako karakteristične funkcije određuju distribuciju, gornjom jednakosti u potpunosti je određena distribucija pristrane varijable.

Uzmimo sada $g(x) = \mathbb{1}(x > t)$ za neki fiksni t i $f(x) = x$. Iz Čebiševljeve nejednakosti za rastuće f i g, $\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(X)$ i primjenom (1.6) sa funkcijom g slijedi

$$\mathbb{P}(X^* > t) = \frac{1}{\mathbb{E}X}\mathbb{E}[X\mathbb{1}(X > t)] \geq \frac{1}{\mathbb{E}X}\mathbb{E}X\mathbb{E}\mathbb{1}(X > t) = \mathbb{P}(X > t). \tag{1.8}$$

Uvjet $\mathbb{P}(X^* > t) \geq \mathbb{P}(X > t)$ za sve t je još jedno zanimljivo svojstvo pristranosti koje omogućava postizanje zahtjeva $Y \geq 0$ u $X^* = X + Y$. Možemo reći da "X^* leži iznad X po distribuciji".

Ako za neku slučajnu varijablu Y dopustimo da vrijedi $\mathbb{E}Y \in [-\infty, \infty]$, podrazumijevamo da beskonačno očekivanje ima samo pozitivni ili negativni dio Y. Time proširujemo uvjete za karakterizaciju (1.6).

Lema 1.2.1. *Neka je $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija, a X nenegativna slučajna varijabla sa očekivanjem $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$. Ako $\mathbb{E}[Xg(X)] \in [-\infty, \infty]$ postoji, onda vrijedi $\mathbb{E}g(X^*) = \mathbb{E}[Xg(X)]/\mathbb{E}X$. Ako $\mathbb{E}[Xg(X)]$ ne postoji u $[-\infty, \infty]$, ne postoji ni $\mathbb{E}g(X^*)$.*

Dokaz. Ako je $g(x) \geq 0$, uvrštavanjem $g_n(x) = \max(g(x), n)$ u (1.6) i uzimanjem limesa, po teoremu o monotonoj konvergenciji zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{E}g(X^*) = \frac{1}{\mathbb{E}X}\mathbb{E}[Xg(X)]$$

uključujući slučaj kada su obje strane beskonačne. Neka su g_+ i g_- pozitivni odnosno negativni dijelovi funkcije g. Tada su g_+ i g_- nenegativne funkcije. Na domeni $[0, \infty)$ vrijedi $(xg(x))_+ = xg_+(x)$ i $(xg(x))_- = xg_-(x)$. Iz pretpostavke da $\mathbb{E}[Xg(X)] \in [-\infty, \infty]$ postoji, za barem jednu $h = g_+$ i $h = g_-$ vrijedi $\mathbb{E}[Xh(X)] < \infty$ pa je očekivanje $\mathbb{E}g(X^*) = \mathbb{E}g_+(X^*) - \mathbb{E}g_-(X^*) \in [-\infty, \infty]$ dobro definirano i vrijednost mu je dana sa $\mathbb{E}g(X^*) = (1/\mathbb{E}X)\mathbb{E}[Xg_+(X)] - (1/\mathbb{E}X)\mathbb{E}[Xg_-(X)] = (1/\mathbb{E}X)\mathbb{E}[Xg(X)]$. Slično, ako je $\mathbb{E}[(Xg(X))_+] = \mathbb{E}[(Xg(X))_-] = \infty$, imamo $\mathbb{E}g_+(X^*) = \mathbb{E}g_-(X^*) = \infty$ pa očekivanje $\mathbb{E}g(X^*)$ ne postoji. □

Sada za g možemo uzeti $g(x) = x^n$ što daje

$$\mathbb{E}(X^*)^n = \mathbb{E}X^{n+1}/\mathbb{E}X \tag{1.9}$$

Dakle, do na skaliranje s $1/\mathbb{E}X$, niz momenata od X^* je niz momenata od X pomaknut za 1!

Još jedna direktna posljedica jednakosti (1.6) je da pristrano uzorkovanje dopušta multipliciranje pozitivnom konstantom. Za $c > 0$ vrijedi

$$(cX)^* \stackrel{d}{=} c(X^*). \tag{1.10}$$

Pristrano uzorkovanje također dopušta konvergenciju po distribuciji, uz uvjet da očekivanja kovergiraju k očekivanju limesa varijabli.

Teorem 1.2.2. *Neka su $X, X_1, X_2, ...$ nenegativne slučajne varijable s očekivanjima $\mathbb{E}X \in (0,\infty), \mathbb{E}X_n \in (0,\infty)$, takve da $X_n \xrightarrow{d} X$ i $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$. Tada*

$$X_n^* \xrightarrow{d} X^*.$$

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena i neprekidna funkcija takva da je nosač od h kompaktan skup. Funkcija g dana sa $g(x) = xh(x)$ je ograničena i neprekidna. Zbog njene ograničenosti vrijedi (1.6), a zbog neprekidnosti po teoremu o konvergenciji po distribuciji, $\mathbb{E}g(X_n) \to \mathbb{E}g(X)$. Koristeći (1.6) sa h, dobivamo

$$\mathbb{E}h(X_n^*) = \frac{\mathbb{E}X_n h(X_n)}{\mathbb{E}X_n} = \frac{\mathbb{E}g(X_n)}{\mathbb{E}X_n} \to \frac{\mathbb{E}g(X)}{\mathbb{E}X} = \frac{\mathbb{E}Xh(X)}{\mathbb{E}X} = \mathbb{E}h(X^*).$$

□

Obrat ovog teorema nije istinit jer preslikavanje razdiobe od X na razdiobu od X^* nije bijektivno kao što smo vidjeli u primjeru 1.1.2. Možemo uzeti bilo koje slučajne varijable A i B takve da $A \stackrel{d}{\neq} B$, ali $A^* \stackrel{d}{=} B^*$ te definiramo niz $X_1, X_2, X_3, X_4, ... = A, B, A, B, ...$ i stavimo $X = A$. $X_n^* \xrightarrow{d} X^*$ vrijedi, ali nije istina $X_n \xrightarrow{d} X$.

Poglavlje 2

Pristranost procesa po veličini

U ovom poglavlju cilj je uzorkovati proces po veličini jedne koordinate, transformirati pristrano po veličini sumu nezavisnih slučajnih varijabli i te rezultate primijeniti na paradoks vremena čekanja te objasniti ulogu pristranosti u Markovljevim lancima i martingalima.

2.1 Uzorkovanje procesa po veličini jedne koordinate

Definicija 2.1.1. *Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ...) \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$ proces sa distribucijom μ takav da za svaki indeks i vrijedi $\mathbb{E}X_i \in (0, \infty)$. Uzorkovati proces $\boldsymbol{X}$ po veličini X_i znači prijeći na distribuciju $\mu^{(i)}$ sa Radon-Nikodymovom derivacijom*

$$\frac{d\mu^{(i)}}{d\mu} = \frac{x_i}{\mathbb{E}X_i}. \tag{2.1}$$

Za proces sa distribucijom $\mu^{(i)}$ pišemo $\boldsymbol{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, ...)$.

Tvrdnju (2.1) možemo izraziti kao

$$\text{za svaku ograničenu izmjerivu funkciju } g, \ \mathbb{E}g(\mathbf{X}^{(i)}) = \frac{1}{\mathbb{E}X_i}\mathbb{E}[X_i g(\mathbf{X})]. \tag{2.2}$$

Ovime smo pojam pristranosti, karakteriziran sa (1.6), proširili na slučajni proces fiksirajući jednu koordinatu. Da je (1.6) jednostavniji slučaj (2.2), lako se vidi uzimanjem ograničene izmjerive funkcije $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ i definiranjem $g(\mathbf{x}) := h(x_i)$. Vrijedi dakle, $X_i^{(i)} \stackrel{d}{=} X_i^*$. Što se događa sa ostalim koordinatama, nije uvijek ovako jednostavno vidjeti. Sljedeća lema pokazuje da nezavisnost koordinata znatno olakšava pristrano uzorkovanje procesa. Tada se transformira samo i-ta koordinata, a ostale ostaju nepromjenjene i dobiveni proces također ima nezavisne koordinate. Kasnije ćemo vidjeti da jednostavne pristrane transformacije imaju i martingali pod određenim uvjetima.

Lema 2.1.2. *Fiksirajmo neki indeks i. Pretpostavimo da su $X_1, X_2, ...$ međusobno nezavisne, nenegativne i takve da je $\mathbb{E}X_i \in (0, \infty)$. Za $j \neq i$ neka je $Y_j \overset{d}{=} X_j$, a $Y_i \overset{d}{=} X_i^*$ te $Y_1, Y_2, ...$ međusobno nezavisne. Tada se distribucija $\mu^{(i)}$ dana sa* (2.1) *reducira na distribuciju od $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ...)$, odnosno*

$$(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, ...) \overset{d}{=} (Y_1, Y_2, ...).$$

Dokaz. Već smo vidjeli da uzimanjem $g(\mathbf{x}) := h(x_i)$ vrijedi $X_i^{(i)} \overset{d}{=} X_i^*$. Za $j \neq i$ i ograničenu izmjerivu funkciju $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, koristeći (2.2) uz $g(\mathbf{x}) = h(x_j)$, imamo $\mathbb{E}g(\mathbf{X}^{(i)}) = \mathbb{E}h(X_j^{(i)}) = (1/\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}[X_i h(X_j)]$. Zbog nezavisnosti X_j i X_i, slijedi $\mathbb{E}h(X_j^{(i)}) = (1/\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}[X_i h(X_j)] = (1/\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}X_i\mathbb{E}h(X_j) = \mathbb{E}h(X_j)$, što dokazuje, za $j \neq i$, $X_j^{(i)} \overset{d}{=} X_j \overset{d}{=} Y_j$.

Treba još pokazati je da $\mathbf{X}^{(i)}$ i $\mathbf{Y}$ imaju istu distribuciju. To će vrijediti ako pokažemo da su koordinate od $\mathbf{X}^{(i)}$ nezavisne. Za $B_1, B_1, ... \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ imamo $\mathbb{P}(X_1^{(i)} \in B_1, X_2^{(i)} \in B_2, ...) = \mathbb{E}[\mathbb{1}(X_1^{(i)} \in B_1, X_2^{(i)} \in B_2, ...)] = (1/\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}[X_i\mathbb{1}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ...)] = (1/\mathbb{E}X_i)\mathbb{E}[X_i\mathbb{1}(X_1 \in B_1)\mathbb{1}(X_2 \in B_2)...] = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2)...\mathbb{P}(X_i^* \in B_i)... = \mathbb{P}(X_1^{(i)} \in B_1)\mathbb{P}(X_2^{(i)} \in B_2)...$. Druga jednakost slijedi iz (2.2), treća iz nezavisnosti $X_1, X_2, ...$, a zadnja iz $X_j^{(i)} \overset{d}{=} X_j$. □

Sljedeće od interesa su nam varijable oblika $S = h(\mathbf{X})$, konkretnije $S = X_1 + X_2 + ...$, i distribucija transformiranih varijabli $S^{(i)}$. Ovdje se javlja problem beskonačnih suma nenegativnih ograničenih (zahtjev $\mathbb{E}X_i \in (0, \infty)$ povlači $\mathbb{P}(X_i = \infty) = 0$) slučajnih varijabli. Ne možemo tvrditi da će prostor vrijednosti takve sume biti $[0, \infty)$. Stoga uvodimo izmjerivu funkciju $h : [0, \infty)^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ i ograničenu izmjerivu $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$. Kompozicija $g(\mathbf{X}) = f(h(\mathbf{X}))$ je ograničena izmjeriva funkcija sa $[0, \infty)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ pa možemo primijeniti (2.2). Distribucija od $S^{(i)} = h(\mathbf{X})^{(i)}$ je određena sljedećim uvjetom:

$$\textit{za svaku ograničenu izmjerivu } f : [0, \infty] \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}f(S^{(i)}) = \frac{1}{\mathbb{E}X_i}\mathbb{E}[X_i f(S)]. \tag{2.3}$$

2.2 Pristrano transformiranje sume

Neka je $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ konačna suma za $n \geq 1$, ili beskonačna suma $S = X_1 + X_2 + ...$, uz $X_i \geq 0$, $\mathbb{E}X_i < \infty$ i $\mathbb{E}S < \infty$. Pristrano transformiramo S po X_i kao u (2.1) i primijenimo (2.3) uz ograničenu nenegativnu izmjerivu g:

$$\mathbb{E}g(S^{(i)}) = \frac{1}{\mathbb{E}X_i}\mathbb{E}[X_i g(S)]. \tag{2.4}$$

Primjenom (1.6) sa $g \geq 0$, iz gornje jednakosti slijedi formula

$$\mathbb{E}g(S^*) = \frac{1}{\mathbb{E}S}\mathbb{E}[S g(S)] = \sum_i \frac{1}{\mathbb{E}S}\mathbb{E}[X_i g(S)] = \sum_i \frac{\mathbb{E}X_i}{\mathbb{E}S}\mathbb{E}g(S^{(i)}). \tag{2.5}$$

Odnosno, S^* ima složenu distribuciju sačinjenu od distribucija od $S^{(i)}$ s težinama $\mathbb{E}X_i/\mathbb{E}S$.

Distribuciju od $S^{(i)}$ još uvijek nije lagano izračunati, ali s pretpostavkom međusobne nezavisnosti varijabli $X_1, X_2, ...$ i $X_1^*, X_2^*, ...$ lema 2.1.2 daje jednostavan slučaj kada je $S^{(i)} \stackrel{d}{=} S - X_i + X_i^*$. Uz slučajnu varijablu I distribuiranu sa $\mathbb{P}(I = i) = \mathbb{E}X_i/\mathbb{E}S$, (2.5) možemo pisati u kraćem obliku

$$S^* \stackrel{d}{=} S - X_I + X_I^*. \tag{2.6}$$

Sa naglaskom da je samo jedan pribrojnik pristrano transformiran pišemo

$$(X_1 + X_2 + ... + X_n)^* \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + ... + X_{I-1} + X_I^* + X_{I+1} + ... + X_n \tag{2.7}$$

u slučaju kada je S konačna suma odnosno, u slučaju beskonačne sume,

$$(X_1 + X_2 + ...)^* \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + ... + X_{I-1} + X_I^* + X_{I+1} + ... \tag{2.8}$$

Naglašavamo razliku između konačne i beskonačne sume iz razloga što (2.7) *nije* poseban slučaj (2.8). Zahtjev $X_{n+1} = X_{n+2} = ... = 0$ ne bi zadovoljavao definiciju pristranosti u kojoj tražimo $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$. Ipak, iz notacijskih razloga se ponekad dopušta zapis $X^* \stackrel{d}{=} X = 0$.

Ako pretpostavimo da pribrojnici $X_1, ..., X_n$ nisu samo nezavisni već i jednako distribuirani, nije bitno po kojem X_i uzorkujemo jer su sve distribucije jednake. I možemo fiksirati na vrijednost 1:

$$(X_1 + X_2 + ... + X_n)^* \stackrel{d}{=} X_1^* + X_2 + ... + X_n. \tag{2.9}$$

Kao primjer posljedice gornje jednakosti uzmimo za $p \in (0, 1]$ Bernoullijevu slučajnu varijablu s očekivanjem p. Ona ima pristranu transformaciju i dobivena varijabla je konstanta 1. Suma n nezavisnih kopija Bernoullijeve slučajne varijable je varijabla $S_n \sim \mathrm{Binom}(n, p)$. Iz gornje jednakosti slijedi

$$S_n^* \stackrel{d}{=} 1 + S_{n-1}. \tag{2.10}$$

Neka je sada $\lambda \in (0, \infty)$, $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ i $X_n \sim \mathrm{Binom}(n, \lambda/n)$. Limes ovakvih binomnih varijabli je točno Poissonova pa po teoremu 1.2.2 i jednakosti (2.9) slijedi rezultat koji smo vidjeli van konteksta pristrane transformacije sume,

$$Z^* \stackrel{d}{=} Z + 1. \tag{2.11}$$

Primjer 2.2.1. *(Složena Poissonova distribucija)* Slučajna varijabla S ima (konačnu) složenu Poissonovu distribuciju ako je $S = \sum_{i=1}^n X_i$, gdje su $X_i = y_i Z_i$ za konstante $y_i > 0$ i $Z_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_i)$ nezavisne. Za takvu varijablu S postoji diskretna slučajna varijabla Y takva da je $S^* = S + Y$ uz S i Y nezavisne.

Definiramo $p_i := y_i\lambda_i/\mathbb{E}S$. Kako je $\mathbb{E}S = \sum_i y_i\lambda_i$, vrijedi $p_1 + ... + p_n = 1$. Distribuciju od Y zadajemo sa $\mathbb{P}(Y = y_i) = p_i$ nezavisno od S. Već smo vidjeli da je $Z_i^* \stackrel{d}{=} Z_i + 1$ što zajedno sa (1.10) daje $X_i^* \stackrel{d}{=} X_i + y_i$. Sumu S nezavisnih slučajnih varijabli znamo uzorkovati sa (2.7) uz I danu sa $\mathbb{P}(I = i) = \mathbb{E}X_i/\mathbb{E}S = y_i\lambda_i/\mathbb{E}S = p_i$, nezavisno od S. To nam daje $S^* \stackrel{d}{=} S + y_I$. Kako su događaji $\{Y = y_i\}$ i $\{I = i\}$ ekvivalentni, distribucija od y_I je dana distribucijom od Y. Odnosno, $S^* \stackrel{d}{=} S + Y$ i S, Y su nezavisne

2.3 Paradoks vremena čekanja

Sada se možemo vratiti na paradoks iz uvoda i objasniti što se skrivalo u pozadini. Neka su vremena između dva dolaska autobusa dana sa X_i, odnosno autobusi dolaze na stanicu u trenucima $X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, ...$ i X_i su pozitivne, nezavisne, jednako distribuirane s konačnim očekivanjem. Neka je t vrijeme u kojem dolazimo na stanicu. t odabiremo proizvoljno i neovisno o rasporedu autobusa. Možemo ga odabrati uniformno imeđu 0 i l, nezavisno od $X_1, X_2, ...$ i pustiti limes kada $l \to \infty$. Radi jednostavnosti, zamislimo samo jako velik l. Za tako izabrani t vjerojatnost pogađanja nekog intervala proporcionalna je duljini tog intervala (osim zadnjeg intervala, od $X_1 + ... + X_n$ do l, kada vrijeme X_{n+1} još nije isteklo), tj. ako vrijeme između dva dolaska X_i ima distribuciju $dF(x)$, distribucija duljine intervala u koji t pada je proporcionalna $x\ dF(x)$. Konstanta proporcionalnosti mora biti $1/\mathbb{E}X_i$ što znači da je distribucija intervala u koji pada t točno distribucija od X_i^*. Sada kada znamo distribuciju intervala u koji smo došli i s obzirom da smo došli u uniformno odabranom t, možemo zaključiti da ćemo sljedeći autobus čekati UX_i^*, a prošli nam je pobjegao prije $(1 - U)X_i^*$, gdje je U uniformno na $(0, 1)$.

Dalje konstruiramo stacionaran proces obnavljanja - proces $X_1, X_1 + X_2, ...$ u pravilu nije stacionaran pa distribucija vremena čekanja W_t od t do sljedećeg autobusa može varirati sa t. Proširimo $X_1, X_2, ...$ na također n.j.d., $..., X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, ...$. Neka je X_0^* pristrana transformacija od X_0 i U uniformna na (0,1) te neka su sve te varijable nezavisne. Vrijeme t uniformno pada u interval čija je duljina određena sa X_0^*. Naredni autobus dolazi za UX_0^* vremena, a onaj koji smo propustili je bio na stanici prije $(1 - U)X_0^*$. Proglasimo vrijeme t ishodištem i koristeći $X_1, X_2, ...$ za vremena međudolazaka autobusa koji će tek doći i $..., X_{-2}, X_{-1}$ za vremena međudolazaka koja su se dogodila prije nego smo došli na stanicu, dobivamo proces po kojem dolaze autobusi: $...,\ -((1 - U)X_0^* + X_{-1} + X_{-2}),\ -((1 - U)X_0^* + X_{-1}),\ -(1 - U)X_0^*,\ UX_0^*,\ UX_0^* + X_1,\ UX_0^* + X_1 + X_2,\ ...$. Pokazuje se da je ovaj proces stacionaran. Vrijeme čekanja sljedećeg autobusa je tada $W_0 = UX_0^*$.

Interval koji pokriva ishodište ima očekivanu duljinu $\mathbb{E}X_0^* = \mathbb{E}X_0^2/\mathbb{E}X_0$ (ovo slijedi iz (1.9) za $n = 1$), a u omjeru s $\mathbb{E}X_0$ iznosi $\mathbb{E}X_0^*/\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_0^2/(\mathbb{E}X_0)^2$. Po Cauchy-Schwartzovoj nejednakosti, ovaj omjer je barem 1, a može biti i ∞. Iz stacionarnosti procesa dolazaka slijedi $\mathbb{E}W_t = \mathbb{E}W_0 = \mathbb{E}(UX_0^*) = (1/2)\mathbb{E}X_0^*$. Dakle, omjer mog očekivanog vremena čekanja i prosječnog vremena između autobusa može biti bilo koja vrijednost između 1/2 i beskonačnosti.

U slučaju eksponencijalne distribucije kao u primjeru iz uvodnog poglavlja, po (1.3), X_0^* ima funkciju gustoće xe^{-x} za $x > 0$. To je točno Gamma$(1, 2)$ distribucija i vrijedi $\mathbb{E}X_0^* = \int_0^\infty x(xe^{-x})\,dx = 2$. Razdvajanje zbog simetrije, kao u odgovoru (b) iz uvodnog primjera, daje očekivano vrijeme čekanja 1. Također, nezavisna uniformna varijabla U dijeli Gamma$(1, 2)$ distribuciju na UX_0^* i $(1-U)X_0^*$ koje ispadaju nezavisne, eksponencijalno distribuirane s očekivanjem 1!

2.4 Martingali i Markovljevi lanci

Pretpostavimo sada da je proces $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ...) \in [0, \infty)$ martingal. Posebno, za svaki $i = 1, 2, ...$ neka je $\mathbb{E}X_i \in (0, \infty)$ i $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = ...$. Za bilo koje $i, n \geq 1$, distribucije od $\mathbf{X}^{(i)}$ i $\mathbf{X}^{(n)}$, restringirane na prvih n koordinata, izražene su po (2.2), uz proizvoljnu ograničenu izmjerivu $g_n : [0, \infty)^n \to \mathbb{R}$, sa

$$\mathbb{E}g_n(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}) = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}\mathbb{E}[X_i\, g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)] \tag{2.12}$$

i

$$\mathbb{E}g_n(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}) = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}\mathbb{E}[X_n\, g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)]. \tag{2.13}$$

Kako je $\mathbf{X}$ martingal, za sve $i \geq n \geq 1$, desne strane gornjih jednakosti su međusobno jednake (možemo uvjetovati sa X_n, a $\mathbb{E}[X_i - X_n | X_n] = 0$), odnosno

$$\text{za } i \geq n \geq 1,\ (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}) \stackrel{d}{=} (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}). \tag{2.14}$$

Gornja jednakost nam daje familiju konačno dimenzionalnih distribucija koje određuju proces koji zovemo *martingal pristran po veličini* s oznakom $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ...)$. Ova oznaka opravdana je činjenicom da je svaka koordinata X_i^* procesa $\mathbf{X}^*$ pristrano transformirana verzija koordinate X_i martingala $\mathbf{X}$ u smislu originalne definicije, odnosno jednakosti (1.6). Dokaz leži u početku ovog poglavlja gdje smo vidjeli da je $X_n^{(n)} \stackrel{d}{=} X_n^*$ i gornjoj jednakosti koja vrijedi za svaki n. U duhu često korištene karakterizacije, distribucija prvih n koordinati procesa $\mathbf{X}^*$ dana je sa

$$\mathbb{E}g_n(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}\mathbb{E}[X_n\, g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)] \tag{2.15}$$

za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $g_n : [0, \infty)^n \to \mathbb{R}$. Naravno, ako pogledamo samo n-tu koordinatu, distribucija od X_n^* u potpunosti se slaže sa definicijom pristranosti po veličini. Ono što martingalno svojstvo omogućava je poznavanje i distribucije cijelog procesa dobivenog uzorkovanjem po veličini. Općenito, za bilo koje nenegativne slučajne varijable $X_1, X_2, ...$ s pozitivnim i konačnim očekivanjem znamo po (1.6) distribuciju za svaku $X_1^*, X_2^*, ...$ posebno, ali distribucija cijelog procesa nam nije dana.

Za općeniti nenegativni proces $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ...)$ s nejednakim očekivanjima $\mathbb{E}Z_i \in (0, \infty)$ može se dogoditi da je nakon skaliranja očekivanjima po koordinatama, $X_i := Z_i/\mathbb{E}Z_i$, proces $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ...)$ upravo martingal. Tada se $\mathbf{X}$ ima pristranu transformaciju i vrijedi $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ...)$. Kao u (1.10), stavimo $Z_i^* := X_i^*\mathbb{E}Z_i$ za svaki i. Distribucija od takvog Z_i^* zadovoljava definiciju (1.6), a distribucija procesa $\mathbf{X}^*$ daje nam distribuciju za proces $\mathbf{Z}^* := (Z_1^*, Z_2^*, ...)$. Dakle, ako imamo nenegativne slučajne variable $Z_1, Z_2, ...$ s pozitivnim i konačnim očekivanjima i distribuciju za proces $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ...)$, ako je $\mathbf{Z}$ martingal ili ako je proces dobiven skaliranjem očekivanjima po koordinatama martingal, onda postoji proces $\mathbf{Z}^*$ čije koordinate su pristrane transformacije varijabli $Z_1, Z_2, ...$

Nema razloga da za martingal $\mathbf{X}$ proces $\mathbf{X}^*$ ponovo bude martingal. Isto vrijedi i za proces dobiven skaliranjem očekivanjima po koordinatama. Ipak, ako je proces ujedno i Markovljev lanac, tada je proces uzorkovan po veličini ponovo Markovljev lanac. Markovljevi lanci imaju ulogu u procesima grananja kojima se ovdje nećemo baviti, ali ćemo ipak dati mali rezultat koji povezuje Markovljeve lance i pristranost po veličini. Na kratko ćemo se zadržati na prostoru $\mathbb{Z}_+$ i homogenom vremenu.

Propozicija 2.4.1. *Neka je $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, ...)$ Markovljev lanac na $S = \mathbb{Z}_+$ sa matricom prijelaza M te neka je $X_0 = 1$. Pretpostavimo da je $r_i := \sum_j jM_{ij} < \infty$, za sve $i \in S$. Definiramo novu stohastičku matricu N, red po red, pristrano transformirajući retke od M, ako je moguće:*

$$\textit{ako je } r_i > 0,\ N_{ij} := jM_{ij}/r_i;\ \textit{ako je } r_i = 0,\ N_{ij} := M_{ij}. \tag{2.16}$$

Neka je $\boldsymbol{Y} = (Y_0, Y_1, ...)$ Markovljev lanac s matricom prijelaza N, uz $Y_0 = 1$. Pretpostavimo da je za svaki n, $\mathbb{E}X_n \in (0, \infty)$. Neka je $W_n := X_n/\mathbb{E}X_n$. Ako je $W = (W_0, W_1, ...)$ martingal, tada proces uzorkovan po veličini $\boldsymbol{X}^*$ ima distribuciju kao i Markovljev lanac $\boldsymbol{Y}$.

Dokaz. Fiksirajmo vrijeme n i niz $z_0z_1...z_n \in S^{n+1}$ uz $z_0 = 1$. Treba pokazati da je $\mathbb{P}(Y_0Y_1...Y_n = z_0z_1...z_n) := N_{1z_1}N_{z_1z_2}...N_{z_{n-1}z_n}$ jednako $\mathbb{P}(X_0^*X_1^*...X_n^* = z_0z_1...z_n) := (z_n/\mathbb{E}X_n)\mathbb{P}(X_0X_1...X_n = z_0z_1...z_n) = (z_n/\mathbb{E}X_n)M_{1z_1}M_{z_1z_2}...M_{z_{n-1}z_n}$. Iz zahtjeva martingalnog svojstva slijedi da je stanje 0 apsorbirajuće za oba procesa, tj. $M_{00} = N_{00} = 1$ i da se ni jedno drugo stanje ne vodi samo k 0, odnosno za $i > 0$, $M_{i0} < 1$ i $N_{i0} < 1$. Zato je za $i > 0$ $r_i > 0$ i $N_{i0} = 0$. Ako je neki $z_k = 0$ tada je $z_n = 0$ i koristeći k kao prvi indeks za koji je $z_k = 0$, imamo $N_{z_{k-1}z_k} = 0$ pa je $\mathbb{P}(Y_0Y_1...Y_n = z_0z_1...z_n) = 0 = \mathbb{P}(X_0^*X_1^*...X_n^* = z_0z_1...z_n)$. Obratno, za svaki i, $z_i \neq 0$ i u vremenu k, N_{ij} je dano sa jM_{ij}/r_i, uz $i = z_{k-1}$, $j = z_k$. Iz $X_n = W_n\mathbb{E}X_n$ i ekvivalentnosti događaja $(X_{k-1} = i)$ i $(W_{k-1} = i/\mathbb{E}X_{k-1})$ slijedi $r_i = \mathbb{E}(X_k|X_{k-1} = i) =$

$\mathbb{E}(W_k \mathbb{E}X_k | W_{k-1} = i/\mathbb{E}X_{k-1}) = i\ \mathbb{E}X_k/\mathbb{E}X_{k-1}$. Zadnja jednakost je posljedica martingalnog svojstva procesa W. Uvrštavanjem ovakvog r_i u $N_{1z_1}N_{z_1z_2}...N_{z_{n-1}z_n}$ dobivamo točno $(z_n/\mathbb{E}X_n)M_{1z_1}M_{z_1z_2}...M_{z_{n-1}z_n}$. □

2.5 Transformiranje produkta

Na kraju ovog poglavlja uvodimo pravilo pristranog uzorkovanja slučajne varijable oblika $W = X_1X_2\ ...\ X_n$ gdje su $X_1, X_2,\ ...\ X_n$ nezavisne nenegativne slučajne varijable, svaka sa konačnim i strogo pozitivnim očekivanjem. Neka je F_i funkcija distribucije varijable X_i te neka je F_i^* funkcija distribucije varijable X_i^* takva da je $dF_i^*(x) = x\ dF_i(x)/\mathbb{E}X_i$ za $i = 1, 2, ...n$. Pretpostavljamo još da su $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$ nezavisne. Iz jednakosti (1.6), za svaku ograničenu funkciju g, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}g(W^*) &= \mathbb{E}[Wg(W)]/(\mathbb{E}X_1\ ...\ \mathbb{E}X_n) \\
&= \int ... \int x_1\ ...\ x_n\ g(x_1\ ...\ x_n)\ dF_1(x_1)\ ...\ dF_n(x_n)/(\mathbb{E}X_1\ ...\ \mathbb{E}X_n) \\
&= \int ... \int g(x_1\ ...\ x_n)\ (x_1\ dF_1(x_1)/\mathbb{E}X_1)\ ...\ (x_n\ dF_n(x_n)/\mathbb{E}X_n) \\
&= \int ... \int g(x_1\ ...\ x_n)\ dF_1^*(x_1)\ ...\ dF_n^*(x_n) \\
&= \mathbb{E}g(X_1^*\ ...\ X_n^*),
\end{aligned}$$

odnosno

$$W^* \stackrel{d}{=} X_1^*\ ...\ X_n^*. \tag{2.17}$$

Vidimo da je pristrana transformacija produkta slučajnih varijabli zapravo produkt pristranih transformacija svakog faktora zasebno, za razliku od sume gdje je samo jedan pribrojnik transformiran.

Poglavlje 3

Steutelov teorem

Ovo poglavlje bavi se važnim i možda neočekivanim rezultatima koji slijede iz pristranosti. Steutelov teorem objedinjuje pristranost i problem (1.5), beskonačnu djeljivost i Lévyjevu reprezentaciju. Za početak, promotrimo vezu uniformne integrabilnosti i napetosti.

3.1 Napetost, uniformna integrabilnost i pristranost

Definicija 3.1.1. *Familija slučajnih varijabli $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ je napeta ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $L < \infty$ takav da vrijedi*

$$\mathbb{P}(Y_\alpha \notin [-L, L]) < \epsilon \text{ za sve } \alpha \in I.$$

Definicija 3.1.2. *Familija slučajnih varijabli $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ je uniformno integrabilna ako za svaki $\delta > 0$ postoji $L < \infty$ takav da*

$$\mathbb{E}[|X_\alpha|; X_\alpha \notin [-L, L]] < \delta \text{ za svaki } \alpha \in I.$$

Pristranost po veličini podržava rad samo sa nenegativnim slučajnim varijablama pa ćemo i gornje definicije prilagoditi istima. Iz definicije napetosti slijedi da je familija nenegativnih slučajnih varijabli $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ napeta ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $L < \infty$ takav da vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_\alpha > L) < \epsilon \text{ za sve } \alpha \in I. \tag{3.1}$$

Slično, familija nenegativnih slučajnih varijabli $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ je uniformno integrabilna ako za svaki $\delta > 0$ postoji $L < \infty$ takav da

$$\mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L] < \delta \text{ za svaki } \alpha \in I. \tag{3.2}$$

Generalno, familija $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ je napeta (odnosno uniformno integrabilna) ako i samo ako je $\{|G_\alpha| : \alpha \in I\}$ napeta (odnosno uniformno integrabilna).

Intuitivno, familija je napeta ako je vjerojatnosna masa svake slučajne varijable proizvoljno mala na velikim vrijednostima. Slično, familija je uniformno integrabilna ako je doprinos velikih vrijednosti očekivanju svake slučajne varijable proizvoljno malen. Kako pristranost doprinos očekivanju svodi na vjerojatnosnu masu (a ne na vrijednosti slučajne varijable), možemo očekivati povezanosti između napetosti, uniformne integrabilnosti i pristranosti. Naravno, treba biti oprezan jer utjecaj na očekivanje zbog velikih vrijednosti može biti malen, ali relativno jako velik. Na primjer, neka je

$$\mathbb{P}(X_n = n) = 1/n^2, \ \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^2, \ n = 1, 2, \dots .$$

Za $\delta > 0$ uzmemo $L = 1/\delta$. Tada za svaki $n > L$ vrijedi $\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}(X_n > L)] = n \cdot 1/n^2 = 1/n < 1/L = \delta$ pa je familija $\{X_n\}$ uniformno integrabilna, ali zbog $1 = \mathbb{P}(X_n^* = n)$, familija $\{X_n^*\}$ nije napeta. Doprinos očekivanju na velikim vrijednostima je malen, $1/n$, ali relativno, to je jedini izvor očekivanja. Sljedeća dva teorema daju obranu od ovakvih slučajeva.

Teorem 3.1.3. *Pretpostavimo da za $\alpha \in I$, gdje je I proizvoljan skup indeksa, slučajne varijable X_α zadovoljavaju $X_\alpha \geq 0$ i $0 < \mathbb{E}X_\alpha < \infty$, i neka su $Y_\alpha \overset{d}{=} X_\alpha^*$. Tada vrijedi*

$$\{X_\alpha : \alpha \in I\} \textit{ je uniformno integrabilna ako je } \{Y_\alpha : \alpha \in I\} \textit{ napeta.}$$

Pretpostavimo još da su vrijednosti $\mathbb{E}X_\alpha \geq c$ za neki $c > 0$ i za svaki α. Tada vrijedi

$$\{X_\alpha : \alpha \in I\} \textit{ je uniformno integrabilna akko je } \{Y_\alpha : \alpha \in I\} \textit{ napeta.}$$

Dokaz. Zbog $Y_\alpha \overset{d}{=} X_\alpha^*$ po (1.6) za svaki L imamo

$$\mathbb{P}(Y_\alpha > L) = \mathbb{E}\mathbb{1}(Y_\alpha > L) = \mathbb{E}[X_\alpha \mathbb{1}(X_\alpha > L)]/\mathbb{E}X_\alpha$$

pa vrijedi

$$\mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L] = \mathbb{E}X_\alpha \mathbb{P}(Y_\alpha > L).$$

Neka je familija $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ napeta. Tada po (3.1) postoji L_0 takav da za $\epsilon = 1/2$ vrijedi $\mathbb{P}(Y_\alpha > L_0) < 1/2$ za sve $\alpha \in I$. Iz toga, za sve $\alpha \in I$,

$$\mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L_0] = \mathbb{E}X_\alpha \mathbb{P}(Y_\alpha > L_0) < \mathbb{E}X_\alpha/2,$$

i po tome,

$$L_0 \geq \mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L_0] = \mathbb{E}X_\alpha - \mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L_0] > \mathbb{E}X_\alpha - \mathbb{E}X_\alpha/2 = \mathbb{E}X_\alpha/2,$$

odnosno $\mathbb{E}X_\alpha < 2L_0$. Sada za dano $\delta > 0$ uzmimo L koji zadovoljava (3.1) za $\epsilon = \delta/(2L_0)$. Slijedi, za svaki $\alpha \in I$,

$$\mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L] = \mathbb{E}X_\alpha \mathbb{P}(Y_\alpha > L) < 2L_0 \mathbb{P}(Y_\alpha > L) < 2L_0\epsilon = \delta,$$

što je točno definicija uniformne integrabilnosti, (3.1).

Pretpostavimo konačno da je $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ uniformno integrabilna familija i $\epsilon > 0$ proizvoljan. Neka je L takav da je (3.2) zadovoljeno uz $\delta = \epsilon c$. Sada, koristeći $\mathbb{E}X_\alpha \geq c$, za svaki $\alpha \in I$, imamo

$$\mathbb{P}(Y_\alpha > L) = \mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L]/\mathbb{E}X_\alpha \leq \mathbb{E}[X_\alpha; X_\alpha > L]/c < \delta/c = \epsilon,$$

što je upravo (3.1). □

U sljedećem teoremu za X_α se dopušta $\mathbb{E}X_\alpha = 0$ iako X_α sudjeluje u zahtjevu pristranosti. Za $c > 0$ uzimamo $(c + X_\alpha)^*$ pa je takavo dopuštenje opravdano.

Teorem 3.1.4. *Pretpostavimo da za $\alpha \in I$, gdje je I proizvoljan skup indeksa, slučajne varijable X_α zadovoljavaju $X_\alpha \geq 0$ i $\mathbb{E}X_\alpha < \infty$. Uzmimo bilo koji $c \in (0, \infty)$ i za svaki α stavimo $Y_\alpha = (c + X_\alpha)^*$. Tada vrijedi*

$$\{X_\alpha : \alpha \in I\} \text{ je uniformno integrabilna akko je } \{Y_\alpha : \alpha \in I\} \text{ napeta.}$$

Dokaz. Po prethodnom teoremu familija $\{c + X_\alpha\}$ je uniformno integrabilna akko je familija $\{(c + X_\alpha)^*\}$ napeta. Lako je provjeriti da je familija $\{X_\alpha\}$ napeta (odnosno uniformno integrabilna) ako i samo ako je familija $\{c + X_\alpha\}$ napeta (odnosno uniformno integrabilna). Tvrdnja stoga slijedi direktnom primjenom prethodnog teorema. □

3.2 Beskonačna djeljivost i Lévyjeva reprezentacija

Definicija 3.2.1. *Kažemo da je slučajna varijabla X beskonačno djeljiva ako se za svaki n distribucija od X može prikazati kao distribucija sume n nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Drugim riječima, za svaki n postoji distribucija takva da za n.j.d. $X_1^{(n)}, ..., X_n^{(n)}$ s tom distribucijom vrijedi*

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(n)} + ... + X_n^{(n)} \tag{3.3}$$

Po (2.9) znamo kako pristrano uzorkovati sumu nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ako je slučajna varijabla X beskonačno djeljiva, nenegativna i s konačnim očekivanjem koje nije nula, za neki n jednostavno slijedi

$$X^* = (X - X_1^{(n)}) + (X_1^{(n)})^* \tag{3.4}$$

gdje su $X - X_1^{(n)}$ i $(X_1^{(n)})^*$ nezavisne. To nas odmah dovodi do povezanosti beskonačno djeljivih distribucija i problema (1.5). Prirodno je naslutiti da klasa beskonačno djeljivih distribucija ima pristranu transformaciju koja se dobije dodavanjem nezavisnog prirasta.

Sljedeći teorem će nam trebati pri konstrukciji slučajne varijable Y u (1.5). Njegov dokaz može se pronaći u [4].

Teorem 3.2.2. *(Helly) Neka je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz funkcija distribucije na $\mathbb{R}$, neka je $F_n(-\infty) = 0$ za sve n i $F_n(\infty) \leq M < \infty$ za sve n. Tada postoji funkcija distribucije F i podniz $(F_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ takav da vrijedi $F_{n_k}(x) \to F(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ u kojima je F neprekidna.*

Napomenimo da za X tražimo da se može uzorkovati po veličini, tj. $X \geq 0$ i $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$. Iz (3.3) slijedi $(\mathbb{P}(X_1^{(n)} < 0))^n \leq \mathbb{P}(X < 0) = 0$, a time $X_1^{(n)} \geq 0$. Također, $\mathbb{E}|X_1^{(n)}| = \mathbb{E}X_1^{(n)} = \mathbb{E}X/n \to 0$ za $n \to \infty$ rezultira konvergencijom $X_1^{(n)} \to 0$ u L_1, a time i po vjerojatnosti. Zbog toga, $X - X_1^{(n)}$ konvergira po distribuciji prema X.

Nadalje, familija slučajnih varijabli $(X_1^{(n)})^*$ je napeta jer za svaki $\epsilon > 0$ postoji K takav da $\mathbb{P}(X^* > K) < \epsilon$, a po (3.4), $\mathbb{P}((X_1^{(n)})^* > K) \leq \mathbb{P}(X^* > K)$. Sada, po Hellyjevom teoremu postoji podniz $(X_1^{(n_k)})^*$ po kojem $(X_1^{(n)})^*$ konvergira po distribuciji (iako $F, F_1, F_2, ...$ u Hellyjevom teoremu nisu nužno vjerojatnosne funkcije distribucije, ovdje ga primjenjujemo na funkcije distribucije slučajnih varijabli $(X_1^{(n)})^*$ što se poklapa sa definicijom konvergencije po distribuciji). Stavimo $(X_1^{(n_k)})^* \xrightarrow{d} Y$. Po ovom podnizu, za $n \to \infty$, par $(X - X_1^{(n)}, (X_1^{(n)})^*)$ konvergira prema paru (X, Y) i X, Y su nezavisne. Iz $X^* \stackrel{d}{=} (X - X_1^{(n_k)}) + (X_1^{(n_k)})^* \to X + Y$ za $k \to \infty$ možemo zaključiti je da $X^* \stackrel{d}{=} X + Y$ uz $Y \geq 0$ i X, Y nezavisne. Dakle, ako je X beskonačno djeljiva i ima pristranu transformaciju, onda postoji distribucija za Y takva da vrijedi (1.5).

Ovakva konstrukcija distribucije od Y koja zadovoljava (1.5) kada je X beskonačno djeljiva, može upućivati da ta distribucija mora biti jedinstvena. Ova tvrdnja slijedi iz svojstva svake beskonačno djeljive distribucije: za njenu karakterističnu funkciju vrijedi $\phi(u) \neq 0$ za svaki u. Ovdje to nećemo dokazati (dokaz se može pronaći u [4] 14.4), ali ćemo pokazati isti rezultat za slučaj kada za beskonačno djeljivu X postoji Y takav da je (1.5) zadovoljeno.

U (1.5) i (1.7) imamo dva izraza za ϕ_{X^*} pa izjednačavanjem slijedi

$$\frac{1}{i\mathbb{E}X}\phi'(u) = \phi(u)\phi_Y(u) \tag{3.5}$$

gdje su ϕ i ϕ_Y redom karakteristične funkcije za X i Y. Pretpostavimo sada da je $\phi(u) \neq 0$ za sve $u \in (-t, t)$ za neki t (takav t postoji jer je ϕ neprekidna i $\phi(0) = 1$). Iz (3.5) za $u \in (-t, t)$ slijedi $(\log\phi(u))' = \phi'(u)/\phi(u) = i\mathbb{E}X\ \phi_Y(u)$, a time i $|(\log(\phi(u))'| \leq \mathbb{E}X$. Kako je ϕ neprekidna i $\log(\phi(0)) = 0$, vrijedi, za svaki $u \in [-t, t]$, $|\log\phi(u)| \leq t\mathbb{E}X < \infty$, odnosno $|\log\phi(u)|$ je ograničeno za fiksni t. Ako pretpostavimo da je $\phi(u) = 0$ za neki u i stavimo $t = \inf\{|u| : \phi(u) = 0\} < \infty$, dobivamo kontradikciju sa prethodno pokazanom ograničenošću. Sada kada znamo da je $\phi(u) \neq 0$ za svaki u, iz (3.5) dijeljenjem sa $\phi(u)$ dobivamo jedinstveno određenu karakterističnu funkciju za Y, a time i njenu distribuciju.

Izračunajmo sada karakterističnu funkciju beskonačno djeljive X. Kako je već argumentirano, iz (3.5) imamo

$$(\log\phi(u))' = \frac{\phi'(u)}{\phi(u)} = i\mathbb{E}X\ \phi_Y(u), \tag{3.6}$$

a kako je $\phi(0) = 1$ i $\log(\phi(0)) = 0$, integriranjem dobivamo

$$\log\phi(u) = i\mathbb{E}X \int_{t=0}^{u} \phi_Y(t)\ dt.$$

Neka je α distribucija od Y, koja zadovoljava (1.5) (a koja postoji kao što smo pokazali). Tada je

$$\int_{t=0}^{u} \phi_Y(t)\ dt = \int_{t=0}^{u}\int_{y} e^{ity}\alpha(dy)\ dt = \int_{y}\int_{t=0}^{u} e^{ity}\ dt\ \alpha(dy)\ .$$

Zamjenu integracije odobrava Fubinijev teorem. Dalje imamo

$$\int_{t=0}^{u} e^{ity}\ dt = \begin{cases} (e^{iuy}-1)/(iy) & \text{za } y > 0 \\ u & \text{za } y = 0. \end{cases}$$

Redom uvrštavamo dobivene jednakosti i zaključujemo da se karakteristična funkcija za X može pisati u obliku

$$\phi(u) = \exp\left(\mathbb{E}X\left(iu\alpha(\{0\}) + \int_{(0,\infty)} \frac{e^{iuy}-1}{y}\alpha(dy)\right)\right). \tag{3.7}$$

Ovu karakterizaciju ispravno je zvati *Lévyjevom karakterizacijom*, a mjeru α *Lévyjevom mjerom*.

Primijetimo da ovdje pretpostavka beskonačne dijeljivosti nije bila nužna - iz nje smo samo zaključili postojanje slučajne varijable Y. Ova karakteristična funkcija karakterizira svaku slučajnu varijablu X koja ima pristranu transformaciju ($X \geq 0$ i $\mathbb{E}X \in (0,\infty)$) i za koju postoji Y takav da vrijedi (1.5) što direktno implicira (3.5). Ako za fiksni $a \in (0,\infty)$, ϕ zadamo u obliku

$$\phi(u) = \exp\left(a\left(iu\alpha(\{0\}) + \int_{(0,\infty)} \frac{e^{iuy}-1}{y}\alpha(dy)\right)\right), \tag{3.8}$$

za neku distribuciju α slučajne varijable Y, tada postoji slučajna varijabla X za koju je (3.8) karakteristična funkcija. U nastavku konstruiramo takvu X.

U primjeru 2.2.1. vidjeli smo da za složenu Poissonovu varijablu postoji Y takva da je zadovoljeno (1.5). Sada ćemo složenu Poissonovu varijablu transformirati dodavanjem nenegativne konstante c. Neka je X dan sa

$$X = c + \sum_{j=1}^{n} X_j,\ X_j = y_j Z_j,\ Z_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j),\ Z_1,...,Z_n\ \textit{nezavisne}, \tag{3.9}$$

uz $c \geq 0$ i $y_j > 0$. Svaka varijabla ovog tipa je beskonačno djeljiva: za $X_i^{(m)}$, za $i = 1, ..., m$, uzmemo sumu istog oblika, ali zamijenimo c sa c/m i λ_j sa λ_j/m. Pokazati će se da uzimanjem limesa sume u (3.9) uz zahtjev da $c + \sum_{j=1}^n y_j\lambda_j$ ostane ograničeno kada $n \to \infty$, dobivamo sve beskonačno djeljive distribucije s konačnim očekivanjem. Ako je pak $c = 0$ i $\sum_{j=1}^n \lambda_j$ ostaje ograničeno, limes je nenegativna složena Poissonova distribucija s konačnim očekivanjem (u primjeru 2.2.1. imali smo konačan slučaj takve distribucije).

Izračunajmo karakterističnu funkciju za varijablu X s konačnom složenom Poissonovom distribucijom. Ako je $Z_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$, njena karakteristična funkcija je

$$\phi_{Z_j}(u) := \mathbb{E}e^{iuZ_j} = \sum_{k\geq 0} e^{iuk}\mathbb{P}(Z_j = k)) = \sum e^{iuk}e^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^k}{k!} = e^{-\lambda_j}\sum \frac{(\lambda_j e^{iu})^k}{k!} = \exp(\lambda_j(e^{iu} - 1)).$$

Za y_jZ_j je tada

$$\phi_{y_jZ_j}(u) = \mathbb{E}e^{iu(y_jZ_j)} = \mathbb{E}e^{i(y_ju)Z_j} = \phi_{Z_j}(y_ju) = \exp(\lambda_j(e^{iuy_j} - 1)).$$

Dakle, sumand $X_j = y_jZ_y$ složene Poissonove ima karakterističnu funkciju $\exp(\lambda_j(e^{iuy_j} - 1))$ pa je karakteristična funkcija za X

$$\phi_X(u) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j(e^{iuy_j} - 1)) = \exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j(e^{iuy_j} - 1)\right).$$

Kao pripremu za puštanje limesa možemo gornju jednakost pisati u obliku

$$\phi_X(u) = \exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j(e^{iuy_j} - 1)\right) = \exp\left(\int_{(0,\infty)} (e^{iuy} - 1)\mu(dy)\right),$$

gdje je μ mjera na $(0, \infty)$ koja točki y_j pridružuje vrijednost λ_j. Vrijedi $\int 1\mu(dy) = \sum_1^n \lambda_j =: \lambda$ i prvi moment od μ je $\int y\,\mu(dy) = \sum_1^n y_j\lambda_j$ što je upravo $\mathbb{E}X$.

Dodajmo sada konstantu $c \geq 0$. Slučajna varijabla X oblika (3.9) ima karakterističnu funkciju ϕ_X danu sa

$$\phi_X(u) = \exp\left(iuc + \int_{(0,\infty)} (e^{iuy} - 1)\mu(dy)\right) \tag{3.10}$$

Vođeni primjerom 2.2.1. u kojem su y_j, $j = 1, ..., n$ bile vrijednosti koje poprima Y, izlučujemo y unutar gornjeg integrala i, za proizvoljni $a \in (0, \infty)$, definiramo mjeru ν na $[0, \infty)$ sa $\nu(\{0\}) = c/a$ i, za $y > 0$, $\nu(dy) = y/a\,\mu(dy)$:

$$\phi_X(u) = \exp\left(a\left(iu\nu(\{0\} + \int_{(0,\infty)} \frac{(e^{iuy} - 1)}{y}\nu(dy)\right)\right). \tag{3.11}$$

Za $a := \mathbb{E}X$, mjera ν je vjerojatnosna mjera na $[0,\infty)$ jer je

$$\mathbb{E}X = -i(d\log\phi_X(u)/du)|_{u=0} = a\left(\nu(\{0\}) + \int_{(0,\infty)} \nu(dy)\right) = a\ \nu([0,\infty))$$

i, ako ponovo pogledamo primjer 2.2.1., ona je točno funkcija distribucije od Y. Prva jednakost je opravdana u [4] Teorem 13.7.

Ponavljamo, za bilo koji m možemo podijeliti parametre Poissonovih razdioba λ_j s m i dobiti distribuciju za $X_1^{(m)}$ u (3.3). Zaključujemo da je X zadana sa (3.9) beskonačno djeljiva i njena karakteristična funkcija ima oblik (3.8) uz $a = \mathbb{E}X$. Obratno, za fiksni $a \in (0,\infty)$, (3.8) je karakteristična funkcija varijable koja se može dobiti uzimanjem limesa po distribuciji u (3.9). Dokaz ove tvrdnje svodi se na konstrukciju niza Poissonovih slučajnih varijabli tako da mjera ν iz (3.11) konvergira k mjeri α u (3.8). Parametre c, y_j i λ_j uvijek biramo tako je $a = c + \sum_j y_j\lambda_j$ gdje će skup indeksa j biti varijabilan, ovisno o slučajevima oblika mjere α koje ćemo imati. Ovime tražimo da $c + \sum_1^n y_j\lambda_j$ ostaje ograničeno kada $n \to \infty$. U protivnom ne možemo dobiti $\mathbb{E}X = a \in (0,\infty)$.

Krećemo od najjednostavnijeg oblika mjere α: ako α ima samo masu λ/a u točki 1, ϕ je oblika $\phi = \exp(a(\lambda/a(e^{iu} - 1))$, odnosno $X = Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Ovdje je $\lambda = a$ jer je mjera α vjerojatnosna. Sljedeći slučaj je kada α ima masu c/a u nuli i masu $y\lambda/a$ u točki y (za dobro odabrane c i λ). Sada vrijedi $\phi = \exp(a(iuc/a + \lambda/a(e^{iuy} - 1)))$, a X je linearna transformacija Poissonove varijable Z, odnosno $X = c + yZ$. Pratimo konstrukciju ν iz (3.11) i zaključujemo da je $\nu(\{0\}) = c/a$ i $\nu(\{y\}) = y\lambda/a$. Naravno, $\mathbb{E}X = a$, a ν je vjerojatnosna.

U općenitom slučaju mjere α iz (3.8) za $n \geq 1$ i $k = 0, 1, 2, ..., 2^{2n}$ konstruiramo $X_{n,k}$, linearne transformacije nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli (kao u (3.9)) čiji su parametri, $y_{n,k}$ i $\lambda_{n,k}$ takvi da vrijedi

$$\nu_{n,k}\left(\frac{k}{2^n}\right) := \alpha\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \frac{y_{n,k}\lambda_{n,k}}{a}.$$

Odnosno, uzimamo $y_{n,k} = k/2^n$ i $\lambda_{n,k} = a\ \alpha((k/2^n, (k+1)/2^n])/y_{n,k}$. Podsjećamo, mjera α je vjerojatnosna i zahtjevamo $a \in (0,\infty)$. Definiramo

$$X_n = \sum_k X_{n,k}$$

i niz mjera ν_n sa

$$\nu_n = \sum_k \nu_{n,k}.$$

Za svaki n mjera ν_n je određena varijablama X_n i očito konvergira k α uz $n \to \infty$. Također, zbog $\nu_n \leq \alpha$ možemo zaključiti da za $X = \sum_n X_n$, $\phi_X \to \phi$ gdje je ϕ zadana sa (3.8). Dakle, za karakterističnu funkciju zadanu sa (3.8) konstruirali smo slučajnu varijablu s tom karakterističnom funkcijom u obliku (3.9). Ovaj rezultat vrijedi istaknuti.

Propozicija 3.2.3. *Neka je $X \geq 0$ i $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$. X je beskonačno djeljiva slučajna varijabla ako se može prikazati kao limes po distribuciji u* (3.9) *pri čemu $c + \sum_1^n y_j \lambda_j$ ostaje ograničeno kada $n \to \infty$.*

Korolar 3.2.4. *Neka je $\lambda \geq 0$ i $X \sim Poisson(\lambda)$. Tada je X beskonačno djeljiva.*

Pokažimo sada da slučajna varijabla s distribucijom karakteriziranom sa (3.7) zadovoljava (1.5). Izračunajmo $\phi'(u)$,

$$\phi'(u) = \phi(u)\mathbb{E}X\left(i\alpha(\{0\}) + \int_{(0,\infty)} ie^{iuy}\,\alpha(dy)\right) = i\mathbb{E}X\phi(u)\int_{[0,\infty)} e^{iuy}\alpha(dy).$$

Vjerojatnosnu mjeru ν uzimamo kao distribuciju za Y i pišemo ϕ_Y za karakterističnu funkciju od Y, $\phi'(u) = i\mathbb{E}X\phi(u)\phi_Y(u)$. Zajedno sa (1.7), imamo

$$\phi^* = \phi\ \phi_Y. \tag{3.12}$$

Prema tome, $X^* \stackrel{d}{=} X + Y$, X i Y su nezavisne i ν je distribucija od Y.

3.3 Konačni rezultat

Teorem 3.3.1. *(Steutel, 1973) Za slučajnu varijablu $X \geq 0$ sa očekivanjem $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$, sljedeće tri tvrdnje su ekvivalentne.*

i) Postoji Y takva da $X^* = X + Y$, $Y \geq 0$ za X i Y nezavisne,

ii) Distribucija od X je beskonačno djeljiva,

iii) Karakteristična funkcija od X ima Lévyjevu reprezentaciju (3.7).

Ako vrijedi bilo koja od ovih tvrdnji, Lévyjeva mjera α u (3.7) *jednaka je funkciji distribucije od Y.*

Dokaz. Iz *ii*) smo dobili *i*) odmah nakon definicije beskonačne djeljivosti. Iz *i*) smo preko (3.5) dobili *iii*). Konačno, iz *iii*) vrlo lako slijedi *ii*) - za bilo koji n, karakteristična funkcija sumanda $X_1^{(n)}$ ima Lévyjevu reprezentaciju kao i X, ali s očekivanjem $\mathbb{E}X_1^{(n)} = \mathbb{E}X/n$ umjesto $\mathbb{E}X$.

Iz (3.5) je također slijedila jedinstvenost distribucije od Y, a u diskusiji prije iskaza ovog teorema je pokazano da, ako vrijedi *iii*), α kao distribucija od Y zadovoljava *i*). □

Vrijedi napomenuti da je α proizvoljna vjerojatnosna mjera na $[0, \infty)$, kao što je i izbor $\mathbb{E}X \in (0, \infty)$ proizvoljan. Prema tome, postoji bijekcija između Kartezijevog produkta vjerojatnosnih mjera na $[0, \infty)$ sa skupom $(0, \infty)$ i skupa nenegativnih, beskonačno djeljivih distribucija s konačnim i pozitivnim očekivanjem.

Poglavlje 4

Primjene i primjeri

4.1 Skorohodov teorem

Podsjetimo, slučajan proces $(W_t)_{t\geq 0}$ je Brownovo gibanje ako on zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

(i) ako je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i ako je $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$, tada su slučajne varijable $W_{t_1} - W_{t_0},\ W_{t_2} - W_{t_1},\ ...\ ,\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezavisne

(ii) $W_t - W_s \sim N(0, (t-s)\sigma^2)$, gdje je $0 \leq s < t < \infty$ i $\sigma^2 > 0$ ne ovisi o s i t.

(iii) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$.

Skorohodov teorem ulaganja navodi da za danu nekonstantnu slučajnu varijablu X s očekivanjem $\mathbb{E}X = 0$, postoji vrijeme zaustavljanja T za Brownovo gibanje $(W_t)_{t\geq 0}$ takvo da je $X \overset{d}{=} W_T$. Dokaz se bazira na konstrukciji zajedničke distribucije zavisnih slučajnih varijabli (U, V) uz $U, V \geq 0$, takvih da je par (U, V) nezavisan od Brownovog gibanja W_t. Vrijeme zaustavljanja T dano sa $T := T_{U,V} := \inf\{t : W_t \notin [-U, V]\}$ daje $X \overset{d}{=} W_T$. Pokazati ćemo ulogu pristranosti u tom dokazu.

Neka su Y i Z slučajne varijable s vrijednostima u $[0, \infty)$ čije distribucije su dane s

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(-X \in B | X < 0),\ \mathbb{P}(Z \in B) = \mathbb{P}(X \in B | X > 0),$$

za izmjerivi skup $B \subset \mathbb{R}$. Kako X nije konstanta, a očekivanje joj je $\mathbb{E}X = 0$, vrijedi $p_- := \mathbb{P}(X < 0) > 0$ i $p_+ := \mathbb{P}(X > 0) > 0$ pa gornje uvjetne vjerojatnosti imaju smisla. Vrijedi

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^-/p_-,\ \mathbb{E}Z = \mathbb{E}X^+/p_+,\ \mathbb{E}X^- = \mathbb{E}X^+. \tag{4.1}$$

Kako Y i Z imaju pozitivna očekivanja, njihove su pristrane transformacije, Y^* i Z^*, dobro definirane. Neka su Y, Y^*, Z, Z^* nezavisne i $p_0 := \mathbb{P}(X = 0)$. Za bilo koji izmjerivi $B \subset \mathbb{R}^2$ zajedničku distribuciju varijabli U i V zadajemo sa

$$\mathbb{P}((U, V) \in B) = p_+\mathbb{P}((Y^*, Z) \in B) + p_0\delta_{(0,0)} + p_-\mathbb{P}((Y, Z^*) \in B) \tag{4.2}$$

gdje je δ_b masa u točki b i uzimamo da je par (U, V) nezavisnan od Brownovog gibanja $(W_t)_{t\geq 0}$.

Radi jednostavnosti, pretpostavimo prvo da je $p_0 = 0$ i $T = T_{U,V}$. Za ograničenu izmjerivu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uvjetno na U, V, iz formule $\mathbb{P}(W_T = V|U, V) = U/(U + V)$ imamo

$$\mathbb{E}[h(W_T)|U = u, V = v] = h(-u)\frac{v}{u+v} + h(v)\frac{u}{u+v} =: g(u, v). \tag{4.3}$$

Kako je $p_0 = 0$, vrijedi $p_- + p_+ = 1$ pa koristeći (4.1) imamo

$$p_- = \frac{\mathbb{E}Z}{\mathbb{E}Y + \mathbb{E}Z}, \; p_+ = \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}Y + \mathbb{E}Z}.$$

Proces s nezavisnim koordinatama znamo pristrano transformirati pa zajedno sa nezavisnosti Y i Z opravdavamo prijelaz iz drugog u treći redak u donjem računu: za svaku ograničenu izmjerivu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}g(U, V) &= p_+ \,\mathbb{E}g(Y^*, Z) + p_- \,\mathbb{E}g(Y, Z^*) \\
&= \frac{\mathbb{E}Y \,\mathbb{E}g(Y^*, Z) + \mathbb{E}Z \,\mathbb{E}g(Y, Z^*)}{\mathbb{E}[Y + Z]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[Y\, g(Y, Z)] + \mathbb{E}[Z\, g(Y, Z)]}{\mathbb{E}[Y + Z]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[(Y + Z)\, g(Y, Z)]}{\mathbb{E}[Y + Z]}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Koristeći ovaj rezultat za funkciju g definiranu u (4.3), i ponovo nezavisnost Y i Z za prijelaz iz trećeg u četvrti redak imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}h(W_T) &= \mathbb{E}g(U, V) \\
&= \frac{\mathbb{E}[(Y + Z)\, g(Y, Z)]}{\mathbb{E}[Y + Z]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[h(-Y)Z + h(Z)Y]}{\mathbb{E}[Y + Z]} \\
&= \frac{\mathbb{E}Z}{\mathbb{E}[Y + Z]}\mathbb{E}h(-Y) + \frac{\mathbb{E}Z}{\mathbb{E}[Y + Z]}\mathbb{E}h(Z) \\
&= p_- \,\mathbb{E}h(-Y) + p_+ \,\mathbb{E}h(Z) \\
&= p_- \,\mathbb{E}[h(X)|X < 0] + p_+ \,\mathbb{E}[h(X)|X > 0] \\
&= \mathbb{E}h(X).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Uzimanjem izmjerivog $B \subset \mathbb{R}$ i jedinične funkcije na tom skupu kao h, imamo $\mathbb{P}(W_T \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

U slučaju kada je $\mathbb{P}(X = 0) \in (0, 1)$, distribucija od X je dana masom u nuli i distribucijom od X uvjetno na $X \neq 0$. Zajednička distribucija para (U, V) dana je u (4.2). Sličnim računom slijedi $X \stackrel{d}{=} W_T$.

4.2 Pristranost po veličini u statistici

U sljedećem primjeru pojam *pristranost* odnosi se na općenitu pristranost, odvajamo onu *po veličini*. Pokazat ćemo da pristranost po veličini možemo iskoristiti kako bismo konstruirali nepristrane procjenitelje. Pretpostavimo da imamo populaciju od n jedinki kojima je pridružen par realnih brojeva (x_i, y_i) za koje je $x_i \geq 0$ i nisu svi x_i jednaki nuli. Na primjer, x_i može biti iznos računa od prošlog mjeseca za komunalne usluge i-tog pojedinca, a y_i, vrijednost manja i teža za dobiti, iznos koji je trebao biti naplaćen. Recimo da želimo procijeniti veličinu prekomjerne naplate, odnosno želimo znati omjer $\sum_i y_i / \sum_i x_i$. Iako je $\sum_i x_i$ poznato, prikupljanje obje vrijednosti za svakoga može biti skupo i teško pa za procjenu želimo iskoristiti uzorak od $m < n$ parova. Ako izaberemo skup R od m indeksa izabranih uniformno, procjenitelj $\sum_{j \in R} y_j / \sum_{j \in R} x_j$ nije nepristran.

Ovaj problem ćemo izbjeći ako odaberemo skup R na način da prvi indeks i biramo s vjerojatnošću $x_i / \sum_j x_j$, a ostale indekse biramo uniformno iz preostalih $n - 1$. Iza ovakvog uzorkovanja stoji jednakost (2.9), ali bez uvjeta nezavisnosti. Ipak, uzorkovanje po veličini prvog indeksa dovelo je do, po veličini pristranog, uzorkovanja sume. Prvi indeks smo odabrali proporcionalno veličini njegove vrijednosti, a ostale iz pripadajuće uvjetne distribucije. Prema tome, odabrali smo skup indeksa r sa vjerojatnošću proporcionalnom s $\sum_{j \in r} x_j$.

Pokažimo sada da je procjenitelj omjera na temelju takvog uzorka nepristran. Neka su

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \text{ i } \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Prvo biramo indeks I s distribucijom

$$\mathbb{P}(I = i) = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}.$$

Zatim, iz preostalog skupa $\{1, ..., n\} \setminus \{I\}$ uzimamo slučaji uzorak S veličine $m - 1$. Neka je $R = S \cup \{I\}$ skup od m indeksa. Za m-člani podskup r skupa $\{1, ..., n\}$ stavimo

$$T_r = \frac{\bar{y}_r}{\bar{x}_r} \text{ gdje je } \bar{y}_r = \frac{1}{m} \sum_{j \in r} y_j \text{ i } \bar{x}_r = \frac{1}{m} \sum_{j \in r} x_j$$

Skup R može biti jednak nekom r, skupu veličine m, na m mogućih načina - ovisno koji element $i \in r$ je prvi izabran s vjerojatnošću $\mathbb{P}(I = i)$. Prema tome,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R = r) &= \sum_{i \in r} \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S \setminus \{i\} = r \setminus \{i\}) \\
&= \sum_{i \in r} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \\
&= \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \frac{\sum_{i \in r} x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \\
&= \frac{1}{\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}} \frac{\bar{x}_r}{\bar{x}} \\
&= \binom{n}{m}^{-1} \frac{\bar{x}_r}{\bar{x}}.
\end{aligned}$$

Dalje, koristeći formulu

$$\binom{n}{m}^{-1} \sum_{|r|=m} \bar{y}_r = \bar{y},$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T_R &= \sum_{|r|=m} \frac{\bar{y}_r}{\bar{x}_r} \mathbb{P}(R = r) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{|r|=m} \frac{\bar{y}_r}{\bar{x}_r} \frac{\bar{x}_r}{\bar{x}} \\
&= \frac{1}{\bar{x}} \binom{n}{m}^{-1} \sum_{|r|=m} \bar{y}_r \\
&= \frac{\bar{y}}{\bar{x}}.
\end{aligned}$$

Dakle, procijenitelj T_R je nepristran za $\bar{y}/\bar{x}$.

4.3 Pristrano uzorkovanje lognormalne distribucije

Lognormalna distribucija često se koristi u financijskoj matematici prilikom modeliranja cijena na tržištu i procjenjivanja vrijednosti raznih instrumenata. Varijabla L s lognormalnom distribucijom dobivena je eksponenciranjem normalne varijable. Ako sa Z označimo standardnu normalnu varijablu s $\mathbb{E}Z = 0$ i $\mathrm{var}Z = 1$, tada $L = e^Z$ predstavlja standardnu lognormalnu varijablu. Uz konstante $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$, $L = e^{\sigma Z + \mu}$ predstavlja općenitu lognormalnu varijablu. Kako je varijabla L nenegativna s konačnim očekivanjem, ona se može po veličini pristrano transformirati kako bismo dobili L^*.

Počinjemo sa slučajem kada su $\mu = 0$ i $\sigma > 0$. Neka su C_i nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti 1 ili -1 s jednakim vjerojatnostima. Takve varijable imaju očekivanje nula i varijancu jedan. Po centralnom graničnom teoremu znamo da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sigma C_i \xrightarrow{d} \sigma Z.$$

Dalje imamo

$$W_n := \prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma C_i\right) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sigma C_i\right) \xrightarrow{d} \exp(\sigma Z) = L,$$

a time i $W_n^* \xrightarrow{d} L^*$, po teoremu 1.2.2. Uvedimo $X_i := \exp(\sigma C_i/\sqrt{n})$, tako da je $W_n = X_1 \cdot ... \cdot X_n$ s nezavisnim faktorima pa po pravilu (2.17) vrijedi $W^* = X_1^* \cdot ... \cdot X_n^*$. Varijable X_i poprimaju vrijednosti $q = e^{-\sigma/\sqrt{n}}$ i $p = e^{\sigma/\sqrt{n}}$ s jednakim vjerojatnostima. Tada X_i^* poprimaju te iste vrijednosti, ali s vjerojatnostima $q/(p+q)$ i $p/(p+q)$. Recimo da B_n od svih X_i^* poprimi vrijednost p, a $n - B_n$ njih vrijdnost q. Koristeći B_n možemo pisati

$$W_n^* = p^{B_n} q^{n-B_n} = e^{\sigma(2B_n - n)/\sqrt{n}}.$$

S obzirom da B_n oznalčava broj "uspjeha" u n nezavisnih pokusa s vjerojatnošču uspjeha $p/(p+q)$, distribucija od B_n je upravo Binom$(n, p/(p+q))$. Po centralnom graničnom teoremu, kada $n \to \infty$, distribuciju od B_n možemo aproksimirati normalnom distribucijom. Uzimajući Taylorov polinom drugog stupnja za funkciju e^x oko nule i uvrštavanjem $x = \pm\sigma/\sqrt{n}$, dobivamo da je $p/(p+q) = 1/2 + \sigma/(2\sqrt{n}) + O(1/n)$. Dakle, B_n aproksimiramo normalnom distribucijom s očekivanjem $np/(p+q) = (1/2)(n + \sigma\sqrt{n}) + O(1)$ i varijancom $npq/(p+q)^2 = n/4 + O(1/n^{3/2})$. Zato

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2B_n - n) \xrightarrow{d} Z + \sigma \text{ uz } n \to \infty$$

a time i

$$W_n^* \xrightarrow{d} e^{\sigma(Z+\sigma)}.$$

Kako $W_n^* \xrightarrow{d} L^* = (e^{\sigma Z})^*$, pokazali smo da je $(e^{\sigma Z})^* \overset{d}{=} e^{\sigma(Z+\sigma)}$. U slučaju kada je $L = e^{\sigma Z + \mu}$, relacija (1.10) jednostavno daje formulu za po veličini pristranu transformaciju lognormalne distribucije:

$$(e^{\sigma Z+\mu})^* = e^{\sigma(Z+\sigma)+\mu} \tag{4.6}$$

4.4 Jednandžba pristranosti po veličini

U teoremu 3.3.1 vidjeli smo da za nenegativnu slučajnu varijablu X s konačnim očekivanjem postoji slučajna varijabla Y, nezavisna od X i takva da vrijedi $X^* = X + Y$ ako i samo ako je X beskonačno djeljiva sa Lévyjevom reprezentacijom (3.7) pri čemu je Lévyjeva mjera α točno distribucija od Y. Ako su X i Y obje diskretne ili obje apsolutno neprekidne, (1.3) nam daje jednostavnu relaciju za distribucije od X i Y.

U diskretnom slučaju, ako vrijedi (3.7) i ako su f_X i f_Y gustoče od X i Y, f_{X^*} je konvolucija od f_X i f_Y: $f_{X^*}(x) = \sum_y f_X(x-y)f_Y(y)$. Uvrštavanjem u (1.3) dobivamo, za svaki $x > 0$,

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{E}X}{x} \sum_y f_X(x-y)f_Y(y). \tag{4.7}$$

Na isti način, u apsolutno neprekidnom slučaju, ako vrijedi (3.7), f_{X^*} je konvolucija od f_X i f_Y: $f_{X^*}(x) = \int_y f_X(x-y)f_Y(y)$. Uvrštavanjem u (1.3) dobivamo, za svaki $x > 0$,

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{E}X}{x} \int_y f_X(x-y)f_Y(y)\,dy. \tag{4.8}$$

Dobivena jednakost nazvana je *jednadžbom pristranosti po veličini* (eng. size bias equation) u [2].

4.5 Primjeri

Na kraju navodimo neke primjere koji zadovoljavaju (1.5). Prva dva primjera smo već vidjeli.

Primjer 4.5.1. *(Binomna slučajna varijabla)* Ako je $X \sim$Binom(n, p), $\mathbb{P}(Y = 1) = 1$.

Primjer 4.5.2. *(Poissonova slučajna varijabla)* Ako je $X \sim$Poisson(λ), $\mathbb{P}(Y = 1) = 1$.

Primjer 4.5.3. *(Beta distribucija)* Slučajna varijabla ima Beta distribuciju na $(0, 1)$ sa parametrima $a, b > 0$ ako je njena funkcija gustoće ima nosač $(0, 1)$ i proporcinalna je s $(1 - x)^{a-1}x^{b-1}$. Uniformna distribucija na $(0, 1)$ poseban je slučaj u ovoj familiji kada su $a = b = 1$. Ako je $X \sim$ Beta(a, b), koristeći (1.3) dobivamo $X^* \sim$ Beta$(a, b + 1)$.

Postoji mnogo familija slučajnih varijabli za koje se po veličini pristrana transformacija svodi na promjenu parametara distribucije. Ovdje ističemo Beta familiju kao u prethodnom primjeru, Gamma familiju u primjeru 4.5.7. i familiju lognormalne distribucije što se moglo vidjeti iz formule (4.6). Unutar tih familija sve varijable zadovoljavaju problem (1.5), ili ga ne zadovoljava niti jedna. Moglo bi se naslutiti da je beskonačna djelivost sačuvana prilikom po veličini pristranog transformiranja. Ipak, to nije istina.

Primjer 4.5.4. Neka je $X = 1 + W$ gdje je $W \sim Poisson(\lambda)$. Transformiramo po (2.8) što daje $X^* = 1 + 1/(1+\lambda)W$. Očito ne postoji $Y \geq 0$ za koji bi vrijedilo $X^* = 1 + W + Y$. Stoga X nije beskonačno djeljiva.

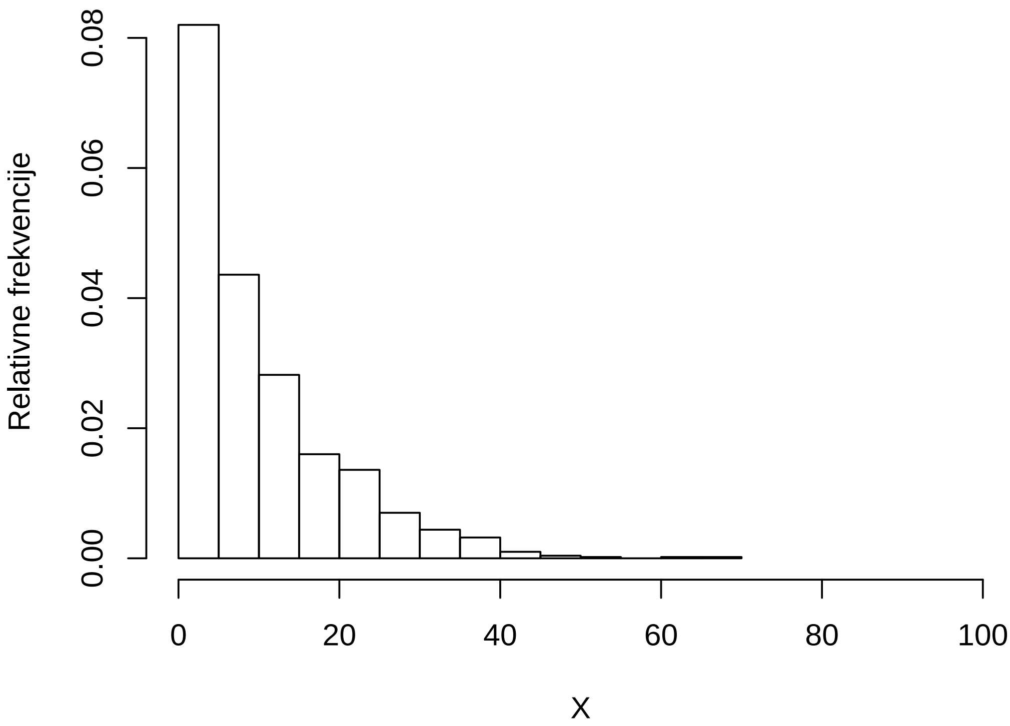
Kako je $X = W^*$, vidimo da je W beskonačno djeljiva, ali W^* nije.

Primjer 4.5.5. *(Geometrijska slučajna varijabla)* Krenimo sa geometrijskom distribucijom: $\mathbb{P}(X = j) = (1-q)q^j$ za $j \geq 0$ i $0 < q < 1$. Želimo odrediti je li takva distribucija beskonačno djeljiva. Računamo karakterističnu funkciju, $\phi(u) = \sum_{k\geq 0} e^{iuk}(1-q)q^k = (1-q)/(1-qe^{iu})$ iz čega slijedi $\log\phi(u) = \log(1-q) - \log(1-qe^{iu}) = -\sum_{j\geq 1} q^j/j + \sum_{j\geq 1}(q^j e^{iuj}/j) = a\sum_{j\geq 1}((e^{iuj}-1)/j)q^j/a$, za proizvoljni $a > 0$.

Mjera α ima masu q^j/a u točkama $j = 1, 2, ...$, a kako je $q + q^2 + ... = q/(1-q)$, za a uzimamo $q/(1-q)$ što se slaže sa $a = \mathbb{E}X$. Time smo dobili Lévyjevu karakterizaciju geometrijske distribucije pa zaključujemo da je ona beskonačno djeljiva. Kako je $\mathbb{P}(Y = j) = \alpha(j) = (1-q)q^{j-1}$ za $j = 1, 2, ...$, imamo $Y \stackrel{d}{=} X + 1$. Tada je i $X^* = X + Y$ uz X, Y nezavisne i $Y \stackrel{d}{=} X + 1$.

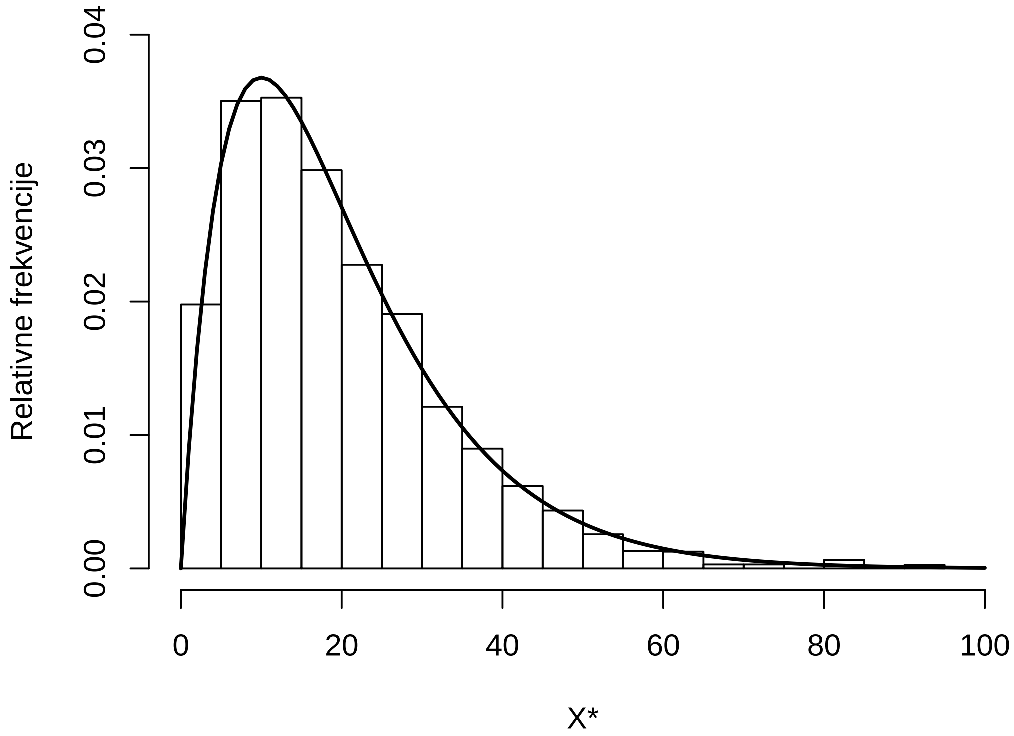
Primjer 4.5.6. *(Eksponencijalna slučajna varijabla)* Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla s očekivanjem $\mathbb{E}X = 1/\beta$, odnosno $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\beta t}$ za $t > 0$. Kao što smo vidjeli u odlomku 2.3 za slučaj $\beta = 1$, $X^* = X + Y$ uz X, Y nezavisne i $Y \stackrel{d}{=} X$. Pokazuje se da je u slučaju generalnog $\beta > 0$ Lévyjeva mjera α jednaka distribuciji od X pa je, ponovno, $Y \stackrel{d}{=} X$.

Ovaj primjer ćemo ilustrirati simulacijom. Simuliramo uzorak duljine 1000 iz eksponencijalne distribucije s parametrom $\beta = 0.1$. Taj uzorak nam je realizacija varijable X. Podaci su prikazani histogramom na slici 4.1.



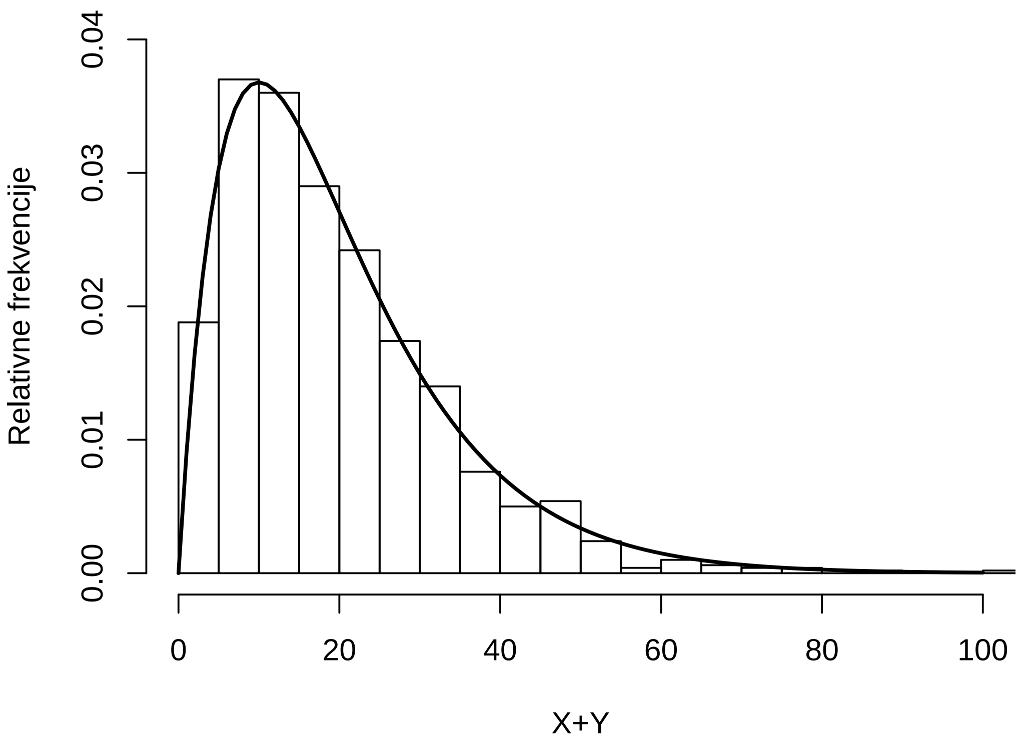
Slika 4.1: Histogram uzorka iz eksponencijalne distribucije s očekivanjem 10

Pristrano uzorkovanje simuliramo na način da uzimamo uzorak duljine 10000 iz iste distribucije i onda iz podataka biramo njih 1000 na način da svaki broj biramo proporcionalno njegovoj *veličini*. Uz podatke prikazujemo i funkciju gustoće Gamma(2, 0.1) distribucije na slici 4.2. Jasno se vidi da podaci pristrani po veličini imaju veće vrijednosti i možemo pretpostaviti da po veličini pristrana varijabla X^* ima Gamma(2, 0.1) distribuciju na koju ćemo se vratiti u primjeru 4.5.7.



Slika 4.2: Histogram uzorka iz po veličini pristrane Exp(0.1) distribucije uz funkciju gustoće Gamma(2, 0.1) distribucije

Simuliramo još jedan uzorak duljine 1000 iz eksponencijalne distribucije s parametrom $\beta = 0.1$ koji nam predstavlja realizaciju varijable Y. Zbrajanjem s prvim simuliranim uzorkom dobivamo uzorak varijable $X+Y$. Dobiveni podaci su ponovno prikazani histogramom uz funkciju gustoće Gamma(2, 0.1) distribucije na slici 4.3.



Slika 4.3: Histogram uzorka realizirane varijable $X+Y$ uz funkciju gustoće Gamma(2, 0.1) distribucije

Primjer 4.5.7. *(Gamma distribucija)* Neka je $t > 0$, $X \sim \text{Gamma}(t, \beta)$ i $Y \sim \text{Exp}(\beta)$. U slučaju $t = 1$, X ima eksponencijalnu distribuciju kao u prošlom primjeru, a u generalnom slučaju, $t = n$, X možemo prikazati kao $X = X_1 + ... + X_n$ gdje su X_i n.j.d. s eksponencijalnom distribucijom i očekivanjem $\mathbb{E}X_i = 1/\beta$. Koristeći (2.9), $X_1 + ... + X_n$ transformiramo uzimajući samo jedan pribrojnik, X_1, čija transformacija je, po prošlom primjeru, zbroj dvije slučajne varijable sa istom eksponencijalnom distribucijom. Iz toga slijedi $X^* \sim \text{Gamma}(t + 1, \beta)$, odnosno $X^* = X + Y$.

Vratimo se na početak ovog rada, na paradoks vremena čekanja. Duljina intervala međudolazaka autobusa dana je slučajnom varijablom $X \sim \text{Exp}(1)$. Kao što smo vidjeli u odjeljku 2.3., interval X^*, onaj u koji dolazimo, ima Gamma(2,1) distribuciju i podijeljen je na $(1 - U)X^*$ i UX^* - dva intervala čije duljine su određene sa dvije nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s očekivanjem 1. Vratimo se još jednom i na problem (1.5) i zaključimo: $X^* = X + Y$, gdje je $Y \sim \text{Exp}(1)$.

Ako se u nekom trenutku nađemo na autobusnoj stanici, očekujemo da nam je prošli autobus pobjegao prije 1, npr. sat, a da će sljedeći doći za 1 sat. Dakle, očekivano vrijeme između autobusa koji nam je pobjegao i autobusa koji će doći je dvostruko veće od očekivanog vremena međudolazaka.

Bibliografija

[1] Richard Arratia i Larry Goldstein, *Size bias, sampling, the waiting time paradox, and infinite divisibility: when is the increment independent?*, arXiv preprint arXiv:1007.3910 (2010).

[2] Richard Arratia, Larry Goldstein i Fred Kochman, *Size bias for one and all*, arXiv preprint arXiv:1308.2729 (2013).

[3] William Feller, *An Introduction to Probability theory and its application Vol II*, John Wiley and Sons, 1971.

[4] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1987.

Sažetak

Pristranost po veličini (eng. size bias) poseban je slučaj pristranosti prilikom kojeg je, tokom uzorkovanja, vjerojatnost biranja nekog objekta proporcionalna njegovoj veličini (npr. duljini, težini). Iako je takvo svojstvo nepoželjno u statističkim procjenama, pokazuje se da ima skrivenu i ponekad neočekivanu ulogu u nekim rezultatima iz vjerojatnosti i statistike, posebno u teoriji slučajnih procesa. U ovom radu definiramo pristranost po veličini i pokazujemo osnovna svojstva po veličini pristranih slučajnih varijabli. Opisujemo po veličini pristrane procese i dajemo poveznicu sa teorijom obnavljanja analizirajući pritom paradoks vremena čekanja. Povezujemo uniformnu integrabilnost i napetost te dajemo uvid u Lévyjevu karakterizaciju i beskonačno djeljive distribucije.

Summary

Size bias is a special case of bias in which, during sampling, the likelihood of selecting an object is proportional to its size (e.g. length, weight). Although such property is undesirable in statistical procedures, it is shown to have a hidden and sometimes unexpected role in some results in probability and statistics, especially in the theory of random processes. In this paper, we define the size bias and show the basic properties of size biased random variables. We describe the size biased processes and provide a link to the theory of renewal while analyzing the waiting time paradox. We connect uniform integrability and tightness and give insight into Lévy's characterization and infinitely divisible distributions.

Životopis

Rođen 02.10.1995. u Zagrebu kao treće od četvero braće, cijelo djetinjstvo provodim u zagrebačkoj Dubravi. Školovanje započinjem 2002. godine u Osnovnoj školi Retkovec gdje pokazujem velik interes za znanjem matematike i ostalih prirodnih znanosti. Godine 2010. upisujem XII. gimnaziju u Dubravi. Iste godine selim od roditelja starijoj sestri. Godinu kasnije primljen sam u Prirodoslovnu školu Vladimira Preloga, smjer prirodoslovna gimnazija gdje nastavljam školovanje upisujući drugi razred. Uz honorarne poslove poput instrukcija i statiranja, nastavljam uspjehe iz prirodoslovnih predmeta i završavam srednju školu 2014. godine. Ljeto provodim radeći u Ledo d.o.o. čekajući upis na fakultet. Od velikog izbora fakulteta biram i upisujem smjer Matematika na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu. Iste godine ponovno selim, ovaj put starijem bratu. Tokom studiranja, sudjelujem u raznim sportskim natjecanjima, a uz studentske udruge i u nekim projektima. U 2017. godini, nakon redovnog završetka preddiplomskog studija, upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. Nastavljam se baviti sportom, radim u knjigovodstvenom uredu kao knjigovođa i završavam prvu godinu diplomskog studija. Odlučujem živjeti sam i ponovno selim. Godine 2019. dobivam studentski posao u Croatia osiguranju u odjelu za upravljanje dobrovoljnim mirovinskim fondovima i redovno završavam sve ispite zadnje godine studija. U Croatia osiguranju potpisujem ugovor za trajni radni odnos i uzimam dodatni semestar za pisanje ovog diplomskog rada.