Poopćenja skalarnog produkta

Hitrec, Mihaela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihaela Hitrec

POOPćENJA SKALARNOG PRODUKTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Sanji Varošanec na pristupačnosti, razumijevanju i strpljenju tijekom izrade diplomskog rada.

Posebnu zahvalu iskazujem svojim roditeljima koji su uvelike zaslužni za ono što sam postigla, koji su bili tu za mene u dobrim i lošim trenucima i bez kojih sve ono što sam do sad postigla ne bi bilo moguće.

Sadržaj

Uvod

Glavni cilj ovog diplomskog rada je proučiti jedno poopćenje skalarnog produkta, takozvani 2-skalarni produkt, odnosno 2-unitarne prostore. Dokazat ćemo nekoliko svojstava 2-skalarnog produkta, kao i nekoliko njegovih karakterizacija. Proučit ćemo i neka svojstva pridruženih 2-normi.

Koncept 2-skalarnog produkta intenzivno se proučava od strane mnogih autora već tri desetljeća. Neki od njih su S. Gähler, A. White, Y. J. Cho, S. S. Kim, A. Misiak i P. C. S. Lin. 2-skalarni produkti i 2-unitarni prostori su zapravo dvodimenzionalni analogoni koncepta skalarnog produkta i unitarnog prostora.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju navedene su definicije osnovnih pojmova te su opisani ostali pojmovi vezani uz 2-skalarni produkt, 2-unitarne prostore te 2-norme. U drugom poglavlju navedena su i dokazana neka svojstva 2-skalarnog produkta i 2-unitarnih prostora kao i neka svojstva 2-normi i 2-normiranih prostora. U trećem poglavlju definirano je Heronovo preslikavanje, te je prikazana veza Heronovog preslikavanja i 2-normiranih prostora. Također je prikazano svojstvo superaditivnosti i svojstvo monotonosti nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom.

Ovaj se rad temelji na rezultatima danima u literaturi navedenoj na kraju rada pri čemu su sve razmatrane tvrdnje detaljno i u potpunosti dokazane u ovom radu.

Poglavlje 1

2-skalarni produkt i 2-norma

Skalarni produkt je jedan od osnovnih pojmova linearne algebre. Već u srednjoj školi susrećemo se sa skalarnim produktom definiranim na dvodimenzionalnom vektorskom prostoru V^2.
U kolegiju Linearna algebra 2 proučavali smo prostor $\mathbb{R}^3$ i tri različita produkta definirana na njemu: skalarni, vektorski, mješoviti. Dok vektorski i mješoviti produkt ne generaliziramo čak niti na $\mathbb{R}^n$, skalarni produkt možemo definirati u vrlo generalnoj situaciji, tj. na vektorskom prostoru. Vektorski prostor snabdjeven skalarnim produktom naziva se unitarni prostor. U ovom poglavlju razmatramo funkciju koja je analogon skalarnog produkta, takozvani 2-skalarni produkt.

1.1 2-skalarni produkt i 2-unitarni prostor

Definicija 1.1.1. *Neka je X vektorski prostor dimenzije veće od 1 i neka je $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$ realna funkcija sa $X \times X \times X$ takva da zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) $(a, a \mid b) \geq 0$*, pri čemu je* $(a, a \mid b) = 0 \Leftrightarrow a$ *i* b *linearno zavisni*

(ii) $(a, a \mid b) = (b, b \mid a)$

(iii) $(a, b \mid c) = (b, a \mid c)$

(iv) $(\alpha a, b \mid c) = \alpha(a, b \mid c)\ , \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(v) $(a + a', b \mid c) = (a, b \mid c) + (a', b \mid c)\ , \forall a, a', b, c \in X.$

*Tada realnu funkciju $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$ zovemo **2-skalarni produkt**, a uređeni par $(X, (\cdot, \cdot \mid \cdot))$ zovemo **2-unitarni prostor**.*

Teorem 1.1.2. *Neka je $(X, (\cdot,\cdot)))$ unitarni prostor. Funkcija $(\cdot,\cdot \mid \cdot)$ definirana na sljedeći način:*

$$(a,b \mid c) = \begin{vmatrix} (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid c) & (c \mid c) \end{vmatrix} = (a \mid b) \cdot \| c \|^2 - (a \mid c) \cdot (b \mid c)$$

je jedan 2-skalarni produkt.

Dokaz. (i)

$$(a,a \mid b) = \begin{vmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (a \mid b) & (b \mid b) \end{vmatrix} = (a \mid a) \cdot \| b \|^2 - (a \mid b) \cdot (a \mid b) = \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 - (a \mid b)^2.$$

Znamo da u svakom unitarnom prostoru vrijedi: $\mid (a,b) \mid \leq \| a \| \cdot \| b \|$, pa zaključujemo:

$$\| a \|^2 \cdot \| b \|^2 - (a \mid b)^2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} (a,a \mid b) = 0 &\iff \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 - (a \mid b)^2 = 0 \iff \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 = (a \mid b)^2 \\ &\iff \| a \| \cdot \| b \| = (a \mid b) \\ &\iff (a \mid a) \cdot (b \mid b) = (a \mid b) \\ &\iff a = \lambda \cdot b, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (a,a \mid b) &= \begin{vmatrix} (a \mid a) & (a \mid b) \\ (a \mid b) & (b \mid b) \end{vmatrix} = (a \mid a) \cdot \| b \|^2 - (a \mid b) \cdot (a \mid b) = \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 - (a \mid b)^2 \\ &= \| b \|^2 \cdot \| a \|^2 - (b \mid a)^2 = \begin{vmatrix} (b \mid b) & (b \mid a) \\ (b \mid a) & (a \mid a) \end{vmatrix} = (b,b \mid a). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} (a,b \mid c) &= \begin{vmatrix} (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid c) & (c \mid c) \end{vmatrix} = (a \mid b) \cdot \| c \|^2 - (a \mid c) \cdot (b \mid c) \\ &= (b \mid a) \cdot \| c \|^2 - (c \mid a) \cdot (c \mid b) = \begin{vmatrix} (b \mid a) & (c \mid a) \\ (c \mid b) & (c \mid c) \end{vmatrix} = (b,a \mid c). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (\alpha a,b \mid c) &= \begin{vmatrix} (\alpha a \mid b) & (\alpha a \mid c) \\ (b \mid c) & (c \mid c) \end{vmatrix} = (\alpha a \mid b) \cdot \| c \|^2 - (\alpha a \mid c) \cdot (b \mid c) \\ &= \alpha(a \mid b) \cdot \| c \|^2 - \alpha(a \mid c) \cdot (b \mid c) = \alpha \left[(a \mid b) \cdot \| c \|^2 - (a \mid c) \cdot (b \mid c) \right] \\ &= \alpha \begin{vmatrix} (a \mid b) & (a \mid c) \\ (b \mid c) & (c \mid c) \end{vmatrix} = \alpha \cdot (a,b \mid c). \end{aligned}$$

(v)

$$
\begin{aligned}
(a+a',b\mid c) &= \begin{vmatrix} (a+a'\mid b) & (a+a'\mid c) \\ (b\mid c) & (c\mid c) \end{vmatrix} = (a+a'\mid b)\cdot \| c\|^2 - (a+a'\mid c)\cdot (b\mid c) \\
&= [(a\mid b)+(a'\mid b)]\cdot \| c\|^2 - [(a\mid c)+(a'\mid c)]\cdot (b\mid c) \\
&= (a\mid b)\cdot \| c\|^2 + (a'\mid b)\cdot \| c\|^2 - (a\mid c)\cdot (b\mid c) - (a'\mid c)\cdot (b\mid c) \\
&= (a\mid b)\cdot \| c\|^2 - (a\mid c)\cdot (b\mid c) + (a'\mid b)\cdot \| c\|^2 - (a'\mid c)\cdot (b\mid c) \\
&= (a,b\mid c)+(a',b\mid c).
\end{aligned}
$$

□

Korolar 1.1.1. *Ako su a,b,c nizovi s članovima $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ redom tada je funkcija $(\cdot,\cdot\mid\cdot)$ definirana sa*

$$
(a,b\mid c) = \sum_{i<j}(\alpha_i\gamma_j-\gamma_i\alpha_j)(\beta_i\gamma_j-\gamma_i\beta_j)
$$

također jedan 2-skalarni produkt.

Dokaz. (i)

$$
\begin{aligned}
(a,a\mid b) &= \sum_{i<j}(\alpha_i\beta_j-\beta_i\alpha_j)(\alpha_i\beta_j-\beta_i\alpha_j) \\
&= \sum_{i<j}(\alpha_i\beta_j-\beta_i\alpha_j)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a,a\mid b)=0 &\Longleftrightarrow \sum_{i<j}(\alpha_i\beta_j-\beta_i\alpha_j)^2 = 0 \Longleftrightarrow \mid \alpha_i\beta_j-\beta_i\alpha_j\mid = 0, \forall i,j \\
&\Longleftrightarrow \alpha_i\beta_j=\beta_i\alpha_j \Longleftrightarrow \alpha_i\beta_i=\alpha_j\beta_j, \forall i,j \Longleftrightarrow a=\lambda b.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
(a,a\mid b) &= \sum_{i<j}(\alpha_i\beta_j-\beta_i\alpha_j)^2 = \sum_{i<j}(\beta_j\alpha_i-\alpha_j\beta_i)^2 \\
&= \sum_{i<j}(\beta_j\alpha_i-\alpha_j\beta_i)(\beta_j\alpha_i-\alpha_j\beta_i) = (b,b\mid a).
\end{aligned}
$$

(iii)

$$\begin{aligned}(a, b \mid c) &= \sum_{i<j} (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i<j} (\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j)(\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j) = (b, a \mid c).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}(\lambda a, b \mid c) &= \sum_{i<j} (\lambda \alpha_i \gamma_j - \gamma_i \lambda \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i<j} \lambda (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) = \lambda (a, b \mid c).\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}(a + a', b \mid c) &= \sum_{i<j} ((\alpha_i + \alpha_i^{'}) \gamma_j - \gamma_i (\alpha_j + \alpha_j^{'}))(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i<j} (\alpha_i \gamma_j + \alpha_i^{'} \gamma_j - \gamma_i \alpha_j - \gamma_i \alpha_j^{'})(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i<j} (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) + \sum_{i<j} (\alpha_i^{'} \gamma_j - \gamma_i \alpha_j^{'})(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= (a, b \mid c) + (a', b \mid c).\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.1.2. *Cauchy - Schwarz - Bunjakovskijeva nejednakost*
Neka je X 2-unitarni prostor. Za svaki $a, b, c \in X$ vrijedi:

$$|(a, b \mid c)| \leq \sqrt{(a, a \mid c)} \cdot \sqrt{(b, b \mid c)}.$$

Dokaz. Neka je β proizvoljan realan broj. Koristeći svojstva 2-skalarnog produkta (*iii*), (*iv*) i (*v*) dobivamo da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (a+\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, a+\beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a, a+\beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c) + (\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, a+\beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a+\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + (a+\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, \beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a,a\,|\,c) + (\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + (a, \beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c) + (\beta\,(a,b\,|\,c)\,b,\ \beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a,a\,|\,c) + \beta\,((a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + (\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + \beta\,((a,b\,|\,c)\,b,\ \beta\,(a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a,a\,|\,c) + \beta\,((a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + \beta\,((a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + \beta\,(\beta\,(a,b\,|\,c)\,b, (a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a,a\ |\,c) + 2\beta\,((a,b\,|\,c)\,b, a\,|\,c) + \beta^2\,((a,b\,|\,c)\,b, (a,b\,|\,c)\,b\,|\,c)\\
&= (a,a\,|\,c) + 2\beta\,(a,b\,|\,c)\cdot(b,a\,|\,c) + \beta^2\,(a,b\,|\,c)\cdot(a,b\,|\,c)\cdot(b,b\,|\,c)\\
&= (a,a\,|\,c) + 2\beta\,(a,b\,|\,c)^2 + \beta^2\,(a,b\,|\,c)^2\cdot(b,b\,|\,c).
\end{aligned}
$$

Ako je $(b,b\,|\,c) = 0$ gornja nejednakost očito vrijedi.
Ako je $(b,b\,|\,c) \neq 0$ tada gornju nejednakost dobivamo supstitucijom $\beta = \dfrac{-1}{(b,b\,|\,c)}$.

$$
\begin{aligned}
&(a,a\mid c)\ +2\cdot\frac{-1}{(b,b\mid c)}\cdot(a,b\mid c)^2 + \left(\frac{-1}{(b,b\mid c)}\right)^2\cdot(a,b\mid c)^2\cdot(b,b\mid c)\geq 0\\
&(a,a\mid c)\ +\frac{-2}{(b,b\mid c)}\cdot(a,b\mid c)^2 + \frac{1}{(b,b\mid c)^2}\cdot(a,b\mid c)^2\cdot(b,b\mid c)\geq 0\ /\cdot(b,b\mid c)\\
&(a,a\mid c)\ (b,b\mid c)\geq(a,b\mid c)^2.
\end{aligned}
$$

□

Korolar 1.1.3. *Za svaki $a,b,c\in X$ vrijedi:* $(a,b\mid b) = 0$.

Dokaz. Ako u prethodno dokazanu nejednakost uvrstimo $c = b$ dobivamo

$$|\,(a,b\mid b)\,| \leq \sqrt{(a,a\mid b)}\cdot\sqrt{(b,b\mid b)}.$$

Prema definicijskom svojstvu (i) vrijedi $(b,b\mid b) = 0$ te je stoga $|\,(a,b\mid b)\,|\leq 0$. To znači da je $(a,b\mid b) = 0$. □

Propozicija 1.1.4. *Za svaki $a,b,c\in X$ i $\gamma\in\mathbb{R}$ vrijedi:*

$$(a,b\mid\gamma c) = \gamma^2\,(a,b\mid c).$$

Dokaz. Promotrimo čemu je jednak izraz $(a+b,a+b\mid\gamma c) - (a-b,a-b\mid\gamma c)$.

$$
\begin{aligned}
(a+b,a+b\mid\gamma c) - (a-b,a-b\mid\gamma c) &= (a,a\mid\gamma c) + 2\,(a,b\mid\gamma c) + (b,b\mid\gamma c) - (a,a\mid\gamma c)\\
&\quad + 2\,(a,b\mid\gamma c) - (b,b\mid\gamma c)\\
&= 4\,(a,b\mid\gamma c).
\end{aligned}
$$

Iskoristimo li svojstva (*ii*), (*iii*) i (*iv*) iz definicije 2-skalarnog produkta dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[(a+b,a+b\mid\gamma c)-(a-b,a-b\mid\gamma c)\right] &= \frac{1}{4}\left[(\gamma c,\gamma c\mid a+b)-(\gamma c,\gamma c\mid a-b)\right]\\ &= \frac{\gamma^2}{4}\left[(c,c\mid a+b)-(c,c\mid a-b)\right]\\ &= \gamma^2\,(a,b\mid c).\end{aligned}$$

□

1.2 2-norma i 2-normirani prostor

Definicija 1.2.1. *Neka je X realan vektorski prostor dimenzije veće od 1 i neka je* $\|\cdot,\cdot\|: X\times X\to\mathbb{R}$ *realna funkcija za koju vrijedi:*

(i) $\|a,b\|\geq 0$*, pri čemu je* $\|a,b\|=0 \Leftrightarrow$ *a i b linearno zavisni*

(ii) $\|a,b\|=\|b,a\|,\ \forall a,b\in X$

(iii) $\|a,\alpha b\|=|\alpha|\,\|a,b\|,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

(iv) $\|a,b+c\|\leq\|a,b\|+\|a,c\|,\ \forall a,b,c\in X$ *i* $\alpha\in\mathbb{R}$ *(nejednakost trokuta).*

Tada funkciju $\|\cdot,\cdot\|$ *zovemo* ***2-norma*** *na X. Uređeni par* $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ *zovemo* ***2-normirani prostor****.*

Propozicija 1.2.1. *Neka je* $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ *2-normirani prostor. Tada za svaki* $x,y\in X$ *i* $\alpha\in\mathbb{R}$ *vrijedi*

(i) $\|a,b\|=\|a,\alpha a+b\|$

(ii) $\|a+b,a-b\|=2\|a,b\|$.

Dokaz. (*i*) Kad na izraz $\|a,\alpha a+bv\|$ primijenimo nejednakost trokuta, to jest svojstvo (*iv*) iz definicije 2- norme imamo

$$\|a,\alpha a+b\|\leq\|a,\alpha a\|+\|a,b\|=|\alpha|\,\|a,a\|+\|a,b\|=0+\|a,b\|=\|a,b\|.$$

S druge strane, napišemo li $\|a,b\|$ ovako $\|a,(\alpha a+b)+(-\alpha a)\|$ i ponovno primijenimo nejednakost trokuta imamo:

$$\begin{aligned}\|a,b\| &= \|a,(\alpha a+b)+(-\alpha a)\|\leq\|a,\alpha a+b\|+\|a,-\alpha a\|\\ &= \|a,\alpha a+b\|+|\alpha|\,\|a,a\|=\|a,\alpha a+b\|+0=\|a,\alpha a+b\|\end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi i $\|a, \alpha a + b\| \leq \|a, b\|$ i $\|a, b\| \leq \|a, \alpha a + b\|$ pa vrijedi jednakost i time je dokazana tvrdnja (i).
(ii) Primijenimo li na vektor $a+b$, $a-b$ i na skalar $\alpha = 1$ prvi dio propozicije dobivamo:

$$\begin{aligned} \|a+b, a-b\| &= \|va+b, 1\,(a+b) + (a-b)\| \\ &= \|a+b, 2a\| = 2\,\|a, a+b\|. \end{aligned}$$

Sada primjenom prvog dijela propozicije na vektore a, b i $\alpha = 1$ dobivamo:

$$\|a, a+b\| = \|a, 1 \cdot a + b\| = \|a, b\|,$$

pa sveukupno imamo:

$$\|a+b, a-b\| = 2\,\|a, b\|$$

što je i trebalo dokazati. □

Propozicija 1.2.2. *Ako je $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$ 2- skalarni produkt, tada se njemu pridružuje funkcija $\|\cdot, \cdot\|$ definirana na sljedeći način:*

$$\|a, b\| = \sqrt{(a, a \mid b)}$$

i ta je funkcija 2-norma.

Dokaz. (i)

$$\begin{aligned} &\|a, b\| = \sqrt{(a, a \mid b)} \geq 0, \\ &\|a, b\| = 0 \iff \sqrt{(a, a \mid b)} = 0 \iff (a, a \mid b) = 0 \iff a = \lambda b, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\|a, b\| = \sqrt{(a, a \mid b)} = \sqrt{(b, b \mid a)} = \|b, a\|.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \|a, \alpha b\| &= \sqrt{(a, a \mid \alpha b)} = \sqrt{(\alpha b, \alpha b \mid a)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (b, b \mid a)} = |\alpha| \sqrt{(a, a \mid b)} = |\alpha| \cdot \|a, b\|. \end{aligned}$$

(iv) Treba dokazati da za danu funkciju vrijedi $\|a, b+c\| \leq \ |a, b\| + \|a, c\|$. Po definciji funkcije imamo:

$$\sqrt{(a,a \mid b+c)} \leq \sqrt{(a,a \mid b)} + \sqrt{(a,a \mid c)}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \sqrt{(b+c,b+c \mid a)} \leq \sqrt{(b,b \mid a)} + \sqrt{(c,c \mid a)} \\
&\iff (b,b \mid a) + 2\,(b,c \mid a) + (c,c \mid a) \leq (b,b \mid a) + (c,c \mid a) + 2\sqrt{(b,b \mid a)\,(c,c \mid a)} \\
&\iff (b,c \mid a) \leq \sqrt{(b,b \mid a)\,(c,c \mid a)} \\
&\iff (b,c \mid a)^2 \leq (b,b \mid a) \cdot (c,c \mid a)
\end{aligned}$$

što vrijedi prema propoziciji 1.1.2.
Dakle, funkcija definirana na sljedeći način $\| a,b \| = \sqrt{(a,a \mid b)}$ je 2-norma. □

Teorem 1.2.2. ***Besselova nejednakost u 2-unitarnim prostorima***
Neka je $(X,(\cdot,\cdot \mid \cdot))$ 2-unitarni prostor i neka su $e_1, e_2, \ldots, b \in X$ takvi da je $(e_i, e_j \mid b) = 0$ za $i \neq j$ te $(e_i, e_i \mid b) = 1$ za $i = 1,2,\ldots,n$. Tada sa svaki $x \in X$ vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \mid (x, e_i \mid b)^2 \mid \leq \| x, b \|^2.$$

Dokaz. Neka je

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i,$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$ to jest $y \in conv\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
Koristeći svojstva 2-skalarnog produkta imamo:

$$\begin{aligned}
(x,y \mid b) &= (x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i \mid b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,(x, e_i \mid b), \\
(y,y \mid b) &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i \mid b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\,(e_i, e_i \mid b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2
\end{aligned}$$

Promotrimo čemu je jednak 2-skalarni produkt $(x-y, x-y \mid b)$:

$$\begin{aligned}
(x-y, x-y \mid b) &= (x,x \mid b) - 2\,(x,y \mid b) + (y,y \mid b) \\
&= (x,x \mid b) - 2\,(x,y \mid b) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\
&= (x,x \mid b) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x, e_i \mid b) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2
\end{aligned}$$

Stavimo li da je $\alpha_i = (x, e_i \mid b)$ tj.

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i \mid b) \cdot e_i$$

dobivamo:

$$(x - y, x - y \mid b) = (x, x \mid b) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

Znamo po definiciji 2-skalarnog produkta da je $(x - y, x - y \mid b) \geq 0$. Slijedi da je:

$$(x, x \mid b) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq (x, x \mid b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x, e_i \mid b)^2 \leq \| x, b \|^2.$$

$\square$

Poglavlje 2

Povezanost 2-unitarnih i 2- normiranih prostora

2.1 Karakterizacije 2-unitarnih prostora

Teorem 2.1.1. *Na proizvoljnom 2-unitarnom prostoru* $(X, (\cdot, \cdot \mid \cdot))$, $\| a, b \| := \sqrt{(a, a \mid b)}$ *definira 2-normu za koju vrijedi:*

1. $(a, b \mid c) = \frac{1}{4} (\| a + b, c \|^2) - \| a - b, c \|^2)$
2. *2-dimenzionalni analogon jednakosti paralelograma:*

$$\| a + b, c \|^2 + \| a - b, c \|^2 = 2 (\| a, c \|^2 + \| b, c \|^2).$$

Dokaz. Već smo pokazali da je $\| a, b \|$ norma.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\| a + b, c \|^2 - \| a - b, c \|^2) &= \frac{1}{4} [(a + b, a + b \mid c) - (a - b, a - b \mid c)] \\ &= \frac{1}{4} [(a, a \mid c) + 2 (a, b \mid c) + (b, b \mid c) \\ &- (a, a \mid c) + 2 (a, b \mid c) - (b, b \mid c)] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (a, b \mid c) = (a, b \mid c). \end{aligned}$$

Koristeći definiciju 2-normi i svojstva (*iii*), (*iv*) i (*v*) 2-skalarnog produkta dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\| a+b, c \|^2 + \| a-b, c \|^2 \\
&= (a+b, a+b \,|\, c) + (a-b, a-b \,|\, c) \\
&= (a, a+b \,|\, c) + (b, a+b \,|\, c) + (a, a-b \,|\, c) + (-b, a-b \,|\, c) \\
&= (a+b, a \,|\, c) + (a+b, b \,|\, c) + (a-b, a \,|\, c) - (a-b, b \,|\, c) \\
&= (a, a \,|\, c) + (b, a \,|\, c) + (a, b \,|\, c) + (b, b \,|\, c) + (a, a \,|\, c) - (b, a \,|\, c) - (a, b \,|\, c) + (b, b \,|\, c) \\
&= 2\,(a, a \,|\, c) + 2(b, b \,|\, c) \\
&= 2\,(\| a, c \|^2 + \| b, c \|^2).
\end{aligned}
$$

□

Svaki 2-unitarni prostor $(X, (\cdot, \cdot \mid \cdot))$ smatrat će se 2-normiranim prostorom s 2-normom $\| a, b \| := \sqrt{(a, a \mid b)}$. Između 2-normiranog prostora i 2-unitarnog prostora postoji karakterizacija koja je 2-dimenzionalni analogon pravilu paralelograma.

Teorem 2.1.2. *Neka je $(X, \| \cdot, \cdot \|)$ 2-normirani prostor u kojem je za svaki $a, b, c \in X$ vrijedi pravilo paralelograma:*

$$
\| a+b, c \|^2 + \| a-b, c \|^2 = 2\,(\| a, c \|^2 + \| b, c \|^2). \tag{2.1}
$$

Tada je preslikavanje $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$ definirano na sljedeći način:

$$
(a, b \,|\, c) = \frac{1}{4}\,(\| a+b, c \|^2 - \| a-b, c \|^2)
$$

jedan 2-skalarni produkt na X.

Dokaz. Pokažimo da vrijede svojstva 2-skalarnog produkta:
(i)

$$
\begin{aligned}
(a, a \mid b) \geq 0 &\iff \frac{1}{4}\left(\| a+a, b \|^2 - \| a-a, b \|^2\right) \geq 0 \\
&\iff \| 2a, b \|^2 - \| 0, b \|^2 \geq 0 \iff \| 2a, b \|^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
(a, a \mid b) = \frac{1}{4}\left(\| 2a, b \|^2 - \| a-a, b \|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\| 2b, a \|^2 - \| b-b, a \|^2\right) = (b, b \mid a).
$$

(iii)

$$\begin{aligned}(a, b \mid c) &= \frac{1}{4}\left(\| a+b, c \|^2 - \| a-b, c \|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\| b+a, c \|^2 - \| -(b-a), c \|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\| b+a, c \|^2 - \| b-a, c \|^2\right) = (b, a \mid c).\end{aligned}$$

Dokažimo sada (v) svojstvo 2-skalarnog produkta. Prema definiciji imamo:

$(a, b \mid c) + (a', b \mid c)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(\| a+b, c \|^2 - \| a-b, c \|^2 + \| a'+b, c \|^2 - \| a'-b, c \|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\| a+b, c \|^2 + \| a'+b, c \|^2) - \frac{1}{4}(\| a-b, c \|^2 + \| a'-b, c \|^2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Umjesto a uvrstimo u (2.1) izraz $\frac{a+a'}{2}+b$, a umjesto b stavimo $\frac{a-a'}{2}$. Tada (2.1) postaje:

$$\begin{aligned}\left\| \frac{a+a'}{2} + b + \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2 + \left\| \frac{a+a'}{2} + b - \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2 &= 2\left[\left\| \frac{a+a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2\right] \\ \| a+b, c \|^2 + \| a'+b, c \|^2 &= 2\left[\left\| \frac{a+a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2\right].\end{aligned}$$

Ako u (2.1) umjesto a uvrstimo $\frac{a+a'}{2} - b$, a umjesto b uvrstimo $\frac{a-a'}{2}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\left\| \frac{a+a'}{2} - b + \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2 + \left\| \frac{a+a'}{2} - b - \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2 &= 2\left[\left\| \frac{a+a'}{2} - b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2\right] \\ \| a-b, c \|^2 + \| a'-b, c \|^2 &= 2\left[\left\| \frac{a+a'}{2} - b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2\right].\end{aligned}$$

Uvrstimo sada dobivene izraze u (2.3) i imamo:

$$\begin{aligned}(a, b \mid c) + (a', b \mid c) &= \frac{1}{4} \cdot 2\left(\left\| \frac{a+a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2\right) - \frac{1}{4} \cdot 2\left(\left\| \frac{a+a'}{2} - b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a-a'}{2}, c \right\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\| \frac{a+a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a+a'}{2} - b, c \right\|^2\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{a+a'}{2}, b \mid c\right),\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili definiciju od $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$.
Zamjetimo da je $(0, b \mid c) = 0$ jer kad u definiciju preslikavanja $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$ stavimo $a = 0$ dobivamo $(0, b \mid c) = \frac{1}{4}\left(\| b, c\|^2 - \| -b, c\|^2\right) = 0$.
Ako u dobiveni izraz $(a, b \mid c) + (a', b \mid c) = 2\left(\frac{a+a'}{2}, b \mid c\right)$ uvrstimo $a' = 0$ dobivamo $(a, b \mid c) = 2\left(\frac{a}{2}, b \mid c\right)$.
Dobivena jednakost vrijedi za svaki vektor a, pa specijalno vrijedi i za vektor $a + a'$ to jest $(a + a', b \mid c) = 2\left(\frac{a+a'}{2}, b \mid c\right)$, a to znači da je $(a, b \mid c) + (a', b \mid c) = (a + a', b \mid c)$. Time je svojstvo (v) dokazano.

Iz svojstva $(a, b \mid c) = 2\left(\frac{a}{2}, b \mid c\right)$ slijedi daljni niz jednakosti: $(a, b \mid c) = 2\left(\frac{a}{2}, b \mid c\right) = 2^2\left(\frac{a}{2^2}, b \mid c\right) = 2^3\left(\frac{a}{2^3}, b \mid c\right) = \cdots = 2^n\left(\frac{a}{2^n}, b \mid c\right), n \in \mathbb{N}$.
Neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi $\left(\frac{ma}{2^n}, b \mid c\right) = \frac{m}{2^n}(a, b \mid c)$.
Dokažimo:

Za $m = 1$, $\left(\frac{ma}{2^n}, b \mid c\right) = \left(\frac{a}{2^n}, b \mid c\right) = \frac{1}{2^n}(a, b \mid c)$ prema gornjem nizu jednakosti.
Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\left(\frac{ma}{2^n}, b \mid c\right) = \frac{m}{2^n}(a, b \mid c)$.
Za $m + 1$ tada vrijedi:

$$\left(\frac{m+1}{2^n}a, b \mid c\right) = \left(\frac{m}{2^n}a + \frac{a}{2^n}, b \mid c\right).$$

Pokazali smo da vrijedi svojstvo (v) 2-skalarnog produkta, pa gornju jednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$\left(\frac{m}{2^n}a + \frac{a}{2^n}, b \mid c\right) = \left(\frac{ma}{2^n}, b \mid c\right) + \left(\frac{a}{2^n}, b \mid c\right).$$

Iskoristimo li sada pretpostavku i činjenicu da je $(a, b \mid c) = 2^n\left(\frac{a}{2^n}, b \mid c\right)$ dobivamo:

$$\left(\frac{m}{2^n}a + \frac{a}{2^n}, b \mid c\right) = \frac{m}{2^n}(a, b \mid c) + \frac{(a, b \mid c)}{2^n} = \left(\frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \cdot (a, b \mid c) = \left(\frac{m+1}{2^n}\right) \cdot (a, b \mid c).$$

Dakle, sada imamo da je $\alpha(a, b \mid c) = (\alpha a, b \mid c)$ za $\alpha = \frac{m}{2^n}$.
Kako su $\|\alpha a + b, c\|$ i $\|\alpha a - b, c\|$ neprekidne funkcije od α, $(\alpha a, b \mid c)$ je također neprekidna funkcija po α, $\alpha(a, b \mid c) = (\alpha a, b \mid c)$, za svaki realan broj α. $\square$

Dakle, prema upravo dokazanom teoremu, svaki 2-normirani prostor $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ čija 2-norma zadovoljava pravilo paralelograma smatramo i 2-unitarnim prostorom s 2-skalarnim produktom

$$(a, b \mid c) = \frac{1}{4}\,(\| a + b, c \|^2 - \| a - b, c \|^2).$$

Neka je $(X, \|v\cdot, \cdot\|)$ 2-normirani prostor i neka je $c \in X$. Neka je $X(\{c\})$ vektorski potprostor generiran vektorom c, to jest $X(\{c\})$ je skup svih vektora oblika λc, pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiramo relaciju $\sim$ ovako: $x \sim y$ ako i samo ako je vektor $x - y$ iz $X(\{c\})$. Neka je X_c kvocijentni prostor prostora X s obzirom na relaciju $\sim$. Za element $a \in X$ sa $(a)_c$ označavamo klasu u X_c koja sadrži vektor a, to jest $(a_c) = a + X(\{c\}) = \{a + \lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dakle, ako je v iz (a_c) tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $v - a = \alpha c$.
X_c je vektorski prostor uz zbrajanje definirano ovako: $(a)_c + (a')_c = (a + a')_c$ i množenje skalarom: $(\alpha a)_c = \alpha(a)_c$.
Na X_c definiramo funkciju $\|\cdot\|_c$ na sljedeći način: $\|(a)_c\|_c = \|a, c\|$.
Nul-vektor u X_c je klasa $(0)_c$ gdje je 0 nul-vektor u X. Pri tome je $(0)_c = (a)_c$ za svaki $a \in X(\{c\})$. Naime, ako je $a \in X(\{c\})$, tada je $a = \lambda_0 c$, pa je $(a)_c = \{a + \lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_0 c + \lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda_0 + \lambda)c : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0 + \mu c : \mu \in \mathbb{R}\} = (0)_c$.
Provjerimo je li ta funkcija dobro definirana, tj. da li za drugog predstavnika v iste klase $(a)_c$ vrijedi $\| v, c \| = \| a, c \|$. Za normu $\|\cdot,\cdot\|$ vrijedi nejednakost trokuta: $\| b + c, a \| \leq \| b, a \| + \| c, a \|$. Ako imamo dva vektora v i a iz klase $(a)_c$, tada je $v = a + (v - a)$. Primijenimo li nejednakost trokuta na vektore a i $(v - a)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\| a + (v - a), c \| &\leq \| a, c \| + \| v - a, c \| \\
\| v, c \| &\leq \| a, c \| + \| v - a, c \| \\
\| v, c \| - \| a, c \| &\leq \| v - a, c \| = \| \alpha c, c \| = | \alpha | \| c, c \| = 0.
\end{aligned}$$

Na isti način, za vektor a i $a - v$ dobivamo $\| a, c \| - \| v, c \| \leq 0$ što zajedno s prethodnom nejednakosti daje da je $\| v, c \| = \| a, c \|$, tj. bez obzira kojeg predstavnika klase $(a)_c$ uzeli, uvijek dobivamo istu vrijednost za $\| (a)_c \|_c$.

Propozicija 2.1.1. *Funkcija* $\| \cdot \|_c$ *je norma na* X_c.

Dokaz. Moramo provjeriti vrijedi li svojstva norme:

1. $\| (a)_c \|_c = 0 \Leftrightarrow \| a, c \| = 0$. To vrijedi ako i samo ako su a i c linearno zavisni, tj. $a \in X(\{c\})$, a za tave smo već dokazali da je $(a)_c = (0)_c$.

2. $\| \alpha(a)_c \|_c = \| (\alpha a)_c \|_c = \| \alpha a, c \| =| \alpha | \| a, c \| =| \alpha | \| (a)_c \|_c$ za $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\|(a)_c + (b)_c\|_c = \|(a+b)_c\|_c = \|a+b, c\| \leq \|a, c\| + \|b, c\| = \|(a)_c\|_c + \|(b)_c\|_c$.

□

Teorem 2.1.3. *2-normirani prostor* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *je 2-unitarni prostor ako i samo ako je za svaki* $c \in X, c \neq 0$ $(X_c, \|\cdot\|_c)$ *unitarni prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ 2-unitaran prostor i neka je $c \in X$, $c \neq 0$ proizvoljan vektor. Za proizvoljne točke $(a)_c, (b)_c \in X_c$ prema definiciji norme $\|\cdot\|_c$ i teoremu 2.1.1 slijedi:

$$\begin{aligned}\|(a)_c + (b)_c\|_c^2 + \|(a)_c - (b)_c\|_c^2 &= \|a+b, c\|^2 + \|a-b, c\|^2\\ &= 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2)\\ &= 2(\|(a)_c\|_c^2 + \|(b)_c\|_c^2).\end{aligned}$$

Prema teoremu 2.1.1 zaključujemo da je $(X_c, \|\cdot\|_c)$ unitarni prostor.

Sada pretpostavimo da je za svaki ne-nul vektor $c \in X$, $(X_c, \|\cdot\|_c)$ unitarni prostor. Tada imamo:

$$\begin{aligned}\|a+b, c\|^2 + \|a-b, c\|^2 &= \|(a)_c + (b)_c\|_c^2 + \|(a)_c - (b)_c\|_c^2\\ &= 2\|(a)_c\|_c^2 + \|(b)_c\|_c^2)\\ &= 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2),\end{aligned}$$

to jest za $\|\cdot\|$ vrijedi pravilo paralelograma, pa prema teroemu 2.1.2 zaključujemo da je $(X, \|\cdot\|)$ 2 - unitaran prostor. □

Osim uvjeta iskazanog u teoremu 2.1.2 postoji niz uvjeta koji su nužni i dovoljni da normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ bude unitaran prostor. Navedimo ih:

(a) Za proizvoljne točke $a, b \in X$ takve da je $\|a\| = \|b\|$ i za proizvoljne realne brojeve α i β vrijedi:

$$\|\alpha a + \beta b\| = \|\beta a + \alpha b\|.$$

(b) Iz jednakosti $\|a+b\| = \|a-b\|$ za $a, b \in X$ slijedi $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

(c) Postoji konstanta $\alpha \neq 0, \pm 1$ takva da ako za $a, b \in X$ vrijedi $\|a+b\| = \|a-b\|$ tada je $\|a + \alpha b\| = \|a - \alpha b\|$.

(d) Postoji konstanta $\alpha \neq 0, \pm 1$ takva da ako za $a, b \in X$ vrijedi $\|a\| = \|b\|$ tada je $\|a + \alpha b\| = \|\alpha a + b\|$.

(e) Za $\| a \| = \| b \|, a, b \in X$ slijedi da za svaki realan broj $\alpha \neq 0$ vrijedi $\| \alpha a + \alpha^{-1} b \| \geq \| a + b \|$.

(f) Za proizvoljne vektore $a_1, a_2, a_3 \in X$ takve da je $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ i $\| a_1 \| = \| a_2 \|$slijedi $\| a_1 - a_3 \| = \| a_2 - a_3 \|$.

(g) Za proizvoljne vekotre $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$ takve da je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ i $\| a_1 \| = \| a_2 \|$ i $\| a_3 \| = \| a_4 \|$ slijedi $\| a_1 - a_3 \| = \| a_2 - a_4 \|, \| a_2 - a_3 \| = \| a_1 - a_4 \|$.

(h) Za proizvoljne vektore $a_1, a_2, a_3 \in X$, funkcija $\Phi(a_1, a_2, a_3) = \| a_1 + a_2 + a_3 \|^2 + \| a_1 + a_2 - a_3 \|^2 - \| a_1 - a_2 - a_3 \|^2 - \| a_1 - a_2 + a_3 \|^2$ je uvijek neovisna o a_3.

(i) Za proizvoljne točke $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in X$, $n \geq 3$ takve da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ vrijedi: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \| a_i - a_j \|^2 = 2n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \| a_i \|^2$.

Sada metodom analogije uočavamo koji su nužni i dovoljni uvjeti da 2-normirani prostor $(X, \| \cdot, \cdot \|)$ bude 2 - unitaran prostor. Neka je $c \in X$ proizvoljni ne-nul vektor:

(a') Za proizvoljne vekotre $a, b \in X$ takve da je $\| a, c \| = \| b, c \|$ i za proizvoljne realne brojeve α i β vrijedi:

$$\| \alpha a + \beta b, c \| = \| \beta a + \alpha b, c \|.$$

(b') Iz jednakosti $\| a + b, c \| = \| a - b, c \|$ za $a, b \in X$slijedi $\| a + b, c \|^2 = \| a, c \|^2 + \| b, c \|^2$.

(c') Postoji konstanta $\alpha \neq 0, \pm 1$ takva da ako za $a, b \in X$ vrijedi $\| a + b, c \| = \| a - b, c \|$ onda je $\| a + \alpha b, c \| = \| a - \alpha b, c \|$.

(d') Postoji konstanta $\alpha \neq 0, \pm 1$ takva da ako za $a, b \in X$ vrijedi $\| a, c \| = \| b, c \|$ onda je $\| a + \alpha b, c \| = \| \alpha a + b, c \|$.

(e') Za $\| a, c \| = \| b, c \|, a, b \in X$ slijedi da za svaki realan broj $\alpha \neq 0, \| \alpha a + \alpha^{-1} b, c \| \geq \| a + b, c \|$.

(f') Za proizvoljne vektore $a_1, a_2, a_3 \in X$ takve da je $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ i $\| a_1, c \| = \| a_2, c \|$ slijedi $\| a_1 - a_3, c \| = \| a_2 - a_3, c \|$.

(g') Za proizvoljne vektore $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$ takve da je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ i $\| a_1, c \| = \| a_2, c \|$ i $\| a_3, c \| = \| a_4, c \|$ slijedi $\| a_1 - a_3, c \| = \| a_2 - a_4, c \|, \| a_2 - a_3, c \| = \| a_1 - a_4, c \|$.

(h') Za proizvoljne vekotre $a_1, a_2, a_3 \in X$, funkcija $\Phi\,(a_1, a_2, a_3) = \| a_1 + a_2 + a_3, c \|^2 + \| a_1 + a_2 - a_3, c \|^2 - \| a_1 - a_2 - a_3, c \|^2 - \| a_1 - a_2 + a_3, c \|^2$ je uvijek neovisna o a_3.

(i') Za proizvoljne točke $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in X$, $n \geq 3$ takve da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ vrijedi: $\sum_{i,j=1}^{n} \| a_i - a_j, c \|^2 = 2n \cdot \sum_{i=1}^{n} \| a_i, c \|^2$.

Teorem 2.1.4. *2-normirani prostor* $(X, \| \cdot, \cdot \|)$ *je 2-unitarni prostor ako i samo ako su uvjeti* $(a'), (b'), \cdots, (i')$ *zadovoljeni za svaki ne-nul vektor* $c \in X$.

Dokaz. Prema (a) za $a_c, b_c \in X_c$ $\| a_c \|_c = \| b_c \|_c$ i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \| \alpha a_c + \beta b_c \|_c = \| \beta a_c + \alpha b_c \|_c. \tag{2.3}$$

Uvjet $\| a_c \|_c = \| b_c \|_c$ prelazi u oblik $\| a, c \| = \| b, c \|$, a uvjet (2.3) prelazi u oblika $\| \alpha a + \beta b, c \| = \| \beta a + \alpha b, c \|$, a to je upravo uvjet (a'). Ostali slučajevi se dokazuju na analogan način. □

Koristeći činjenicu da je $\| a, b \| = \| a, \alpha a + b \|$ za proizvoljan realan broj α dolazimo do sljedeće tvrdnje:

Propozicija 2.1.2. *Neka je* $(X, (\cdot, \cdot \mid \cdot))$ *2-unitaran prostor. Za svaki* $a, b, c \in X$ *vrijedi:*

$$\| a + b, b + c \| = \| a - c, b + c \| = \| a + b, a - c \| \tag{2.4}$$
$$\| a + b, b - c \| = \| a + c, b - c \| = \| a + b, a + c \| \tag{2.5}$$
$$\| a - b, b + c \| = \| a + c, b + c \| = \| a - b, a + c \| \tag{2.6}$$
$$\| a - b, b - c \| = \| a - c, b - c \| = \| a - b, a - c \|. \tag{2.7}$$

Dokaz. Znamo da prema propoziciji 1.2.1 za $a, b \in X$ vrijedi $\| a, b \| = \| a, \alpha a + b \|$ za svaki realan broj α. Neka je $\alpha = -1$. Tada uzmajući u obzir svojstva 2-norme imamo:

$$\begin{aligned} \| a + b, b + c \| &= \| a + b, -1 \cdot (a + b) + b + c \| \\ &= \| a + b, -a - b + b + c \| \\ &= \| a + b, -(a - c) \| \\ &= | -1 | \, \| a + b, a - c \| \\ &= \| a + b, a - c \|. \end{aligned}$$

Isto tako:

$$\begin{aligned} \| a + b, b + c \| &= \| b + c, a + b \| \\ &= \| b + c, -1 \cdot (b + c) + a + b \| \\ &= \| b + c, a - c \| \\ &= \| a - c, b + c \|. \end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju (2.4). Analogno, za (2.5) imamo:

$$\begin{aligned}\|a+b, b-c\| &= \|b-c, a+b\| \\ &= \|b-c, -(b-c)+a+b\| \\ &= \|b-c, a+c\| \\ &= \|a+c, b-c\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|a+b, b-c\| &= \|a+b, -(a+b)+b-c\| \\ &= \|a+b, -a-c\| \\ &= \|a+b, -(a+c)\| \\ &= \|a+b, a+c\|.\end{aligned}$$

Tvrdnje (2.6) i (2.7) dokazuju se također analogno.

□

Propozicija 2.1.3. *U 2-unitarnom prostoru vrijedi:*

$$\|a+b, b+c\|^2 = S + 2(a,b \mid c) - 2(a,c \mid b) + 2(b,c \mid a), \tag{2.8}$$

$$\|a+b, b-c\|^2 = S + 2(a,b \mid c) + 2(a,c \mid b) - 2(b,c \mid a), \tag{2.9}$$

$$\|a-b, b+c\|^2 = S - 2(a,b \mid c) + 2(a,c \mid b) + 2(b,c \mid a), \tag{2.10}$$

$$\|va-b, b-c\|^2 = S - 2(a,b \mid c) - 2(a,c \mid b) - 2(b,c \mid a). \tag{2.11}$$

pri čemu je $S = \|a,b\|^2 + \|a,c\|^2 + \|b,c\|^2$.

Uočimo, zbrajanjem (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) dobivamo da vrijedi:

$$\|a+b, b+c\|^2 + \|a+b, b-c\|^2 + \|a-b, b+c\|^2 + \|a-b, b-c\|^2 = 4S. \tag{2.12}$$

Zbrojimo li pak (2.8) i (2.9) te oduzmemo zbroj (2.10) i (2.11) dobivamo:

$$[\|a+b, b+c\|^2 + \|a+b, b-c\|^2] - [\|a-b, b+c\|^2 + \|a-b, b-c\|^2] = 8(a,b \mid c) \tag{2.13}$$

Dakle, u 2-unitarnom prostoru vrijede (2.12) i (2.13). Vrijedi i obrat, to jest ako u 2-normiranom prostoru vrijedi (2.12), tada je taj prostor ujedno i 2-unitarni. Dakle, (2.12) je nužan i dovoljan uvjet da 2-normirani prostor postane 2-unitarni. Dokažimo tu tvrdnju.

Teorem 2.1.5. *2-normirani prostor* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *je 2-unitarni prostor ako i samo ako je tvrdnja (2.12) istinita. 2-skalarni produkt je tada dan s (2.13).*

Dokaz. Ako je X 2-unitarni prostor tada smo u pretodnom postupku dokazali da vrijedi (2.12). Dokažimo obrat.
Pretpostavimo da u 2-normiranom prostoru vrijedi (2.12), to jest da vrijedi:

$$\| a+b, b+c \|^2 + \| a+b, b-c \|^2 + \| a-b, b+c \|^2 + \| a-b, b-c \|^2 = 4\,S.$$

Kada u (2.12) umjesto a stavimo $c+b$, umjesto b stavimo a i umjesto c stavimo $c-b$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&4\,(\| c+b, a \|^2 + \| a, c-b \|^2 + \| c+b, c-b \|^2) \\
&\quad = \| c+b+a, a+c-b \|^2 + \| c+b+a, a-c+b \|^2 \\
&\quad + \| c+b-a, a+c-b \|^2 + \| c+b-a, a-c+b \|^2 \\
&\quad = \| b+(a+c), (a+c)-b \|^2 + \| c+(a+b), a+b-c \|^2 + \| c-(a-b), a-b+c \|^2 \\
&\quad + \| b-(a-c), a-c+b \|^2.
\end{aligned}$$

Sada na svaki od navedenih pribrojnika primijenimo propoziciju (1.2.1) (*ii*). Kada u propoziciji (1.2.1) (*ii*) umjesto a stavimo $a+c$, a umjesto b b dobivamo:

$$\| c+b+a, a+c-b \|^2 = \| (a+c)+b, (a+c)-b \|^2 = (2\,\| a+c, b \|)^2 = 4\,\| a+c, b \|^2.$$

Ako pak u propoziciji (1.2.1) (*ii*) umjesto a uvrstimo $a+b$, a umjesto b uvrstimo c dobivamo:

$$\| c+b+a, a-c+b \|^2 = \| (a+b)+c, (a+b)-c \|^2 = (2\,\| a+b, c \|^2) = 4\| a+b, c \|^2.$$

Uvrstimo li u propoziciju (1.2.1) (*ii*) umjesto a c, a umjesto b uvrstimo $b-a$ dobivamo:

$$\| c+b-a, a+c-b \|^2 = \| c+(b-a), c-(b-a) \|^2 = (2\,\| c, b-a \|)^2 = 4\,\| vc, b-a \|^2.$$

I konačno, ako u propoziciju (1.2.1) (*ii*) umjesto a uvrstimo b, a umjesto b uvrsitmo $c-a$ dobivamo:

$$\| c+b-a, a-c+b \|^2 = \| b+(c-a), b-(c-a) \|^2 = (2\,\| b, c-a \|)^2 = 4\,\| b, c-a \|^2.$$

Kada sve dobiveno uvrstimo u gornju jednakost imamo:

$$\begin{aligned}
&4\,(\| c+b, a \|^2 + \| a, c-b \|^2 + \| c+b, c-b \|^2) \\
&\qquad = 4\,(\| b, a+c \|^2 + \| c, b+a \|^2 + \| c, a-b \|^2 + \| b, a-c \|^2). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Slično, kada u (2.12) umjesto a stavimo $c + a$ i umjesto c stavimo $c - a$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&4\,(\|\,c + a, b\,\|^2 + \|\,c - a, b\,\|^2 + \|\,c + a, c - a\,\|^2)\\
&\quad = \|\,c + a + b, b + c - a\,\|^2 + \|\,c + a + b, b - (c - a)\,\|^2\\
&\quad + \|\,c + a - b, b + c - av\|^2 + \|\,c + a - b, b - c + a\,\|^2\\
&\quad = \|\,(b + c) + a, (b + c) - a\,\|^2 + \|\,a + b + c, b + a - c\,\|^2 + \|\,c - (b - a), b - a + c\,\|^2\\
&\quad + \|\,a - (b - c), b - c + a\,\|^2.
\end{aligned}
$$

Sada na svaki od navedenih pribrojnika primjenimo propoziciju (1.2.1) (*ii*). Kada u propoziciji (1.2.1) (*ii*) umjesto a stavimo $b + c$, a umjesto b stavimo a dobivamo:

$$\|\,c + a + b, b + c - a\,\|^2 = \|\,(b + c) + a, (b + c) - a\,\|^2 = (2\,\|\,b + c, a\,\|)^2 = 4\,\|\,b + c, a\,\|^2.$$

Ako pak u propoziciji (1.2.1) (*ii*) umjesto a uvrstimo $a + b$, a umjesto b uvrstimo c dobivamo:

$$\|\,c + a + b, b - (c - a)\,\|^2 = \|\,(a + b) + c, (a + b) - c\,\|^2 = (2\,\|\,a + b, c\,\|^2) = 4\,\|\,a + b, c\,\|^2.$$

Uvrstimo li u propoziciju (1.2.1) (*ii*) umjesto a c, a umjesto b uvrstimo $b - a$ dobivamo:

$$\|\,c + a - b, b - c + a\,\|^2 = \|\,c - (b - a), c + (b - a)\,\|^2 = (2\,\|\,c, b - a\,\|)^2 = 4\,\|\,c, b - a\,\|^2.$$

I konačno, ako u propoziciju (1.2.1) (*ii*) umjesto b uvrstimo $b - c$ dobivamo:

$$\|\,a - b + c, b - c + a\,\|^2 = \|\,a - (b - c), a + (b - c)\,\|^2 = (2\,\|\,a, b - c\,\|)^2 = 4\,\|\,a, b - c\,\|^2.$$

Kada sve dobiveno uvrstimo u gornju jednakost imamo:

$$
\begin{aligned}
&4\,(\|\,c + a, b\,\|^2 + \|\,c - a, b\,\|^2 + \|\,c + a, c - a\,\|^2)\\
&\qquad\qquad = 4\,(\|\,a, b + c\,\|^2 + \|\,c, b + a\,\|^2 + \|\,c, b - a\,\|^2 + \|\,a, b - c\,\|^2).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Zbrojimo li sada (2.14) i (2.15) imamo:

$$4(\|b, a+c\|^2+\|c, b+a\|^2+\|c, a-b\|^2+\|b, a-c\|^2+4(\|a, b+c\|^2+\|c, b+a\|^2+\|c, b-a\|^2+\|a, b-c\|^2$$

$$= 4(\|c + b, a\|^2 + \|a, c - b\|^2 + \|c + b, c - b\|^2) + 4(\|c + a, b\|^2 + \|c - a, b\|^2 + \|c + a, c - a\|^2$$

$$\|b, a+c\|^2+\|c, b+a\|^2+\|c, a-b\|^2+\|b, a-c)\|^2+\|a, b+c\|^2+\|c, b+a\|^2+\|c, b-a\|^2+\|a, b-c)\|^2$$

$$= \|a, b + c\|^2 + \|a, -(b - c)\|^2 + \|c + b, c - b\|^2 + \|b, a + c\|^2 + (\|b, -(a - c)\|^2 + \|c + a, c - a\|^2$$

$$||c, b + a||^2 + ||c, a - b||^2 + ||c, b + a||^2 + ||c, b - a||^2 = ||c + b, c - b||^2 + ||c + a, c - a||^2$$

$$2||c, a + b||^2 + ||c, a - b||^2 + ||c, -(a - b)||^2 = 4||c, b||^2 + 4||c, a||^2$$

$$2(||c, a + b||^2 + ||c, a - b||^2) = 4(||c, b||^2 + ||c, a||^2)$$

$$||a + b, c||^2 + ||a - b, c||^2 = 2[||a, c||^2 + ||b, c||^2].$$

Prema teoremu 2.1.2 zaključujemo da je to ujedno i 2-unitarni prostor u kojem je 2-skalarni produkt definiran ovako:

$$(a, b \,|\, c) = \frac{1}{4}(\| a + b, c \|^2 - \| a - b, c \|^2).$$

Iskoristimo li sada ponovno tvrdnju (2.12) za vektore $a + b$, $b + c$ i $b - c$ imamo:

$$4\,(\| a + b, b + c \|^2 + \| a + b, b - c \|^2 + \| b + c, b - c \|^2)$$
$$= \| a + 2b + c, 2b \|^2 + \| a + 2b + c, 2c \|^2 + \| a - c, 2b \|^2 + \| a - c, 2c \|^2.$$

Sada na svaki od navedenih pribrojnika primijenimo propoziciju 1.2.1 (i). Kada u propoziciji 1.2.1 (i) umjesto a stavimo $2b$, a umjesto b stavimo $a + c$ dobivamo:

$$\| a + b, 2b \| = \| 2b, a + c \| = \| 2b, 1 \cdot 2b + a + c \|) = \| 2b, 2b + a + c \| = \| a + 2b + c, 2b \|.$$

Kada kvadriramo dobiveni izraz i primijenimo svojstva 2-norme, dobivamo

$$4 \| a + c, b \|^2 = \| a + 2b + c, 2b \|.$$

Slično, ako u propoziciju 1.2.1 (i) umjesto a uvrstimo $2c$, a umjesto b uvrstimo $a + 2b$ dobivamo:

$$\| a + 2b, 2c \| = \| 2c, a + 2b \| = \| 2c, \frac{1}{2} \cdot 2c + a + 2b \| = \| 2c, c + a + 2b \| = \| a + 2b + c, 2c \|.$$

Ako kvadriramo dobiveni izraz i primijenimo svojsta 2-norme, imamo

$$4 \| a + 2b, c \|^2 = \| a + 2b + c, 2c \|^2.$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstava 2-norme dolazimo i do jednakosti:

$$\| a - c, 2b \|^2 = 4 \| a - c, b \|^2.$$

I konačno, ako u propoziciju 1.2.1 (i) umjesto a uvrstimo $2c$, a umjesto b uvrstimo a dobivamo

$$\| a, 2c \| = \| 2c, a \| = \| 2c, \tfrac{-1}{2} \cdot 2c + a \| = \| 2c, -c + a \| = \| a - c, 2c \|.$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstava 2-norme dolazimo do jednakosti:

$$\| a - c, 2c \|^2 = 4 \| a, c \|^2.$$

Kada sve dobivene jednakosti uvrstimo u gornju jednakost imamo

$$\begin{aligned} &4 (\| a + b, b + c \|^2 + \| a + b, b - c \|^2 + \| b + c, b - c \|^2) \\ &\qquad = 4 [\| a + c, b \|^2 + \| a + 2b, c \|^2 + \| a - c, b \|^2 + \| a, c \|^2]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Iskoristimo li pak tvrdnju (2.12) za vekotre $a - b$, $b + c$ i $b - c$ imamo:

$$\begin{aligned} &4 (\| a - b, b + c \|^2 + \| a - b, b - c \|^2 + \| b + c, b - c \|^2) \\ &\qquad = \| a + c, 2b \|^2 + \| a + c, 2c \|^2 + \| a - 2b - c, 2b \|^2 + \| a - 2b - c, 2c \|^2. \end{aligned}$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstva 2-norme dolazimo do jednakosti: $\| a + c, 2b \|^2 = 4 \| a + c, b \|^2$.
Sada ponovno iskoritimo propoziciju 1.2.1 (i). Umjesto a uvrstimo $2c$, a umjesto b uvrstimo $a + c$ i dobivamo:

$$\| a + c, 2c \| = \| 2c, a + c \| = \| 2c, \tfrac{-1}{2} \cdot 2c + a + c \| = \| 2c, a \| = \| a, 2c \|.$$

Kvadriranjem i korištenjem svojvstva 2-norme dobivamo:

$$\| a + c, 2c \|^2 = 4 \| a, c \|^2.$$

Umjesto a uvrstimo $2b$, a umjesto b uvrstimo $a - 2b - c$ u propoziciju 1.2.1 (i) i dobivamo:

$$\| a - 2b - c, 2b \| = \| 2b, a - 2b - c \| = \| 2b, 1 \cdot 2b + a - 2b - c \| = \| 2b, a - c \| = \| a - c, 2b \|.$$

Ponovno kvadriranjem i korištenjem svojstava 2-norme dolazimo do sljedeće jednakosti:

$$\| a - 2b - c, 2b \|^2 = 4 \| a - c, b \|^2.$$

Analognim postupkom ako za a uvrstimo $2c$, a umjesto b uvrstimo $a - 2b - c$ dobivamo;

$$\| a - 2b - c, 2c \| = \| 2c, a - 2b - c \| = \| 2c, \tfrac{1}{2} \cdot 2c + a - 2b - c \| = \| 2c, a - 2b \| = \| a - 2b, c \|.$$

Konačno imamo $\| a - 2b - c \|^2 = 4 \| a - 2, c \|^2$.
Kada sve dobivene jednakosti uvrstimo u gornju jednakost imamo

$$4 (\| a - b, b + c \|^2 + \| a - b, b - c \|^2 + \| b + c, b - c \|^2)$$
$$= 4 [\| a + c, b \|^2 + \| a, c \|^2 + \| a - c, b \|^2 + \| a - 2b, c \|^2]. \tag{2.17}$$

Dakle, sada imamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \| a + b, b + c \|^2 &+ \| a + b, b - c \|^2 + \| b + c, b - c \|^2 \\ &= \| a + c, b \|^2 + \| a + 2b, c \|^2 + \| a - c, b \|^2 + \| a, c \|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| a - b, b + c \|^2 &+ \| a - b, b - c \|^2 + \ |b + c, b - c \|^2 \\ &= \| a + c, b \|^2 + \| a, c \|^2 + \| a - c, b \|^2 + \| a - 2b, c \|^2. \end{aligned}$$

Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo:

$$\| a + b, b + c \|^2 + \| a + b, b - c \|^2 - \| a - b, b + c \|^2 - \| a - b, b - c \|^2 = \| a + 2b, c \|^2 - \| a - 2b, c \|^2.$$

Transformiramo desnu stranu te jednakosti i to tako da u formulu za 2-skalarni produkt stavimo $c = c$, $a = a$ i $b = 2b$ te dobivamo:

$$\| a + 2b, c \|^2 - \| a - 2b, c \|^2 = 4 (a, 2b \mid c) = 8 (a, b \mid c).$$

Drugim riječima, pokazali smo da za 2-skalarni produkt vrijedi (2.13). Time je dokaz teorema gotov. □

Teorem 2.1.6. *2-normirani prostor $(X, \| \cdot, \cdot \|)$ je 2-unitarni prostor ako i samo ako za sve $a, b \in X$, $N(s, t) = \| sa + b, b + tc \|^2$ je kvadratna funkcija po realnim varijablama s i t.*

Dokaz. Neka je $(X; \| \cdot, \cdot \|)$ 2-normirani prostor. Pretpostavimo da je i 2-unitarni prostor.

Tada za sve $a, b \in X$ i realne brojeve s, t slijedi:

$$\begin{aligned}
N(s,t) &= \| sa+b, b+tc \|^2 \\
&= (sa+b, sa+b \mid b+tc) \\
&= (sa, sa+b \mid b+tc) + (b, sa+b \mid b+tc) \\
&= (sa+b, sa \mid b+tc) + (sa+b, b \mid b+tc) \\
&= (sa, sa \mid b+tc) + (b, sa \mid b+tc) + (sa, b \mid b+tc) + (b, b \mid b+tc) \\
&= (b+tc, b+tc \mid sa) + (sa, b \mid b+tc) + (sa, b \mid b+tc) + (b+tc, b+tc \mid b) \\
&= (b, b+tc \mid sa) + (tc, b+tc \mid sa) + 2s\,(a, b \mid b+tc) \\
&+ (b, b+tc \mid b) + (tc, b+tc \mid b) \\
&= (b+tc, b \mid sa) + (b+tc, tc \mid sa) + 2s\,(a, b \mid b+tc) \\
&+ (b+tc, b \mid b) + (b+tc, tc \mid b) \\
&= (b, b \mid sa) + (tc, b \mid sa) + (b, tc \mid sa) + (tc, tc \mid sa) + 2s\,(a, b \mid b+tc) \\
&+ (b, b \mid b) + (tc, b \mid b) + (b, tc \mid b) + (tc, tc \mid b) \\
&= s^2\,(b, b \mid a) + s^2t\,(c, b \mid a) + s^2t\,(b, c \mid a) + s^2t^2\,(c, c \mid a) + 2s\,(a, b \mid b+tc) + t^2\,(c, c \mid b) \\
&= s^2 \| a, b \|^2 + 2s^2t\,(b, c \mid a) + s^2t^2 \| a, c \|^2 + 2s\,(a, b \mid b+tc) + t^2 \| b, c \|^2.
\end{aligned}$$

Prema (2.13) $(a, b \mid b+tc)$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
(a, b \mid b+tc) &= \frac{1}{8}[\| a+b, b+b+tc \|^2 + \| a+b, b-b-tc \|^2] \\
&- \frac{1}{8}[\| a-b, b+b+tc \|^2 + \| a-b, b-b-tc \|^2] \\
&= \frac{1}{8}[\| a+b, 2b+tc \|^2 + \| a+b, -tc \|^2] - \frac{1}{8}[\| a-b, 2b+tc \|^2 + \| a-b, -tc \|^2] \\
&= \frac{1}{8}[\| a+b, 2b+tc \|^2 + \| a+b, tc \|^2] - \frac{1}{8}[\| a-b, 2b+tc \|^2 + \| a-b, tc \|^2].
\end{aligned}$$

Pri čemu, po propoziciji 2.1.3, slijedi:

$$\begin{aligned}
\| a+b, 2b+tc \|^2 &= 4 \| a+b, b+\frac{t}{2}c \|^2 \\
&= 4\,[\| a, b \|^2 + \| a, \frac{t}{2}c \|^2 + \| b, \frac{t}{2}c \|^2 + 2\,(a, b \mid \frac{t}{2}c) - 2\,(a, \frac{t}{2}c \mid b) + 2\,(b, \frac{t}{2}c \mid a)] \\
&= 4 \| a, b \|^2 + t^2 \| a, c \|^2 + t^2 \| b, c \|^2 + 2t^2\,(a, b \mid c) - 4t\,(a, c \mid b) + 4t\,(b, c \mid a).
\end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
\| a+b, tc \|^2 &= (a+b, a+b \mid tc) \\
&= (a, a+b \mid tc) + (b, a+b \mid tc) \\
&= (a+b, a \mid tc) + (a+b, b \mid tc) \\
&= (a, a \mid tc) + (b, a \mid tc) + (a, b \mid tc) + (b, b \mid tc) \\
&= \| a, tc \|^2 + 2\,(a, b \mid tc) + \| b, tc \|^2 \\
&= t^2 \| a, c \|^2 + 2t^2\,(a, b \mid c) + t^2 \| b, c \|^2.
\end{aligned}$$

Isto tako

$$\begin{aligned}
\| a-b, tc \|^2 &= (a-b, a-b \mid tc) \\
&= (a, a-b \mid tc) + (-b, a-b \mid tc) \\
&= (a-b, a \mid tc) - (a-b, b \mid tc) \\
&= (a, a \mid tc) - (b, a \mid tc) - (a.b \mid tc) + (b, b \mid tc) \\
&= \| a, tc \|^2 - 2\,(a, b \mid tc) + \| b, tc \|^2 \\
&= t^2 \| a, c \|^2 - 2t^2\,(a, b \mid c) + t^2 \| b, c \|^2.
\end{aligned}$$

Ponovno, po propoziciji 2.1.3. imamo:

$$\begin{aligned}
\| a-b, 2b+tc \|^2 &= 4 \| a-b, b+\frac{t}{2}c \|^2 \\
&= 4\,[\| a, b \|^2 + \| a, \frac{t}{2}c \|^2 + \| b, \frac{t}{2}c \|^2 - 2\,(a, b \mid \frac{t}{2}c) + 2\,(a, \frac{t}{2}c \mid b) + 2\,(b, \frac{t}{2}c \mid a)] \\
&= 4 \| a, b \|^2 + t^2 \| a, c \|^2 + t^2 \| b, c \|^2 - 2t^2\,(a, b \mid c) + 4t\,(a, c \mid b) + 4t\,(b, c \mid a).
\end{aligned}$$

Konačno dobivamo:

$$
\begin{aligned}
N(s,t) =\; & s^2\| a,b\|^2 + 2s^2t\,(b,c \mid a) + s^2t^2\,\| a,c\|^2 + 2s\cdot\frac{1}{8}\Big[\| a+b, 2b+tc\|^2 + \| a+b, tc\|^2\Big]\\
-\; & 2s\cdot\frac{1}{8}\Big[\| a-b, 2b+tc\|^2 + \| a-b, tc\|^2] + t^2\,\| b,c\|^2\Big]\\
=\; & s^2\,\| a,b\|^2 + 2s^2t\,(b,c \mid a) + s^2t^2\,\| a,c\|^2 + \frac{1}{4}s[4\,\| a,b\|^2 + t^2\,\| b,c\|^2 + t^2\,\| a,c\|^2\\
+\; & 2t^2\,(a,b \mid c) - 4t\,(a,c \mid b) + 4t\,(b,c \mid a) + t^2\,\| a,c\|^2 + 2t^2\,(a,b \mid c) + t^2\,\| b,c\|^2]\\
-\; & \frac{1}{4}s[4\,\| a,b\|^2 + t^2\,\| b,c\|^2 + t^2\,\| a,c\|^2 - 2t^2\,(a,b \mid c) + 4t\,(a,c \mid b) + 4t\,(b,c \mid a)\\
+\; & t^2\,\| a,c\|^2 - 2t^2\,(a,b \mid c) + t^2\| b,c\|^2] + t^2\,\| b,c\|^2\\
=\; & s^2\,\| a,b\|^2 + 2s^2t\,(b,c \mid a) + s^2t^2\,\| a,c\|^2 + s\,\| a,b\|^2 + \frac{1}{4}st^2\,\| b,c\|^2 + \frac{1}{4}st^2\,\| a,c\|^2\\
+\; & \frac{1}{2}t^2s\,(a,b \mid c) - st\,(a,c \mid b) + st\,(b,c \mid a) + \frac{1}{4}t^2s\,\| a,c\|^2 + \frac{1}{2}t^2s\,(a,b \mid c)\\
+\; & \frac{1}{4}t^2s\,\| b,c\|^2 - s\| a,b\|^2 - \frac{1}{4}st^2\,\| b,c\|^2 - \frac{1}{4}st^2\,\| a,c\|^2 + \frac{1}{2}t^2s\,(a,b \mid c)\\
-\; & st\,(a,c \mid b) - st\,(b,c \mid a) - \frac{1}{4}st^2\,\| a,c\|^2 + \frac{1}{2}t^2s\,(a,b \mid c) - \frac{1}{4}st^2\,\| b,c\|^2 + t^2\,\| b,c\|^2\\
=\; & s^2\;\; |a,b\|^2 + 2s^2t\,(b,c \mid a) + s^2t^2\,\| a,c\|^2 + 2t^2s\,(a,b \mid c) - 2st\,(a,c \mid b) + t^2\,\| b,c\|^2,
\end{aligned}
$$

to jest, $N(s,t) = \| sa+b, b+tc\|^2$ je kvadratna funkcija po s i t, pri čemu su s i t realni brojevi.

Obrnuto, pretpostavimo da je $N(s,t) = \| sa+b, b+tc\|^2$ kvadratna funkcija po s i t, pri čemu su s i t realni brojevi. To znači da je oblika:

$$
N(s,t) = ms^2t^2 + ls^2t + ks^2 + dst^2 + et^2 + fst.
$$

Trebamo dokazati da je $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ 2-unitarni prostor.

Uvrštavanjem konkretnih realnih brojeva s i t dobivamo:

$$
\begin{aligned}
N(1,1) &= \| a+b, b+c\|^2\\
N(1,1) &= \| a+b, b-c\|^2\\
N(-1,1) &= \| -a+b, b+c\|^2 = \| a-b, b+c\|^2\\
N(-1-1) &= \| -a+b, b-c\|^2 = \| a-b, b-c\|^2.
\end{aligned}
$$

Zbrojimo li vrijednosti funkcije N u gornjim točkama dobivamo:

$$\begin{aligned}
&N(1,1) + N(1,-1) + N(-1,1) + N(-1,-1) \\
&\qquad = (m + l + k + d + e + f) + (m - l + k + d + e - f) + (m + l + k - d + e - f) \\
&\qquad + (m - l + k - d + e - f) \\
&\qquad = 4m + 4k + 4e \\
&\qquad = 4(m + k + e). \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Isto tako koristeći propoziciju 1.2.1 (i) za $\alpha = 1$

$$N(1,0) = \| a + b, b \|^2 = \| a, b \|^2.$$

Kad u propoziciju 1.2.1 (i) stavimo $\alpha = 1$, $a = b$ i $b = c$ imamo:

$$N(0,1) = \| b, b + c \|^2 = \| b, c \|^2.$$

S druge strane:

$$\begin{aligned}
N(1,0) &= m \cdot 1 \cdot 0 + l \cdot 1 \cdot 0 + k \cdot 1 + d \cdot 1 \cdot 0 + e \cdot 0 + f \cdot 1 \cdot 0 = k \\
N(0,1) &= m \cdot 0 \cdot 1 + l \cdot 0 \cdot 1 + k \cdot 0 + d \cdot 0 \cdot 1 + e \cdot 1 + f \cdot 0 \cdot 1 = e
\end{aligned}$$

Kako je:

$$\begin{aligned}
\frac{N(s,t)}{s^2t^2} = \frac{\| sa + b, b + tc \|^2}{s^2t^2} &= \| a + \frac{b}{s}, \frac{b}{t} + c \|^2 \\
&= \frac{ms^2t^2 + ls^2t + ks^2 + dst^2 + et^2 + fst}{s^2t^2} \\
&= m + \frac{l}{t} + \frac{k}{t^2} + \frac{d}{s} + \frac{e}{s^2} + \frac{f}{st},
\end{aligned}$$

slijedi da je:

$$\begin{aligned}
\| a, c \|^2 &= \lim_{s,t\to+\infty} \| a + \frac{b}{s}, \frac{b}{t} + c \|^2 \\
&= \lim_{s,t\to+\infty} \frac{\| sa + b, b + ta \|^2}{s^2t^2} \\
&= \lim_{s,t\to+\infty} (m + \frac{l}{t} + \frac{k}{t^2} + \frac{d}{s} + \frac{e}{s^2} + \frac{f}{st}) \\
&= m
\end{aligned}$$

Kada u (2.18), tj. u izraz $4(m+k+e) = N(1,1)+N(1,-1)+N(-1,1)+N(-1,-1)$ uvrstimo sve što smo izračunali dobivamo

$$\begin{aligned}
&4(\|a, b\|^2 + \|b, c\|^2 + \|a, c\|^2) \\
&\qquad = \| a + b, b + c \|^2 + \| a + b, b - c \|^2 + \| a - b, b + c \|^2 + \| a - b, b - c \|^2.
\end{aligned}$$

što po teoremu 2.1.5 povlači da je $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ 2- unitaran prostor. □

2.2 Poopćenje 2-skalarnog produkta i 2-norme

Upravo opisani 2-skalarni produkt ima svoje prirodno poopćenje [1, str.229].

Definicija 2.2.1. *Neka je n prirodan broj, X vektorski prostor dimenzije veće ili jednake n. Neka je* $(\cdot,\cdot \mid \cdot,\dots,\cdot)$ *realna funkcija definirana na* $X^{n+1} = X\times X\cdots\times X$ *sa ovim svojstvima:*

1. $(a,a \mid a_2,\dots,a_n) \geq 0$, *pri čemu je* $(a,a \mid a_2,\dots,a_n) = 0$ *ako i samo ako su* $a,a_2,\dots,a_n$ *linearno zavisni vektori,*
2. $(a,b \mid a_2,\dots,a_n) = (b,a \mid a_2,\dots,a_n)$,
3. $(a,b \mid a_2,\dots,a_n) = (a,b \mid a_{i_2},\dots,a_{i_n})$ *za sve permutacije* $(i_2,\dots,i_n)$ *od* $(2,\dots,n)$,
4. *Ako je* $n > 0$, *tada* $(a,a \mid a_2,\dots,a_n) = (a_2,a_2 \mid a_3,\dots,a_n)$,
5. $(\alpha a,b \mid a_2,\dots,a_n) = (a,b \mid a_2,\dots,a_n)$, *za svaki* α *realan broj,*
6. $(a+a',b \mid a_2,\dots,a_n) = (a,b \mid a_2,\dots,a_n) + (a',b \mid a_2,\dots,a_n)$.

Funkcija $(\cdot,\cdot \mid \cdot,\dots,\cdot)$ *naziva se **n-skalarni produkt**, a uređeni par* $(X,(\cdot,\cdot \mid \cdot,\dots,\cdot))$ ***n-unitarni prostor**.*

Kada je $n = 1$, tada govorimo o (klasičnom) skalarnom produktu $(\cdot,\cdot)$. Kada je $n = 2$, tada se radi o upravo razmatranom 2-skalarnom produktu.
Mnoga svojstva koja smo dokazali za 2-skalarni produkt mogu se dokazati i za n-skalarni produkt.
Navedimo prvo jedan primjer n-skalarnog produkta.
Primjer:
Neka je funkcija $(\cdot,\cdot \mid \cdot,\dots,\cdot)$ definirana na X^{n+1} ovako

$$(a,b \mid a_2,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} (a \mid b) & (a \mid a_2) & \dots & (a \mid a_n) \\ (a_2 \mid b) & (a_2 \mid a_2) & \dots & (a_2 \mid a_n) \\ \vdots & & & \\ (a_n \mid b) & (a_n \mid a_2) & \dots & (a_n \mid a_n) \end{vmatrix}.$$

Ova je funkcija jedan n-skalarni produkt.

Od svojstava istaknimo Cauchy - Schwarz- Bunjakovskijevu nejednakost za n-skalarni produkt.

Teorem 2.2.2. *Za* $a,b,a_2,\dots,a_n \in X$ *vrijedi*

$$\mid (a,b \mid a_2,\dots,a_n) \leq \sqrt{(a,a \mid a_2,\dots,a_n)}\sqrt{b,b \mid a_2,\dots,a_n)}.$$

I koncepti norme i 2-norme mogu se generalizirati.
Tako n-**normom** na X nazivamo funkciju $\| \cdot, \ldots, \cdot \|$ na X^n koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\| a_1, \ldots, a_n \| = 0$ ako i samo ako su $a_1, \ldots, a_n$ linearno zavisni,
2. $\| a_1, \ldots, a_n \| = \| a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \|$ za sve permutacije $(i_1, \ldots, i_n)$ od $(1, \ldots, n)$,
3. $\| \alpha a_1, \ldots, a_n \| =| \alpha | \| a_1, \ldots, a_n \|$, za sve realne brojeve α,
4. $\| a_1 + a_1', a_2, \ldots, a_n \| \leq \| a_1, a_2, \ldots, a_n \| + \| a_1', a_2, \ldots, a_n \|$.

Prostor X s ovako definiranom n-normom naziva se n-**normirani prostor**. Svaki n-skalarni produkt prirodno je generiran n-normom ovako:

$$\| a_1, a_2, \ldots, a_n \| := \sqrt{(a_1, a_1 \mid a_2, \ldots, a_n)}.$$

Poglavlje 3

Heronovo preslikavanje

3.1 Heronovo preslikavanje u unitarnim prostorima

U ovom odjeljku prikazat ćemo Heronovo preslikavanje za unitarne prostore i neka svojstva Heronove formule. Potom ćemo definirati 2-skalarni produkt koristeći upravo Heronovo preslikavanje .

Definicija 3.1.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani vektorski prostor.* ***Heronovno preslikavanje*** *je preslikavanje $A : X \times X \times X \to [0, +\infty\rangle$ za koje vrijedi:*

$$A(x, y, z) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{3.1}$$

pri čemu je $a = \| x - y \|$, $b = \| x - z \|$, $c = \| y - z \|$ i $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Koristeći (3.1) algebarskim transformacijama dolazimo do sljedeća dva teorema:

Teorem 3.1.2. *Neka je A Heronovo preslikavanje. Tada:*

1. *$A(x, y, z)$ je invarijantno s obzirom na redoslijed točaka x, y, z.*

2. *$A(x + u, y + u, z + u) = A(x, y, z)$, za svaki $u \in X$.*

3. *$A(px, py, pz) = p^2 \cdot A(x, y, z)$, za svaki realan broj p .*

Dokaz. Pokažimo prvo da je Heronovo preslikavanje A invarijantno s obzirom na redoslijed točaka x, y, z. Drugim riječima pokazat ćemo da vrijedi $A(x, y, z) = A(x, z, y) = A(y, z, x) = A(z, y, x) = A(z, x, y) = A(y, x, z)$.
Koristeći svojstva norme lako se pokaže da vrijedi:

$$\| x - z \| = \| -(z - x) \| = |-1| \| z - x \| = \| z - x \|.$$

Sada koristeći definiciju Heronovnog preslikavanja i asocijativnost zbrajanja i množenja i gore navedenu tvrdnju dobivamo:

$$\begin{aligned}
A(x,y,z)^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) = s(s-b)(s-a)(s-c)\\
&= \frac{\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|}{2}\cdot\left(\frac{\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|}{2}-\|x-z\|\right)\\
&\cdot\left(\frac{\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|}{2}-\|x-y\|\right)\cdot\left(\frac{\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|}{2}-\|z-y\|\right)\\
&= \frac{\|x-y\|+\|x-y\|+\|z-y\|}{2}\cdot\left(\frac{\|x-y\|+\|x-y\|+\|z-y\|}{2}-\|x-z\|\right)\\
&\cdot\left(\frac{\|x-y\|+\|x-y\|+\|z-y\|}{2}-\|x-y\|\right)\cdot\left(\frac{\|x-y\|+\|x-y\|+\|z-y\|}{2}-\|y-z\|\right)\\
&= A(x,z,y)^2.
\end{aligned}$$

Slično se pokaže da vrijede i ostale jednakosti.
Pokažimo sada da vrijedi: $A(x+u,y+u,z+u) = A(x,y,z)$, za svaki $u \in X$.
Prema definiciji Heronovog preslikavanja

$$A(x+u,y+u,z+u)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

pri čemu je $a = \|x+u-(y+u)\| = \|x+u-y-u\| = \|x-y\|$, $b = \|x+u-(z+u)\| = \|x+u-z-u\| = \|x-z\|$, $a = \|y+u-(z+u)\| = \|y+u-z-u\| = \|y-z\|$ i $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.
Uočavamo: $A(x+u,y+u,z+u) = A(x,y,z)$, za svaki $u \in X$. Pogledajmo čemu je jednak s za $A(px,py,pz)$:

$$s = \frac{\|px-py\|+\|px-pz\|+\|py-pz\|}{2} = \frac{\|p(x-y)\|+\|p(x-z)+\ \|p(y-z)\|}{2}.$$

Iskoristimo li svojstva norme dobivamo:

$$s = \frac{|\,p\,|\cdot(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}.$$

Koristeći ponovno svojstva norme i gore navedenu jednakost za s imamo:

$$\begin{aligned}
A(px,py,pz)^2 &= \frac{|p|\,(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}\cdot\left(\frac{|p|\,(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}-|p|\,\|x-y\|\right)\\
&\cdot\left(\frac{|p|\,(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}-|p|\,\|x-z\|\right)\\
&\cdot\left(\frac{|p|\,(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}-|p|\|y-z\|\right)\\
&= p^4\left(\frac{(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}\right)\cdot\left(\frac{(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}-\|x-y\|\right)\\
&\cdot\left(\frac{(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}-\|x-z\|\right)\\
&\cdot\left(\frac{(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|)}{2}-\|y-z\|\right).
\end{aligned}$$

Zaključujemo, $A(x,y,z) = p^2A(x,y,z)$, za svaki realan broj p. □

Formulu (3.1) možemo zapisati i na sljedeći način:

Teorem 3.1.3. *Neka je $(X,\|\cdot\|)$ unitaran prostor i neka je A preslikavanje dano sa (3.1). Tada je:*

$$\begin{aligned}
A(x,y,z) &= \frac{1}{4}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{-(a^2-b^2-c^2)^2+4b^2c^2}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Neka je A Heronovo preslikavanje, tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
A(x,y,z) &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}\\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)]\cdot[(a-b+c)(-(a-b)+c)]}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-c^2)\cdot(c^2-(a-b)^2)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+2ab-c^2)\cdot(c^2-a^2+2ab-b^2)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}.
\end{aligned}$$

Izraz pod korijenom u zadnjem retku možemo grupirati na sljedeći način:

$$= \frac{1}{4}\sqrt{-(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2) + 4b^2c^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{-(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2}.$$

$\square$

U nastavku ovog poglavlja A označava Heronovo preslikavanje dano sa (3.1).

Teorem 3.1.4. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *unitaran prostor. Tada vrijedi:*

1. $A(x,y,z) = A(x,y,0)^2 + A(0,y,z)^2 + A(x,0,z)^2 + \frac{1}{2}[((x \mid z)(y \mid z) - (x \mid y)\|z\|^2)$
$+ ((y \mid x)(z \mid x) - (y \mid z)\|x\|^2) + ((z \mid y)(x \mid y) - (z \mid x)\|y\|^2)]]^{\frac{1}{2}}$,
2. $A(x,y,0) = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2\|y\|^2 - (x \mid y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$,
3. $A(x,y,0) = A(x,-y,0)$,
4. $A(x,x,0) = A(x,0,0) = 0$.

Dokaz. Prema teoremu 3.1.3 i po definiciji Heronovog preslikavanja imamo:

$$\begin{aligned}
A(x,y,z) = {} & \frac{1}{4}[-((\|x-y\|^2)^2 + (\|x-z\|^2)^2 + (\|y-z\|^2)^2) + 2\|x-y\|^2\|x-z\|^2 \\
& + 2\|x-y\|^2\|y-z\|^2 + 2\|y-z\|^2\|x-z\|^2]^{\frac{1}{2}} \\
= {} & \frac{1}{4}[-[(x-y \mid x-y)^2 + (x-z \mid x-z)^2 + (y-z \mid y-z)^2] \\
& + 2(x-y \mid x-y)\cdot(x-z)(x-z) + 2(x-y \mid x-y)(y-z \mid y-z) \\
& + 2(y-z \mid y-z)(x-z \mid x-z)]^{\frac{1}{2}} \\
= {} & \frac{1}{4}[-[((x \mid x) - 2(x \mid y) + (y \mid y))^2 + ((x \mid x) - 2(x \mid z) + (z \mid z))^2 + ((y \mid y) \\
& - 2(y \mid z) + (z \mid z))^2] + 2(((x \mid x) - 2(x \mid y) + (y \mid y))\cdot((x \mid x) - 2(x \mid z) + (z \mid z))) \\
& + 2((x \mid x) - 2(x \mid y) + (y \mid y))\cdot((y \mid y) - 2(y \mid z) + (z \mid z))) \\
& + 2(((y \mid y) - 2(y \mid z) + (z \mid z))\cdot((x \mid x) - 2(x \mid z) + (z \mid z)))]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}[-[(x \mid x)^2 - 4\,(x \mid x)(x \mid y) + 4\,(x \mid y)^2 + 2\,(x \mid x)(y \mid y)\\
&- 4\,(x \mid y)(y \mid y) + (x \mid x)^2 - 4\,(x \mid x)\,(x \mid z) + 4\,(x \mid z)^2 + 2\,(x \mid x)\,(z \mid z)\\
&- 4\,(x \mid z)\,(z \mid z) + (z \mid z)^2 + (y \mid y)^2 - 4\,(y \mid y)\,(y \mid z) + 4\,(y \mid z)^2 + 2\,(y \mid y)\,(z \mid z)\\
&- 4\,(y \mid z)\,(z \mid z) + (z \mid z)^2] + 2\,(x \mid x)\,(x \mid x) - 4\,(x \mid x)(x \mid z) + 2\,(x \mid x)\,(z \mid z)\\
&- 4\,(x \mid y)\,(x \mid x) + 8\,(x \mid y)\,(x \mid z) - 4\,(x \mid y)\,(z \mid z) + 2\,(y \mid y)\,(x \mid x)\\
&- 4\,(y \mid y)\,(x \mid z) + 2\,(y \mid y)\,(z \mid z) + 2\,(x \mid x)\,(y \mid y) - 4\,(x \mid x)\,(y \mid z) + 2\,(x \mid x)\,(z \mid z)\\
&- 4\,(x \mid x)\,(y \mid y) + 8\,(x \mid y)\,(y \mid z) - 4\,(x \mid y)\,(z \mid z) + 2\,(y \mid y)\,(y \mid y)\\
&- 4\,(y \mid y)\,(y \mid z) + 2\,(y \mid y)\,(z \mid z) + 2\,(y \mid y)\,(x \mid x) - 4\,(y \mid y)\,(x \mid z) + 2\,(y \mid y)\,(z \mid z)\\
&- 4\,(y \mid z)\,(x \mid x) + 8\,(y \mid z)\,(x \mid z) - 4\,(y \mid z)\,(z \mid z) + 2\,(z \mid z)\,(x \mid x) - 4\,(z \mid z)\,(x \mid z)\\
&+ 2\,(z \mid z)\,(z \mid z)]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{4}[-\|x\|^4 + 4\,\|x\|^2(x \mid y) - 4\,(x \mid y)^2 - 2\,\|x\|^2\|y\|^2 + 4\,(x \mid y)\,\|y\|^2 - \|y\|^4 - \|x\|^4\\
&+ 4\,\|x\|^2(x \mid z) - 4\,(x \mid z)^2 - 2\,\|x\|^2\|z\|^2 + 4\,(x \mid z)\,\|z\|^2 - \|z\|^4 - \|y\|^4 + 4\,\|y\|^2(y \mid z) - 4\,(y \mid z)^2\\
&- 2\,\|y\|^2\|z\|^2 0 + 4\,(y \mid z)\,\|z\|^2 - \|z\|^4 + 2\,\|x\|^4 - 4\,\|x\|^2(x \mid z) + 2\,\|x\|^2\|z\|^2 - 4(x \mid y)\,\|x\|^2\\
&+ 8\,(x \mid y)\,(x \mid z) - 4\,(x \mid y)\,\|z\|^2 + 2\,\|y\|^2\|x\|^2 - 4\,\|y\|^2(x \mid z) + 2\,\|y\|^2\|z\|^2 + 2\,\|x\|^2\|y\|^2\\
&- 4\|x\|^2(y \mid z) + 2\,\|x\|^2\|z\|^2 - 4\,(x \mid y)\,\|y\|^2 + 8\,(x \mid y)\,(y \mid z) - 4\,(x \mid y)\,\|z\|^2 + 2\,\|y\|^4\\
&- 4\|y\|^2(y \mid z) + 2\,\|y\|^2\,\|z\|^2 + 2\,\|y\|^2\,\|x\|^2 - 4\,\|y\|^2(x \mid z) + 2\,\|y\|^2\,\|z\|^2 - 4\,(y \mid z)\|x\|^2\\
&+ 8\,(y \mid z)\,(x \mid z) - 4\,(y \mid z)\,\|z\|^2 + 2\,\|z\|^2\,\|x\|^2 - 4\,\|z\|^2(x \mid z) + 2\,\|z\|^4]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{4}[-4\,(x \mid y)^2 - 4\,(x \mid z)^2 - 4\,(y \mid z)^2 - 8\,\|z\|^2(x \mid y) - 8\,\|x\|^2(y \mid z) - 8\,\|y\|^2(x \mid z)\\
&+ 4\,\|x\|^2\,\|z\|^2 + 4\,\|y\|^2\,\|x\|^2 + 4\,\|y\|^2\,\|z\|^2 + 8\,(x \mid y)\,(x \mid z) + 8\,(x \mid y)\,(y \mid z) + 8\,(y \mid z)\,(x \mid z)]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\,[\|x\|^2\,\|y\|^2 - (x \mid y)^2 + \|y\|^2\,\|z\|^2 - (y \mid z)^2 + \|z\|^2\,\|x\|^2 - (x \mid z)^2\\
&- 2\,[((x \mid y)\,(y \mid z) - (x \mid y)\,\|z\|^2) + ((y \mid x)\,(z \mid x) - (y \mid z)\,\|x\|^2) + ((z \mid y)\,(x \mid y) - (z \mid x)\,\|y\|^2)]]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi (2), (3) i (4), a koristeći tvrdnju (2) dolazimo i do tvrdnje (1). □

Korolar 3.1.1. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *unitarni prostor. Tada:*

$$A(x, y, z)^2 + A(x, y - z)^2 = 2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x \mid z)\,(y \mid z) - (x \mid y)\|z\|^2.$$

Dokaz. Promatrajući (1) i (3) teorema 3.1.4 i koristeći invarijantnost Heronovog preslikavanja s obzirom na redoslijed točaka dolazimo do:

$$\begin{aligned}
A(x,y,z)^2 &+ A(x,y,-z)^2 = A(x,y,0)^2 + A(0,y,z)^2 + A(x,0,z)^2 + \frac{1}{2}[((x \mid z)(y \mid z) - (x \mid y)\|z\|^2) \\
&+ ((y \mid x)(z \mid x) - (y \mid z)\|x\|^2) + ((z \mid y)(x \mid y) - (z \mid x)\|y\|^2)] + A(x,y,0)^2 \\
&+ A(0,y,-z)^2 + A(x,0,-z)^2 + \frac{1}{2}[((x \mid -z)(y \mid -z) - (x \mid y)\|z\|^2) \\
&+ ((y \mid x)(z \mid x) - (y \mid -z)\|x\|^2) + ((-z \mid y)(x \mid y) - (-z \mid x)\|y\|^2)] \\
&= 2\,[A(x,y,0)^2 + A(0,y,z)^2 + A(x,0,z)^2] + (x \mid z)(y \mid z) - (x \mid y)\|z\|^2.
\end{aligned}$$

□

Korolar 3.1.2. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ unitarni prostor. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}
A\ &(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 - A(x-y, y+z, 0)^2 - A(x-y, y-z, 0)^2 \\
&= 2\,((x \mid y)\|z\|^2 - (x \mid z)(y \mid z))
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
A\ &(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 + A(x-y, y+z, 0)^2 + A(x-y, y-z, 0)^2 \\
&= 4\,(A(x,y,0)^2 + A(0,y,z)^2 + A(x,0,z)^2).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dokaz. Za Heronovo preslikavanje A vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
A(x+y, y+z, 0) &= A(x,-y,z), \\
A(x+y, y-z, 0) &= A(x,-y,-z), \\
A(x-y, y+z, 0) &= A(x-y, -z-y, 0) = A(x,y,-z), \\
A(x-y, y-z, 0) &= A(x-y, z-y, 0) = A(x,y,z).
\end{aligned}$$

Pokažimo istinitost prve nejednakosati. Ostale jednakosti dokazuju se na sličan način. Prema definiciji Heronovog preslikavanja $A(x+y, y+z, 0) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemu je

$$\begin{aligned}
a &= \|x + y - (y - z)\| = \|x - z\|, \\
b &= \|x + y - 0\| = \|x + y\|, \\
c &= \|y + z - 0\| = \|y + z\|, \\
s &= \frac{a+b+c}{2}.
\end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je $A(x,-y,z) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemu je

$$\begin{aligned}
a &= \|x - (-y)\| = \|x + y\|, \\
b &= \|x - z\|, \\
c &= \|-y-z\| = \|-(y+z)\| = |-1|\,\|y+z\| = \|y+z\|, \\
s &= \frac{a+b+c}{2}.
\end{aligned}$$

Iskoristimo li asocijativnost zbrajanja i množenja vidimo da vrijedi $A(x+y, y+z, 0) = A(x, -y, z)$.
Koristeći korolar 3.1.1 i gore navedene jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
&A(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 - A(x-y, y+z, 0)^2 - A(x-y, y-z, 0)^2 \\
&\quad = A(x, -y, z)^2 + A(x, -y, -z)^2 - A(x, y, -z)^2 - A(x, y, z)^2 \\
&\quad = 2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] - [A(x, y, z)^2 + A(x, y, -z)^2] \\
&\quad = 2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x \mid z)(-y \mid z) - (x \mid -y)\,\|z\|^2 \\
&\quad - \;[2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x \mid z)(y \mid z) - (x \mid y)\,\|z\|^2] \\
&\quad = 2\,[(x \mid y)\,\|z\|^2 - (x \mid z)\,(y \mid z)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 + A(x-y, y+z, 0)^2 + A(x-y, y-z, 0)^2 \\
&\quad = A(x, -y, z)^2 + A(x, -y, -z)^2 + A(x, y, -z)^2 + A(x, y, z)^2 \\
&\quad = 2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + A(x, y, z)^2 + A(x, y, -z)^2] \\
&\quad = 2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x \mid z)\,(-y \mid z) - (x \mid -y)\,\|z\|^2 \\
&\quad + \;[2\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x \mid z)\,(y \mid z) - (x \mid y)\,\|z\|^2] \\
&\quad = 4\,[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2].
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.1.5. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *unitaran prostor. Tada za 2-skalarni produkt* $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$ *definiran u teoremu 1.1.2 vrijedi*

$$(x, y \mid z) = \frac{1}{2}\,[A(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 - A(x-y, y+z, 0)^2 - A(x-y, y-z, 0)^2].$$

Za odgovarajuću 2-normu vrijedi: $\|x, y\| = 2\,A(x, y, 0)$.

Dokaz. Koristeći (3.2) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\,A(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 - A(x-y, y+z, 0)^2 - A(x-y, y-z, 0)^2] \\
&\quad = \frac{1}{2} \cdot 2\,\Big((x \mid y)\,\|z\|^2 - (x \mid z)\,(y \mid z)\Big) = \Big((x \mid y)\,\|z\|^2 - (x \mid z)\,(y \mid z)\Big) = (x, y \mid z).
\end{aligned}$$

Prema definiciji 2-norme i 2-skalarnog produkta vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|x, y\| &= \sqrt{(x, x \mid y)} \\
&= \sqrt{(x \mid x)\,\|y\|^2 - (x \mid y)\,(x \mid y)} \\
&= \sqrt{\|x\|^2\,\|y\|^2 - (x \mid y)^2},
\end{aligned}$$

što je po teoremu 3.1.4 jednako $A(x, y, 0)$. □

3.2 Superaditivnost i monotonost 2-normi generiranih sa skalarnim produktom

Neka je X realan vektorski prostor i $(\cdot \mid \cdot)_i$ $(i = 1, 2)$ skalarni produkti na X. Ti skalarni produkti generiraju 2-skalarne produkte $(\cdot, \cdot \mid \cdot)_i : X^3 \to \mathbb{R}$ i 2-norme $\|\cdot, \cdot\|_i : X^2 \to \mathbb{R}$ ovako:

$$(a, b \mid c)_i = (a \mid b)_i \| c \|_i^2 - (a \mid c)_i (b \mid c)_i \tag{3.4}$$

i

$$\| a, b \|_i = [(a, a \mid b)_i]^{\frac{1}{2}} = [\| a \|_i^2 \| b \|_i^2 - (a \mid b)_i^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Definiramo novu funkciju kao zbroj dva skalarna produkta. Nju ćemo označavati s $(\cdot \mid \cdot)_3$. Dakle,

$$(\cdot \mid \cdot)_3 = (\cdot \mid \cdot)_1 + (\cdot \mid \cdot)_2$$

Dokažimo da je $(\cdot \mid \cdot)_3$ također skalarni produkt.

Dokaz. $(x \mid x)_3 \geq 0 \iff (x \mid x)_1 + (x \mid x)_2 \geq 0$. Budući da su $(\cdot \mid \cdot)_1$ i $(\cdot \mid \cdot)_2$ skalarni produkti navedena nejednakost vrijedi za svaki elementi $x \in X$.

$(x \mid y)_3 = (x \mid y)_1 + (x \mid y)_2 = (y \mid x)_1 + (y \mid x)_2 = (y \mid x)_3$ za svaki $x, y \in X$.

$(\alpha x \mid y)_3 = (\alpha x \mid y)_1 + (\alpha x \mid y)_2 = \alpha [(x \mid y)_1 + (x \mid y)_2] = \alpha (x \mid y)_3$ za svaki $x, y \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(x + y \mid z)_3 = (x + y \mid z)_1 + (x + y \mid z)_2 = (x \mid z)_1 + (y \mid z)_1 + (x \mid z)_2 + (y \mid z)_2 = [(x \mid z)_1 + (x \mid z)_2] + [(y \mid z)_1 + (y \mid z)_2] = (x \mid z)_3 + (y \mid z)_3$ za svaki $x, y, z \in X$. □

Za skalarni produkt $(\cdot, \cdot)_3$ imamo i odgovarajući 2-skalarni produkt $(\cdot, \cdot \mid \cdot)_3$ kao i odgovarajuću 2-normu $\|\cdot, \cdot\|_3$ definiranu pomoću (3.4) i (3.5).

Teorem 3.2.1. *Za 2-normu $\| \cdot, \cdot \|_3$ definiranu na gore naveden način vrijedi:*

$$\| a, b \|_3 \geq \| a, b \|_1 + \| a, b \|_2 \tag{3.6}$$

za sve $a, b \in X$. Tvrdnju ovog teorema možemo smatrati nekom vrstom superaditivnosti norme.

Dokaz. Za $a, b \in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\| a, b \|_3 &= \| a \|_3^2 \| b \|_3^2 - (a \mid b)_3^2 \\
&= (\| a \|_1^2 + \| a \|_2^2) (\| b \|_1^2 + \| b \|_2^2) - [(a \mid b)_1 + (a \mid b)_2]^2 \\
&= \| a \|_1^2 \| b \|_1^2 + \| a \|_1^2 \| b \|_2^2 + \| a \|_2^2 \| b \|_1^2 + \| a \|_2^2 \| b \|_2^2 - (a \mid b)_1^2 - 2\,(a \mid b)_1\,(a \mid b)_2 - (a \mid b)_2^2 \\
&= \| a, b \|_1^2 + \| a, b \|_2^2 + \| a \|_1^2 \| b \|_2^2 - 2\,(a \mid b)_1 (a \mid b)_2 + \| a \|_2^2 \| b \|_1^2.
\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je:

$$\| a \|_1^2 \| b \|_2^2 - 2(a \mid b)_1\,(a \mid b)_2 + \| a \|_2^2 \| b \|_1^2 \geq 2 \| a, b \|_1 \| a, b \|_2. \tag{3.7}$$

Promotrimo prvo sljedeću nejednakost:

$$(mn - pq)^2 \geq (m^2 - p^2)\,(n^2 - q^2) \tag{3.8}$$

Nejednakost (3.8) ekvivalentna je s:

$$m^2 n^2 - 2mnpq + p^2 q^2 \geq m^2 n^2 + p^2 q^2 - m^2 q^2 - n^2 p^2$$

što je očito ekvivalentno s:

$$(mn - np)^2 \geq 0.$$

Zaključujemo da nejednakost (3.8) vrijedi za sve realne brojeve m, n, p, q.
Zamijenimo li sada u nejednakosti (3.8) m sa $\| a \|_1 \| b \|_1$, n sa $\| a \|_2 \| b \|_2$, p sa $(a \mid b)_1$ i q sa$(a \mid b)_2$ dobivamo sljedeću nejednakost:

$$(\| a \|_1^2 \| b \|_1^2 - (a \mid b)_1^2)\,(\| a \|_2^2 \| b \|_2^2 - (a \mid b)_2^2) \leq (\| a \|_1 \| b \|_1 \| a \|_2 \| b \|_2 - (a \mid b)_1\,(a \mid b)_2)^2.$$

Iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
2[\| a \|_1^2 \| b \|_1^2 \; - \; (a \mid b)_1^2)\,(\| a \|_2^2 \| b \|_2^2 - (a \mid b)_2^2)]^{\frac{1}{2}} & \\
&\leq 2 \mid (\| a \|_1 \| b \|_1 \| a \|_2 \| b \|_2 - (a \mid b)_1\,(a \mid b)_2) \mid \\
&= 2(\| a \|_1 \| b \|_1 \| a \|_2 \| b \|_2 - (a \mid b)_1\,(a \mid b)_2)
\end{aligned}$$

Prema Cauchy - Schwarz - Bunjakovski nejdnakosti u unitarnim prostorima vrijedi

$$\| a \|_i \| b \|_i \geq (a \mid b)_i, i = 1, 2.$$

Konačno, promatrajući nejdnakost

$$2(\| a \|_1 \| b \|_1 \| a \|_2 \| b \|_2 - (a \mid b)_1\,(a \mid b)_2) \leq \| a \|_1^2 \| b \|_2^2 - 2\,(a \mid b)_1\,(a \mid b)_2 + \| a \|_2^2 \| b \|_1^2,$$

koja je ekvivalentna s

$$(\| a \|_1 \| b \|_2 - \| a \|_2 \| b \|_1)^2 \geq 0$$

i nejednakost (3.7) slijedi i uz to je

$$\| a, b \|_3^2 \geq \| a, b \|_1^2 + \| a, b \|_2^2 + 2 \| a, b \|_1 \| a, b \|_2 = (\| a, b \|_1 + \| a, b \|_2)^2,$$

što pokazuje da nejednakost (3.6) vrijedi. $\square$

Definicija 3.2.2. *Za dva skalarna produkta* $(\cdot \mid \cdot)_1$ *i* $(\cdot \mid \cdot)_2$ *na* X *vrijedi* $(\cdot \mid \cdot)_2 > (\cdot \mid \cdot)_1$ *ako je* $\| x \|_2 > \| x \|_1, \forall x \in X \backslash \{0\}$.

Definiramo novo preslikavanje

$$(\cdot \mid \cdot)_{2,1} = (\cdot \mid \cdot)_2 - (\cdot \mid \cdot)_1. \tag{3.9}$$

Ako je $(\cdot \mid \cdot)_2 > (\cdot \mid \cdot)_1$, tada je $(\cdot \mid \cdot)_{2,1}$ skalarni produtk na X.

Dokaz. $(x \mid x)_{2,1} = (x \mid x)_2 - (x \mid x)_1 \geq 0$ za svaki $x \in X$ jer je $(x \mid x)_2 > (x \mid x)_1$ i jer su $(\cdot \mid \cdot)_1$ i $(\cdot \mid \cdot)_2$ dva skalarna produkta.

$(x \mid y)_{2,1} = (x \mid y)_2 - (x \mid y)_1 = (y \mid x)_2 - (y \mid x)_1 = (y \mid x)_{2,1}$ za svaki $x, y \in X$.

$(\alpha x \mid y)_{2,1} = (\alpha x \mid y)_2 - (\alpha x \mid y)_1 = \alpha[(x \mid y)_2 - (x \mid y)_1] = \alpha(x \mid y)_{2,1})$ za svaki $x, y \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(x + y \mid z)_{2,1} = (x + y \mid z)_2 - (x + y \mid z)_1) = (x \mid z)_2 + (y \mid z)_2 - [(x \mid z)_1 + (y \mid z)_1] = (x \mid z)_{2,1} + (y \mid z)_{2,1}$ za svaki $x, y, z \in X$. $\square$

Teorem 3.2.3. *Neka je* $(\cdot, \cdot)_2 > (\cdot, \cdot)_1$. *Tada za svaki* $a, b \in X$ *vrijedi*

$$\| a, b \|_2 \geq \| a, b \|_1. \tag{3.10}$$

Odnosno, preslikavanje $\| \cdot, \cdot \|$ *je padajuće kao preslikavanje generirano skalarnim produktom.*

Dokaz. Jednakost (3.9) povlači da je

$$(\cdot \mid \cdot)_2 = (\cdot \mid \cdot)_{2,1} + (\cdot \mid \cdot)_1.$$

Sada, primijenimo li teorem 3.2.1 zaključujemo

$$\| a, b \|_2 \geq \| a, b \|_{2,1} + \| a, b \|_1 \geq \| a, b \|_1,$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti koristili nenegativnost norme $\| \cdot, \cdot \|_{2,1}$. $\square$

U nastavku poglavlja navest ćemo nekoliko primjera 2-normi generiranih skalarnim produktom koji zadovoljava nejednakost (3.10).

Primjer 1:
Neka je $A : H \to H$ pozitivno definiran linearni operator na Hilbertovom prostoru $(H, (\cdot \mid \cdot))$ nad poljem $\mathbb{R}$ i neka postoji $m > 0$ takav da A zadovoljava sljedeću relaciju:

$$(Ax \mid x) > m\| x \|^2, \tag{3.11}$$

za svaki $x \in H \backslash \{0\}$.
Preslikavanja $(\cdot \mid \cdot)_A, (\cdot \mid \cdot)_m : H \times X \to \mathbb{R}$ definirana na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (x \mid y)_A &= (Ax \mid y), \\ (x \mid y)_m &= m\,(x \mid y), \end{aligned}$$

za svaki $x, y \in H$, su skalarni produkti na H i kako je $(\cdot \mid \cdot)_A > (\cdot \mid \cdot)_m$, po (3.11) za $x \in H \backslash \{0\}$ imamo:

$$\| x \|_A = \sqrt{(Ax \mid x)} > \sqrt{m \| x \|^2} = \| x \|_m.$$

Sada možemo konstruirati 2-skalarne produkte $(\cdot, \cdot \mid \cdot)_A, (\cdot, \cdot \mid \cdot)_m : H^3 \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (x, y \mid z)_A &= (Ax \mid y)\,(Az \mid z) - (Ax \mid z)\,(Ay \mid z), \\ (x, y \mid z)_m &= m^2[(x \mid y)\,\| z \|^2 - (x \mid z)\,(y \mid z)], \end{aligned}$$

kao i odgovarajuće 2-norme

$$\begin{aligned} \| x, y \|_A &= [(Ax \mid x)\,(Ay \mid y) - (Ax \mid y)^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \| x, y \|_m &= m\,[\| x \|^2 \, \| y \|^2 - (x \mid y)^2] = m \, \| x, y \|. \end{aligned}$$

Uočimo, iskoristimo li teorem 3.2.3 vidimo da vrijedi:

$$\| x, y \|_A \geq m \, \| x, y \| \tag{3.12}$$

Primjer 2:
Neka je A strogo pozitivan linearni operator na H, $A > 0$, koji zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$(Ax, x) < M \, \| x \|^2 \tag{3.13}$$

za svaki $x \in H \backslash \{0\}$, pri čemu je $M > 0$ konstanta. Slično kao u primjeru 1 možemo zaključiti da vrijed nejednakosti:

$$\| x, y \|_A \leq M \| x, y \| \tag{3.14}$$

za svaki $x, y \in H$.

Primjer 3:
Neka je $A : H \to H$ ograničeni linearni operator na Hilbertovom prostoru $(H, (\cdot \mid \cdot))$ i neka je

$$\| A \| = \sup \{ \| Ax \| : \| x \| = 1 \}$$

norma od A. Pretpostavimo još da je A injektivno preslikavanje tj. da $Ax = 0$ povlači $x = 0$. Preslikavanje $[\cdot \mid \cdot]_A : H \times H \to \mathbb{R}$ definirano s

$$[x \mid y]_A = (Ax \mid Ay)$$

je skalarni produkt na H koji generira normu $||| x |||_A = \| Ax \|$, $\forall x \in H$.
Možemo konstruirati i 2-skalarni produkt povezan s $[\cdot \mid \cdot]_A$ na sljedeći način:

$$[x, y \mid z]_A = (Ax \mid Ay) \| Az \|^2 - (Ax \mid Az)(Ay \mid Az),$$

kao i pripadnu 2- normu

$$||| x, y |||_A = [\| Ax \|^2 \| Ay \|^2 - (Ax \mid Ay)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Budući da je A ograničen, imamo:

$$||| x |||_A = \| Ax \| \leq \| A \| \| x \| = \sqrt{\| A \|^2 \| x \|^2} = \sqrt{(x \mid x)_{\| A \|^2}} = \| x \|_{\| A \|^2}$$

i tada je $[\cdot \mid \cdot]_A \leq (\cdot \mid \cdot)_{\| A \|^2}$. Iskoristimo li ponovno teorem 3.2.3, zaključujemo da je

$$||| x, y |||_A \leq \| A \|^2 \| x, y \| \tag{3.15}$$

$\forall x, y \in H$.

Teorem 3.2.4. *Neka je $(X, \| \cdot \|)$ unitarni prostor i neka su $x, y, z \in X$ takvi da je $x \neq y \neq z$. Definiramo*

$$\cos \theta = \frac{(x - y, y - z)}{\| x - y \| \| y - z \|} \tag{3.16}$$

za svaki $\theta \in [0, \pi\rangle$.
Tada vrijedi:

$$A(x, y, z) = \frac{\| x - y \| \| y - z \| \sin \theta}{2}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Po teoremu 3.1.2 znamo da u normiranom prostoru za sve $a, b, c \in X$ vrijedi

$$A(a, b, c) = A(a - b, b - c, 0),$$

dok po teoremu 3.1.4 (2.) znamo da u svakom unitarnom prostoru je

$$A^2(w, u, 0) = \frac{1}{4}(\| w \|^2 \| u \|^2 - (w, u)^2),$$

za sve $w, u \in X$.
Sada imamo

$$\begin{aligned} A^2(y, x, z) &= A^2(x - y, y - z, 0) \\ &= \frac{1}{4}(\| x - y \|^2 \| y - z \|^2 - (x - y, y - z)^2). \end{aligned}$$

Iz 3.16 slijedi

$$(x - y, y - z) = \| x - y \| \| y - z \| \cos \theta,$$

primjenom te jednakosti dolazimo do

$$\begin{aligned} A^2(x, y, z) &= \frac{1}{4}[\, \| x - y \|^2 \| y - z \|^2 - (\| x - y \| \| y - z \| \cos \theta)^2] \\ &= \frac{1}{4}[\| x - y \|^2 \| y - z \|^2 (1 - \cos^2 \theta)] \\ &= \frac{1}{4} \| x - y \|^2 \| y - z \|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

U nastavku poglavlja istaknut ćemo neka svojstva superaditivnosti i monotonosti Heronovog preslikavanja u unitarnim prostorima.

Teorem 3.2.5. *Neka su* $(\cdot \mid \cdot)_1, (\cdot \mid \cdot)_2$ *dva skalarna produkta na X i neka je* $(\cdot \mid \cdot)_3 = (\cdot \mid \cdot)_1 + (\cdot \mid \cdot)_2$. *Tada za sve* $x, y, z \in X$ *vrijedi:*

$$A_3(x, y, z) \geq A_1(x, y, z) + A_2(x, y, z), \tag{3.18}$$

pri čemu je $A_i(x, y, z) = [s_i(s_i - a_i)(s_i - b_i)(s_i - c_i)]^{\frac{1}{2}}$, $a_i = \| x - y \|_i$, $b_i = \| x - z \|_i$, $c_i = \| y - z \|_i$ *i* $s_i = \frac{a_i + b_i + c_I}{2}$, $i = 1, 2, 3$ *iz čega slijedi da je Heronovo preslikavanje superaditivno kao preslikavanje koje ovisi o skalarnom produktu koji ga generira.*

Dokaz. Uz gore navedene oznake slijedi:

$$\begin{aligned} A_i^2(x,y,z) &= A_i^2(x-y,y-z,0) \\ &= \frac{1}{4}(\|\,x-y\,\|_i^2\,\|\,y-z\,\|_i^2 - (x-y,y-z)_i^2) \\ &= \frac{1}{4}\|\,x-y,y-z\,\|_i^2. \end{aligned}$$

Tada je $A_i(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\|\,x-y,y-z\,\|_i$, $i = 1,2,3$, gdje je $\|\cdot,\cdot\|_i$ kanonski zapis 2-norme generirane s skalarnim produktom $(\cdot,\cdot)_i$, $i = 1,2,3$. Koristeći teorem 3.2.1 u kojem smo dokazali da je preslikavanje $\|\cdot,\cdot\|$ superaditivno kao preslikavanje koje ovisi o skalarnom produktu koji ga generina, dolazimo do zaključka da je nejednakost iskazana u teoremu istinita. □

Slično, promatrajući teorem 3.2.3 dolazimo do sljedećeg svojstva monostonosti:

Teorem 3.2.6. *Neka je* $(\cdot\mid\cdot)_2 > (\cdot\mid\cdot)_1$. *Tada za svaki* $x,y,z \in X$ *vrijedi*

$$A_2(x,y,z) \geq A_1(x,y,z). \tag{3.19}$$

3.3 Superaditivnost i monotonost nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom

Sada na prirodan način koristeći Cauchy - Bunjakovskoy- Schwartzovu nejdenakost možemo definirati funkcional u ovisnosti o 2-skalarnom produktu $(\cdot,\cdot\mid\cdot)$

$$\varphi((\cdot,\cdot\mid\cdot))\,(a,b,c) = \|\,a,c\,\|\,\|\,b,c\,\| - |(a,b\mid c)| \geq 0, \tag{3.20}$$

pri čemu su $a,b,c \in X$ i $\|\cdot,\cdot\|$ 2-norma pridružena 2-skalarnom produktu $(\cdot,\cdot\mid\cdot)$.
U nastavku poglavlja istaknut ćemo neka svojstva superaditivnosti i monotonosti za preslikavanje $\varphi(\cdot)$ kao preslikavanje ovisno o 2-skalarnom produktu $(\cdot,\cdot\mid\cdot)$.

Teorem 3.3.1. *Neka su* $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_i : X^3 \to \mathbb{R}$ *dva 2-skalarna produkta na X* ($i = 1,2$). *Tada za sve* $a,b,c \in X$ *vrijedi*

$$\varphi((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1 + (\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c) \geq \varphi((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1)\,(a,b,c) + \varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c). \tag{3.21}$$

Preslikavanje $\varphi(\cdot)$ *je superaditivno kao preslikavanje ovisno o 2-skalarnom produktu koji ga generira.*

Dokaz. Prema Cauchy - Bunjakovsky - Schwarzovoj nejednakosti vrijedi

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,(z^2+t^2)^{\frac{1}{2}} \geq xz+yt \tag{3.22}$$

za sve $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.
Prema definiciji 2-norme generirane s 2-skalarnim produktom vidi se da je

$$\varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1+(\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c) = (\|\,a,c\,\|_1^2+\|\,a,c\,\|_2^2)^{\frac{1}{2}}(\|\,b,c\,\|_1^2+\|\,b,c\,\|_2^2)^{\frac{1}{2}} - |(a,b\mid c)_1+(a,b\mid c)_2|.$$

Sada, ako odaberemo $x=\|\,a,c\,\|_1$, $y=\|\,a,c\,\|_2$, $z=\|\,b,c\,\|_1$ i $t=\|\,b,c\,\|_2$ i uvrstimo u (3.22) dobivamo:
$\varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1+(\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c)$

$$\begin{aligned}
&\geq (\|\,a,c\,\|_1\,\|\,b,c\,\|_1)+(\|\,a,c\,\|_2\,\|\,b,c\,\|_2)-|(a,b\mid c)_1+(a,b\mid c)_2|\\
&\geq (\|\,a,c\,\|_1\,\|\,b,c\,\|_1)-|(a,b\mid c)_1|+(\|\,a,c\,\|_2\,\|\,b,c\,\|_2)-|(a,b\mid c)_2|\\
&= \varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1)\,(a,b,c)+\varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c)
\end{aligned}$$

za sve $a, b, c \in X$ i time je superaditivnost preslikavanja $\varphi(\cdot)$ dokazana. □

Slično kao kod unitarnih prostora, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 3.3.2. *Neka su $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_i : X^3 \to \mathbb{R}$ dva 2-skalarna produkta na X ($i=1,2$). Kažemo da je $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_2 > (\cdot,\cdot\mid\cdot)_1$ ako je $\|\,a,b\,\|_2 > \|\,a,b\,\|_1$ za sve lineano nezavisne vektore a, b u X.*

Primjetimo, ako pretpostavimo da je $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_2 > (\cdot,\cdot\mid\cdot)_1$, tada preslikavanje $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_{2,1}$: $X^3 \to \mathbb{R}$ definiramo na sljedeći način:

$$(\cdot,\cdot\mid\cdot)_{2,1} = (\cdot,\cdot\mid\cdot)_2-(\cdot,\cdot,\mid\cdot)_1.$$

Preslikavanje $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_{2,1)}$ je također 2-skalarni produkt na X.

Teorem 3.3.3. *Neka su $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_i : X^3 \to \mathbb{R}$ dva 2-skalarna produkta na X ($i=1,2$) takva da vrijedi $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_2 > (\cdot,\cdot\mid\cdot)_1$. Tada za sve $a, b, c \in X$ vrijedi*

$$\varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c) \geq \varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1)\,(a,b,c), \tag{3.23}$$

tj. preslikavanje $\varphi(\cdot)$ je montono kao preslikavanje generirano 2-skalarnim produktom.

Dokaz. Iz definicije $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_{2,1}$ slijedi da je $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_2 = (\cdot,\cdot\mid\cdot)_{2,1}+(\cdot,\cdot\mid\cdot)_1$. Primjenom teorema 3.3.1 dobivamo:

$$\begin{aligned}
\varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)(a,b,c) &\geq \varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_{2,1})\,(a,b,c)+\varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1)\,(a,b,c)\\
&\geq \varphi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1)\,(a,b,c)
\end{aligned}$$

za sve $a, b, c \in X$ i time je teorem dokazan. □

Definirajmo sada još jedan funkcional koji je prirodno povezan s 2-skalarnim produktom $(\cdot,\cdot\mid\cdot)$ i ovisi o njemu:

$$\Phi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot))\,(a,b,c) = [\,|a,c\,\|^2\|\,b,c\,\|^2 - (a,b\mid c)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3.24}$$

pri čemu su $a,b,c\in X$ i $\|\cdot,\cdot\|$ odgovarajuća 2-norma pridružena 2-skalarnom produktu.

Slijedi svojstvo superaditivnosti za preslikavanje Φ.

Teorem 3.3.4. *Neka su $(\cdot,\cdot\mid\cdot)_i : X^3\to\mathbb{R}$ dva 2-skalarna produkta na X ($i=1,2$). Tada je*

$$\Phi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1 + (\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c) \geq \Phi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1\,(a,b,c) + \Phi\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c) \tag{3.25}$$

za sve $a,b,c\in X$, tj. preslikavanje $\Phi(\cdot)$ je superaditivno kao preslikavanje koje ovisi o 2-skalarnom produktu koji ga generira.

Dokaz. Za sve $a,b,c\in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\Phi^2\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1 \; &+ \; (\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c)\\
&= (\|\,a,c\,\|_1^2 + \|\,a,c\,\|_2^2)\,(\|\,b,c\,\|_1^2 + \|\,b,c\,\|_2^2) - [(a,b\mid c)_1 + (a,b\mid c)_2]^2\\
&= \|\,a,c\,\|_1^2\,\|\,b,c\,\|_1^2 - [(a,b\mid c)_1]^2 + \|\,a,c\,\|_2^2\,\|\,b,c\,\|_2^2 - [(a,b\mid c)_2]^2\\
&+ \|\,a,c\,\|_1^2\,\|\,b,c\,\|_2^2 - 2(a,b\mid c)_1(a,b\mid c)_2 + \|\,a,c\,\|_2^2\,\|\,b,c\,\|_1^2\\
&= \Phi^2\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_1)\,(a,b,c) + \Phi^2\,((\cdot,\cdot\mid\cdot)_2)\,(a,b,c)\\
&+ \|\,a,c\,\|_1^2\,\|\,b,c\,\|_2^2 - 2(a,b\mid c)_1\,(a,b\mid c)_2 + \|\,a,c\,\|_2^2\,\|\,b,c\,\|_1^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Promotrimo li sada nejednakost $(mn-pq)^2 \geq (m^2-p^2)(n^2-q^2)$ koja vrijedi za sve $m,n,p,q\in\mathbb{R}$ i uvrstimo li u nju $m = \|\,a,c\,\|_1\,\|\,b,c\,\|_1$, $n = \|\,a,c\,\|_2\,\|\,b,c\,\|_2$, $p=(a,b\mid c)_1$ i $q=(a,b\mid c)_2$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
(\|\,a,c\,\|_1^2\,\|\,b,c\,\|_1^2 &- (a,b\mid c)_1^2)(\|\,a,c\,\|_2^2\,\|\,b,c\,\|_2^2 - (a,b\mid c)_2^2)\\
&\leq (\|\,a,c\,\|_1\,\|\,b,c\,\|_1\,\|\,a,c\,\|_2\,\|\,b,c\,\|_2 - (a,b\mid c)_1\,(a,b\mid c)_2)^2
\end{aligned}$$

što nas dovodi do

$$\begin{aligned}
2[(\|\,a,c\,\|_1^2\,\|\,b,c\,\|_1^2 - (a,b\mid c)_1^2)q,(\|\,a,c\,\|_2^2\|\,b,c\,\|_2^2 - (a,b\mid c)_2^2]^{\frac{1}{2}} &\leq 2(\|\,a,c\,\|_1\,\|\,b,c\,\|_1\,\|\,a,c\,\|_2\,\|\,b,c\,\|_2\\
&- (a,b\mid c)_1\,(a,b\mid c)_2).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Propozicija 1.1.2 povlači da je $\|\,a,c\,\|_i\,\|\,b,c\,\|_i \geq (a,b\mid c)_i$ za $i=1,2$.

Konačno, ako promotrimo sljedeću nejednakost

$$\begin{aligned}
2(\|\,a,c\,\|_1\,\|\,b,c\,\|_1\,\|\,a,c\,\|_2\,\|\,b,c\,\|_2 - (a,b\mid c)_1\,(a,b\mid c)_2) &\leq \|\,a,c\,\|_1^2\,\|\,b,c\,\|_2^2 - 2(a,b\mid c)_1\,(a,b\mid c)_2\\
&+ \|\,a,c\,\|_2^2\,\|\,b,c\,\|_1^2
\end{aligned}$$

i (3.28) imamo:

$$\| a, c \|_1^2 \, \| b, c \|_2^2 - 2(a, b \mid c)_1 \, (a, b \mid c)_2 + \| a, c \|_2^2 \, \| b, c \|_1^2 \geq 2\Phi \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_1 \right) (a, b, c) \Phi \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_2 \right) (a, b, c).$$

Stoga, ako iskoristimo jednakost (3.27) dobivamo:

$$\begin{aligned} &\Phi^2((\cdot, \cdot \mid \cdot)_1 + (\cdot, \cdot \mid \cdot)_2)(a, b, c) \\ &\qquad \geq \Phi^2 \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_1 \right) (a, b, c) + \Phi^2 \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_2 \right) (a, b, c) \\ &\qquad + 2 \, \Phi \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_1 \right) (a, b, c) \, \Phi \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_2 \right) (a, b, c) \end{aligned}$$

za sve $a, b, c \in X$, čime smo dokazali traženu nejednakost. □

Teorem 3.3.5. *Neka su dana dva 2-skalarna produkta za koja vrijedi* $(\cdot, \cdot \mid \cdot)_2 > (\cdot, \cdot \mid \cdot)_1$, *tada je*

$$\Phi \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_2 \right) (a, b, c) \geq \Phi \left((\cdot, \cdot \mid \cdot)_1 \right) (a, b, c), \tag{3.28}$$

za sve $a, b, c \in X$, *to jest preslikavanje* $\Phi(\cdot)$ *je rastuće na klasi 2-skalarnih produkata definiranih na* X.

Koristeći rezultate poglavlja 3.2 i svojstvo monotonosti preslikavanja φ i Φ dolazimo do sljedećih nejednakosti:

1) Neka je $A : H \to H$ pozitivan operator na Hilbertovom prostoru $(H, (\cdot \mid \cdot))$ nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da A zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$(Ax \mid x) > m \| x \|^2,$$

za svaki $x \in H \backslash \{0\}, m > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} &[(Ax \mid x) \, (Az \mid z) - (Ax \mid z)^2]^{\frac{1}{2}} \, [(Ay \mid y) \, (Az \mid z) - (Ay \mid z)^2]^{\frac{1}{2}} - |(Ax \mid y) \, (Az \mid z) - (Ax \mid z) \, (Ay \mid z)| \\ &\qquad \geq m^2 \{ [\| x \|^2 \, \| z \|^2 - (x, z)^2]^{\frac{1}{2}} \, [\| y \|^2 \, \| z \|^2 - (y, z)^2]^{\frac{1}{2}} - |(x \mid y) \, \| z \|^2 - (x \mid z) \, (y \mid z)| \} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(Ax \mid x) \, (Az \mid z) - (Ax \mid z)^2] \, [(Ay \mid y)(Az \mid z) - (Ay \mid z)^2] - | \, (Ax \mid y) \, (Az \mid z) - (Ax \mid z) \, (Ay \mid z) \, |^2 \\ &\qquad \geq m^4 \{ [\| x \|^2 \, \| z \|^2 - (x \mid z)^2] \, [\| y \|^2 \, \| z \|^2 - (y \mid z)^2] - |(x \mid y) \, \| z \|^2 - (x \mid z) \, (y \mid z)| \} \geq 0 \end{aligned}$$

za sve $x, y, z \in H$.

3.4 Heronovo preslikavanje u 2-normiranom prostoru

U ovom poglavlju prikazat ćemo Heronovo preslikavanje u vektorskom 2-normiranom prostoru na sličan način kao u poglavlju 3.3.

Neka je $(X, \|\cdot\|)|$ 2-normirani prostor. Za proizvoljne vektore $x, y, z, t \in X$ definiramo

$$A(x, y, z \mid t) = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.29}$$

pri čemu je $a = \| x - y, t \|$, $b = \| x - z, t \|$, $c = \| y - z, t \|$ i $s = \frac{a+b+c}{2}$.
Neka od svojstava su sljedeća:

1. $A(px, py, pz \mid t) = p^2 A(x, y, z \mid t)$, za svaki realan broj p,
2. $A(x + u, y + u, z + u \mid t) = A(x, y, z \mid t)$, $\forall u \in X$,
3. $A(x, y, z \mid t) = A(x - y, y - z, 0 \mid t)$.

Neka je $(X, (\cdot, \cdot \mid \cdot))$ 2-unitarni prostor i neka je $\|\cdot, \cdot\|$ odgovarajuća 2-norma generirana 2-skalarnim produktom $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$. Tada, koristeći slične argumente kao u teoremu 3.1.4, dobivamo:

$$[A(x, y, 0 \mid t)]^2 = \frac{1}{4}[\| x, t \|^2 \| y, t \|^2 - (x, y \mid t)^2] \tag{3.30}$$

za svaki $x, y, t \in X$.

Teorem 3.4.1. *Neka je $(X, (\cdot, \cdot \mid \cdot))$ 2 -unitarni prostor i neka su vektori $x, y, z, t \in X$ linearno nezavisni u X. Definiramo*

$$\cos\phi = \frac{(x - y, y - z \mid t)}{\| x - y, t \| \, \| y - z, t \|}$$

za sve $\phi \in [o, \pi\rangle$. Tada A možemo prikazati na sljedeći način:

$$A(x, z, y \mid t) = \frac{\| x - y, t \| \, \| y - z, t \| \sin\phi}{2}. \tag{3.31}$$

Dokaz. Promotrimo li sljedeću jednakost $A(x, y, z \mid t) = A(x - y, y - z, 0 \mid t)$ i iskoristimo li tvrdnju (3.31) dobivamo:

$$\begin{aligned} A^2(x, y, z \mid t) &= A^2(x - y, y - z, 0 \mid t) \\ &= \frac{1}{4}[\| x - y, t \|^2 \, \| y - z, t \|^2 - (x - y, y - z \mid t)^2] \end{aligned}$$

Iz tvrdnje teorema slijedi

$$(x-y, y-z \mid t) = cos\phi \| x-y, t \| \| y-z, t \|.$$

Iskoritimo li tu jednakost dobivamo:

$$\begin{aligned} A^2(x, y, z \mid t) &= \frac{1}{4}[\| x-y, t \|^2 \| y-z, t \|^2 - \| x-y, t \|^2 \| y-z, t \|^2 \cdot cos^2\phi] \\ &= \frac{1}{4}[\| x-y, t \|^2 \| y-z, t \|^2 (1 - cos^2\phi)] \\ &= \frac{1}{4}\| x-y, t \|^2 \| y-z, t \|^2 \cdot sin^2\phi \end{aligned}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Istaknimo još neka svojstva superaditivnosti i monotonosti Heronovnog preslikavanja na 2-unitarnom prostoru.

Teorem 3.4.2. *Neka su* $(\cdot, \cdot \mid \cdot)_1, (\cdot, \cdot \mid \cdot)_2$ *dva 2-skalarna produkta na X i neka je* $(\cdot, \cdot \mid \cdot)_3 = (\cdot, \cdot \mid \cdot)_1 + (\cdot, \cdot \mid \cdot)_2$. *Tada vrijedi:*

$$A_3(x, y, z \mid t) \geq A_1(x, y, z \mid t) + A_2(x, y, z \mid t)$$

za svaki $x, y, z \in X$, *pri čemu je* $A_i(x, y, z) = [s_i(s_i - a_i)(s_i - b_i)(s_i - c_i)]^{\frac{1}{2}}$, $a_i = \| x-y, t \|_i, b_i = \| x-z, t \|_i, c_i = \| y-z, t \|_i$ *i* $s_i = \dfrac{a_i + b_i + c_i}{2}$, *za* $i = 1, 2, 3$, *pa je Heronovo preslikavanje superaditivno kau funkcija ovisna o 2-skalarnom produktu koji ju generira.*

Dokaz. Uz gore navedene oznake imamo:

$$\begin{aligned} A_i^2(x, y, z \mid t) &= A_i^2(x-y, y-z, 0 \mid t) \\ &= \frac{1}{4}[\| x-y, t \|_i^2 \| y-z, t \|_i^2 - (x-y, y-z \mid t)_i^2] \\ &= \frac{1}{4}\| x-y, t \|_i^2 \| y-z, t \|_i^2 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$A_i(x, y, z \mid t) = \frac{1}{2}\| x-y, t \|_i \| y-z, t \|_i$$

$i = 1, 2, 3$, gdje je $\|\cdot, \cdot\|_i$ kanonski zapis 2-norme generirane 2-skalarnim produktom $(\cdot, \cdot \mid \cdot)$. Koristeći teorem 3.2.1 u kojem smo pokazali da je $\| \cdot, \cdot \|$ superaditivno dolazimo do nejednakosti našeg teorema. Time je teorem dokazan. □

Teorem 3.4.3. *Neka je* $(\cdot,\cdot \mid \cdot)_2 > (\cdot,\cdot \mid \cdot)_1$*, tada vrijedi*

$$A_2(x, y, z \mid t) \geq A_1(x, y, z \mid t)$$

za svaki $x, y, z, t \in X$*, pa je Heronovo preslikavanje rastuće kao funkcija koja ovisi o 2-skalarnom produktu koji ga generira.*

Bibliografija

[1] Y. J. Cho, P. C. S. Lin, S. S. Kim, A. Misiak, *Theory of 2-inner product spaces, Nova Sci. Publ. Inc., New York, 2001.*

[2] S.S. Dragomir, Y.J. Cho and S.S. Kim, *Superadditivity and monotonicity of 2-norms generated by inner products and related results, Soochow J. Math. 24(1)(1998), 13-32.*

[3] R. Malcheski, K. Anevska, S. Malcheski, *Some characterizations of 2-inner product, Mat. Bilten 41(2016), 5-11* .

[4] A. White, Y.J. Cho and S.S. Kim, *Heron's formula in inner product spaces, Demonstratio Math, 31(1)(1998), 97 - 102.*

Sažetak

U ovom diplomskom radu definirali smo 2-skalarni produkt odnosno 2-unitarni prostor. Dokazana su svojstva 2-skalarnog produkta te neke od karakterizacija. Definirana je i pripadna 2-norma, te su također iskazana i dokazana neka njena svojstva. U zadnjem poglavlju definirano je Heronovo preslikavanje u unitarnim prostorima te u 2-normiranom prostoru. Navedene su neke primjene Heronovog preslikavanja. Također je prikazano svojstvo superaditivnosti i monotonosti nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom.

Summary

In this thesis, we define 2-inner product and 2-inner product space. The properties of the 2-inner product and some of the characterizations are proved. Also we define the corresponding 2-norm and 2-normed space and prove some of its properties.
The last chapter is devoted to Heron's mapping in an inner space and in a 2-normed space. Some applications of Heron's mapping are described. We also show superadditivity and monotonicity for some funcionals associated with 2-inner products.

Životopis

Moje ime je Mihaela Hitrec. Rođena sam 5. srpnja 1994. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završila sam u Zlataru u Krapinsko - Zagorskoj županiji. Potom sam u Srednjoj školi Zlatar upisala opću gimnaziju. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2013. godine te u srpnju iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija upisala sam i diplomski sveučilišnij studij Matematika; smjer nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.