Lindströmov teorem za modalnu logiku

Krunić, Jakov

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jakov Krunić

LINDSTRÖMOV TEOREM ZA MODALNU LOGIKU

Diplomski rad

Voditelji rada:
prof. dr. sc. Mladen Vuković
doc. dr. sc. Tin Perkov

Zagreb, srpanj, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentorima na pomoći i brojnim savjetima tijekom pisanja ovog rada.
Hvala mojoj obitelji koja mi je omogućila školovanje i vjerovala u mene.
Hvala mojoj djevojci na velikoj podršci tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

Švedski logičar Per Lindström je 1969. godine u svom radu "O proširenju elementarne logike" predstavio svoju karakterizaciju logike prvog reda, što je odmah prepoznato kao značajan doprinos logici. Lindströmovi teoremi o karakterizaciji logike prvog reda predstavljaju temelj razvoja apstraktne teorije modela. Oni osiguravaju posebno mjesto logici prvog reda među svim logičkim sustavima. Lindströmov prvi teorem kaže da je logika prvog reda najizražajniji regularan logički sustav u kojem vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem i teorem kompaktnosti. Drugim riječima, ne postoji "moćnija" logika s takvim svojstvima od logike prvog reda. Lindströmov drugi teorem kaže da je logika prvog reda najizražajniji efektivno regularan logički sustav koji je rekurzivno prebrojiv za valjanost i u kojem vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem. Drugim riječima, ni jedno pravo proširenje logike prvog reda za koje vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem ne može imati adekvatan dokazni račun.

U ovom radu prikazat će se analogon Lindströmovih teorema u kontekstu modalnih logika. To zahtijeva dva velika koraka. Prvi korak je odrediti logiku koju želimo okarakterizirati, a drugi korak je odrediti svojstva po kojima se ta logika ističe među ostalim logikama.

Modalna logika je nastala kao proširenje klasične logike sudova modalnim operatorima "moguće" i "nužno". Danas se promatraju razni modalni operatori koji definiraju različite modalne logike. Modalna logika se smatra sredstvom za opisivanje relacijskih struktura, a detaljnije o tome možete pročitati u [1]. Relacijske strukture se mogu koristiti za modeliranje ključnih ideja iz raznih područja. Stoga se modalna logika može primjenjivati u računarstvu, umjetnoj inteligenciji, lingvistici, filozofiji itd.

Rad je podijeljen u dva poglavlja. Prvo poglavlje bavi se sintaksom i semantikom modalne logike. Definiraju se alfabet, formule, modeli te istinitost formule. Zatim uvodimo modalne tipove i definiramo pojam osnovne modalne logike. Nakon toga ističemo dva osnovna pojma semantike modalnih logika: generirani podmodeli i bisimulacije. Definiramo restrikciju i proširenje modela te modele stablaste strukture. Također naglašavamo da su formule invarijantne na generirane podmodele i bisimulacije. U ovom poglavlju još opisujemo dva primjera modalnih logika: propozicionalna dinamička logika i linearna temporalna logika. Za svaku od ovih logika posebno ističemo što su formule, modeli i bisimulacije.

Osnovni cilj drugog poglavlja je dati detaljan dokaz Lindströmovog teorema za modalnu logiku. Motivirani primjerima modalnih sistema uvodimo pojam apstraktne modalne logike. Definiramo proširenje osnovne modalne logike, ekvivalentnost dvije logike i apstraktnu modalnu logiku konačnog stupnja. Nizom propozicija i jednom lemom dolazimo do dokaza Lindströmovog teorema za modalnu logiku. Na kraju definiramo pojmove relativizacije i kompaktnosti te navodimo drugu varijantu Lindströmovog teorema za modalnu logiku.

Poglavlje 1

Primjeri modalnih logika

U ovom poglavlju navest ćemo neke primjere modalnih logika. Najprije ćemo proučavati sintaksu i semantiku modalne logike. Pri tome ćemo definirati što je to osnovna modalna logika. Zatim ćemo definirati generirane podmodele i bisimulacije i navesti njihova najvažnija svojstva. Nakon toga ćemo opisati još dvije grane modalne logike: propozicionalna dinamička logika i linearna temporalna logika.

1.1 Sintaksa i semantika modalne logike

Za proučavanje modalne logike najprije je potrebno definirati pripadni jezik. Da bismo razvili jezik, potrebno je prvo zadati njegov alfabet. Uvodimo alfabet osnovnog modalnog jezika i rekurzivno definiramo formule osnovnog modalnog jezika. Zatim uvodimo pojam okvira i modela te proučavamo istinitost i valjanost formula.

Definicija 1.1.1. ***Alfabet osnovnog modalnog jezika*** *je unija skupova A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5, pri čemu je:*

$A_1 = \{ P_0, P_1, P_2, \dots \}$ *prebrojiv skup čije elemente zovemo propozicionalne varijable;*
$A_2 = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ *skup logičkih veznika;*
$A_3 = \{ (\, , \,) \}$ *skup pomoćnih simbola (zagrade);*
$A_4 = \{ \top, \bot \}$ *skup logičkih konstanti;*
$A_5 = \{ \Diamond, \Box \}$ *skup modalnih operatora.*

Uočavamo da je u alfabetu osnovnog modalnog jezika sadržan alfabet klasične logike sudova. Alfabet sadrži i logičke konstante: $\top$ koju zovemo *istina* i $\bot$ koju zovemo *laž*. Pojavljuju se i dva modalna operatora $\Diamond$ i $\Box$ koja redom čitamo "moguće" i "nužno". Upravo zbog modalnih operatora se pripadne logike nazivaju modalne logike. Modalni operatori $\Diamond$ i $\Box$ su međusobno dualni operatori. Primjerice, to znači da je $\Box$ pokrata za $\neg\Diamond\neg$.

Naravno, nećemo proučavati bilo kakve riječi iz alfabeta. Sada ćemo rekurzivno definirati pojam formule na standardan način.

Definicija 1.1.2. ***Formula*** *je riječ osnovnog modalnog jezika koja se definira rekurzivno:*

a) svaka propozicionalna varijabla je formula,

b) logičke konstante $\top$ i $\bot$ su formule,

c) ako su ϕ i ψ formule, tada su i riječi $(\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$, $(\Diamond\phi)$ i $(\Box\phi)$ također formule,

d) riječ osnovnog modalnog jezika je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka uvjeta a) , b) i c).

Vanjske zagrade se često izostavljaju u zapisu formula. Uvode se prioriteti za modalne operatore i logičke veznike. Najveći prioritet imaju $\Diamond$, $\Box$ i $\neg$, zatim veznici $\wedge$ i $\vee$, a najmanji prioritet imaju veznici $\to$ i $\leftrightarrow$. Operatori su unarni i iz prethodne definicije vidimo da operator djeluje na prvu formulu koja se nalazi s njegove desne strane.

Primjer 1.1.3. *Riječ $\Box\neg)P_0($ nije formula. Riječ $\neg\Box\bot \to (\Diamond P \wedge \Box\top)$ jest formula.*

Sada nam je cilj definirati istinitost i valjanost formula. Da bi to mogli, prvo ćemo definirati pojmove Kripkeovog okvira i Kripkeovog modela.

Definicija 1.1.4. *Neka je W neki neprazan skup te $R \subseteq W \times W$ proizvoljna binarna relacija. Uređeni par $\mathfrak{F} = (W, R)$ nazivamo* ***Kripkeov okvir*** *ili kratko* ***okvir****. Elemente skupa W nazivamo* ***svjetovi****. Relacija R se naziva* ***relacija dostiživosti****. Za svjetove $w, v \in W$ kažemo da je svijet v* ***dostiživ*** *iz svijeta w ako je $(w, v) \in R$.*

Umjesto $(w, v) \in R$ uglavnom ćemo pisati wRv.

Definicija 1.1.5. ***Kripkeov model*** *ili kratko* ***model*** *je uređeni par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, gdje je $\mathfrak{F}$ okvir, a V je funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli P pridružuje neki podskup $V(P)$ od W. Funkcija V se naziva* ***valuacija****. Još kažemo da je $\mathfrak{M}$* ***baziran na*** *$\mathfrak{F}$.*

Sada smo spremni uvesti definiciju istinitosti formule.

Definicija 1.1.6. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i neka je $w \in W$ jedan od svjetova modela $\mathfrak{M}$.* ***Istinitost*** *formule ϕ, u oznaci $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, definiramo rekurzivno:*

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}, w \Vdash P \text{ ako i samo ako } w \in V(P), \text{ za svaku propozicionalnu varijablu } P\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \top\\
&\mathfrak{M}, w \nVdash \bot\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \nVdash \phi\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \wedge \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ i } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ili } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \rightarrow \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \nVdash \phi \text{ ili } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \leftrightarrow \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ je ekvivalentno s } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi \text{ ako i samo ako za neki } v \in W \text{ takav da je } wRv \text{ vrijedi } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi\\
&\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi \text{ ako i samo ako za svaki } v \in W \text{ takav da je } wRv \text{ vrijedi } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi
\end{aligned}
$$

Relaciju $\Vdash$ nazivamo relacija forsiranja. Kažemo da je formula ϕ istinita u svijetu w modela $\mathfrak{M}$ ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Konačno, kažemo da je skup formula Σ istinit u svijetu w modela $\mathfrak{M}$, u oznaci $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, ako je svaka formula iz Σ istinita u w.

Primjer 1.1.7. *Neka je $\mathfrak{F} = (\{w_1, w_2, w_3\}, R)$ okvir, gdje je $w_i R w_j$ ako i samo ako $j = i + 1$. Neka je V valuacija takva da je $V(P) = \{w_2, w_3\}$. Tada za model $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ možemo uočiti da vrijedi:*

a) $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box P$

b) $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash \Diamond\Box P \rightarrow P$

Raspišimo po definiciji zašto to vrijedi. Uočimo najprije da vrijedi $\mathfrak{M}, w_3 \Vdash P$ jer je $w_3 \in V(P)$. Sada možemo zaključiti da vrijedi $\mathfrak{M}, w_2 \Vdash \Box P$ jer je w_3 jedini takav da je $w_2 R w_3$, a pokazali smo da vrijedi $\mathfrak{M}, w_3 \Vdash P$. Pronašli smo $w_2 \in W$ takav da je $w_1 R w_2$ i vrijedi $\mathfrak{M}, w_2 \Vdash \Box P$, pa po definiciji zaključujemo da vrijedi tvrdnja a). Nadalje, $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash P$ jer $w_1 \notin V(P)$. Sada iz toga i tvrdnje a) slijedi tvrdnja b).

$$
\overset{w_1}{\bullet} \longrightarrow \overset{w_2}{\bullet} \longrightarrow \overset{w_3}{\bullet}
$$

Slika 1.1: Okvir iz primjera 1.1.7

Definicija 1.1.8. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Kažemo da je formula ϕ* ***ispunjiva u modelu*** *$\mathfrak{M}$ ako za neki svijet $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.*
Kažemo da je formula ϕ ***ispunjiva*** *ako je ispunjiva u nekom modelu $\mathfrak{M}$.*
Kažemo da je formula ϕ ***globalno istinita na modelu*** *$\mathfrak{M}$ ako za svaki svijet $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. To kratko označavamo s $\mathfrak{M} \vDash \phi$.*
Kažemo da je formula ϕ ***valjana*** *ako za svaki model $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \vDash \phi$.*

Napomena 1.1.9. *Prethodnu definiciju možemo primijeniti i na skupove formula. Skup formula Σ je globalno istinit na modelu $\mathfrak{M}$ ako za sve w u $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$. Skup formula Σ je ispunjiv u modelu $\mathfrak{M}$ ako za neki w u $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$. Skup formula Σ je ispunjiv ako je ispunjiv u nekom modelu $\mathfrak{M}$.*

Definicija 1.1.10. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i $w \in W$. Par $(\mathfrak{M}, w)$ zovemo* ***točkovni model****.*

Točkovni modeli će nam biti posebno važni kod definicije apstraktne modalne logike.

Dosad smo proučavali samo osnovni modalni jezik. Sada ćemo stvar generalizirati. Skup modalnih operatora može biti proizvoljan. Osim toga, modalni operatori mogu imati više argumenata. Zato će za svaki modalni operator biti unaprijed određeno na koliko argumenata on djeluje.

Definicija 1.1.11. ***Modalni tip*** *je par $\tau = (O, \rho)$ gdje je O neprazan skup, a ρ je funkcija sa skupa O u skup $\mathbb{N}$. Elementi od O se zovu* ***modalni operatori*** *i označavaju s $\triangle_i$. Funkcija ρ pridružuje svakom operatoru $\triangle \in O$ broj $\rho(\triangle)$ koji se naziva* ***mjesnost****. Mjesnost je broj argumenata na koji modalni operator $\triangle$ djeluje. Nadalje, kažemo da je modalni tip τ konačan ako je skup O konačan.*

Sada možemo proučavati proizvoljne modalne jezike. Modalni jezik je zadan ako je zadan modalni tip τ. Alfabet modalnog jezika je definiran kao u 1.1.1, s tim da je umjesto skupa A_5 sada skup O. Formule proizvoljnog modalnog jezika se definiraju analogno kao u 1.1.2. Razlika je ta da za modalni operator $\triangle \in O$ i formule $\phi_1, \ldots \phi_{\rho(\triangle)}$ je i riječ $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_{\rho(\triangle)})$ također formula.

Definicija 1.1.12. *Neka je ϕ proizvoljna formula modalne logike.* ***Stupanj*** *formule ϕ, u oznaci $\deg(\phi)$, definiramo rekurzivno:*

$$
\begin{aligned}
\deg(P) &= 0, \ \textit{pri čemu je } P \textit{ propozicionalna varijabla},\\
\deg(\top) &= \deg(\bot) = 0,\\
\deg(\neg\phi) &= \deg(\phi),\\
\deg(\phi \wedge \psi) &= \deg(\phi \vee \psi) = \deg(\phi \to \psi) = \deg(\phi \leftrightarrow \psi) = \max\{\deg(\phi), \deg(\psi)\},\\
\deg(\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_{\rho(\triangle)})) &= 1 + \max\{\deg(\phi_1), \ldots, \deg(\phi_{\rho(\triangle)})\}.
\end{aligned}
$$

Stupanj je zapravo funkcija koja vraća najveći broj ugnježđenih modalnih operatora u nekoj modalnoj formuli.

Definicija 1.1.13. *Neka je τ modalni tip. Neka je W neprazan skup te za svaki $n \geq 0$ i svaki n-arni modalni operator $\triangle \in \tau$ neka je $R_\triangle$ relacija mjesnosti $n+1$ na W. Definiramo* ***τ-okvir*** *$\mathfrak{F}$ kao $\mathfrak{F} := (W, \{R_\triangle \mid \triangle \in \tau\})$. Ako τ sadrži konačan broj modalnih operatora $\triangle_1, \ldots, \triangle_n$ pišemo $\mathfrak{F} = (W, R_{\triangle_1}, \ldots, R_{\triangle_n})$. Nadalje,* ***$\tau$-model*** *je uređeni par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ gdje je $\mathfrak{F}$ τ-okvir, a V je valuacija koja svakoj propozicionalnoj varijabli P pridružuje podskup $V(P)$ od W.*

Istinitost formule ϕ u svijetu w modela $\mathfrak{M} = (W, \{R_\triangle \mid \triangle \in \tau\}, V)$ se definira analogno kao u 1.1.6. Razlika je ta da za modalni operator $\triangle \in O$, $n = \rho(\triangle)$ i formule $\phi_1, \ldots \phi_n$ definiramo

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n) \text{ ako i samo ako za neke } v_1, \ldots, v_n \in W \text{ takve da je } (w, v_1, \ldots, v_n) \in R_\triangle$$
$$\text{vrijedi } \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i, \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n.$$

Što se tiče ispunjivosti i valjanosti formula proizvoljnog modalnog jezika, definiraju se jednako kao u definiciji 1.1.8.

Napomena 1.1.14. *Valuaciju V možemo proširiti na skup svih formula. $V(\phi)$ je skup svih svjetova u kojima je formula ϕ istinita:*

$$V(\phi) := \{w \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}.$$

Sada smo spremni definirati pojam osnovne modalne logike.

Definicija 1.1.15. *Neka je $\mathcal{L}_{\texttt{BML}}$ funkcija koja proizvoljnom modalnom tipu τ pridružuje skup svih modalnih τ-formula. Neka je $\Vdash_{\texttt{BML}}$ relacija takva da za svaki točkovni τ-model $(\mathfrak{M}, w)$ i svaku formulu $\phi \in \mathcal{L}_{\texttt{BML}}(\tau)$ vrijedi:*

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\texttt{BML}} \phi \text{ ako i samo ako je } w \in V(\phi).$$

Uređeni par $(\mathcal{L}_{\texttt{BML}}, \Vdash_{\texttt{BML}})$ nazivamo ***osnovna modalna logika*** *i označavamo s* `BML`.

Istaknimo još što je točno modalni tip τ kod osnovne modalne logike. Smatrat ćemo da je τ neki podskup skupa $\{\Diamond_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, pri čemu su $\Diamond_i$ unarni operatori. Također, za svaki operator $\Diamond_i$ uvodimo njegov dualni operator $\Box_i$.

1.2 Generirani podmodeli i bisimulacije

U nastavku proučavamo dva osnovna pojma semantike modalnih logika. To su generirani podmodeli i bisimulacije. Generirani podmodel nam omogućuje smanjiti model, a da pritom očuvamo istinitost. Posebno ćemo proučiti osnovne relacije među parovima modela - bisimulacije. Oba pojma ćemo ilustrirati primjerima i navest ćemo njihova najvažnija svojstva.

Definicija 1.2.1. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli. Kažemo da je* $\mathfrak{M}'$ ***podmodel*** *od* $\mathfrak{M}$ *ako je* $W' \subseteq W$, $R' = R \cap (W' \times W')$ *i* $V'(P) = V(P) \cap W'$ *za svaku propozicionalnu varijablu* P*. Kažemo da je* $\mathfrak{M}'$ ***generirani podmodel*** *od* $\mathfrak{M}$*, u oznaci* $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$*, ako je* $\mathfrak{M}'$ *podmodel od* $\mathfrak{M}$ *i ako vrijedi sljedeći uvjet:*

$$\textit{ako je } w \in W' \textit{ i } wRv, \textit{ tada je } v \in W'.$$

Definicija podmodela je očekivana; uzmemo bilo koji podskup svijeta W modela $\mathfrak{M}$ i korigiramo relaciju dostiživosti i valuaciju da imaju smisla. Generirani podmodeli su mnogo zanimljiviji. Svi svjetovi koji su dostiživi iz $w \in W'$ moraju također biti u W'. Slijedi primjer generiranog podmodela i podmodela koji nije generiran.

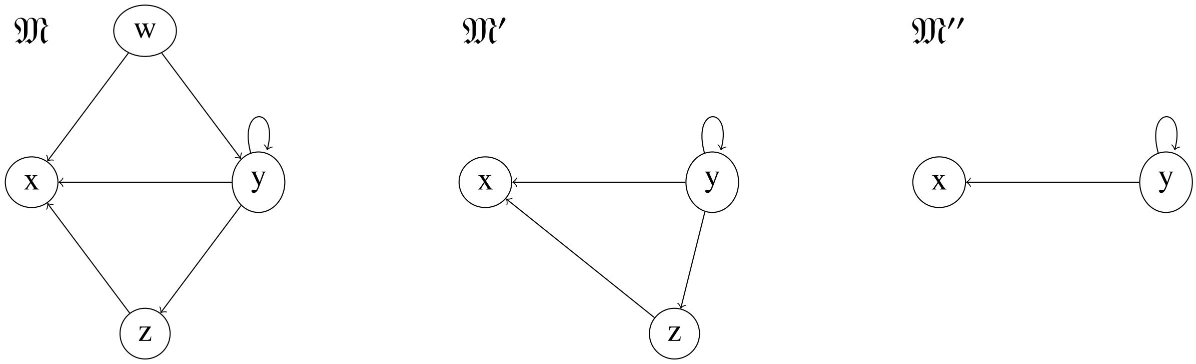
Primjer 1.2.2. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *model takav da je* $W = \{w, x, y, z\}$*,* V *proizvoljna valuacija i* $R = \{(w, x), (w, y), (y, x), (y, y), (y, z), (z, x)\}$*. Neka su* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *i* $\mathfrak{M}'' = (W'', R'', V'')$ *modeli takvi da je* $W' = \{x, y, z\}$*,* $R' = \{(y, x), (y, y), (y, z), (z, x)\}$*,* $V'(P) = V(P) \cap W'$*, za svaki* P *te* $W'' = \{x, y\}$*,* $R'' = \{(y, x), (y, y)\}$*,* $V''(P) = V(P) \cap W''$*, za svaki* P*. Lako je vidjeti da su* $\mathfrak{M}'$ *i* $\mathfrak{M}''$ *podmodeli od* $\mathfrak{M}$*. Nadalje, uočimo da je* $\mathfrak{M}'$ *generirani podmodel od* $\mathfrak{M}$*. Provjerimo sada uvjete generiranosti. Ako pogledamo svijet* $y \in W'$*, vidimo da su* x, y *i* z *dostiživi iz* y *(u odnosu na relaciju* R*), a vrijedi i* $x, y, z \in W'$*. Ako pogledamo svijet* $z \in W'$*, vidimo da je* $(z, x) \in R$ *i da je* $x \in W'$*. Time smo pokrili sve slučajeve i zaključujemo da je* $\mathfrak{M}'$ *generirani podmodel od* $\mathfrak{M}$*. S druge strane, ako pogledamo svijet* $y \in W''$*, vidimo da je* $(y, z) \in R$*, a* z *nije u* W''*. Stoga zaključujemo da* $\mathfrak{M}''$ *nije generirani podmodel od* $\mathfrak{M}$*.*

Napomena 1.2.3. *Podmodele možemo definirati i u općenitom slučaju kada je* $\mathfrak{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle \in \tau}$ *i* $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle \in \tau}$ *uz uvjet da je* $R'_\triangle = R_\triangle \cap (W')^{\rho(\triangle)+1}$ *za svaki* $\triangle \in \tau$*. Za generirani podmodel, uvjet sada glasi:*

$$\textit{ako je } w \in W' \textit{ i } (w, v_1, \ldots, v_n) \in R_\triangle, \textit{ tada je } v_1, \ldots, v_n \in W'.$$

Na isti način možemo promatrati podokvire i generirane podokvire tako da zanemarimo valuaciju V.

Sada slijedi definicija koja će nam pobliže opisati pojam generiranosti. Cilj je konstruirati generirane podmodele s tim da ćemo imati unaprijed zadane "generatore" podmodela.



Slika 1.2: Modeli iz primjera 1.2.2

Definicija 1.2.4. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i neka je $X \subseteq W$.* ***Podmodel generiran pomoću*** *X je najmanji generirani podmodel $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ od $\mathfrak{M}$ takav da je $X \subseteq W'$. Nadalje,* ***točkovno generiran*** *model je model generiran pomoću nekog jednočlanog skupa $\{w\}$. Svijet w još zovemo i* ***korijen*** *tog modela.*

Napomena 1.2.5. *Od sada ćemo smatrati da je točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ iz definicije 1.1.10 zapravo točkovno generiran model čiji je korijen upravo w. Naime, ako je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i $w \in W$ neki njegov svijet, za ispitivanje istinitosti formula u svijetu w modela $\mathfrak{M}$ dovoljno je ograničiti se na podmodel generiran pomoću $\{w\}$ jer se u njemu nalaze relevantne informacije potrebne za ispitivanje istinitosti formule u $(\mathfrak{M}, w)$ (što se lako vidi iz definicije 1.1.6, npr. ne zanima nas svijet $v \in W$ takav da je vRw).*

Prilikom uvođenja novih pojmova u semantici modalne logike, zanimljivo je proučavati očuvanje istinitosti formula. Istinitost formula je invarijantna na generirane podmodele što nam govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.6. *Neka je τ modalni tip i neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ τ-modeli takvi da je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$. Tada za svaku formulu ϕ i za svaki svijet $w \in W'$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w \Vdash \phi.$$

Dokaz prethodne propozicije se provodi indukcijom po složenosti formule. Postupak izostavljamo, a detaljan raspis indukcije po složenosti formule ćemo prikazati u dokazu da bisimulacije čuvaju istinitost.

Sljedeće što proučavamo su osnovne relacije među parovima modela, a to su bisimulacije.

Definicija 1.2.7. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Neprazну binarnu relaciju $Z \subseteq W \times W'$ nazivamo* ***bisimulacijom*** *između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ i označavamo s $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ ako ispunjava sljedeće uvjete:*

(at) *Ako je wZw' tada za svaku propozicionalnu varijablu P vrijedi: $w \in V(P)$ ako i samo ako je $w' \in V'(P)$.*

(forth) *Ako je wZw' i wRv tada postoji svijet $v' \in \mathfrak{M}'$ takav da je vZv' i $w'R'v'$.*

(back) *Ako je wZw' i $w'R'v'$ tada postoji svijet $v \in \mathfrak{M}$ takav da je vZv' i wRv.*

Na sljedećim slikama su prikazani uvjeti (forth) i (back). Pune linije označavaju pretpostavke uvjeta, a isprekidane linije označavaju što treba vrijediti da bi uvjet bio ispunjen.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Z"'] & v \arrow[d, dashed, "Z"] \\ w' \arrow[r, dashed, "R'"'] & v' \end{tikzcd}$$

Slika 1.3: Uvjet forth

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, dashed, "R"] \arrow[d, "Z"'] & v \arrow[d, dashed, "Z"] \\ w' \arrow[r, "R'"'] & v' \end{tikzcd}$$

Slika 1.4: Uvjet back

Napomena 1.2.8. *Ako je Z bisimulacija koja povezuje svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$, tada kažemo da su w i w' bisimulirani i pišemo $Z : \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$. Ako postoji bisimulacija Z takva da je $Z : \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$, često ćemo pisati skraćeno $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$, ili još kraće $w \underline{\leftrightarrow} w'$ ako su modeli jasni iz konteksta. Ako su modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ povezani nekom bisimulacijom, pisat ćemo $\mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$. Točkovni modeli $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ su bisimulirani ako su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ povezani nekom bisimulacijom i ako su w i w' bisimulirani, uz oznaku $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$.*

Diskutirajmo uvjete koje bisimulacija mora zadovoljavati. Uvjet (at) je prilično jasan i kaže da se bisimulirani svjetovi moraju podudarati na svim propozicionalnim varijablama. Uvjet (forth) zapravo kaže da uvijek postoji svijet v' takav da se kvadrat iz slike 1.3 može nadopuniti. Uvjet (back) je simetričan uvjetu (forth).

U definiciji 1.4.5 smo definirali bisimulacije samo za modele osnovne modalne logike, no to možemo lako poopćiti.

Napomena 1.2.9. *Bisimulacije možemo definirati i u općenitom slučaju kada je $\mathfrak{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle \in \tau}$ i $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle \in \tau}$. Uvjet (at) je identičan kao u definiciji 1.4.5. Preostala dva uvjeta su:*

(forth) *Ako vrijedi* wZw' *i* $(w, v_1, \ldots, v_n) \in R_\triangle$ *tada postoje* $v'_1, \ldots, v'_n \in W'$ *takvi da vrijedi* $(w', v'_1, \ldots, v'_n) \in R'_\triangle$ *i za svaki* $i = 1, \ldots, n$ *vrijedi* $v_i Z v'_i$.

(back) *Ako vrijedi* wZw' *i* $(w', v'_1, \ldots, v'_n) \in R'_\triangle$ *tada postoje* $v_1, \ldots, v_n \in W$ *takvi da vrijedi* $(w, v_1, \ldots, v_n) \in R_\triangle$ *i za svaki* $i = 1, \ldots, n$ *vrijedi* $v_i Z v'_i$.

Nadalje, možemo promatrati i bisimulacije do dubine n. Drugim riječima, za sve "puteve" u $\mathfrak{M}$ duljine najviše n trebali bi postojati odgovarajući "putevi" u $\mathfrak{M}'$ i obratno.

Definicija 1.2.10. *Neka je* τ *modalni tip koji sadrži samo unarne operatore. Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R_1, \ldots, R_k, \ldots, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R'_1, \ldots, R'_k, \ldots, V')$ τ*-modeli i neka su dani svjetovi* $w \in W$ *i* $w' \in W'$. *Kažemo da su* w *i* w' ***n-bisimulirani**, u oznaci* $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$, *ako postoji niz binarnih relacija* $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ *sa sljedećim svojstvima:*

a) $wZ_n w'$,

b) *Ako je* $vZ_0 v'$ *onda vrijedi* $v \in V(P)$ *ako i samo ako* $v' \in V'(P)$, *za svaku propozicionalnu varijablu* P,

c) *Ako je* $vZ_{i+1}v'$ *i* $vR_k u$ *tada postoji* $u' \in W'$ *takav da je* $v'R'_k u'$ *i* $uZ_i u'$, *za svaki* $i < n$,

d) *Ako je* $vZ_{i+1}v'$ *i* $v'R'_k u'$ *tada postoji* $u \in W$ *takav da je* $vR_k u$ *i* $uZ_i u'$, *za svaki* $i < n$.

Lako je vidjeti da $w \underline{\leftrightarrow} w'$ povlači $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$ za svaki n. Ako je Z bisimulacija između w i w', stavimo $Z_i := Z$ za svaki $i < n$ pa tvrdnja očito slijedi.

Za sljedeću definiciju trebat će nam pojam *neposredni sljedbenik* i pojam *puta* između dva svijeta. Neka je W neprazan skup i $R \subseteq W \times W$ relacija. Reći ćemo da je svijet v neposredni sljedbenik svijeta w ako je wRv i ne postoji svijet $t \in W$ takav da je wRt i tRv. Put je svaki niz svjetova $v_0, v_1, \ldots, v_n$ pri čemu je za sve $i = 0, \ldots, n-1$ svijet v_{i+1} neposredni sljedbenik svijeta v_i. Kažemo da postoji put između svjetova w i v ako postoji put $v_0, v_1, \ldots, v_n$ pri čemu je $v_0 = w$ i $v_n = v$. Duljina tog puta je n.

Definicija 1.2.11. *Neka je* τ *modalni tip koji sadrži samo unarne operatore. Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R_1, \ldots, R_n, \ldots, V)$ *točkovno generiran* τ*-model s korijenom* w. ***Visina svijeta*** v *u modelu* $\mathfrak{M}$ *definira se kao duljina najkraćeg puta između korijena* w *i svijeta* v. *Visina korijena* w *je 0.* ***Visina modela*** $\mathfrak{M}$ *definira se kao* $\max\{n \mid \text{postoji svijet u } \mathfrak{M} \text{ visine } n\}$, *ako taj maksimum postoji; inače kažemo da je visina od* $\mathfrak{M}$ *beskonačna.*

Prethodna definicija nas motivira da ponekad proučavamo modele s unaprijed određenom visinom. Zato ćemo definirati restrikciju modela.

Definicija 1.2.12. *Neka je* $k \in \mathbb{N}$. ***Restrikcija*** *modela* $\mathfrak{M}$ *na* k, *u oznaci* $\mathfrak{M} \upharpoonright k$, *se definira kao podmodel od* $\mathfrak{M}$ *koji sadrži samo svjetove čija je visina najviše* k.

Intuitivno, restrikcija od $\mathfrak{M}$ na k sadrži sve svjetove do kojih se može doći iz korijena u najviše k koraka pomoću pripadnih relacija od $\mathfrak{M}$. Pojmovi visina i put nas asociraju na strukturu stabla koja je često korištena u matematičkoj logici. Stoga ćemo formalno definirati pojam stabla.

Definicija 1.2.13. *Neka je T neprazan skup i S binarna relacija na T. **Stablo** je uređeni par (T, S) sa sljedećim svojstvima:*

a) Postoji jedinstveni $r \in T$ (korijen) takav da za svaki $t \in T, t \neq r$ postoji konačan niz $r = t_0, t_1, \ldots, t_n = t \in T$ $(n > 0)$ takav da je $t_i S t_{i+1}$ za svaki $i < n$.

b) Za svaki $t \in T, t \neq r$ postoji jedinstveni $t' \in T$ (prethodnik) takav da je $t' S t$.

c) S je aciklička, tj. ne postoji konačan niz $t = t_0, t_1, \ldots, t_n = t \in T$ $(n > 0)$ takav da je $t_i S t_{i+1}$ za svaki $i < n$.

Zanimljivi će nam biti modeli koji imaju strukturu stabla.

Definicija 1.2.14. *Neka je τ modalni tip koji sadrži samo unarne operatore. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, V)$ τ-model (R_i su binarne relacije). Kažemo da je model $\mathfrak{M}$ **stablaste strukture** ako je par $(W, \cup_i R_i)$ stablo. Točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ je stablaste strukture ako je $\mathfrak{M}$ stablaste strukture.*

U prethodnoj definiciji pretpostavlja se da model sadrži samo binarne relacije. Ipak, definicija se lako može proširiti na proizvoljne modele.

Napomena 1.2.15. *Prethodnu definiciju možemo poopćiti i na modele koji sadrže relacije proizvoljne mjesnosti. Ako je $R_\triangle$ relacija mjesnosti $n + 1$, tada nju možemo shvatiti kao n binarnih relacija. Preciznije, ako je $(s_0, s_1, \ldots, s_n) \in R_\triangle$, možemo definirati n binarnih relacija $R_1, \ldots, R_n$ tako da je $s_0 R_i s_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Time smo zapravo transformirali model tako da sadrži samo binarne relacije.*

Nisu svi modeli stablaste strukture, no za svaki model se može konstruirati njemu bisimulirani model koji je stablaste strukture. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.16. *Neka je τ modalni tip koji sadrži samo unarne operatore. Tada za svaki točkovni τ-model $(\mathfrak{M}, w)$ postoji točkovni τ-model $(\mathfrak{M}', w')$ stablaste strukture takav da je $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$.*

Dokaz. Neka je $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljan točkovni τ-model. Stavimo da je $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, V)$. Konstruirat ćemo τ-model $\mathfrak{M}' = (W', R'_1, R'_2, \ldots, V')$ tako da zadovoljava tražene uvjete. Definirajmo W' kao skup svih konačnih nizova $(w, u_1, \ldots, u_n)$ pri čemu je $n \geq 0$, $u_i \in W$ i vrijedi $w R_1 u_1 \cdots R_n u_n$ za neke relacije $R_1, \ldots, R_n$ iz $\mathfrak{M}$. Nadalje, definirat ćemo relacije R'_k

na sljedeći način: $(w, u_1, \dots, u_n)R'_k(w, v_1, \dots, v_m)$ ako i samo ako je $m = n + 1$, $u_i = v_i$ za svaki $i = 1, \dots, n$ i vrijedi $u_n R_k v_m$ za neku relaciju R_k iz $\mathfrak{M}$. Još definiramo V' na način da je $(w, u_1, \dots, u_n) \in V'(P)$ ako i samo ako je $u_n \in V(P)$ za svaku propozicionalnu varijablu P. Pokažimo sada da je $\mathfrak{M}'$ stablaste strukture. Trebamo pokazati da je par $(W', \cup_k R'_k)$ stablo. Za korijen stabla možemo uzeti (w) jer za bilo koji $(w, u_1, \dots, u_n) \in W'$ postoji put od (w) do $(w, u_1, \dots, u_n)$. Taj put je očito $(w), (w, u_1), (w, u_2), \dots, (w, u_1, \dots, u_n)$. Nadalje, svaki $(w, u_1, \dots, u_n) \in W'$, $n > 0$ ima jedinstvenog prethodnika, a to je $(w, u_1, \dots, u_{n-1})$. Također, relacija $\cup_k R'_k$ je aciklička jer da bi vrijedilo $(w, u_1, \dots, u_n)R'_k(w, v_1, \dots, v_m)$ mora biti $m = n + 1$ tj. $m > n$ stoga ne možemo dobiti ciklus. Zaključujemo da je $(W', \cup_k R'_k)$ stablo pa je $\mathfrak{M}'$ stablaste strukture (i $(\mathfrak{M}', w')$ je stablaste strukture za svaki $w' \in W'$).

Pokažimo još da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$. Neka je $f : W' \to W$ funkcija definirana s $f((w, u_1, \dots, u_n)) = u_n$. Zatim definirajmo binarnu relaciju $Z := \{(f(s), s) \mid s \in W'\}$. Dokažimo da je Z bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Uvjet (at) je zadovoljen jer smo definirali da je $(w, u_1, \dots, u_n) \in V'(P)$ ako i samo ako je $u_n \in V(P)$ za svaku propozicionalnu varijablu P. Dokažimo još da je uvjet (forth) zadovoljen. Neka je $(w, u_1, \dots, u_n) \in W'$ (tada je $u_n Z(w, u_1, \dots, u_n)$ zbog definicije od Z) i neka je $v \in W$ takav da je $u_n R v$. Tada je $(w, u_1, \dots, u_n, v) \in W'$ te vrijedi $vZ(w, u_1, \dots, u_n, v)$ i $(w, u_1, \dots, u_n)R'(w, u_1, \dots, u_n, v)$, dakle uvjet (forth) je zadovoljen. Analogno se dokazuje da vrijedi i uvjet (back). Također, vrijedi i $wZ(w)$. Time smo pokazali da je $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', (w))$. Budući da je $(\mathfrak{M}', (w))$ stablaste strukture, dokazali smo traženu tvrdnju. □

Metoda korištena u prethodnom dokazu za konstrukciju modela $\mathfrak{M}'$ iz $\mathfrak{M}$ je često korištena u modalnoj logici i računarstvu te je poznata pod nazivom *odmotavanje*.

Zbog napomene 1.2.15, prethodna propozicija vrijedi i za općenite modalne tipove. Definirajmo sada restrikciju točkovnog modela. To će nam trebati kasnije kod uvođenja pojma apstraktne modalne logike.

Definicija 1.2.17. *Neka je $k \in \mathbb{N}$.* ***Restrikcija točkovnog modela*** $(\mathfrak{M}, w)$ *na k, u oznaci $((\mathfrak{M}, w) \restriction k, w)$, je podmodel od $\mathfrak{M}$ koji je točkovno generiran iz korijena w, a sadrži samo svjetove visine najviše k.*

U osnovnoj modalnoj logici restrikcije modela su vrlo značajne za ispitivanje istinitosti formula. Više o tome nam govori sljedeća propozicija koja se lako dokazuje indukcijom.

Propozicija 1.2.18. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljan točkovni model. Neka je ϕ proizvoljna* BML*-formula takva da je* $\deg(\phi) \leq n$. *Tada vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi \textit{ ako i samo ako } ((\mathfrak{M}, w) \restriction n, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi.$$

Iduća definicija je još jedna priprema za definiciju pojma apstraktne modalne logike. Proizvoljan modalni jezik je moguće proširiti tako da mu dodamo nove modalne operatore. Stoga ćemo definirati pojam proširenja modela na veći modalni tip.

Definicija 1.2.19. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, \{R_\triangle \mid \triangle \in \tau_1\}, V)$ τ_1*-model. Kažemo da je* τ_2*-model* $\mathfrak{N} = (W', \{R'_\triangle \mid \triangle \in \tau_2\}, V')$ ***proširenje na veći modalni tip*** *modela* $\mathfrak{M}$ *ako je* $\tau_1 \subseteq \tau_2$*,* $W \subseteq W'$*,* $R_\triangle \subseteq R'_\triangle$*, za svaki* $\triangle \in \tau_1$ *i* $V(P) = V'(P)$*, za svaku propozicionalnu varijablu* P*.*

Sljedeće što ćemo definirati su ekvivalentni svjetovi. Intuicija nam govori da su svjetovi w i w' ekvivalentni ako je skup formula koje su istinite u svijetu w jednak skupu formula koje su istinite u svijetu w'.

Definicija 1.2.20. *Neka je* τ *modalni tip i neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ τ*-modeli. Kažemo da su svjetovi* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ ***ekvivalentni****, u oznaci* $w \leftrightsquigarrow w'$*, ako za svaku formulu* ϕ *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash \phi.$$

Važno pitanje je jesu li formule modalne logike invarijantne na bisimulacije. Odgovor na to nam daje sljedeći teorem.

Teorem 1.2.21. *Neka je* τ *modalni tip i neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ τ*-modeli. Tada za sve svjetove* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *vrijedi:*

$$w \underline{\leftrightarrow} w' \text{ povlači } w \leftrightsquigarrow w'.$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ τ-modeli i neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ svjetovi takvi da vrijedi $w \underline{\leftrightarrow} w'$. Tvrdimo da za svaku formulu ϕ vrijedi da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$.
Baza indukcije: Ako je ϕ propozicionalna varijabla, tvrdnja direktno slijedi iz uvjeta (at) iz definicije bisimulacije. Ako je ϕ jednak $\top$ ili $\bot$, tvrdnja direktno slijedi iz definicije 1.1.6 jer je formula $\top$ istinita u svakom svijetu, a formula $\bot$ nije istinita ni u jednom svijetu.
Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki $n > 0$ vrijedi tvrdnja za sve formule čija je složenost manja ili jednaka n odnosno formule koje sadrže najviše n veznika ili modalnih operatora.
Korak indukcije: Neka je ϕ formula složenosti $n + 1$. Ako je ϕ oblika $\neg\psi$ gdje je ψ formula složenosti n ili nekog od oblika $\psi \wedge \xi$, $\psi \vee \xi$, $\psi \rightarrow \xi$, $\psi \leftrightarrow \xi$ pri čemu su ψ i ξ formule složenosti manje od n, tvrdnja direktno slijedi iz definicije 1.1.6 i pretpostavke indukcije. Neka je sada $\triangle$ modalni operator mjesnosti 1. Za modalne operatore mjesnosti veće od 1 postupak je analogan. Neka je ϕ oblika $\triangle\psi$, pri čemu je ψ formula složenosti n. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle\psi$. Po definiciji to znači da postoji svijet $v \in \mathfrak{M}$ takav da je $wR_\triangle v$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Budući da je $w \underline{\leftrightarrow} w'$, iz uvjeta (forth) iz definicije bisimulacije slijedi da postoji svijet $v' \in \mathfrak{M}'$ takav da je $w'R'_\triangle v'$ i $v \underline{\leftrightarrow} v'$. Zbog pretpostavke indukcije dobivamo $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$ i sada po definiciji zaključujemo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \triangle\psi$. Time smo pokazali da $\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle\psi$ povlači $\mathfrak{M}', v' \Vdash \triangle\psi$. Obratni smjer slijedi analogno iz uvjeta (back) iz definicije bisimuliranosti. □

Obrat općenito ne vrijedi, tj. ako su dva svijeta ekvivalentna oni ne moraju nužno biti bisimulirani. Protuprimjer možete vidjeti u [1]. Ipak, obrat vrijedi uz određenu restrikciju na modele. Neka je τ modalni tip i neka je $\mathfrak{M}$ τ-model. Kažemo da je model $\mathfrak{M}$ *slikovno-konačan* ako za svaki svijet u i za svaku relaciju R u modelu $\mathfrak{M}$ vrijedi da je skup $\{(v_1, \ldots, v_n) \mid (u, v_1, \ldots, v_n) \in R\}$ konačan.

Teorem 1.2.22 (Hennessy-Milnerov teorem)**.** *Neka je τ modalni tip i neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ slikovno-konačni τ-modeli. Tada za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi:*

$$w \underline{\leftrightarrow} w' \text{ ako i samo ako } w \leftrightsquigarrow w'.$$

Dokaz prethodnog teorema je dan u [1].

1.3 Propozicionalna dinamička logika

Jedna od važnih grana modalne logike je propozicionalna dinamička logika PDL. Motivacija za uvođenje propozicionalne dinamičke logike je provjera ispravnosti računalnih programa. Provjera programa je oduvijek predstavljala problem u teorijskom računarstvu pa čak i u teoriji rekurzija zbog razloga koji se temelje na "halting" problemu. Dakle, osnovni pojam u PDL je program. Intuitivno, program je niz naredbi zapisan u nekom formalnom jeziku koji za zadani ulaz računa izlaz. Ideja ove logike je svakom programu π pridružiti modalni operator $\langle\pi\rangle$. Tako se formula $\langle\pi\rangle\phi$ čita "kad god se program π zaustavi, to mora učiniti u stanju koje zadovoljava formulu ϕ". Definirajmo sada precizno pojam programa.

Definicija 1.3.1. *Neka je Π_0 konačan ili prebrojiv skup čije elemente zovemo osnovni programi. Skup* ***programa*** *Π sadrži sve osnovne programe, dok se ostali programi konstruiraju na sljedeće načine:*

(izbor) *Ako su π_1 i π_2 programi, tada je i $\pi_1 \cup \pi_2$ program.*

(kompozicija) *Ako su π_1 i π_2 programi, tada je i $\pi_1;\pi_2$ program.*

(iteracija) *Ako je π program, tada je i π^* program.*

Objasnimo značenje ovih konstrukcija. Izvršavanje programa $\pi_1 \cup \pi_2$ znači "izvrši π_1 ili izvrši π_2 nedeterministički". Izvršavanje programa $\pi_1;\pi_2$ znači "prvo izvrši π_1, a zatim izvrši π_2". Izvršavanje programa π^* znači "izvrši π konačan broj puta (moguće i nijednom)".

Skup modalnih operatora u PDL je $\{\langle\pi\rangle \mid \pi \in \Pi\}$. Sada možemo uvesti pojam formule u PDL. PDL-formula ϕ se definira rekurzivno:

$$\phi ::= P \mid \top \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \to \psi \mid \phi \leftrightarrow \psi \mid \langle\pi\rangle\phi, \tag{1.1}$$

pri čemu je P propozicionalna varijabla, a π program. Koristimo i dualne modalne operatore: za modalni operator $\langle\pi\rangle$ uvodimo operator $[\pi]$ na način da stavljamo $[\pi]\phi \equiv \neg\langle\pi\rangle\neg\phi$. Primjer jedne formule je $\langle a \cup b\rangle P \leftrightarrow P \vee \langle b; c^*\rangle P$, pri čemu su a, b i c osnovni programi, a P je propozicionalna varijabla.

U ovoj logici, modalni tip je zadan sa skupom osnovnih programa Π_0. Konvencija je da osnovne programe označavamo s a, b, c itd. Svaki modalni tip očito sadrži beskonačno mnogo modalnih operatora jer se iz osnovnih programa može izgraditi beskonačno mnogo programa. Svi modalni operatori su unarni. Definirat ćemo funkciju $\mathcal{L}_{\mathrm{PDL}}$ koja proizvoljnom modalnom tipu pridružuje određeni skup formula. Neka je Π proizvoljan skup programa i neka je τ pripadni modalni tip, tj. $\tau = \{\langle\pi\rangle \mid \pi \in \Pi\}$. Sada definiramo da je $\mathcal{L}_{\mathrm{PDL}}(\tau)$ skup svih formula koje se mogu konstruirati pravilom (1.1), pri čemu je $\pi \in \Pi$.

Što se tiče semantike, vrijedi sve kao u odjeljku 1.1. Napomenimo samo da je model sada oblika $(W, \{R_\pi \mid \pi \in \Pi\}, V)$ ili kraće zapisano $(W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$. Model za jezik propozicionalne dinamičke logike ima po jednu relaciju dostiživosti za svaki program π.

Ono što bismo još htjeli kod okvira i modela za jezik propozicionalne dinamičke logike je da su u skladu s intuitivnom interpretacijom programskih konstruktora $\cup$, ; i *. To nas motivira za iduću definiciju.

Definicija 1.3.2. *Neka je $(W, R_\pi)_{\pi\in\Pi}$ okvir za jezik propozicionalne dinamičke logike takav da je R_a proizvoljna binarna relacija za svaki osnovni program a, dok za složene programe π, relacija R_π zadovoljava sljedeće uvjete:*

$$\begin{aligned} R_{\pi_1\cup\pi_2} &= R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2} \\ R_{\pi_1;\pi_2} &= R_{\pi_1}R_{\pi_2} = \{(x,y) \mid \exists z\,(xR_{\pi_1}z \wedge zR_{\pi_2}y)\} \\ R_{\pi_1^*} &= (R_{\pi_1})^*\text{, pri čemu je } (R_{\pi_1})^* \text{ refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije } R_{\pi_1}. \end{aligned}$$

*Takav okvir nazivamo **regularan okvir za** Π. Model baziran na regularnom okviru za Π nazivamo **regularan model za** Π.*

U nastavku pretpostavljamo da su svi modeli logike PDL regularni. Kasnije će se pokazati da PDL nije konačnog stupnja (što ćemo definirati u idućem poglavlju) upravo zbog uvjeta regularnosti. Istaknimo još pojam točkovnog modela u PDL.

Definicija 1.3.3. *Neka je Π proizvoljan skup programa i neka je τ pripadni modalni tip, tj. $\tau = \{\langle\pi\rangle \mid \pi \in \Pi\}$. **Točkovni τ-model** u PDL je par $(\mathfrak{M}, w)$ pri čemu je $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\langle\pi\rangle\in\tau}$ regularan model za Π, a w je neki element iz W.*

Kao i kod osnovne modalne logike, uvodimo relaciju $\Vdash_{\mathrm{PDL}}$ između točkovnih modela i formula. Relacija je definirana rekurzivno, po principu opisanom u definiciji 1.1.6. Istaknimo samo situaciju kada formula sadrži modalni operator. Za točkovni τ-model $(\mathfrak{M}, w)$ i formulu $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PDL}}(\tau)$ vrijedi:

$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathrm{PDL}} \langle\pi\rangle\phi$ ako i samo ako za neki $v \in W$ takav da je $wR_\pi v$ vrijedi $(\mathfrak{M}, v) \Vdash \phi$

$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathrm{PDL}} [\pi]\phi$ ako i samo ako za svaki $v \in W$ takav da je $wR_\pi v$ vrijedi $(\mathfrak{M}, v) \Vdash \phi$

Definirajmo još pojam bisimulacije u PDL.

Definicija 1.3.4. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ i $\mathfrak{M}' = (W', R'_\pi, V')_{\pi\in\Pi}$ modeli u PDL. Nepraznu binarnu relaciju $Z \subseteq W \times W'$ nazivamo* ***bisimulacijom*** *između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ i označavamo s $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ ako ispunjava sljedeće uvjete:*

(at) *Ako je wZw' tada za svaku propozicionalnu varijablu P vrijedi: $w \in V(P)$ ako i samo ako je $w' \in V'(P)$.*

(forth) *Ako je wZw' i $wR_\pi v$ tada postoji svijet $v' \in \mathfrak{M}'$ takav da je vZv' i $w'R'_\pi v'$.*

(back) *Ako je wZw' i $w'R'_\pi v'$ tada postoji svijet $v \in \mathfrak{M}$ takav da je vZv' i $wR_\pi v$.*

Vidimo da je prethodna definicija jako slična definiciji 1.4.5. Također, točkovni modeli $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ su bisimulirani, u oznaci $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$, ako postoji bisimulacija Z između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te vrijedi wZw'. Uočavamo da se uvjeti bisimuliranosti moraju provjeravati za sve relacije koje postoje u pripadnim modelima. Ipak, sljedeća propozicija će pokazati da je dovoljno provjeravati uvjete bisimuliranosti samo na relacijama koje interpretiraju osnovne programe.

Propozicija 1.3.5. *Ako vrijede uvjeti (forth) i (back) za relacije R i S, tada vrijede i za relacije $R \cup S$, RS i R^*.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za relaciju RS. Ostala dva slučaja se dokazuju na analogan način. Dokažimo prvo da vrijedi uvjet (forth). Neka je wZw' i neka je $(w, v) \in RS$. Tada po definiciji relacije RS postoji u takav da je wRu i uSv. Primjenjujući uvjet (forth) za relacije R i S, dobivamo da postoji u' takav da je uZu' i $w'R'u'$ te da postoji v' takav da je vZv' i $u'S'v'$. Sada iz $w'R'u'$ i $u'S'v'$ dobivamo da vrijedi $w'R'S'v'$. Time smo dokazali da vrijedi uvjet (forth) za relaciju RS. Za dokaz uvjeta (back) uzmimo wZw' i $(w', v') \in R'S'$. Po definiciji relacije $R'S'$ postoji u' takav da je $w'R'u'$ i $u'S'v'$. Primjenjujući uvjet (back) za relacije R' i S', na sličan način kao i kod uvjeta (forth), dobivamo da postoji v takav da vrijedi vZv' i $wRSv$. □

Propozicija 1.3.6. *Bisimulacija čuva istinitost PDL-formula.*

Dokaz. Dokaz se provodi na isti način kao i dokaz teorema 1.2.21. □

Ako modalne operatore $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \ldots$ logike PDL poistovjetimo s modalnim operatorima $\Diamond_1, \Diamond_2, \ldots$ logike BML, uočavamo da je PDL proširenje od BML na neki način. O tome da neka logika proširuje BML ćemo više u idućem poglavlju.

Promotrimo sljedeći skup formula:

$$\begin{aligned}\Delta = \{&\langle \pi_1 ; \pi_2 \rangle P \leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle P, \langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle P \leftrightarrow (\langle \pi_1 \rangle P \vee \langle \pi_2 \rangle P) \\ &\langle \pi^* \rangle P \leftrightarrow (P \vee \langle \pi \rangle \langle \pi^* \rangle P), [\pi^*](P \to [\pi]P) \to (P \to [\pi^*] P) \mid \pi \in \Pi\}\end{aligned}$$

Formula $[\pi^*](P \to [\pi]P) \to (P \to [\pi^*] P)$ se još naziva i *Segerbergov aksiom*.

Sljedeća propozicija kaže da je skup Δ dovoljno jak za definiranje klase regularnih okvira.

Propozicija 1.3.7. *Neka je $\mathcal{R}$ klasa svih regularnih okvira i $\mathfrak{F}$ proizvoljan okvir. Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{F} \in \mathcal{R} \text{ ako i samo ako } \mathfrak{F} \Vdash \Delta.$$

Komentirajmo ukratko dokaz prethodne propozicije. Za zadani regularan okvir, jedina formula iz Δ za koju nije trivijalno dokazati da je valjana jest Segerbergov aksiom. To se dokazuje indukcijom po mjesnosti relacije dostiživosti regularnog okvira. Kod dokaza obratne implikacije, netrivijalno je dokazati uvjet za iteraciju. Inkluzija $(R_\pi)^* \subseteq R_{\pi^*}$ se dokazuje indukcijom po mjesnosti relacije, a obratna inkluzija slijedi iz Segerbergovog aksioma.

Dosad smo govorili o varijanti PDL koja se često naziva regularna propozicionalna dinamička logika. Razlog je taj što su programski konstruktori $\cup$, ; i * iz definicije 1.3.1 isti oni koji se koriste u teoriji formalnih jezika za konstrukcija regularnih izraza. Osim njih, mogu se proučavati razni drugi konstruktori. Navest ćemo još tri poznata konstruktora:

(presjek) Ako su π_1 i π_2 programi, tada je i $\pi_1 \cap \pi_2$ program.

(test) Ako je ϕ formula, tada je ϕ? program.

(obrat) Ako je π program, tada je i π^- program

Objasnimo značenje ovih konstrukcija. Izvršavanje programa $\pi_1 \cap \pi_2$ znači "izvrši paralelno π_1 i π_2". Konstruktor test je neobičan jer nam omogućava da napravimo program od formule. Izvršavanje programa ϕ? znači "ako je ϕ istinita, nastavi, inače stani". Drugim riječima, modalni operator $\langle \phi? \rangle$ pristupa trenutnom stanju i ispituje je li ϕ istinita na njemu. Test je zapravo programski konstruktor za kontrolu toka, što je uobičajeno u bilo kojem programskom jeziku. Obrat je programski konstruktor koji nam omogućava pokretanje programa unazad. Ulaz programa π^- je izlaz programa π i obratno.

Uvođenjem testa, možemo izgraditi kompliciranije programe koji su uobičajeni u programskim jezicima:

(if ϕ then π else ρ): $((\phi? \,;\, \pi) \cup (\,\neg\phi? \,;\, \rho))$

(while ϕ do π): $((\phi? \,;\, \pi)^* \,;\, \neg\phi?)$

(repeat π until ϕ): $(\pi \,;\, ((\neg\phi? \,;\, \pi)^* \,;\, \phi?))$

Može se pokazati da za formulu $\langle$**repeat** π **until** $\neg P\langle\pi\rangle P$ ne postoji ekvivalentna formula u jeziku propozicionalne dinamičke logike bez testa. Dakle test doista unosi veću izražajnost.

Htjeli bismo prilagoditi koncept regularnog modela u skladu s novim konstruktorima. Stoga ćemo za očuvanje regularnosti imati tri nova zahtjeva. Za odgovarajuće relacije modela $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ zahtijevamo:

$$\begin{aligned} R_{\pi_1\cap\pi_2} &= R_{\pi_1} \cap R_{\pi_2} \\ R_{\phi?} &= \{(w,v) \in W^2 \mid w = v \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi\} \\ R_{\pi_1^-} &= (R_{\pi_1})^- = \{(w,v) \in W^2 \mid (v,w) \in R_{\pi_1}\}. \end{aligned}$$

Primijetimo da nam je za ovakve zahtjeve bitna valuacija. Zbog toga ne možemo promatrati regularne okvire već samo regularne modele.

1.4 Linearna temporalna logika

Još jedna grana modalne logike je linearna temporalna logika LTL. Ta logika spada u temporalne logike odnosno logike čiji je jezik pogodan za izražavanje koncepta vremena. Motivacija za uvođenje temporalne logike je proučavanje izjava čija se istinitost može mijenjati kroz vrijeme. Linearna temporalna logika vrijeme modelira kao niz stanja koja odgovaraju trenutcima u vremenu. Također, smatra se da je prijelaz iz trenutnog stanja u buduće stanje u potpunosti određen trenutnim stanjem, tj. ne ovisi o prošlosti.

Modalni operatori temporalne logike se često nazivaju temporalni operatori. Temporalni operatori omogućuju "pogled" u budućnost. Skup temporalnih operatora linearne temporalne logike je $\mathcal{T} := \{X, F, G, U, W, R\}$, pri čemu su temporalni operatori X, F i G unarni, a temporalni operatori U, W i R su binarni. Sada možemo uvesti pojam formule u LTL. LTL-formula ϕ se definira rekurzivno:

$$\phi ::= P \mid \top \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi\wedge\psi \mid \phi\vee\psi \mid \phi \to \psi \mid \phi \leftrightarrow \psi \mid X\phi \mid F\phi \mid G\phi \mid \phi U\psi \mid \phi W\psi \mid \phi R\psi, \quad (1.2)$$

pri čemu je P propozicionalna varijabla. Primjer jedne formule je $F(P \vee Q) \to Q\ U\ P$, pri čemu su P i Q propozicionalne varijable. Modalni tip τ u LTL je neki podskup skupa temporalnih operatora $\mathcal{T}$. Definirat ćemo funkciju $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}$ koja proizvoljnom modalnom tipu pridružuje određeni skup formula. Neka je τ modalni tip. Sada definiramo da je $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}(\tau)$ skup svih formula koje se mogu konstruirati pravilom (1.2), pri čemu su dozvoljeni samo temporalni operatori iz τ.

Što se tiče semantike, u linearnoj temporalnoj logici modeli su često nazivani i tranzicijski sustavi. Promatrat ćemo samo modele s jednom binarnom relacijom.

Definicija 1.4.1. ***Model*** *u linearnoj temporalnoj logici je uređena trojka* $(S, \mapsto, L)$ *pri čemu je* S *skup čije elemente nazivamo stanja,* $\mapsto$ *je binarna relacija na* S *za koju vrijedi da za svako stanje* $s \in S$ *postoji stanje* $s' \in S$ *takvo da vrijedi* $s \mapsto s'$*, a* L *je funkcija koja pridružuje svakoj propozicionalnoj varijabli neki podskup od* S*.* ***Točkovni model*** *je par* $(\mathfrak{M}, s)$ *pri čemu je* $\mathfrak{M} = (S, \mapsto, L)$ *model, a* s *je neki element iz* S*.*

LTL formulama želimo opisati ponašanje sustava dok on mijenja stanja. Stoga ćemo takve formule interpretirati na nizovima stanja odnosno putevima.

Definicija 1.4.2. ***Put*** π *u modelu* $\mathfrak{M} = (S, \mapsto, L)$ *je beskonačan niz stanja* $s_0, s_1, s_2, \dots$ *skupa* S *takav da za svaki* $i \geq 0$ *vrijedi* $s_i \mapsto s_{i+1}$*. Put označavamo sa* $s_0 \mapsto s_1 \mapsto s_2 \mapsto \cdots$ *i pišemo* $\pi \in \mathfrak{M}$*.*

Put u modelu predstavlja jedan mogući vremenski slijed dinamičkih promjena sustava. Stanja u nizu ćemo poistovjećivati s trenutcima u vremenu. Reći ćemo da se sustav na početku nalazio u stanju s_0, zatim u idućem trenutku u stanju s_1 i tako dalje. Dio puta π koji počinje od i-tog stanja u nizu označavamo s π^i.

Da bi mogli proučavati istinitost formula u nekom stanju, prvo ćemo uvesti pojam istinitosti formule na putu.

Definicija 1.4.3. ***Istinitost formule*** ϕ ***na putu*** $\pi = s_0 \mapsto s_1 \mapsto s_2 \mapsto \cdots$ *u modelu* $\mathfrak{M} = (S, \mapsto, L)$*, u oznaci* $\pi \Vdash \phi$*, definiramo rekurzivno:* $\pi \Vdash P$ *ako i samo ako je* $P \in L(s_0)$*, pri čemu je* P *propozicionalna varijabla. Nadalje, relacija* $\Vdash$ *komutira s bulovskim veznicima. Za formule koje sadrže temporalne operatore definiramo:*

$$\pi \Vdash X\phi \text{ ako i samo ako } \pi^1 \Vdash \phi$$

$$\pi \Vdash G\phi \text{ ako i samo ako za svaki } i \geq 0, \pi^i \Vdash \phi$$

$$\pi \Vdash F\phi \text{ ako i samo ako postoji } i \geq 0, \pi^i \Vdash \phi$$

$$\pi \Vdash \phi U \psi \text{ ako i samo ako postoji } n \geq 0 \text{ takav da za } 0 \leq i \leq n-1 \text{ vrijedi } \pi^i \Vdash \phi, \pi^n \Vdash \psi$$

$$\pi \Vdash \phi R \psi \text{ ako i samo ako postoji } n \geq 0 \text{ takav da za } 0 \leq i \leq n-1 \text{ vrijedi } \pi^i \Vdash \psi, \pi^n \Vdash \phi; \text{ ili } \pi \Vdash G\psi$$

$$\pi \Vdash \phi W \psi \text{ ako i samo ako postoji } n \geq 0 \text{ takav da za } 0 \leq i \leq n-1 \text{ vrijedi } \pi^i \Vdash \phi, \pi^n \Vdash \psi; \text{ ili } \pi \Vdash G\phi$$

Uočavamo da se istinitost formula koje sadrže temporalne operatore određuje promatranjem raznih sufiksa puta.

Sada smo spremni definirati istinitost formule ϕ u stanju s modela $\mathfrak{M}$.

Definicija 1.4.4. *Neka je $\mathfrak{M} = (S, \mapsto, L)$ model, stanje $s \in S$ i neka je ϕ $\mathtt{LTL}$ formula. Kažemo da je formula ϕ* ***istinita u stanju*** *s modela $\mathfrak{M}$, u oznaci $\mathfrak{M}, s \Vdash_{\mathtt{LTL}} \phi$, ako za svaki put π u $\mathfrak{M}$ s početkom u stanju s vrijedi $\pi \Vdash \phi$.*

Intuitivno, formule koje su istinite u stanju s su događaji za koje možemo utvrditi da će se sigurno ostvariti u vremenskom slijedu koji započinje stanjem s. Relacija $\Vdash_{\mathtt{LTL}}$ je zapravo relacija između točkovnih modela i LTL-formula.

Kao i kod PDL, definirat ćemo bisimulacije za LTL.

Definicija 1.4.5. *Neka su $\mathfrak{M} = (S, \mapsto, L)$ i $\mathfrak{M}' = (S', \mapsto', L')$ modeli u $\mathtt{LTL}$. Nepraznu binarnu relaciju $Z \subseteq S \times S'$ nazivamo* ***bisimulacijom*** *između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ i označavamo s $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ ako ispunjava sljedeće uvjete:*

(at) *Ako je sZs' tada za svaku propozicionalnu varijablu P vrijedi: $s \in L(P)$ ako i samo ako je $s' \in L'(P)$.*

(forth) *Ako je sZs' i $s \mapsto t$ tada postoji stanje $t' \in S'$ takvo da je tZt' i $s' \mapsto' t'$.*

(back) *Ako je sZs' i $s' \mapsto' t'$ tada postoji stanje $t \in S$ takvo da je tZt' i $s \mapsto t$.*

Definicija je očekivana; samo smo promijenili terminologiju koja odgovara linearnoj temporalnoj logici. Kao i do sada, točkovni modeli $(\mathfrak{M}, s)$ i $(\mathfrak{M}', s')$ su bisimulirani, u oznaci $(\mathfrak{M}, s) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', s')$, ako postoji bisimulacija Z između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te vrijedi sZs'.

Propozicija 1.4.6. *Bisimulacija čuva istinitost $\mathtt{LTL}$-formula.*

Postoji i proširenje LTL-a s dodatkom operatora prošlosti (tzv. PLTL). Može se pokazati da dodavanjem operatora prošlosti ništa ne dobivamo na izražajnosti jezika, tj. za svaku formulu proširenog LTL-a ϕ postoji LTL formula koja je ekvivalentna s ϕ u početnom trenutku.

Poglavlje 2

Lindströmov teorem za modalne logike

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne pojmove koji su potrebni za iskaz Lindströmovog teorema za modalnu logiku. Najvažniji od njih je pojam apstraktne modalne logike. Posebno ćemo razmatrati proširenja osnovne modalne logike i njihovu semantiku. Glavni cilj ovog poglavlja je dokaz Lindströmovog teorema za modalnu logiku.

2.1 Osnovni pojmovi

Kod uvođenja neke modalne logike u prethodnom poglavlju, najprije smo definirali pripadni jezik te logike. Kako bismo mogli definirati apstraktnu modalnu logiku, potrebno je definirati svojevrstan jezik za nju. Drugim riječima, potrebno je unaprijed definirati koji se modalni operatori i koje se propozicionalne varijable mogu koristiti. Za svaki modalni tip definirat ćemo formule tog tipa. Kod apstraktne modalne logike formule više ne moraju biti nizovi simbola na kakve smo navikli, već mogu biti proizvoljni objekti (primjerice, matrice). U definiciji ćemo navesti pravila koja ti objekti moraju zadovoljavati zajedno s točkovnim modelima.

Proširit ćemo pojam modalnog tipa. Smatrat ćemo da svaka logika ima definiran konačan ili prebrojiv skup svih modalnih operatora Ω i prebrojiv skup svih propozicionalnih varijabli Φ. Često nam neće trebati svi modalni operatori i sve propozicionalne varijable. Promatrat ćemo modalni tip τ kao uređeni par (τ', θ), pri čemu je τ' podskup od Ω, a θ podskup od Φ. Ako nam propozicionalne varijable nisu od velike važnosti, skup θ ćemo zanemariti. Kada bude potrebno posebno ćemo istaknuti koje propozicionalne varijable koristimo. Smatramo da je modalni tip konačan ako sadrži konačno mnogo modalnih operatora i konačno mnogo propozicionalnih varijabli.

Sada smo spremni uvesti pojam apstraktne modalne logike.

Definicija 2.1.1. ***Apstraktna modalna logika*** *je par $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$, pri čemu je $\mathcal{L}$ funkcija koja svakom modalnom tipu τ pridružuje neki skup $\mathcal{L}(\tau)$, a $\Vdash_{\mathcal{L}}$ je relacija između točkovnih τ-modela i elemenata skupa $\mathcal{L}(\tau)$ sa sljedećim svojstvima:*

a) Ako je τ modalni tip i $\phi \in \mathcal{L}(\tau)$, tada postoji konačan modalni tip $\tau_\phi \subseteq \tau$ takav da je $\phi \in \mathcal{L}(\tau_\phi)$. (svojstvo pojavljivanja)

b) Ako su τ_1 i τ_2 modalni tipovi takvi da je $\tau_1 \subseteq \tau_2$ onda vrijedi $\mathcal{L}(\tau_1) \subseteq \mathcal{L}(\tau_2)$. Nadalje, ako vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ i $(\mathfrak{N}, v)$ je proširenje od $(\mathfrak{M}, w)$ na veći modalni tip, tada vrijedi i $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. (svojstvo proširenja)

c) Ako vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}, v)$, onda za svaku ϕ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ako i samo ako $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. (svojstvo bisimuliranosti)

Elemente skupa $\mathcal{L}(\tau)$ nazivamo $\mathcal{L}_\tau$-formule. Skup $F_{\mathcal{L}} := \bigcup_\tau \mathcal{L}(\tau)$ nazivamo skup svih formula logike L. Elemente skupa $F_{\mathcal{L}}$ nazivamo $\mathcal{L}$-formule ili skraćeno formule.

Dosad smo opisali tri konkretne logike: BML, PDL i LTL. Za svaku od njih smo definirali funkciju $\mathcal{L}$ i relaciju $\Vdash_{\mathcal{L}}$. Iz definicija tih funkcija i relacija za svaku od navedenih logika, lako se vidi da sve zadovoljavaju svojstvo proširenja. Što se tiče svojstva pojavljivanja, za LTL je očito da vrijedi jer je skup temporalnih operatora konačan. Ako je ϕ proizvoljna BML formula, ona može sadržavati samo konačno mnogo modalnih operatora, označimo ih s $\Diamond_1, \dots, \Diamond_k$, i konačno mnogo propozicionalnih varijabli, označimo ih s $P_1, \dots, P_l$. Definiranjem konačnog modalnog tipa $\tau_\phi := (\{\Diamond_1, \dots, \Diamond_k\}, \{P_1, \dots, P_l\})$ vidimo da je $\phi \in \mathcal{L}_{\mathtt{BML}}(\tau_\phi)$ pa zaključujemo da svojstvo pojavljivanja vrijedi za BML. Na isti način zaključujemo i da PDL zadovoljava svojstvo pojavljivanja. Nadalje, za svaku od tih logika smo vidjeli da bisimuliranost čuva istinitost formula. Upravo zbog toga vrijedi svojstvo bisimuliranosti za sve tri logike. Stoga zaključujemo da su BML, PDL i LTL apstraktne modalne logike.

Budući da BML zovemo osnovnom modalnom logikom, htjeli bismo proučavati njena proširenja. To nas motivira da definiramo što znači da neka apstraktna modalna logika proširuje BML. Prije toga, uvest ćemo pojam izomorfizma točkovnih modela.

Definicija 2.1.2. *Neka su L i L′ apstraktne modalne logike i neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ redom točkovni modeli od L i L′, pri čemu je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$. Neka je $f\colon W \to W'$ funkcija. Kažemo da je f* ***izomorfizam točkovnih modela*** *$(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ ako je bijekcija i zadovoljava sljedeće uvjete:*

a) za sve $u, v \in W$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: uRv ako i samo ako je $f(u)R'f(v)$,

b) za svaku propozicionalnu varijablu P i za svaki svijet $u \in W$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $u \in V(P)$ ako i samo ako je $f(u) \in V'(P)$,

c) f(w) = w'.

Ako postoji izomorfizam točkovnih modela $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$, kažemo da su ti točkovni modeli ***izomorfni****.*

Izomorfizam je važna matematička funkcija kojom možemo poistovjetiti različite strukture. Konkretno, sada ćemo moći poistovjetiti izomorfne točkovne modele iz različitih logika. Prethodna definicija vrijedi i ako je $L = L'$, tj. možemo promatrati i izomorfne točkovne modele unutar jedne logike.

Definicija 2.1.3. *Kažemo da apstraktna modalna logika $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$* ***proširuje*** *$\mathtt{BML}$ ako za svaku $\mathtt{BML}$-formulu ϕ postoji $\mathcal{L}$-formula ψ takva da za svaki $\mathtt{BML}$-model $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi \text{ ako i samo ako } (\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \psi. \tag{2.1}$$

Implicitna pretpostavka u prethodnoj definiciji je da su klasa točkovnih modela logike L i klasa točkovnih $\mathtt{BML}$-modela jednake. To znači da svaki model logike L možemo promatrati kao $\mathtt{BML}$-model, i obratno.

Prethodnu definiciju možemo lako poopćiti tako da umjesto $\mathtt{BML}$ stavimo proizvoljnu apstraknu modalnu logiku L'. Tada kažemo da *L proširuje L'*. Sada možemo definirati što znači da su dvije apstraktne modalne logike ekvivalentne.

Definicija 2.1.4. *Apstraktne modalne logike L i L' su* ***ekvivalentne*** *ako L proširuje L' i L' proširuje L.*

Nismo naglasili što sa skupom propozicionalnih varijabli. Na početku ovog odjeljka smo rekli da je skup propozicionalnih varijabli neke logike uvijek prebrojiv. Iz toga slijedi da su dva različita skupa propozicionalnih varijabli ekvipotentna, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da uvijek koristimo jedan fiksni skup Φ.

Primjer 2.1.5. *Pokažimo da $\mathtt{PDL}$ proširuje $\mathtt{BML}$. Označimo s $a_1, a_2, \ldots$ osnovne programe u $\mathtt{PDL}$. Ako modalne operatore $\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \ldots$ logike $\mathtt{PDL}$ poistovjetimo s modalnim operatorima $\Diamond_1, \Diamond_2, \ldots$ logike $\mathtt{BML}$, uočavamo da su klasa točkovnih modela logike $\mathtt{PDL}$ i klasa točkovnih $\mathtt{BML}$-modela zapravo jednake. Sada iz činjenice da se $\Vdash_{\mathtt{BML}}$ i $\Vdash_{\mathtt{PDL}}$ definiraju po istom principu vidimo da vrijedi uvjet (2.1).*

Primjer 2.1.6. *Primijetimo da $\mathtt{LTL}$ ne proširuje $\mathtt{BML}$. Skup modalnih operatora logike $\mathtt{LTL}$ je konačan, a skup modalnih operatora logike $\mathtt{BML}$ je beskonačan stoga klasa točkovnih modela logike $\mathtt{LTL}$ i klasa točkovnih $\mathtt{BML}$-modela nisu jednake.*

Sljedeće što možemo promatrati jest zatvorenost apstraktne modalne logike na negaciju.

Definicija 2.1.7. *Apstraktna modalna logika* $(\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ *je* ***zatvorena na negaciju*** *ako za svaku* $\mathcal{L}_\tau$*-formulu* ϕ *postoji* $\mathcal{L}_\tau$*-formula* ψ *takva da za svaki* τ*-model* $(\mathfrak{M}, w)$ *vrijedi*

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi \text{ ako i samo ako } (\mathfrak{M}, w) \nVdash_{\mathcal{L}} \psi.$$

Formulu ψ *zovemo* ***negacija*** *od* ϕ*.*

Logike `BML`, `PDL` i `LTL` su zatvorene na negaciju. Konkretno, za logiku `BML` je vidljivo iz definicije 1.1.6 da je $\neg\phi$ negacija od ϕ. Uobičajeno je da formula $\neg\phi$ predstavlja negaciju od ϕ. Takav je slučaj i u sve tri dosad opisane logike.

Definicija 2.1.8. *Neka je* τ *modalni tip i neka je* $\mathfrak{M} = (W, \{R_\triangle \mid \triangle \in \tau\}, V)$ τ*-model.* ***Ulazni stupanj*** *svijeta* v *u modelu* $\mathfrak{M}$ *je broj nastupa svijeta* v *u relacijama* $R_\triangle$ *pri čemu* v *nije prvi argument u tim relacijama. Simbolički, ulazni stupanj definiramo kao*

$$|\{(w_1, \dots, w_{i-1}, v, w_{i+1}, \dots, w_n) \in R_\triangle : \triangle \in \tau, 1 < i \leq n\}|.$$

Ako okvir (W, R) shvatimo kao usmjereni graf pri čemu je W skup vrhova i R skup bridova, tada je ulazni stupanj svijeta $w \in W$ zapravo broj bridova koji ulaze u vrh w. Ako okvir ima više relacija, tada za skup bridova možemo uzeti uniju tih relacija. Ako su relacije mjesnosti veće od 2, možemo ih shvatiti kao više binarnih, kao u napomeni 1.2.15.

Primjer 2.1.9.

a) U primjeru 1.1.7, svijet w_1 *ima ulazni stupanj* 0*, a svjetovi* w_2 *i* w_3 *imaju ulazni stupanj* 1*.*

b) Promotrimo model $\mathfrak{M}$ *iz primjera 1.2.2. Svijet* w *ima ulazni stupanj* 0*,* z *ima ulazni stupanj* 1*,* y *ima ulazni stupanj* 2*, a* x *ima ulazni stupanj* 3*.*

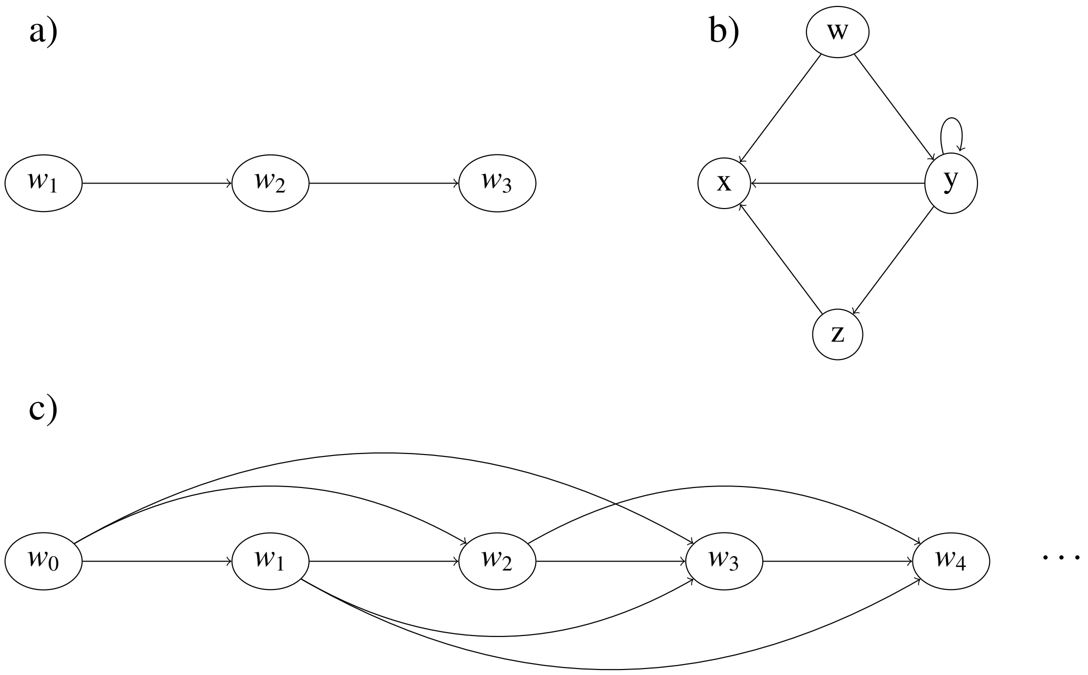
c) Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *model pri čemu je* $W = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *i* $R = \{(w_i, w_j) \mid j - i \in \{1, 2, 3\}\}$*. Tada* w_0 *ima ulazni stupanj* 0*,* w_1 *ima ulazni stupanj* 1*,* w_2 *ima ulazni stupanj* 2*, a svi ostali svjetovi imaju ulazni stupanj* 3*.*

Osim ulaznog stupnja, važna će nam biti i visina modela. Visina modela u općenitom slučaju definira se na jednak način kao i u definiciji 1.2.11.
U nastavku, trebat će nam modeli s određenim svojstvima. Fiksirajmo modalni tip τ. Kažemo da je svojstvo P *τ-primjenjivo* ako i samo ako za svaki točkovni τ-model $(\mathfrak{M}, w)$ postoji točkovni τ-model $(\mathfrak{N}, v)$ takav da je $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}, v)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ ima svojstvo P.

Propozicija 2.1.10. *Neka je* τ *proizvoljan modalni tip. Sljedeća svojstva su* τ*-primjenjiva:*

a) imati stablastu strukturu,

b) imati jedinstven svijet ulaznog stupnja 0 (korijen) i svojstvo da svaki svijet (osim korijena) ima ulazni stupanj 1.



Slika 2.1: Modeli iz primjera 2.1.9

Dokaz. Tvrdnja a) slijedi iz propozicije 1.2.16. Tvrdnja b) slijedi direktno iz tvrdnje a). Naime, ako je model $\mathfrak{M}$ stablaste strukture, tada on ima jedinstven svijet ulaznog stupnja 0, a to je korijen iz stablaste strukture. Taj korijen može biti samo prvi argument u relacijama iz $\mathfrak{M}$. Ako $w \in \mathfrak{M}$ nije korijen, tada on ima jedinstvenog prethodnika, iz čega zaključujemo da se on pojavljuje točno jednom u jednoj od relacija iz $\mathfrak{M}$ pri čemu nije prvi argument. $\square$

Ako model ima svijet w ulaznog stupnja 0 te svaki ostali svijet ima ulazni stupanj 1, tada iz definicije 1.2.4 znamo da je taj model i točkovno generiran. Njegov generator je upravo w kojeg još zovemo i korijen tog modela.

Definicija 2.1.11. *Neka je $(\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika i neka su ϕ i ψ $\mathcal{L}$-formule. Kažemo da su formule ϕ i ψ* ***$\mathcal{L}$-ekvivalentne*** *ako za svaki model $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ako i samo ako $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$.*

Ako je jasno o kojoj se logici radi, umjesto $\mathcal{L}$-ekvivalentne reći ćemo samo kratko da su formule ekvivalentne. Najviše ćemo proučavati ekvivalentne $\mathtt{BML}$-formule.

Propozicija 2.1.12. *Neka je τ konačan modalni tip logike $\mathtt{BML}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, skup međusobno neekvivalentnih $\mathtt{BML}_\tau$-formula stupnja najviše n je konačan.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po n. Fiksirajmo τ i promatrajmo samo $\mathtt{BML}_\tau$-formule.
Baza indukcije: Neka je $n = 0$. Iz definicije 1.1.12 znamo da su formule stupnja 0 one formule koje ne sadržavaju niti jedan modalni operator. To su zapravo formule logike sudova. Iz definicije relacije $\Vdash_{\mathtt{BML}}$ vidimo da za formule logike sudova vrijedi da su logički ekvivalentne u logici sudova ako i samo ako su BML-ekvivalentne. Stoga je dovoljno pokazati da je skup međusobno neekvivalentnih formula logike sudova konačan. Primjenom teorema o normalnim formama za logiku sudova slijedi da za svaku formulu logike sudova F postoji konjunktivna normalna forma G takva da su F i G logički ekvivalentne. Štoviše, ako formula F nije tautologija tada postoji njoj ekvivalentna savršena konjunktivna normalna forma G. Budući da je skup propozicionalnih varijabli konačan, postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih savršenih konjunktivnih normalnih formi. Iz toga i činjenice da su sve tautologije ekvivalentne slijedi da je skup međusobno neekvivalentnih formula logike sudova konačan. Time smo dokazali bazu indukcije.
Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$ skup međusobno neekvivalentnih formula stupnja najviše n konačan. Označimo taj skup s Γ_n.
Korak indukcije: Trebamo dokazati da je skup međusobno neekvivalentnih formula stupnja najviše $n + 1$ konačan. Zbog pretpostavke indukcije dovoljno je dokazati da je skup međusobno neekvivalentnih formula stupnja točno $n + 1$ konačan. Dokažimo najprije pomoćnu tvrdnju:

> Postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih formula oblika $\Diamond\psi$ pri čemu je $\Diamond \in \tau$ i formula ψ je stupnja najviše n.

Fiksirajmo modalni operator $\Diamond \in \tau$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih formula oblika $\Diamond\psi$ pri čemu je formula ψ stupnja najviše $n-1$ (jer je tada formula $\Diamond\psi$ stupnja najviše n). Još treba dokazati za slučaj kada je formula ψ stupnja n. Neka je ψ proizvoljna formula stupnja n i neka je $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljan model takav da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\psi$. Iz definicije relacije $\Vdash_{\mathtt{BML}}$, uz oznaku $\mathfrak{M} = (W, R_\Diamond, V)$, slijedi da postoji svijet $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $(\mathfrak{M}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi$. Budući da je formula ψ stupnja n, iz pretpostavke indukcije slijedi da postoji formula $\gamma \in \Gamma_n$ takva da su formule ψ i γ ekvivalentne. Zbog toga vrijedi i $(\mathfrak{M}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \gamma$. Iz definicije relacije $\Vdash_{\mathtt{BML}}$ sada zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\gamma$. Time smo dokazali da $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\psi$ povlači $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\gamma$. U drugom smjeru, iz $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\gamma$ slijedi da postoji svijeti $u \in W$ takav da vrijedi wRu i $(\mathfrak{M}, u) \Vdash_{\mathtt{BML}} \gamma$. Iz ekvivalentnosti formula ψ i γ slijedi $(\mathfrak{M}, u) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi$. Iz definicije relacije $\Vdash_{\mathtt{BML}}$ onda zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\psi$. Dokazali smo sljedeću ekvivalenciju: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\psi$ ako i samo ako $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\gamma$. Dakle, formule $\Diamond\psi$ i $\Diamond\gamma$ su ekvivalentne. Budući da je skup Γ_n konačan, zaključujemo da postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih formula oblika $\Diamond\psi$ pri čemu je formula ψ stupnja n. Sada iz činjenice da je skup modalnih operatora konačan slijedi pomoćna tvrdnja.
Definirajmo skupove $S_1 := \{\psi \mid \psi \text{ je stupnja } 0\}$ i $S_2 := \{\Diamond\psi \mid \Diamond \in \tau \text{ i } \psi \text{ je stupnja najviše } n\}$.

Neka je ϕ proizvoljna formula stupnja $n+1$. Tada postoji savršena konjunktivna normalna forma $A(P_1, \dots, P_l)$ logike sudova te formule $\phi_1, \dots, \phi_l \in S_1 \cup S_2$ koje su potformule od ϕ takve da vrijedi sljedeća tvrdnja: formule ϕ i $A(\phi_1, \dots, \phi_l)$ su BML-ekvivalentne. U skupu S_1 se nalazi samo konačno mnogo neekvivalentnih formula (to smo dokazali u bazi indukcije). Prema pomoćnoj tvrdnji znamo da se u skupu S_2 također nalazi samo konačno mnogo neekvivalentnih formula. Budući da je skup propozicionalnih varijabli konačan, postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih savršenih konjunktivnih normalnih formi. Prema tome, skup međusobno neekvivalentnih formula stupnja $n+1$ je konačan. □

2.2 Karakterizacija modalnih logika

U nastavku najprije definiramo što znači da je neka apstraktna modalna logika konačnog stupnja. Zatim ćemo iskazati i dokazati niz pomoćnih tvrdnji kao pripremu za dokaz Lindströmovog teorema za modalnu logiku. Na kraju ćemo navesti drugu varijantu Lindströmovog teorema za modalnu logiku koja koristi pojmove relativizacije i kompaktnosti.

Definicija 2.2.1. *Apstraktna modalna logika $(\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ je* ***konačnog stupnja*** *ako postoji funkcija stupnja $\deg_{\mathcal{L}} : F_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$, za svaki model $(\mathfrak{M}, w)$ i za svaku formulu ϕ u $F_{\mathcal{L}}$ takvu da je $\deg_{\mathcal{L}}(\phi) \leq n$ vrijedi:*

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi \text{ ako i samo ako } ((\mathfrak{M}, w) \upharpoonright n, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi. \tag{2.2}$$

Motivacija prethodne definicije proizlazi iz definicije stupnja formule osnovne modalne logike.

Primjer 2.2.2. *Osnovna modalna logika* BML *je konačnog stupnja. Funkcija $\deg_{\texttt{BML}}$ je definirana u definiciji 1.1.12, a ekvivalencija (2.2) vrijedi po propoziciji 1.2.18.*

Ako je apstraktna modalna logika $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ konačnog stupnja i ako L proširuje BML, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se funkcija $\deg_{\mathcal{L}}$ iz definicije 2.2.1 ponaša u skladu s definicijom 1.1.12.

Primjer 2.2.3. *Pokažimo da* PDL *nije konačnog stupnja. Neka je $((\mathbb{N}, R_a, V), 0)$ točkovni model u* PDL *pri čemu je R_a relacija "biti sljedbenik", a V je proizvoljna valuacija. Neka je $\phi := [a^*]\langle a\rangle\top$. Provjerimo da vrijedi $((\mathbb{N}, R_a, V), 0) \Vdash_{\texttt{PDL}} [a^*]\langle a\rangle\top$. To bi značilo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $0R_{a^*}k$ vrijedi $((\mathbb{N}, R_a, V), k) \Vdash_{\texttt{PDL}} \langle a\rangle\top$. Budući da je R_{a^*} refleksivno i tranzitivno zatvorenje od R_a, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $0R_{a^*}k$. Nadalje, $((\mathbb{N}, R_a, V), k) \Vdash_{\texttt{PDL}} \langle a\rangle\top$ vrijedi jer za $k+1$ vrijedi $((\mathbb{N}, R_a, V), k+1) \Vdash_{\texttt{PDL}} \top$. Dakle, zaista vrijedi $((\mathbb{N}, R_a, V), 0) \Vdash_{\texttt{PDL}} [a^*]\langle a\rangle\top$.*

Pokažimo sad da ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(((\mathbb{N}, R_a, V), 0) \upharpoonright n, 0) \Vdash_{\texttt{PDL}} [a^*]\langle a\rangle\top$. Ako bi postojao takav n, to bi značilo da za svaki $k = 0, \dots, n$ vrijedi $(((\mathbb{N}, R_a, V), 0) \upharpoonright$

$n, k) \Vdash_{\mathtt{PDL}} \langle a \rangle \top$ (iz razloga kao i prije). Međutim, za $k = n$ to nije moguće jer ne postoji $l \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je l sljedbenik od n. Zaključujemo da PDL *nije konačnog stupnja.*

Ako dva modela iste logike imaju jednak skup formula koje su istinite na njima, smatrat ćemo ih ekvivalentnima. To formalno definiramo u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.2.4. *Neka je $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika. Dva točkovna modela $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ logike L su **$\mathcal{L}$-ekvivalentni** ako za svaku $\mathcal{L}$-formulu ϕ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ako i samo ako $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$.*

Uglavnom će nas zanimati zadovoljavaju li dva modela isti skup formula određenog stupnja. Zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.2.5. *Neka je L apstraktna modalna logika koja proširuje* BML. *Dva točkovna modela $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ logike L su **n-ekvivalentni** ako za svaku* BML*-formulu ϕ stupnja najviše n vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ ako i samo ako $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$.*

Drugim riječima, modeli su n-ekvivalentni ako zadovoljavaju jednake skupove BML-formula stupnja najviše n.

Napomenimo da prethodna definicija ima smisla jer L proširuje BML pa sve njene modele možemo shvatiti i kao modele logike BML.

Napomena 2.2.6. *Za ispitivanje n-ekvivalentnosti dva točkovna τ-modela $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ dovoljno je ispitati je li $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ ekvivalentno s $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ samo za* BML*-formule ϕ koje su modalnog tipa τ. Naime, ako formula ϕ nije modalnog tipa τ tada svakako ne vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ ni $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ jer su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ τ-modeli. Stoga možemo zaključiti da za takve formule ϕ vrijedi da je $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ ekvivalentno s $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$.*

Propozicija 2.2.7. *Neka je $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika koja proširuje* BML *i neka su točkovni modeli $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ logike L n-ekvivalentni. Neka su $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ točkovni modeli takvi da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}, v) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}', v')$. Tada su $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ također n-ekvivalentni.*

Dokaz. Neka je ϕ proizvoljna BML-formula stupnja najviše n takva da vrijedi $(\mathfrak{M}', w') \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$. Budući da L proširuje BML, znamo da postoji $\mathcal{L}$-formula ψ takva da je $(\mathfrak{M}', w') \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Zbog svojstva bisimuliranosti onda vrijedi i $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$ pa i $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$. Budući da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni, slijedi $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$ pa i $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Opet zbog svojstva bisimuliranosti zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{N}', v') \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$ pa i $(\mathfrak{N}', v') \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$. Obratni smjer se dokazuje analogno. □

Prethodna propozicija zapravo govori da bisimulacije čuvaju n-ekvivalentnost modela. Zanimljivo je pitanje jesu li n-ekvivalentni modeli bisimulirani. Pokazat ćemo da jesu, no uz određene pretpostavke.

Propozicija 2.2.8. *Neka je $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika koja proširuje* `BML` *i neka je τ konačan modalni tip logike L. Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ dva točkovna τ-modela logike L takvi da imaju jedinstvene svjetove ulaznog stupnja 0 (korijene), svi svjetovi osim korijena imaju ulazni stupanj 1 i svi svjetovi su visine najviše n. Ako su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni, tada vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}, v)$.*

Dokaz. Budući da L proširuje `BML`, modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ možemo promatrati kao τ-modele logike `BML`. Zbog napomene 1.2.5 možemo pretpostaviti da je $(\mathfrak{M}, w)$ točkovno generiran s korijenom w i da je $(\mathfrak{N}, v)$ točkovno generiran s korijenom v.

Definirat ćemo relaciju $Z \subseteq W_1 \times W_2$ (W_1 je skup svjetova od $\mathfrak{M}$, a W_2 je skup svjetova od $\mathfrak{N}$) na sljedeći način:

$$xZy \text{ ako i samo ako su visine od } x \text{ i } y \text{ jednake te } (\mathfrak{M}, x) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi \text{ povlači } (\mathfrak{N}, y) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi,$$
$$\text{za } \phi \text{ stupnja najviše } n - m \text{ pri čemu je } m \text{ visina od } x \text{ i } y.$$

Pokažimo da je Z bisimulacija između $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$. Uočimo odmah da je $n - m \geq 0$ jer je po pretpostavci $m \leq n$, dakle Z je dobro definirana. Neka je P proizvoljna propozicionalna varijabla i neka vrijedi xZy. Želimo pokazati da vrijedi $(\mathfrak{M}, x) \Vdash_{\mathtt{BML}} P$ ako i samo ako $(\mathfrak{N}, y) \Vdash_{\mathtt{BML}} P$. Po definiciji od Z, imamo da $(\mathfrak{M}, x) \Vdash_{\mathtt{BML}} P$ povlači $(\mathfrak{N}, y) \Vdash_{\mathtt{BML}} P$ jer je P stupnja 0. Pretpostavimo sada da vrijedi $(\mathfrak{N}, y) \Vdash_{\mathtt{BML}} P$. Iz toga slijedi $(\mathfrak{N}, y) \nVdash_{\mathtt{BML}} \neg P$, a po definiciji od Z onda vrijedi $(\mathfrak{M}, x) \nVdash_{\mathtt{BML}} \neg P$ jer je $\neg P$ stupnja 0. Iz toga slijedi da vrijedi $(\mathfrak{M}, x) \Vdash_{\mathtt{BML}} P$. Time smo pokazali da vrijedi uvjet (at).

Pokažimo još da vrijedi uvjet (forth). Uvjet (back) se onda dokazuje analogno. Neka je $\Diamond$ neki modalni operator iz τ. Pretpostavmo da vrijedi xZy i $xR_\Diamond t$ ($R_\Diamond$ je relacija od $\mathfrak{M}$), pri čemu su visine od x i y jednake m. Budući da je τ konačan modalni tip, po propoziciji 2.1.12 slijedi da je skup međusobno neekvivalentnih formula (tog modalnog tipa) stupnja najviše $n-m-1$ konačan. Označimo taj skup sa S. Sada odaberimo formule ϕ iz S za koje vrijedi $(\mathfrak{M}, t) \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi$. Označimo te formule s $\phi_1, \ldots, \phi_l$. Neka je sada $\psi := \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_l$. Po definiciji relacije $\Vdash_{\mathtt{BML}}$, dobivamo da vrijedi $(\mathfrak{M}, t) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi$. Zbog $xR_\Diamond t$ dobivamo da vrijedi i $(\mathfrak{M}, x) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\psi$. Iz definicije 1.1.12 znamo da je ψ stupnja $n - m - 1$, a onda je $\Diamond\psi$ stupnja najviše $(n - m - 1) + 1 = n - m$. Nadalje, budući da vrijedi xZy, dobivamo da vrijedi $(\mathfrak{N}, y) \Vdash_{\mathtt{BML}} \Diamond\psi$. Iz toga slijedi da postoji svijet t' i relacija $R'_\Diamond$ u $\mathfrak{N}$ takvi da vrijedi $yR'_\Diamond t'$ i $(\mathfrak{N}, t') \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi$. Sada znamo da vrijedi $(\mathfrak{N}, t') \Vdash_{\mathtt{BML}} \phi_i$, za svaki $i = 1, \ldots, l$. Time smo zapravo pokazali i da $(\mathfrak{N}, t')$ zadovoljava sve formule stupnje najviše $n - m - 1$ koje su istinite u modelu $(\mathfrak{M}, t)$. Iz pretpostavki propozicije znamo da svi svjetovi osim korijena imaju ulazni stupanj 1 pa tako i t i t'. Iz toga i činjenica da vrijedi $xR_\Diamond t$ i $yR'_\Diamond t'$, zaključujemo da su visine od t i t' jednake i iznose $m + 1$. Sada zaključujemo da vrijedi tZt'. Time smo pokazali da uvjet (forth) vrijedi.

Još trebamo pokazati da vrijedi wZv. Budući da su w i v korijeni, njihove visine su jednake i iznose 0. Po pretpostavci propozicije su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni, a iz toga odmah slijedi da $(\mathfrak{N}, v)$ zadovoljava sve BML-formule stupnja najviše n koje su istinite u modelu $(\mathfrak{M}, w)$. Dakle, wZv zaista vrijedi. Konačno, zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}, v)$. $\square$

Sljedeća lema je važan alat za dokaz Lindströmovog teorema za modalnu logiku.

Lema 2.2.9. *Neka je $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika. Pretpostavimo da je L konačnog stupnja i da L proširuje* BML. *Neka je ϕ $\mathcal{L}$-formula i neka je $\deg_{\mathcal{L}}(\phi) = n$. Tada za svaka dva modela $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ takva da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ako i samo ako $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ povlači $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Obratna tvrdnja se dokazuje analogno. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je ϕ $\mathcal{L}$-formula takva da je $\deg_{\mathcal{L}}(\phi) = n$ i neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni modeli takvi da je $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ i $(\mathfrak{N}, v) \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$. Zbog svojstva pojavljivanja slijedi da postoji konačan modalni tip τ_ϕ takav da je $\phi \in \mathcal{L}(\tau_\phi)$. Zbog svojstva proširenja, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ τ_ϕ-modeli. Iz propozicije 2.1.10 znamo da je svojstvo "imati korijen s ulaznim stupnjem 0 i ostale svjetove ulaznog stupnja 1" τ_ϕ-primjenjivo. Po definiciji τ_ϕ-primjenjivog svojstva, slijedi da postoje točkovni τ_ϕ-modeli $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ takvi da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}, v) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}', v')$ te $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ imaju korijene s ulaznim stupnjem 0 dok svi ostali svjetovi tih modela imaju ulazni stupanj 1. Sada iz činjenice da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni modeli i činjenice da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}, w') \underline{\leftrightarrow} (\mathfrak{N}', v')$, po propoziciji 2.2.7 zaključujemo da su $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ n-ekvivalentni. Budući da su $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ n-ekvivalentni i L je konačnog stupnja, zaključujemo da su modeli $((\mathfrak{M}', w') \upharpoonright n, w')$ i $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v')$ također n-ekvivalentni. Zbog svojstva bisimuliranosti uočavamo da vrijedi $(\mathfrak{M}', w') \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ i $(\mathfrak{N}', v') \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$. Po definiciji logike konačnog stupnja onda zaključujemo da vrijedi $((\mathfrak{M}', w') \upharpoonright n, w') \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ i $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v') \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$. Međutim, $((\mathfrak{M}', w') \upharpoonright n, w')$ i $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v')$ su restrikcije modela $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{N}', v')$ za koje znamo da imaju korijene s ulaznim stupnjem 0 dok svi ostali svjetovi tih modela imaju ulazni stupanj 1. Iz definicije 1.2.17 vidimo da restrikcija sadrži samo svjetove visine najviše n pa će korijen ostati i u restrikciji. Ostali svjetovi u restrikciji će i dalje imati ulazni stupanj 1 (restrikcija je samo izbrisala svjetove koji su visine veće od n). Dakle, $((\mathfrak{M}', w') \upharpoonright n, w')$ i $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v')$ također imaju korijene s ulaznim stupnjem 0 i svi ostali svjetovi tih modela imaju ulazni stupanj 1. Iz toga i činjenice da je τ_ϕ konačan modalni tip, po propoziciji 2.2.8 slijedi da su $((\mathfrak{M}', w') \upharpoonright n, w')$ i $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v')$ bisimulirani. Sada iz $((\mathfrak{M}', w') \upharpoonright n, w') \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ i svojstva bisimuliranosti slijedi $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v') \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$, no to je kontradikcija s $((\mathfrak{N}', v') \upharpoonright n, v') \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$. $\square$

Sada smo napokon spremni za najvažniji rezultat ovog diplomskog rada.

Teorem 2.2.10 (Lindströmov teorem za modalnu logiku)**.** *Neka je $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika koja proširuje* BML*. Ako je logika L konačnog stupnja tada je logika L ekvivalentna* BML*.*

Dokaz. Trebamo pokazati da za svaku $\mathcal{L}$-formulu ϕ postoji BML-formula ψ takva da za svaki model $(\mathfrak{M}, w)$ logike BML vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi \text{ ako i samo ako } (\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi. \tag{2.3}$$

Budući da po pretpostavci teorema logika L proširuje BML, svaki BML-model možemo shvatiti kao model logike L, tj. izraz $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ima smisla.

Neka je ϕ proizvoljna $\mathcal{L}$-formula. Konstruirat ćemo BML-formulu ψ tako da zadovoljava traženo svojstvo. Zbog svojstva pojavljivanja slijedi da postoji konačan modalni tip τ_ϕ logike L takav da je $\phi \in \mathcal{L}_{\tau_\phi}$. Zbog svojstva proširenja, dovoljno je pokazati da ekvivalencija (2.3) vrijedi za svaki τ_ϕ-model pa ćemo u nastavku promatrati samo τ_ϕ-modele.

Neka je $n = \deg_{\mathcal{L}}(\phi)$. Budući da je τ_ϕ konačan modalni tip, tada iz propozicije 2.1.12 slijedi da je skup međusobno neekvivalentnih BML-formula (tog modalnog tipa) stupnja najviše n konačan. Označimo taj skup s Γ_n.

Za skup modalnih formula S uvedimo oznaku $\equiv_s$ koja znači sljedeće:

$$(\mathfrak{M}, w) \equiv_S (\mathfrak{N}, v) \text{ ako i samo ako za svaku formulu } A \in S \text{ vrijedi da je } (\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} A$$
$$\text{ekvivalentno s } (\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} A.$$

Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ dva τ_ϕ-modela takva da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv_{\Gamma_n} (\mathfrak{N}, v)$. Pokažimo da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni. Zbog napomene 2.2.6 dovoljno je pokazati da za svaku BML-formulu A modalnog tipa τ_ϕ i stupnja najviše n vrijedi da je $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} A$ ekvivalentno s $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} A$. Neka je A proizvoljna BML-formula modalnog tipa τ_ϕ čiji je stupanj najviše n. Tada postoji formula $B \in \Gamma_n$ takva da su A i B ekvivalentne. Iz $(\mathfrak{M}, w) \equiv_{\Gamma_n} (\mathfrak{N}, v)$ slijedi da je $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} B$ ekvivalentno s $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} B$. Budući da su A i B ekvivalentne formule, zaključujemo da je $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} A$ ekvivalentno s $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathtt{BML}} A$. Time smo pokazali da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ n-ekvivalentni. Iz leme 2.2.9 slijedi da vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ako i samo ako $(\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Dakle, pokazali smo da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$\begin{gathered} \text{Ako vrijedi } (\mathfrak{M}, w) \equiv_{\Gamma_n} (\mathfrak{N}, v), \text{ onda vrijedi sljedeće:} \\ (\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi \text{ ako i samo ako } (\mathfrak{N}, v) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Lako je provjeriti da je relacija $\equiv_{\Gamma_n}$ jedna relacija ekvivalencije na klasi svih modela. Budući da je Γ_n konačan, tada klasa ekvivalencije ima samo konačno mnogo. Pretpostavimo da ih ima m. Sada iz svake klase ekvivalencije odaberimo po jedan model. Označimo te modele s $(\mathfrak{M}_1, w_1), \ldots, (\mathfrak{M}_1, w_m)$. Sada za svaki $i = 1, \ldots, m$ definiramo formulu ξ_i kao konjunkciju svih formula iz Γ_n koje su istinite u modelu $(\mathfrak{M}_i, w_i)$, formulu ζ_i kao konjunkciju svih negacija formula iz Γ_n koje nisu istinite u modelu $(\mathfrak{M}_i, w_i)$ i neka je $\psi_i := \xi_i \wedge \zeta_i$.

Neka je sada $\psi := \bigvee\{\psi_i \mid (\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi\}$. Neka je $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljan τ_ϕ-model logike BML. Pokažimo da vrijedi ekvivalencija (2.3). Prvo promatramo slučaj kada postoji $i \in \{1, \dots, m\}$ takav da vrijedi $(\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ (tada je formula ψ dobro definirana).

Pretpostavimo prvo da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Model $(\mathfrak{M}, w)$ pripada točno jednoj od m klasa ekvivalencije. To znači da postoji jedinstveni $i \in \{1, \dots, m\}$ takav da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv_{\Gamma_n} (\mathfrak{M}_i, w_i)$. Iz definicije relacije $\equiv_{\Gamma_n}$ onda slijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi_i$, a zbog (2.4) zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Sada zbog toga što vrijedi $(\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ zaključujemo da je ψ_i jedan od disjunkata u formuli ψ. Po pravilu o istinitosti disjunkcije iz $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi_i$ konačno zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi$. Po pravilu o istinitosti disjunkcije slijedi da postoji $i \in \{j \mid \psi_j \text{ je jedan od disjunkata u formuli } \psi\}$ takav da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathtt{BML}} \psi_i$. Zbog toga što je ψ_i jedan od disjunkata u formuli ψ vrijedi i $(\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Iz konstrukcije formule ψ_i jasno je da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv_{\Gamma_n} (\mathfrak{M}_i, w_i)$. Sada zbog (2.4) zaključujemo da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$.

Ostaje nam još promotriti posebni slučaj kada ne postoji $i \in \{1, \dots, m\}$ takav da vrijedi $(\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Tada izraz $\bigvee\{\psi_i \mid (\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi\}$ nema smisla. U ovom slučaju za proizvoljni model $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$. Naime, model $(\mathfrak{M}, w)$ pripada jednoj od m klasa ekvivalencije pa postoji $i \in \{1, \dots, m\}$ takav da vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv_{\Gamma_n} (\mathfrak{M}_i, w_i)$, a onda zbog (2.4) i $(\mathfrak{M}_i, w_i) \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$ slijedi $(\mathfrak{M}, w) \nVdash_{\mathcal{L}} \phi$. Sada samo definiramo da je $\psi := \bot$ jer za svaki model $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \nVdash_{\mathtt{BML}} \bot$. □

Lindströmov teorem za modalnu logiku zapravo kaže da je BML najjača apstraktna modalna logika konačnog stupnja. Međutim, uvjet da je logika konačnog stupnja čini se pomalo neprirodnim. Stoga ćemo razmotriti još jedan pristup u kojem ćemo uvjet da je logika konačnog stupnja zamijeniti nekim drugim uvjetima. Iskazat ćemo Lindströmov teorem za modalnu logiku u formi koja više podsjeća na Lindströmove teoreme za logiku prvog reda.

Uvedimo najprije pojam relativizacije.

Definicija 2.2.11. *Neka je $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ apstraktna modalna logika. Kažemo da L* ***dopušta relativizaciju*** *ako za proizvoljan modalni tip τ, proizvoljnu $\mathcal{L}_\tau$-formulu ϕ i propozicionalnu varijablu $P \notin \tau$ postoji formula $\psi \in \mathcal{L}(\tau \cup \{P\})$ takva da za svaki model $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$(\mathfrak{M}, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \psi \text{ ako i samo ako } (\mathfrak{M}|P, w) \Vdash_{\mathcal{L}} \phi \tag{2.5}$$

pri čemu je $(\mathfrak{M}|P, w)$ podmodel od $\mathfrak{M}$ koji sadrži samo svjetove u kojima je propozicionalna varijabla P istinita. Formula ψ se često označava s $Rel(\phi, P)$.

Relativizacija je prirodno svojstvo koje većina logika dopušta pa tako i BML. Sljedeće što uvodimo je pojam kompaktnosti za apstraktne modalne logike.

Definicija 2.2.12. *Kažemo da je apstraktna modalna logika* $L = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathcal{L}})$ ***kompaktna*** *ako za proizvoljan skup* $\mathcal{L}$*-formula* S *vrijedi: postoji model u kojem je* S *istinit ako i samo ako za svaki konačan podskup* S' *od* S *postoji model u kojem je* S' *istinit.*

Kompaktnost je vrlo važan pojam u matematičkoj logici. O kompaktnosti možete pročitati više primjerice u [7] gdje su dani teoremi kompaktnosti za klasičnu logiku sudova i logiku prvog reda. Primjer kompaktne apstraktne modalne logike je $\mathtt{BML}$, a dokaz toga možete pronaći u [3].

Sada možemo iskazati Lindströmov teorem za modalnu logiku u drukčijoj formi.

Teorem 2.2.13. *Neka je* L *apstraktna modalna logika zatvorena na negaciju koja proširuje* $\mathtt{BML}$*. Ako je logika* L *kompaktna i dopušta relativizaciju, tada je logika* L *ekvivalentna* $\mathtt{BML}$*.*

Dokaz prethodnog teorema je dan u [6].

Bibliografija

[1] P. Blackburn, M. de Rijke i Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[2] K. Burić, *Linearna temporalna logika*, Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2014.

[3] M. de Rijke, *A Lindström Theorem for Modal Logic*, Modal Logic and Process Algebra (A. Ponse, M. de Rijke i Y. Venema, ur.), SCLI Publications, Stanford, 1995, str. 217–230.

[4] K. Miletić, *Lindströmov drugi teorem*, Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2010, `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/miletic-lindstromov_drugi_teorem.pdf`.

[5] F. Nikšić, *Propozicionalna dinamička logika*, Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2009, `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/niksic-pdl.pdf`.

[6] J. van Benthem, *A New Modal Lindström Theorem*, Logica Universalis **1** (2007), 125–138.

[7] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.

Sažetak

Lindströmovi teoremi karakteriziraju logiku prvog reda i predstavljaju temelj apstraktne teorije modela. Oni osiguravaju posebno mjesto logici prvog reda među svim logičkim sustavima. U ovom diplomskog radu prikazuju se analogni rezultati u kontekstu modalnih logika. Najvažniji pojam koji proučavamo jest apstraktna modalna logika. Glavni cilj ovog diplomskog rada je dokazati analogon Lindströmovog teorema o karakterizaciji modalnih logika.

Rad je podijeljen u dva poglavlja. Cilj prvog poglavlja je opisati neke modalne sisteme. Najprije se bavimo sintaksom i semantikom modalne logike. Zatim uvodimo pojam osnovne modalne logike. Proučavamo generirane podmodele i bisimulacije te navodimo njihova svojstva. Nakon toga opisujemo dvije poznate modalne logike: propozicionalnu dinamičku logiku i linearnu temporalnu logiku.

U drugom poglavlju definiramo pojmove apstraktne modalne logike i proširenja osnovne modalne logike. Zatim uvodimo apstraktne modalne logike konačnog stupnja. Detaljno dokazujemo Lindströmov teorem za modalnu logiku koji kaže da je osnovna modalna logika najjača apstraktna modalna logika konačnog stupnja. Na kraju navodimo i varijantu Lindströmovog teorema za modalnu logiku koristeći pojmove relativizacije i kompaktnosti.

Summary

Lindström theorems characterize first-order logic and form the basis of the abstract model theory. They provide a special place for first-order logic among all logic systems. This thesis presents analogous results in the context of modal logics. The most important term we study is abstract modal logic. The main goal of this thesis is to prove the analog of the Lindström's theorem on the characterization of modal logics.

The thesis consists of two chapters. The goal of the first chapter is to describe some modal systems. We first deal with the syntax and semantics of modal logic. Then we introduce the notion of basic modal logic. Also, we study generated submodels and bisimulations and present their properties. After that we describe two well-known modal logics: propositional dynamic logic and linear temporal logic.

In the second chapter, we define abstract modal logic and extensions of basic modal logic. Then we introduce the notion of finite degree in the context of abstract modal logics. Moreover, we prove Lindström's theorem for modal logic which says that basic modal logic is the strongest abstract modal logic to have a notion of finite degree. In the end, we mention another variant of Lindström's theorem for modal logic using the notions of relativization and compactness.

Životopis

Rođen sam 15. listopada 1996. godine u Splitu. Osnovnu školu pohađao sam u Bolu na Braču. Nakon završetka osnovne škole upisao sam III. gimnaziju u Splitu. Tijekom osnovne i srednje škole redovito sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike, a najveći uspjeh mi je 8. mjesto u A kategoriji na državnom natjecanju iz matematike koje je održano 2012. godine u Poreču. Istaknuo bih još i sudjelovanje na državnom natjecanju iz logike 2015. godine. Srednju školu sam završio 2015. godine i iste godine sam upisao preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završio 2018. godine i tada sam upisao diplomski studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu.