Ekstremne vrijednosti funkcija

Lešković, Petra

Ekstremne vrijednosti funkcija

Lešković, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Lešković

EKSTREMNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Ekstremi funkcije **2**

2 Metoda nejednakosti **6**
2.1 O metodi 6
2.2 Primjeri 12
2.3 Zadaci 20

3 Metoda slike funkcije **27**
3.1 O metodi 27
3.2 Primjeri 29
3.3 Zadaci 37

4 Metoda rješenja parne kratnosti **51**
4.1 O metodi 51
4.2 Primjeri 54
4.3 Zadaci 67

Bibliografija **78**

Uvod

Postoji nekoliko metoda određivanja ekstremnih vrijednosti funkcija. Iako je u većini slučajeva metoda diferencijalnog računa najelegantnija i najbrža, u ovom radu će biti izloženo nekoliko elementarnih metoda koje ne zahtijevaju poznavanje derivacija.

U prvom poglavlju iznose se osnovne definicije i ukratko opisuje metoda diferencijalnog računa. U ostala tri poglavlja detaljno se opisuju tri elementarne metode za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija.

Prva metoda je metoda nejednakosti koja se može primjenjivati već u srednjoj školi jer se, kao što joj i ime kaže, svodi na primjenu nekih poznatih nejednakosti, primjerice nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine te nejednakosti između geometrijske i harmonijske sredine.

Druga metoda je metoda slike funkcije. Glavna ideja je odrediti skup vrijednosti koje može poprimiti zadana funkcija. Odatle se lako odredi ima li funkcija ekstrema, a ako ima, koji su to ekstremi.

Treća metoda je metoda rješenja parne kratnosti. Temelji se na tvrdnji koja se argumentira diferencijalnim računom, no sama metoda ne zahtijeva njegovo korištenje. Kod ove metode opisana su dva načina određivanja lokalnih ekstrema, no ponekad jedan od njih nije praktičan.

Svaka metoda ilustrirana je s nekoliko primjera, a zatim slijede zadaci među kojima ima i zadataka s matematičkih natjecanja. Poseban naglasak stavljen je na ekstreme racionalnih funkcija koje su kvocijenti polinoma najviše drugog stupnja. Ispitivanje ekstrema takvih funkcija je prikladna dodatna tema uz gradivo o kvadratnim funkcijama.

Poglavlje 1

Ekstremi funkcije

Najprije definirajmo lokalne i globalne ekstreme funkcije te monotonost funkcije.

Definicija 1.1. *Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima:*

(a) lokalni maksimum $f(c)$ ako

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c),$$

(b) strogi lokalni maksimum $f(c)$ ako

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < f(c),$$

(c) lokalni minimum $f(c)$ ako

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c),$$

(d) strogi lokalni minimum $f(c)$ ako

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > f(c).$$

Definicija 1.2. *Za realni broj M kažemo da je globalni maksimum funkcije $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ako postoji $x_0 \in \mathcal{D}$ takav da je $f(x_0) = M$ i za svaki $x \in \mathcal{D}$ vrijedi $f(x) \leq M$. Za realni broj m kažemo da je globalni minimum funkcije $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ako postoji $x_0 \in \mathcal{D}$ takav da je $f(x_0) = m$ i za svaki $x \in \mathcal{D}$ vrijedi $f(x) \geq m$.*

Definicija 1.3. *Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je:*

(a) rastuća na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

(b) strogo rastuća na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

(c) padajuća na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

(d) strogo padajuća na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Za funkciju kažemo da je monotona ako je rastuća ili padajuća, a interval na kojemu raste ili pada nazivamo intervalom monotonosti.

Kako određujemo ekstreme funkcije? Ima nekoliko načina, ali najčešće pomoću diferencijalnog računa. Ukratko ćemo opisati ovu metodu.

Definicija 1.4. *Kažemo da je funkcija $f\colon I \to R$ diferencijabilna u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$, ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Taj broj nazivamo derivacijom funkcije f u točki c i pišemo*

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Pomoću derivacije funkcije lako možemo provjeriti je li funkcija padajuća ili rastuća na određenom intervalu. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 1.1. *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f raste na I ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$. Funkcija f pada na I ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in I$.*

Lema 1.1 (Fermat)**.** *Neka funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem. Ako je f diferencijabilna u c, onda je $f'(c) = 0$.*

Točke iz otvorenog intervala u kojima je derivacija funkcije jednaka nuli nazivamo stacionarnim točkama.

Uočimo kako uvjet da je derivacija funkcije u nekoj točki jednaka nuli nije dovoljan da bi u toj točki funkcija imala lokalni ekstrem. U to se možemo lako uvjeriti na primjeru funkcije $f(x) = x^3$. Derivacija funkcije je $f'(x) = 3x^2$ pa je $f'(0) = 0$, ali funkcija f nema ekstrem u 0 jer je strogo rastuća na $\mathbb{R}$. No, ako za neku stacionarnu točku vrijedi da funkcija f' mijenja predznak u toj točki, tada funkcija f u toj točki ima lokalni ekstrem.

Opišimo ukratko postupak određivanja ekstrema funkcije f pomoću derivacija. Prvo odredimo domenu funkcije f i otvoreni interval na kojemu je funkcija diferencijabilna.

Zatim odredimo stacionarne točke funkcije f, tj. rješavamo jednadžbu $f'(x) = 0$. Time smo dobili kandidate za lokalne ekstreme. Stacionarnim točkama i točkama u kojima f i f' nisu definirane podijelimo domenu funkcije f na intervale monotonosti. Zatim pomoću predznaka funkcije f' po intervalima monotonosti možemo vidjeti radi li se o intervalu rasta ili pada. One točke u kojima dolazi do promjene rasta i pada funkcije i u kojima je funkcija definirana su točke u kojima funkcija ima lokalne ekstreme. Preostaje nam odrediti globalne ekstreme funkcije. To mogu biti neki od lokalnih ekstrema ili se postižu u rubovima domene. Iz tog razloga odredimo vrijednosti funkcije u rubovima domene te usporedimo s vrijednostima lokalnih ekstrema. Riješimo jedan primjer ovom metodom.

Primjer 1.1. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x - 2}.$$

Rješenje. Budući da su -2 i 1 nultočke nazivnika, domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, odnosno skup $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Prva derivacija funkcije f glasi

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2-2x+4)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(x^2+x-2)^2} \tag{1.1}$$

i njena domena jednaka je domeni funkcije f. Odredimo sada stacionarne točke, tj. nultočke funkcije f'.

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 12x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

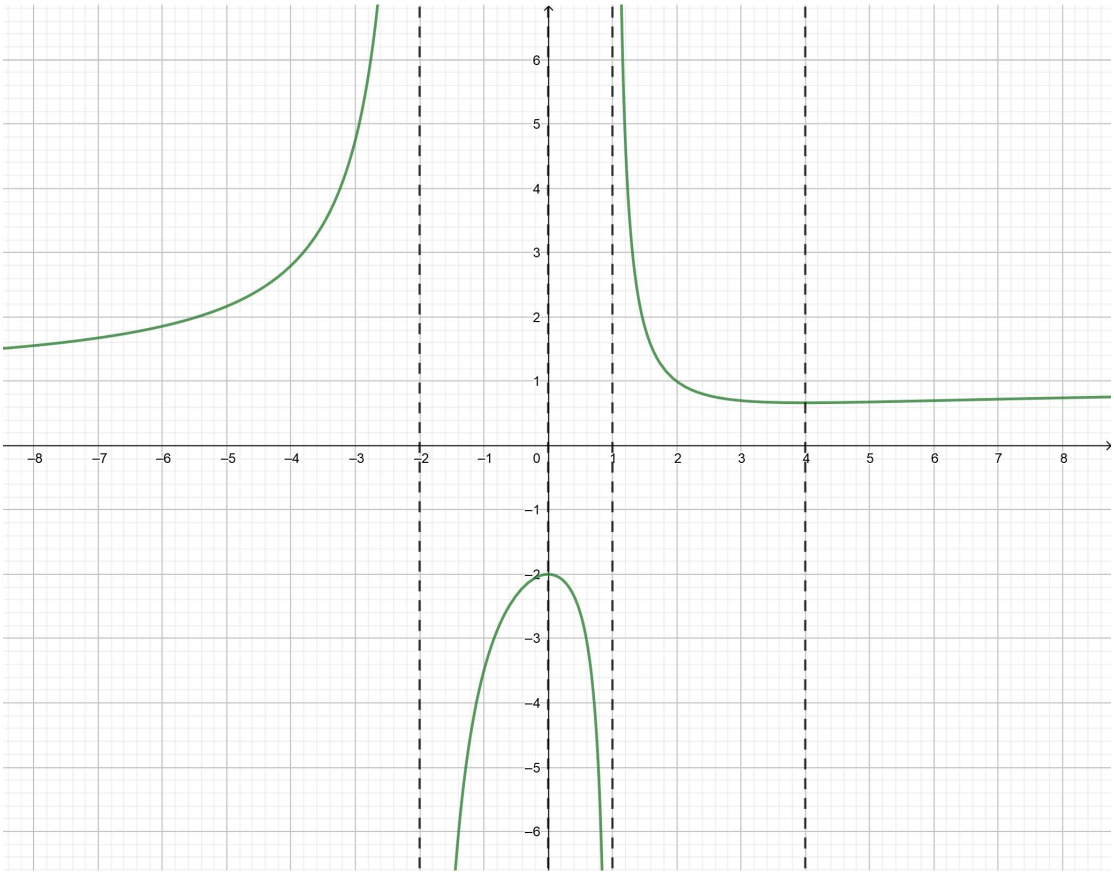
Prema tome, 0 i 4 dijele domenu funkcije na sljedeće intervale monotonosti: $\langle -\infty, -2\rangle$, $\langle -2, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, +\infty\rangle$. Kako je

$$f'(x) < 0 \iff 3x^2 - 12x < 0 \iff x(x-4) < 0 \iff x \in \langle 0, 4\rangle,$$

zaključujemo da za $x \in \langle 0, 4\rangle$ funkcija f pada. Isto tako, iz

$$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 12x > 0 \iff x(x-4) > 0 \iff x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle,$$

zaključujemo da za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$ funkcija f raste. Prema tome, u 0 i 4 dolazi do promjene rasta i pada funkcije f, što znači da su $f(0) = -2$ i $f(4) = \frac{2}{3}$ lokalni ekstremi funkcije, tj. -2 je lokalni maksimum, a $\frac{2}{3}$ lokalni minimum funkcije f. Uočimo da to nisu globalni ekstremi zato što funkcija poprima veće vrijednosti od -2 i manje vrijednosti od $\frac{2}{3}$. Kako niti jedan rub domene nije uključen, zaključujemo da funkcija f nema globalnih ekstrema.



Slika 1.1: Graf funkcije $y = \frac{x^2-2x+4}{x^2+x-2}$

Poglavlje 2

Metoda nejednakosti

2.1 O metodi

U ovom poglavlju opisat ćemo kako pomoću nejednakosti možemo odrediti ekstremne vrijednosti funkcije.

Neka je dana funkcija $y = f(x)$ s domenom $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $I \subseteq \mathcal{D}$ otvoren skup. Ako se za neki $x_0 \in I$ funkcija $f|_I$ može zapisati u obliku

$$f(x) = f(x_0) - g^2(x) \tag{2.1}$$

ili

$$f(x) = f(x_0) + g^2(x), \tag{2.2}$$

tada iz (2.1) slijedi

$$f(x) \leq f(x_0),$$

dok iz (2.2) slijedi

$$f(x) \geq f(x_0)$$

za svaki $x \in I$, pri čemu se nejednakosti svode na jednakosti ako je $g(x_0) = 0$. Prema tome, ako postoji $x_0 \in I$ takav da je $g(x_0) = 0$, tada je $f(x_0)$ u slučaju (2.1) lokalni maksimum, dok je u slučaju (2.2) lokalni minimum funkcije f. Jasno je da umjesto funkcije $g^2(x)$ može biti i funkcija $g(x)$ pod uvjetom da poprima samo nenegativne vrijednosti. Uočimo da vrijedi i obrat: ako postoji $x_0 \in I$ takav da je $f(x) \leq f(x_0)$ za svaki $x \in I$, tada je $g(x) \overset{def}{=} f(x_0) - f(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$, pa je $f(x) = f(x_0) - g(x)$. Analogno za minimum. Nadalje, ako gore navedeno vrijedi za cijelu domenu $\mathcal{D}$, tada je $f(x_0)$ globalni maksimum, odnosno globalni minimum funkcije f.

Ponekad ekstremne vrijednosti funkcije možemo odrediti i primjenom nekih poznatih nejednakosti ili primjenom teorema koji su posljedica tih nejednakosti. Iz tog razloga ćemo navesti i dokazati nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (kraće, AG nejednakost), nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine (kraće, GH nejednakost) te dva teorema koji su posljedica AG nejednakosti jer će nam biti korisni pri određivanju ekstremnih vrijednosti funkcije.

Teorem 2.1 (AG nejednakost)**.** *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada je*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \tag{2.3}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dokaz. Dokažimo prvo matematičkom indukcijom da nejednakost (2.3) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ dobivamo $x_1 \geq x_1$ pa baza indukcije očito vrijedi. Budući da su $x_1, x_2 > 0$, vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} &\iff x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} \\
&\iff x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0 \\
&\iff \sqrt{x_1}^2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + \sqrt{x_2}^2 \geq 0 \\
&\iff \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost očito vrijedi pa onda vrijedi i nejednakost

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \tag{2.4}$$

koja će nam biti korisna u nastavku dokaza. Osim toga, vidimo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$, odnosno $x_1 = x_2$. Iz toga slijedi

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \tag{2.5}$$

Radi jednostavnosti zapisa, uvedimo oznake A_n za aritmetičku i G_n za geometrijsku sredinu n pozitivnih realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pretpostavimo da nejednakost (2.3) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi

$$A_n \geq G_n. \tag{2.6}$$

Provjerimo sada vrijedi li uz tu pretpostavku $A_{n+1} \geq G_{n+1}$ za pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Uvedimo oznake

$$A = \frac{x_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n}, \quad G = \sqrt[n]{x_{n+1} A_{n+1}^{n-1}}. \tag{2.7}$$

Uočimo da su A, A_n, G, G_n pozitivni realni brojevi. Prema pretpostavci (2.6), za broj x_{n+1} te za $n-1$ brojeva A_{n+1} vrijedi

$$\frac{x_{n+1}+(n-1)A_{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_{n+1}A_{n+1}^{n-1}},$$

odnosno

$$A \geq G. \tag{2.8}$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} A_n + A &= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+(n-1)A_{n+1}}{n} \\ &= \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})+(n-1)A_{n+1}}{n} \\ &= \frac{(n+1)A_{n+1}+(n-1)A_{n+1}}{n} \\ &= 2A_{n+1}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$A_{n+1} = \frac{A_n + A}{2} \overset{(2.4)}{\geq} \sqrt{A_nA} \overset{(2.6)}{\geq} \sqrt{G_nA} \overset{(2.8)}{\geq} \sqrt{G_nG}. \tag{2.9}$$

Osim toga, vrijedi i ovo:

$$\begin{aligned} \sqrt{G_nG} &= (G_nG)^{\frac{1}{2}} = (G_n^nG^n)^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left[(x_1x_2\cdots x_n)(x_{n+1}A_{n+1}^{n-1})\right]^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left[(x_1x_2\cdots x_nx_{n+1})A_{n+1}^{n-1}\right]^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left(G_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1}\right)^{\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Sada iz (2.9) slijedi

$$\begin{aligned} A_{n+1} \geq \sqrt{G_nG} &\iff A_{n+1} \geq \left(G_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1}\right)^{\frac{1}{2n}} \\ &\iff A_{n+1}^{2n} \geq G_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1} \\ &\iff A_{n+1}^{n+1} \geq G_{n+1}^{n+1} \\ &\iff A_{n+1} \geq G_{n+1}, \end{aligned}$$

što znači da vrijedi korak indukcije. Prema principu matematičke indukcije, nejednakost (2.3) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Još nam preostaje dokazati da jednakost

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

tj. $A_n = G_n$, vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ tada jednakost očito vrijedi. Pretpostavimo sada da je $A_n = G_n$ i da $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nisu svi međusobno jednaki, tj. da među njima postoje barem dva različita. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 \neq x_2$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2} + x_3 + \cdots + x_n}{n} \\
&\overset{(2.3)}{\geq} \sqrt[n]{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 x_3 \cdots x_n} \\
&\overset{(2.5)}{>} \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2}^2 x_3 \cdots x_n} \\
&= \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n},
\end{aligned}$$

tj. dobili smo da je $A_n > G_n$. Međutim, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je $A_n = G_n$ pa zaključujemo da su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ svi međusobno jednaki. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 2.2 (GH nejednakost). *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada je*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \tag{2.10}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dokaz. Primijenimo li AG nejednakost na $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, dobivamo

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}. \tag{2.11}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} &\iff (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\right)^{-1} \\
&\iff (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \\
&\iff \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.
\end{aligned}$$

Tako smo dokazali (2.10). Još nam preostaje vidjeti kada vrijedi jednakost. Prema teoremu 2.1 znamo da jednakost u (2.11) vrijedi ako i samo ako je $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, odnosno $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. No, zbog ekvivalencija isto vrijedi i za (2.10). Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 2.3. *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni racionalni brojevi, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi te neka je dan zbroj $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$. Tada umnožak*

$$P = {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \cdots {x_n}^{a_n}$$

najveću vrijednost postiže ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Dokaz. Dokažimo prvo da tvrdnja vrijedi za $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Zbog AG nejednakosti vrijedi sljedeće:

$$\sqrt[a_1+a_2+\cdots+a_n]{\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n}} = \sqrt[a_1+a_2+\cdots+a_n]{\left(\frac{x_1}{a_1}\frac{x_1}{a_1}\cdots\frac{x_1}{a_1}\right)\left(\frac{x_2}{a_2}\frac{x_2}{a_2}\cdots\frac{x_2}{a_2}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{a_n}\frac{x_n}{a_n}\cdots\frac{x_n}{a_n}\right)}$$

$$\overset{AG}{\leq} \frac{\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_1}{a_1}\right)+\left(\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_2}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}+\frac{x_n}{a_n}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\right)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \frac{a_1\frac{x_1}{a_1}+a_2\frac{x_2}{a_2}+\cdots+a_n\frac{x_n}{a_n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = \frac{S}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

odnosno

$$\sqrt[a_1+a_2+\cdots+a_n]{\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n}} \leq \frac{S}{a_1+a_2+\cdots+a_n}. \tag{2.12}$$

Budući da su obje strane nejednakosti pozitivne, vrijedi

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n} \leq \frac{S^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}},$$

odakle slijedi da je

$$P = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\cdots{x_n}^{a_n} \leq \frac{S^{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1}^{a_1}{a_2}^{a_2}\cdots{a_n}^{a_n}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}. \tag{2.13}$$

Sada vidimo da P najveću vrijednost postiže onda kada u (2.13) vrijedi jednakost. Prema AG nejednakosti znamo da u (2.12) jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Budući da su nejednakosti (2.12) i (2.13) međusobno ekvivalentne, tada i u (2.13) jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Pretpostavimo sada da su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni racionalni brojevi. Tada postoje prirodni brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ takvi da je $a_1 = \frac{p_1}{q_1}, a_2 = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, a_n = \frac{p_n}{q_n}$. Neka je $r \in \mathbb{N}$ najmanji zajednički višekratnik brojeva $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Tada postoje prirodni brojevi $s_1, s_2, \ldots, s_n$ takvi da je $a_1 = \frac{s_1}{r}, a_2 = \frac{s_2}{r}, \ldots, a_n = \frac{s_n}{r}$ pa umnožak P možemo zapisati na sljedeći način:

$$P = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = x_1^{\frac{s_1}{r}} x_2^{\frac{s_2}{r}} \cdots x_n^{\frac{s_n}{r}} = \sqrt[r]{x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}}.$$

Kako su $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$, prema tvrdnji koju smo ranije dokazali slijedi da umnožak $P^r = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}$ najveću vrijednost postiže ako i samo ako je $\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_2}{s_2} = \ldots = \frac{x_n}{s_n}$. Kako je $s_1 = ra_1, s_2 = ra_2, \ldots, s_n = ra_n$, slijedi da je

$$\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_2}{s_2} = \ldots = \frac{x_n}{s_n} \iff \frac{x_1}{ra_1} = \frac{x_2}{ra_2} = \ldots = \frac{x_n}{ra_n} \iff \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Budući da je r-ti korijen rastuća funkcija, znamo da umnožak P postiže najveću vrijednost onda kada i P^r postiže najveću vrijednost pa je time tvrdnja teorema dokazana. □

Napomena 2.1. *Ako bismo u teoremu 2.3 umjesto $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$ imali $s_1 x_1 + s_2 x_2 + \cdots + s_n x_n = S$, tada bi umnožak $P = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ postizao najveću vrijednost ako i samo ako je $\frac{s_1 x_1}{a_1} = \frac{s_2 x_2}{a_2} = \ldots = \frac{s_n x_n}{a_n}$.*

Teorem 2.4. *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni racionalni brojevi, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi te neka je dan umnožak $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = P$. Tada zbroj*

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

najmanju vrijednost postiže ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Dokaz. Riješimo nejednadžbu (2.13) po S i dobivamo

$$S^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} (x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n})}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}},$$

odnosno

$$S^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n}.$$

Budući da su obje strane nejednakosti pozitivne, vrijedi

$$S \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \sqrt[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]{\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n}}. \tag{2.14}$$

Odavde vidimo da zbroj S najmanju vrijednost postiže onda kada u (2.14) vrijedi jednakost. Budući da su nejednakosti (2.14) i (2.12) međusobno ekvivalentne, prema AG nejednakosti jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$. Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Napomena 2.2. *Ako bi u teoremu 2.4 umjesto ${x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\cdots{x_n}^{a_n} = P$ bio dan umnožak $(s_1x_1)^{a_1}(s_2x_2)^{a_2}\cdots(s_nx_n)^{a_n} = P$, tada bi zbroj $S = s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$ postizao najveću vrijednost ako i samo ako je $\frac{s_1x_1}{a_1} = \frac{s_2x_2}{a_2} = \ldots = \frac{s_nx_n}{a_n}$.*

2.2 Primjeri

Ova metoda primjenjuje se prvi put u 2. razredu srednjih škola i to za određivanje ekstrema kvadratne funkcije, ali i za crtanje grafa kvadratne funkcije. Ideja je uvijek kvadratni trinom nadopuniti do potpunog kvadrata što ćemo vidjeti u idućih nekoliko primjera.

Primjer 2.1. *Za realne brojeve a, b i c odredite globalne ekstreme funkcije*

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Rješenje. Funkciju možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \end{aligned}$$

Vidimo da za $a < 0$ vrijedi

$$y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dok je za $a > 0$

$$y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

U oba slučaja jednakost se postiže za $x = -\frac{b}{2a}$. Prema tome, za $a < 0$ je $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ globalni maksimum, a za $a > 0$ globalni minimum funkcije. Kada bi za $a > 0$ funkcija imala globalni maksimum, tada bi postojao $M \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \leq M$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, tj.

$$\begin{aligned} f(x) \leq M &\iff \frac{4ac - b^2}{4a} + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq M \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq M - \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq \frac{4aM - 4ac + b^2}{4a^2}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi egzistencija konstante $k \in \mathbb{R}$ takve da je $\left|x + \frac{b}{2a}\right| \leq k$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što nije moguće (dovoljno je za x uzeti $k + 1 - \frac{b}{2a}$). Dakle, za $a > 0$ funkcija nema globalni maksimum. Analogno se dokazuje da za $a < 0$ funkcija nema globalni minimum.

Primjer 2.2. *Odredite globalni maksimum funkcije*

$$y = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako danu funkciju zapišemo u obliku

$$y = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2} = 3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 3 - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1\right) + 1 = 4 - \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2,$$

vidimo da je $y \leq 4$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pri čemu jednakost vrijedi ako je $x = -1$. Dakle, $f(-1) = 4$ je globalni maksimum funkcije.

Primjer 2.3. *Odredite globalni minimum funkcije*

$$y = \frac{3x^4 - 8x^2 + 8}{2x^4}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Danu funkciju možemo zapisati u obliku

$$y = \frac{3x^4 - 8x^2 + 8}{2x^4} = \frac{3}{2} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4} = \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{x^4} - \frac{4}{x^2} + 1\right) - 1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^2.$$

Odavde vidimo da je $y \geq \frac{1}{2}$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pri čemu jednakost vrijedi ako je $x^2 = 2$, odnosno $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Zaključujemo da funkcija ima globalni minimum $\frac{1}{2}$ u $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

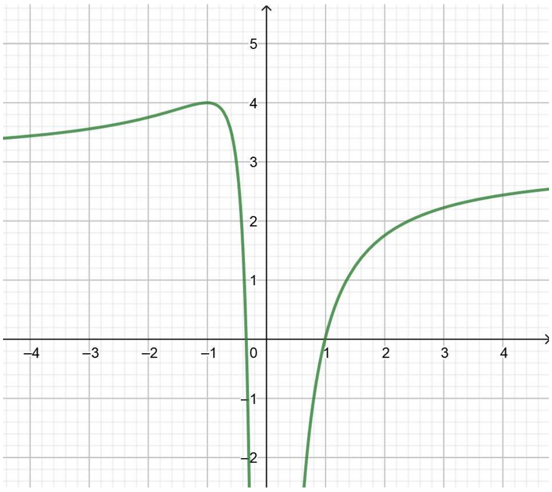
Primjer 2.4. *Odredite globalni minimum funkcije*

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{27}{x^2} - 8.$$

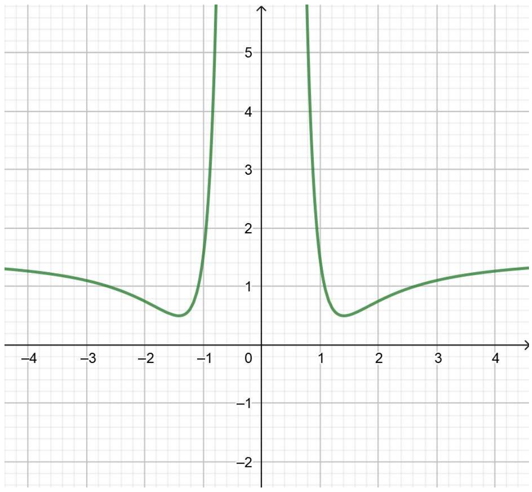
Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako funkciju svedemo na oblik

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{27}{x^2} - 8 = \frac{1}{3}\left(x^2 - 18 + \frac{81}{x^2}\right) + 6 - 8 = -2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{x}\right)^2,$$

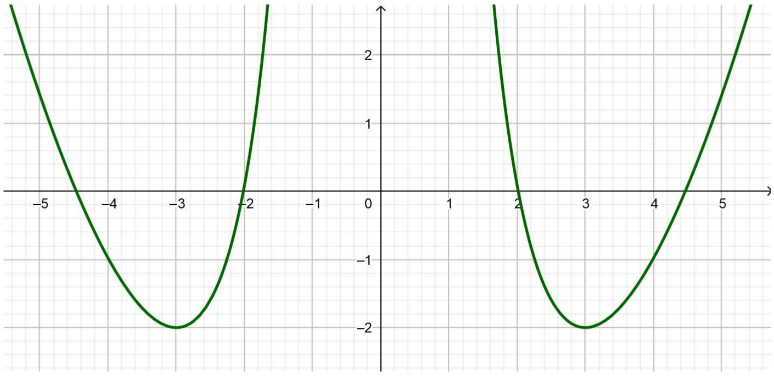
vidimo da je $y \geq -2$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pritom jednakost vrijedi ako je $x^2 = 9$, tj. $x_{1,2} = \pm 3$. Dakle, -2 je globalni minimum funkcije i postiže se u $x_{1,2} = \pm 3$.



Slika 2.1: Graf funkcije $y = \frac{3x^2-2x-1}{x^2}$



Slika 2.2: Graf funkcije $y = \frac{3x^4-8x^2+8}{2x^4}$



Slika 2.3: Graf funkcije $y = \frac{x^2}{3} + \frac{27}{x^2} - 8$

Primjer 2.5. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{2x}{x^2+1}.$$

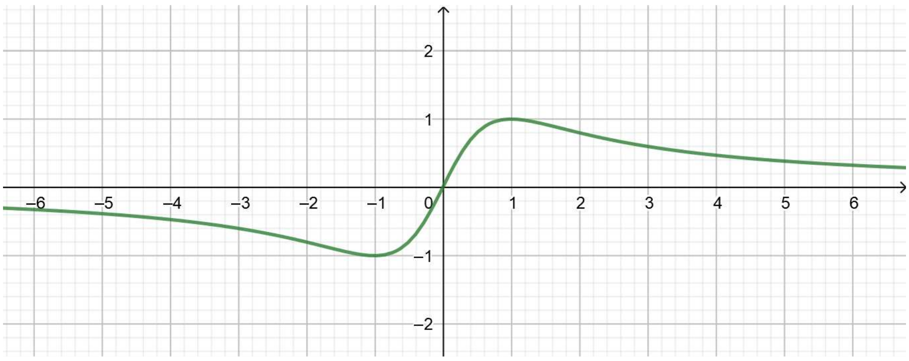
Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R}$. Za $x \neq 0$ funkciju možemo zapisati u obliku

$$y = \frac{2}{x + \frac{1}{x}}.$$

Najprije uočimo da je $f(x) > 0$ ako je $x > 0$, a $f(x) < 0$ ako je $x < 0$. Za $x > 0$ vrijedi

$$x + \frac{1}{x} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$

Sada imamo
$$y = \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{2}{2} = 1,$$
pri čemu se jednakost postiže ako je $x = \frac{1}{x}$, tj. $x = 1$. Dakle, za $x > 0$ vrijedi $0 < f(x) \leq 1$ pa je $f(1) = 1$ lokalni maksimum funkcije. Ako je $x < 0$, tada je $-x > 0$ pa vrijedi
$$(-x) + \frac{1}{(-x)} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{1}{(-x)}} = 2 \iff x + \frac{1}{x} \leq -2.$$
Sada imamo
$$y = \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \geq \frac{2}{(-2)} = -1,$$
pri čemu jednakost vrijedi ako je $-x = \frac{1}{(-x)}$, tj. $x = -1$. Dakle, za $x < 0$ vrijedi $-1 \leq f(x) < 0$ pa je $f(-1) = -1$ lokalni minimum funkcije. Preostaje provjeriti što je sa $x = 0$. Uočimo da $f(0) = 0$ nije ekstrem zadane funkcije jer je $f(x) < 0$ za $x < 0$, a $f(x) > 0$ za $x > 0$. Budući da je $-1 \leq f(x) \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je $f(-1) = -1$ globalni minimum, a $f(1) = 1$ globalni maksimum zadane funkcije.



Slika 2.4: Graf funkcije $y = \frac{2x}{x^2+1}$

Primjer 2.6. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*
$$y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 9}.$$
Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R}$. Za $x \neq 0$ funkciju možemo zapisati na sljedeći način:
$$y = 1 + \frac{6x}{x^2 + 9} = 1 + \frac{6}{x + \frac{9}{x}}.$$

Uočimo da je $f(x) > 1$ ako je $x > 0$, a $f(x) < 1$ ako je $x < 0$. Ako je $x > 0$ tada vrijedi

$$x + \frac{9}{x} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6.$$

Sada imamo

$$y = 1 + \frac{6}{x + \frac{9}{x}} \leq 1 + \frac{6}{6} = 2,$$

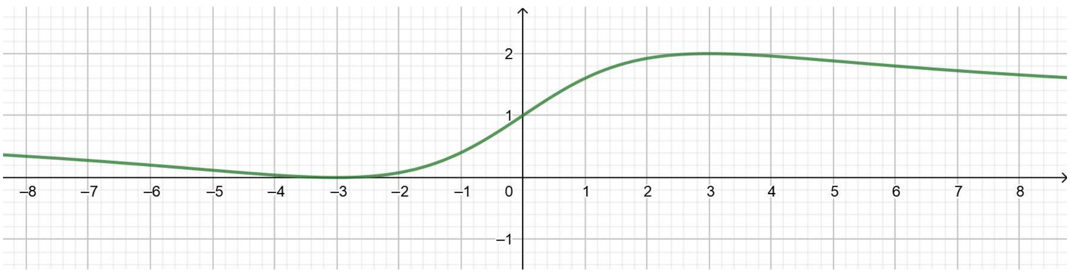
a jednakost vrijedi ako je $x = \frac{9}{x}$, tj. za $x = 3$. Prema tome, za $x > 0$ imamo $1 < f(x) \leq 2$ pa je $f(3) = 2$ lokalni maksimum funkcije. S druge strane, za $x < 0$ vrijedi

$$(-x) + \frac{9}{(-x)} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{9}{(-x)}} = 6 \iff x + \frac{9}{x} \leq -6.$$

Zbog toga vrijedi

$$y = 1 + \frac{6}{x + \frac{9}{x}} \geq 1 + \frac{6}{(-6)} = 0,$$

pri čemu se jednakost postiže ako je $-x = \frac{9}{-x}$, tj. $x = -3$. Dakle, za $x < 0$ imamo $0 \leq f(x) < 1$ pa je $f(-3) = 0$ lokalni minimum funkcije. Provjerimo još postiže li se ekstrem u $x = 0$. Kako je $f(0) = 1$ i vrijedi da je $f(x) < 1$ za $x < 0$ i $f(x) > 1$ za $x > 0$, zaključujemo da to nije ekstrem funkcije. Prema tome, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $0 \leq f(x) \leq 2$ pa je $f(-3) = 0$ globalni minimum, a $f(3) = 2$ globalni maksimum zadane funkcije.



Slika 2.5: Graf funkcije $y = \frac{x^2+6x+9}{x^2+9}$

Primjer 2.7. *Odredite globalni maksimum funkcije*

$$y = \frac{4\sqrt{x} - 1}{x}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup $\langle 0, +\infty\rangle$. Funkciju možemo zapisati na sljedeći način:

$$y = \frac{4\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 4\right) + 4 = 4 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)^2.$$

Sada imamo da je $y \leq 4$ za svaki $x \in \langle 0, +\infty \rangle$, pri čemu jednakost vrijedi ako je $2\sqrt{x} = 1$, tj. $x = \frac{1}{4}$. Prema tome, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ je globalni maksimum zadane funkcije.

Slika 2.6: Graf funkcije $y = \frac{4\sqrt{x}-1}{x}$

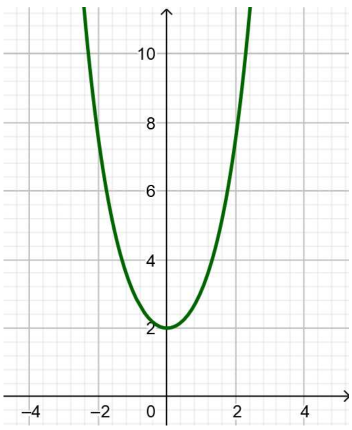
Primjer 2.8. *Odredite globalni minimum funkcije*

$$y = e^{-x} + e^{x}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R}$. Funkciju možemo zapisati u obliku

$$y = e^{-x} + e^{x} = \frac{1}{e^{x}} + e^{x} = \frac{1 + e^{2x}}{e^{x}} = \frac{(e^{2x} - 2e^{x} + 1) + 2e^{x}}{e^{x}} = 2 + \frac{(e^{x} - 1)^2}{e^{x}}.$$

Budući da je $e^{x} > 0$ za svaki x, slijedi da je $y \geq 2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pritom jednakost vrijedi ako je $e^{x} = 1$, tj. $x = 0$. Prema tome, $f(0) = 2$ je globalni minimum zadane funkcije.



Slika 2.7: Graf funkcije $y = e^{-x} + e^{x}$

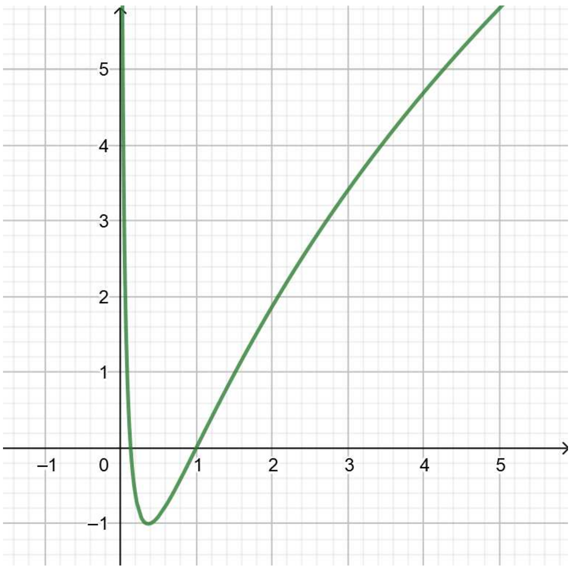
Primjer 2.9. *Odredite globalni minimum funkcije*

$$y = \ln^2 x + 2\ln x.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup $\langle 0, +\infty\rangle$. Nakon nadopune do potpunog kvadrata, funkcija je oblika

$$y = \ln^2 x + 2\ln x = (\ln^2 x + 2\ln x + 1) - 1 = -1 + (\ln x + 1)^2.$$

Slijedi da je $y \geq -1$ za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, pri čemu jednakost vrijedi ako je $\ln x = -1$, tj. $x = \frac{1}{e}$. Zaključujemo da je $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ globalni minimum zadane funkcije.



Slika 2.8: Graf funkcije $y = \ln^2 x + 2\ln x$

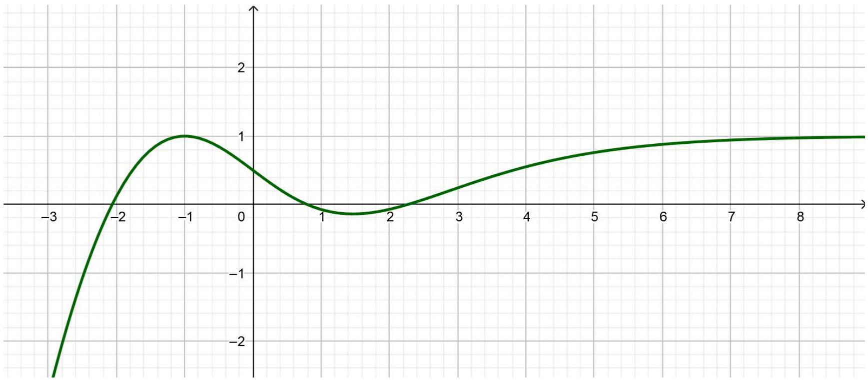
Primjer 2.10. *Odredite globalni maksimum funkcije*

$$y = \frac{e^x - x^2 - 2x}{e^x + 1}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup $\mathbb{R}$. Zapišimo funkciju u sljedećem obliku:

$$y = \frac{e^x - x^2 - 2x}{e^x + 1} = \frac{(e^x + 1) - 1 - x^2 - 2x}{e^x + 1} = 1 - \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{(x + 1)^2}{e^x + 1}.$$

Odavde slijedi da je $y \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, a jednakost vrijedi za $x = -1$. Zaključujemo da je $f(-1) = 1$ globalni maksimum funkcije.



Slika 2.9: Graf funkcije $y = \frac{e^x - x^2 - 2x}{e^x + 1}$

Primjer 2.11. *Odredite najveću vrijednost izraza $P = xy^2z^3$ uz uvjete $3x + 2y + z = a$ i $x, y, z > 0$.*

Rješenje. Uz dane uvjete, prema napomeni 2.1 slijedi da izraz P najveću vrijednost postiže ako vrijedi $\frac{3x}{1} = \frac{2y}{2} = \frac{z}{3}$. Odavde slijedi da je $2y = 6x$ i $z = 9x$ pa uvrštavanjem u $3x + 2y + z = a$ dobivamo $18x = a$, tj. $x = \frac{a}{18}$. Lako izračunamo da je $y = \frac{a}{6}$ i $z = \frac{a}{2}$. Prema tome, najveća vrijednost izraza P je

$$P = xy^2z^3 = \frac{a}{18}\left(\frac{a}{6}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^6}{5184}.$$

Primjer 2.12. *Odredite $x, y, z > 0$ takve da vrijednost izraza $P = \sqrt[3]{x^2}\sqrt[2]{yz^5}$ bude najveća, uz uvjet $2x + y + 8z = 40$.*

Rješenje. Izraz P možemo zapisati na sljedeći način:

$$P = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{5}{2}}.$$

Uz dane uvjete, prema napomeni 2.1 izraz P postiže najveću vrijednosti ako vrijedi

$$\frac{2x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{8z}{\frac{5}{2}}.$$

Sada imamo da je $2x = \frac{4}{3}y$ i $8z = 5y$, pa uvrštavanjem u $2x + y + 8z = 40$ dobivamo $\frac{22}{3}y = 40$, tj. $y = \frac{60}{11}$. Lako izračunamo da je $x = \frac{2}{3}y = \frac{40}{11}$ i $z = \frac{5}{8}y = \frac{75}{22}$.

Primjer 2.13. *Odredite najmanju vrijednost izraza $S = x + 3y + z$, uz uvjete $x\sqrt{yz} = 6\sqrt{3}$ i $x, y, z > 0$.*

Rješenje. Dani uvjet možemo zapisati u obliku $xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}$. Prema napomeni 2.2, izraz S postiže najmanju vrijednost za

$$\frac{x}{1} = \frac{3y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{2}},$$

odakle je $y = \frac{1}{6}x$ i $z = \frac{1}{2}x$. Budući da su $x, y, z > 0$, uvjet $x\sqrt{yz} = 6\sqrt{3}$ ekvivalentan je uvjetu $x^2yz = 108$. Uvrštavanjem $y = \frac{1}{6}x$ i $z = \frac{1}{2}x$ dobivamo $x^4 = 1296$, odnosno $x = 6$. Sada imamo $y = \frac{1}{6}x = 1$ i $z = \frac{1}{2}x = 3$ pa je najmanja vrijednost izraza S jednaka $S = x + 3y + z = 6 + 3 + 3 = 12$.

2.3 Zadaci

Zadatak 2.1. *Od svih paralelograma danog opsega O odredite onaj kod kojeg je omjer površine i opsega najveći.*

Rješenje. Neka su $x, y > 0$ duljine stranica i P površina paralelograma. Omjer površine i opsega paralelograma je

$$\frac{P}{O} = \frac{xy}{2(x+y)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}.$$

Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{2}{\sqrt{xy}},$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{2} \overset{AG}{\leq} \frac{\frac{x+y}{2}}{2} = \frac{x+y}{4} = \frac{O}{8}.$$

Sada imamo

$$\frac{P}{O} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{O}{8} = \frac{O}{16},$$

a jednakost se postiže za $x = y$. Prema tome, od svih paralelograma danog opsega najveći omjer površine i opsega ima onaj kojemu su stranice jednakih duljina, tj. romb.

Zadatak 2.2. *Od svih pravokutnika upisanih kružnici polumjera r odredite pravokutnik čija je površina najveća.*

Rješenje. Neka su $a, b > 0$ duljine stranica pravokutnika. Tada je njegova površina dana sa $P = ab$. Sa slike 2.10 uočavamo da primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut

ABC dobivamo $a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Prema AG nejednakosti imamo

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2,$$

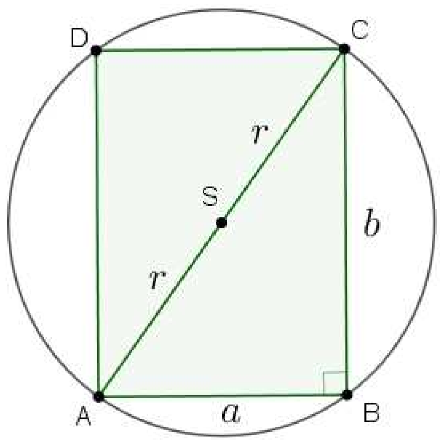
pri čemu jednakost vrijedi ako je $a = b$. Odavde zaključujemo da $\sqrt{P}$ postiže najveću vrijednost za $a = b$ pa onda i P postiže najveću vrijednost za $a = b$. Prema tome, od svih pravokutnika upisanih kružnici, najveću površinu ima pravokutnik kojemu su sve stranice jednakih duljina, tj. kvadrat.

Zadatak 2.3. *Od kartona oblika kvadrata stranice duljine a treba napraviti kutiju najvećeg volumena tako što se pri vrhovima izrežu kvadrati. Odredite duljinu stranice izrezanih kvadrata.*

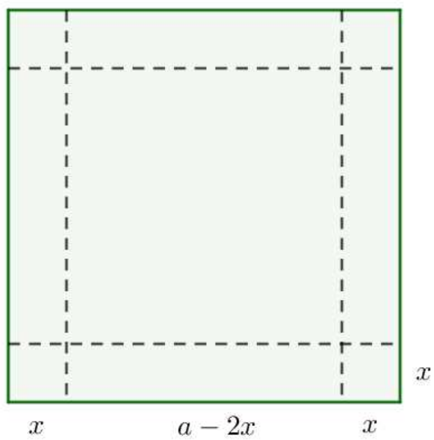
Rješenje. Pogledajmo prvo sliku 2.11 i uvedimo oznaku x za duljinu stranice kvadrata kojeg izrezujemo. Baza kutije će tada biti kvadrat čije su stranice duljine $a - 2x$, dok će visina kutije biti x. Tada je volumen kutije jednak $V = (a - 2x)^2 x$. Uočimo da je $0 < x < \frac{a}{2}$ pa je $a - 2x > 0$. Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{(a - 2x)^2(4x)} \leq \frac{2(a - 2x) + 4x}{3} = \frac{2a}{3},$$

a jednakost se postiže za $a - 2x = 4x$, tj. $x = \frac{a}{6}$. Prema tome, izraz $\sqrt[3]{4V}$, onda i V, postiže najveću vrijednost kada je $x = \frac{a}{6}$.



Slika 2.10: Pravokutnik upisan u kružnicu



Slika 2.11: Izrezivanje kartona

Zadatak 2.4. *U kuglu polumjera R upisan je valjak najveće površine plašta P. Odredite visinu i polumjer baze valjka.*

Rješenje. Uvedimo oznake kao na slici 2.12. Neka je r polumjer baze valjka i h visina valjka. Sa slike vidimo da vrijedi $(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$, odnosno $4R^2 = 4r^2 + h^2$. Budući da je upisan valjak najveće površine plašta P, nas zanima kada će površina plašta $P = 2r\pi h$ biti najveća. Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\left(\frac{P}{\pi}\right)^2 = 4r^2h^2 \leq \frac{4r^2 + h^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2R^2,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako je $4r^2 = h^2$, tj. $2r = h$. Dakle, izraz $\left(\frac{P}{\pi}\right)^2$, a onda i P, je najveći kada vrijedi $2r = h$. Kako je $4R^2 = 4r^2 + h^2 = 2h^2$, slijedi da je visina valjka $h = R\sqrt{2}$, a zatim dobivamo da je polumjer baze valjka $r = \frac{h}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Zadatak 2.5. *Iz kruga polumjera R izrezan je kružni isječak te je od njega napravljen stožac najvećeg volumena. Odredite volumen tog stošca.*

Rješenje. Kada od izrezanog kružnog isječka napravimo stožac, tada će duljina izvodnice tog stošca biti jednaka R. Pogledajmo sada sliku stošca na slici 2.13 i uvedimo oznake. Neka je r polumjer baze stošca i v visina stošca. Sa slike vidimo da vrijedi $r^2 + v^2 = R^2$, odnosno $r^2 = R^2 - v^2$. Zanima nas najveći volumen stošca, tj. najveća vrijednost izraza $V = \frac{r^2\pi v}{3}$. Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\sqrt[3]{2\left(\frac{3}{\pi}V\right)^2} = \sqrt[3]{2r^4v^2} = \sqrt[3]{(r^2)^2(2v^2)} \leq \frac{2r^2 + 2v^2}{3} = \frac{2r^2 + 2R^2 - 2r^2}{3} = \frac{2}{3}R^2,$$

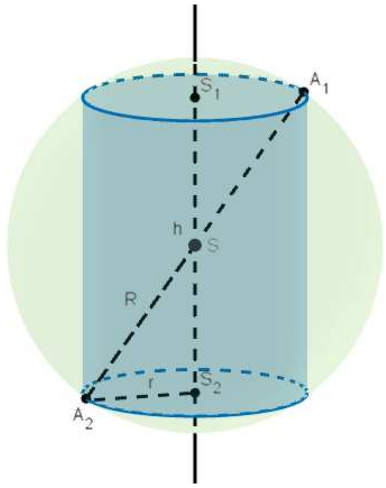
pri čemu jednakost vrijedi ako je $r^2 = 2v^2$. Budući da izraz $\sqrt[3]{2\left(\frac{3}{\pi}V\right)^2}$ postiže najveću vrijednost za $r^2 = 2v^2$, onda i V postiže najveću vrijednost za $r^2 = 2v^2$. Uvrštavanjem u $r^2 + v^2 = R^2$ dobivamo $3v^2 = R^2$, odnosno $v = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Tada je $r = v\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$. Prema tome, volumen stošca jednak je $V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

Zadatak 2.6. *Od svih paralelepipeda, kojima je zbroj duljina bridova koji izlaze iz jednog vrha jednak 9, odredite onaj čiji je volumen najveći.*

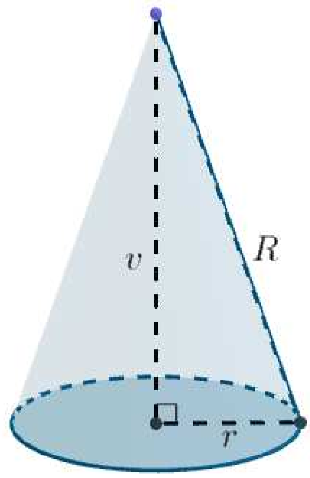
Rješenje. Neka su $a, b, c > 0$ duljine bridova koji izlaze iz jednog vrha paralelepipeda. Tada je $a + b + c = 9$, a volumen paralelepipeda je $V = abc$. Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = \frac{9}{3} = 3,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. Prema tome, izraz $\sqrt[3]{V}$, a onda i V, je najveći ako je $a = b = c = 3$.



Slika 2.12: Valjak upisan u kuglu



Slika 2.13: Stožac

Zadatak 2.7. *Od svih kvadara volumena V odredite onaj koji ima najmanje oplošje.*

Rješenje. Neka su $a, b, c > 0$ duljine bridova koji izlaze iz jednog vrha kvadra. Tada je volumen kvadra $V = abc$, a oplošje kvadra $O = 2(ab + bc + ca)$. Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\frac{O}{6} = \frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt[3]{V^2},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $ab = bc = ca$. Iz prve jednakosti imamo $a = c$, dok iz druge jednakosti imamo $a = b$. Prema tome, izraz $\frac{O}{6}$, a onda i O, je najveći kada je $a = b = c$. Zaključujemo da je kvadar koji ima najmanje oplošje onaj kojemu su svi bridovi jednake duljine, tj. kocka.

Zadatak 2.8. *Broj 324 rastavite na tri pribrojnika tako da umnožak prvog, kvadrata drugog i kuba trećeg pribrojnika bude najveći mogući.*

Rješenje. Neka su $x_1, x_2, x_3 > 0$ traženi pribrojnici, tj. $x_1 + x_2 + x_3 = 324$. Prema teoremu 2.3, umnožak $x_1x_x^2x_3^3$ najveću vrijednost postiže ako je $x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3}$. Uvrštavanjem $x_2 = 2x_1$ i $x_3 = 3x_1$ u $x_1 + x_2 + x_3 = 324$ dobivamo $6x_1 = 324$, odnosno $x_1 = 54$. Tada je $x_2 = 2x_1 = 108$ i $x_3 = 3x_1 = 162$.

Zadatak 2.9. *Broj 1728 rastavite na tri pozitivna faktora tako da njihov zbroj bude najmanji mogući.*

Rješenje. Neka su $x_1, x_2, x_3 > 0$ traženi faktori, odnosno $x_1x_2x_3 = 1728$. Prema teoremu 2.4, zbroj $x_1 + x_2 + x_3$ postiže najmanju vrijednost ako i samo ako je $x_1 = x_2 = x_3$, odnosno ako je svaki faktor jednak $\sqrt[3]{1728} = 12$.

Zadatak 2.10. *Odredite vrijednost x za koju funkcija*

$$y = (x - 2x_1)^2 + (x - 2x_2)^2 + \cdots + (x - 2x_n)^2$$

postiže najmanju vrijednost.

Rješenje. Raspisivanjem dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 4x_1x + 4x_1^2) + (x^2 - 4x_2x + 4x_2^2) + \cdots + (x^2 - 4x_nx + 4x_n^2) \\ &= nx^2 - 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x + 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2). \end{aligned}$$

Radi jednostavnosti zapisa, uvedimo oznake

$$A = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad B = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2.$$

Sada imamo

$$y = nx^2 - 4Ax + 4B = \left(nx^2 - 2\sqrt{n}x \cdot \frac{2A}{\sqrt{n}} + \frac{4A^2}{n}\right) - \frac{4A^2}{n} + 4B = 4\left(B - \frac{A^2}{n}\right) + \left(\sqrt{n}x - \frac{2A}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

odakle slijedi da je $y \geq 4\left(B - \frac{A^2}{n}\right)$ za svaki x, a najmanja vrijednost se postiže kada je

$$\sqrt{n}x - \frac{2A}{\sqrt{n}} = 0 \iff x = \frac{2A}{n} = \frac{2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}.$$

Zadatak 2.11 (Školsko natjecanje iz matematike u RH, 2013. godina, 2. razred, B varijanta)**.** *U deltoid kojemu su duljine dijagonala $d_1 = 24$ cm i $d_2 = 8$ cm upisan je pravokutnik tako da su njegove stranice paralelne s dijagonalama deltoida. Odredite dimenzije tako upisanog pravokutnika koji ima najveću površinu.*

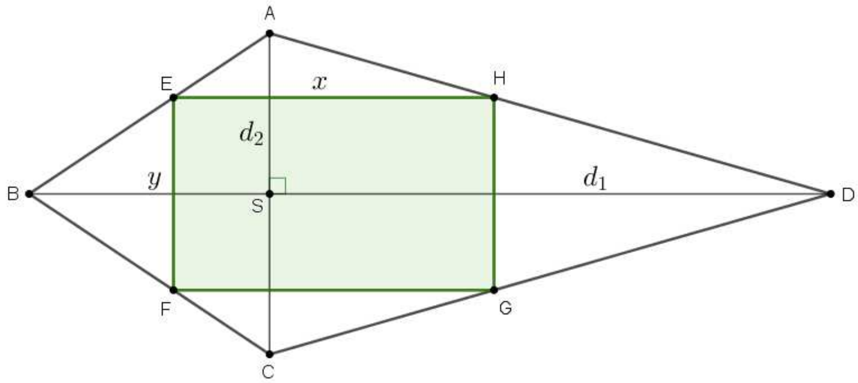
Rješenje. Pogledajmo sliku 2.14 i uvedimo oznake kao na slici. Neka su $x, y > 0$ duljine stranica upisanog pravokutnika. Uočimo da su trokuti ABD i AEH slični jer su stranice $\overline{BD}$ i $\overline{EH}$ paralelne pa su im svi kutovi sukladni. Prema tome, imamo sljedeći omjer:

$$d_1 : x = \frac{d_2}{2} : \frac{d_2 - y}{2} \iff 24 : x = 4 : \left(4 - \frac{y}{2}\right).$$

Odavde slijedi da je $x = 24 - 3y$, tj. $x + 3y = 24$. Tražimo $x, y > 0$ za koje će površina pravokutnika $P = xy$ biti najveća. Prema AG nejednakosti vrijedi

$$\sqrt{3P} = \sqrt{3xy} = \sqrt{x(3y)} \leq \frac{x + 3y}{2} = \frac{24}{2} = 12,$$

a jednakost se postiže ako je $x = 3y$. Uvrštavanjem u $x + 3y = 24$ dobivamo da je $6y = 24$, tj. $y = 4$ cm pa je $x = 24 - 3y = 12$ cm. Budući da P postiže najveću vrijednost onda kada i $\sqrt{3P}$ postiže najveću vrijednost, slijedi da najveću površinu ima pravokutnik sa stranicama duljina $x = 12$ cm i $y = 4$ cm.



Slika 2.14: Pravokutnik upisan u deltoid

Zadatak 2.12 (Županijsko natjecanje iz matematike u RH, 2016. godina, 2. razred, A varijanta)**.** *Odredi najmanju moguću vrijednost izraza*

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24,$$

pri čemu su a, b i c realni brojevi, te odredi a, b i c za koje se ta vrijednost postiže.

Rješenje. Neka su a, b, c traženi brojevi. Zadani izraz možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24 &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\ &= (a - 2b)^2 + (b^2 - 4bc + 4c^2) + 4c^2 - 8c + 24 \\ &= (a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 8c + 4) + 20 \\ &= (a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 + 20. \end{aligned}$$

Budući da je $(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 \geq 0$ za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je 20 najmanja moguća vrijednost danog izraza. Ona se postiže kada je $(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 = 0$, tj. kada je $a - 2b = b - 2c = 2c - 2 = 0$. Iz zadnje jednakosti slijedi $c = 1$, a zatim se lako izračuna da je $b = 2$ i $a = 4$.

Zadatak 2.13 (Državno natjecanje iz matematike u RH, 2015. godina, 2. razred, A varijanta)**.** *Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi*

$$\frac{a}{a + b^2} + \frac{b}{b + c^2} + \frac{c}{c + a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rješenje. Primjenom AG nejednakosti dobivamo

$$a^2 + b^2 \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab. \tag{2.15}$$

Zbog uvjeta $a + b + c = 1$ imamo

$$\frac{a}{a + b^2} = \frac{a}{a \cdot 1 + b^2} = \frac{a}{a(a + b + c) + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2 + ab + ac} \overset{(2.15)}{\leq} \frac{a}{3ab + ac},$$

odnosno

$$\frac{a}{a + b^2} \leq \frac{1}{3b + c}. \tag{2.16}$$

Primjenom GH i AG nejednakosti dobivamo

$$\frac{3b + c}{4} = \frac{b + b + b + c}{4} \overset{AG}{\geq} \sqrt[4]{b \cdot b \cdot b \cdot c} \overset{GH}{\geq} \frac{4}{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{4}{\frac{3}{b} + \frac{1}{c}},$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{3b + c} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Vratimo se u (2.16) i dobivamo

$$\frac{a}{a + b^2} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Analogno se dokazuje

$$\frac{b}{b + c^2} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{c} + \frac{1}{a}\right), \quad \frac{c}{c + a^2} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Zbrajanjem gornjih nejednakosti slijedi

$$\frac{a}{a + b^2} + \frac{b}{b + c^2} + \frac{c}{c + a^2} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

te je time tvrdnja dokazana.

Poglavlje 3

Metoda slike funkcije

3.1 O metodi

Zadana je funkcija

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

gdje su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ realne konstante. Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da se brojnik i nazivnik u (3.1) ne mogu skratiti te da zadana funkcija nije konstantna funkcija. Prirodna domena zadane funkcije je $\{x \in \mathbb{R} : a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0\}$. Odredimo njenu sliku, tj. skup svih mogućih vrijednosti koje y može poprimiti. Iz (3.1) slijedi

$$(a_1 - a_2y)x^2 + (b_1 - b_2y)x + (c_1 - c_2y) = 0. \tag{3.2}$$

Skup svih mogućih vrijednosti za y jednak je skupu svih $y \in \mathbb{R}$ za koje jednadžba (3.2) ima rješenje po x. Uočimo da (3.2) ne može za rješenje dati neki x_0 koji nije u domeni zadane funkcije. Naime, u tom slučaju je $a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0$, pa (3.2) povlači $a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0$. No, tada se brojnik i nazivnik u (3.1) mogu skratiti (sa $x - x_0$) suprotno pretpostavci.

Ako je $a_1 - a_2y \neq 0$, jednadžba (3.2) je kvadratna, pa ima realno rješenje ako i samo ako joj je diskriminanta nenegativna, tj.

$$(b_1 - b_2y)^2 - 4(a_1 - a_2y)(c_1 - c_2y) \geq 0. \tag{3.3}$$

Sređivanjem lijeve strane nejednakosti dobivamo

$$(b_2^2 - 4a_2c_2)y^2 + (4a_1c_2 + 4a_2c_1 - 2b_1b_2)y + (b_1^2 - 4a_1c_1) \geq 0. \tag{3.4}$$

Ovaj uvjet kraće možemo zapisati u obliku

$$my^2 + ny + r \geq 0. \tag{3.5}$$

Ako je $m = 0$ i $n > 0$, uvjet (3.5) postaje $y \geq -\frac{r}{n}$, tj. $y \in [p, +\infty\rangle$ za neki $p \in \mathbb{R}$. Ako je $m = 0$ i $n < 0$, tada analogno zaključujemo $y \in \langle -\infty, p]$ za neki $p \in \mathbb{R}$. Ako je $m = n = 0$ i $r \geq 0$, (3.5) je istina za svaki $y \in \mathbb{R}$. Uočimo da slučaj $m = n = 0$ i $r < 0$ ne može nastupiti jer bi to značilo da funkcija (3.1) ne poprima niti jednu vrijednost. Ako je $m \neq 0$, nejednadžba (3.5) je kvadratna, pa skiciranjem grafa funkcije $y \mapsto my^2 + ny + r$ zaključujemo da je skup rješenja nejednadžbe (3.5) jednak $[p, q]$ za neke $p, q \in \mathbb{R}$ (ako je $m < 0$ i $n^2 - 4mr > 0$), $\langle -\infty, p] \cup [q, +\infty\rangle$ za neke $p, q \in \mathbb{R}$ (ako je $m > 0$ i $n^2 - 4mr > 0$), ili je jednak skupu $\mathbb{R}$ (ako je $m > 0$ i $n^2 - 4mr = 0$). Ostali slučajevi ne mogu nastupiti.

Ako je $a_1 - a_2y = 0$, tada (3.2) ima rješenje ako i samo ako je $b_1 - b_2y \neq 0$ (slučaj $a_1 - a_2y = b_1 - b_2y = c_1 - c_2y = 0$ ne može nastupiti zbog pretpostavke da zadana funkcija nije konstantna). Napomenimo da se $y_0 \in \mathbb{R}$ koji je rješenje jednadžbe $a_1 - a_2y = 0$ dobiva i kao rješenje nejednadžbe (3.3). No, ako je $b_1 - b_2y_0 = 0$, tada y_0 nije u skupu svih $y \in \mathbb{R}$ za koje jednadžba (3.2) ima rješenje po x jer je $c_1 - c_2y_0 \neq 0$. Primijetimo da za takav y_0 u (3.3), pa onda i u (3.5), vrijedi jednakost, što znači da je y_0 jedan od brojeva p i q, tj. jedan od rubova dobivenih intervala. Kako jednadžba $a_1 - a_2y = 0$ ima samo jedno rješenje, jasno je da isključujemo samo jedan od rubova intervala.

Konačno zaključujemo kojeg oblika može biti skup svih mogućih vrijednosti koje y može poprimiti, a odatle lako odredimo ekstreme zadane funkcije:

- $\langle p, q]$ – funkcija ima maksimum q, a nema minumim,
- $[p, q\rangle$ – funkcija ima minimum p, a nema maksimum,
- $[p, q]$ – funkcija ima minimum p i maksimum q,
- $[p, +\infty\rangle$ – funkcija ima minimum p, a nema maksimum,
- $\langle -\infty, p]$ – funkcija ima maksimum p, a nema minimum,
- $\langle p, +\infty\rangle$ – funkcija nema ekstrema,
- $\langle -\infty, p\rangle$ – funkcija nema ekstrema,
- $\langle -\infty, p] \cup [q, +\infty\rangle$ – funkcija ima lokalni maksimum p i lokalni minimum q,
- $\langle -\infty, p\rangle \cup [q, +\infty\rangle$ – funkcija nema lokalni maksimum, ali ima lokalni minimum q,
- $\langle -\infty, p] \cup \langle q, +\infty\rangle$ – funkcija ima lokalni maksimum p, a nema lokalni minimum,
- $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ – funkcija nema ekstrema,
- $\mathbb{R}$ – funkcija nema ekstrema.

3.2 Primjeri

Primjer 3.1. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}. \tag{3.6}$$

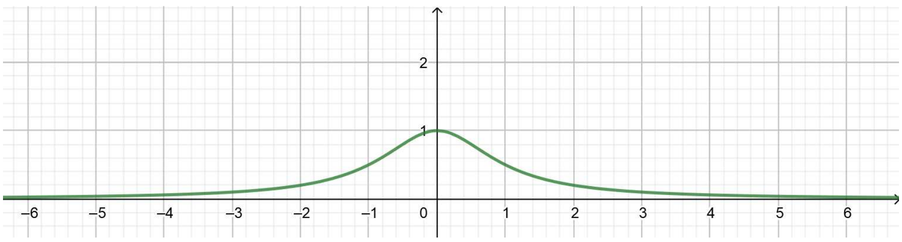
Rješenje. Iz (3.6) slijedi

$$x^2 = \frac{1-y}{y}, \quad y \neq 0, \tag{3.7}$$

a ta jednadžba ima realno rješenje ako i samo ako je desna strana nenegativna.

$$\frac{1-y}{y} \geq 0, \quad y \neq 0 \iff (1-y)y \geq 0, \quad y \neq 0 \iff y \in \langle 0, 1].$$

Dakle, skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje jednadžba (3.7) ima rješenje po x je skup $\langle 0, 1]$, što znači da zadana funkcija ima maksimum 1 i nema minimum.



Slika 3.1: Graf funkcije $y = \frac{1}{x^2+1}$

Primjer 3.2. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-8}{3x^2 + 2}. \tag{3.8}$$

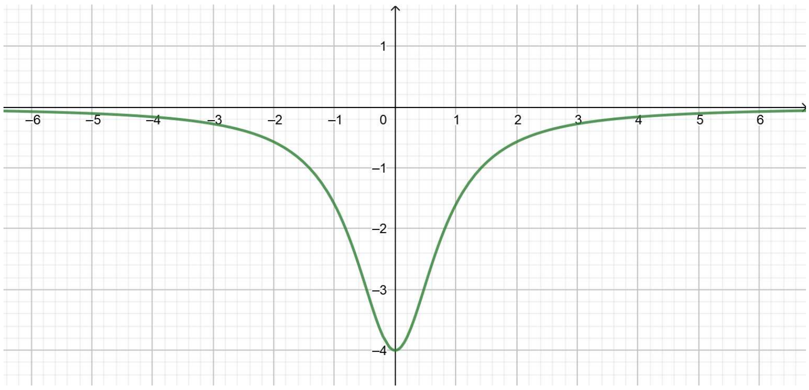
Rješenje. Iz (3.8) slijedi

$$x^2 = \frac{-2y-8}{3y}, \quad y \neq 0, \tag{3.9}$$

a ta jednadžba ima realno rješenje ako i samo ako je desna strana nenegativna.

$$\frac{-2y-8}{3y} \geq 0, \quad y \neq 0 \iff y(y+4) \leq 0, \quad y \neq 0 \iff y \in [-4, 0\rangle.$$

Prema tome, skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje jednadžba (3.9) ima rješenje po x je skup $[-4, 0\rangle$, pa zaključujemo da zadana funkcija ima minimum -4 i nema maksimum.



Slika 3.2: Graf funkcije $y = \frac{-8}{3x^2+2}$

Primjer 3.3. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + x + 1}. \tag{3.10}$$

Rješenje. Iz (3.10) slijedi

$$(y-1)x^2 + (y-6)x + (y-9) = 0. \tag{3.11}$$

Ako je $y \neq 1$, jednadžba (3.11) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (y-6)^2 - 4(y-1)(y-9) \geq 0 \iff -3y^2 + 28y \geq 0$$

$$\iff y(3y-28) \leq 0 \iff y \in \left[0, \frac{28}{3}\right].$$

Za $y = 1$, dobivamo da jednadžba (3.11) također ima rješenje po x ($x = -\frac{8}{5}$). Dakle, za svaki $y \in \left[0, \frac{28}{3}\right]$ jednadžba (3.11) ima rješenje po x. Iz toga zaključujemo da zadana funkcija ima minimum 0 i maksimum $\frac{28}{3}$.

Primjer 3.4. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}. \tag{3.12}$$

Rješenje. Iz (3.12) slijedi

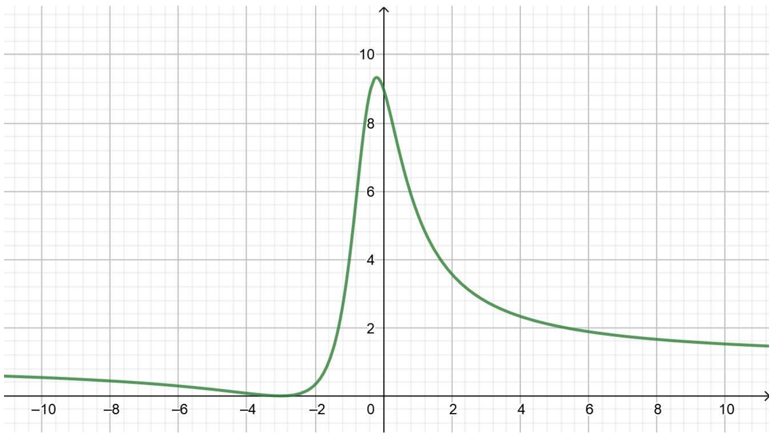
$$(y-3)x^2 + (2y+1)x + (y-1) = 0. \tag{3.13}$$

Ako je $y \neq 3$, jednadžba (3.13) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

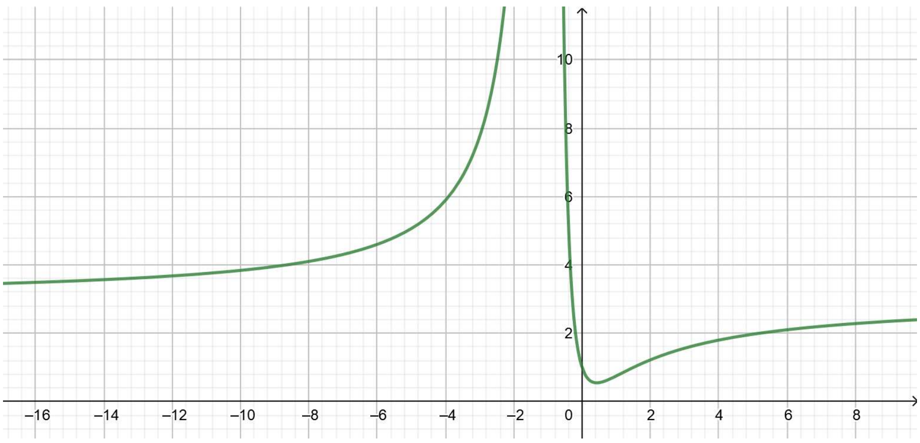
$$D \geq 0 \iff (2y+1)^2 - 4(y-3)(y-1) \geq 0 \iff 20y - 11 \geq 0$$

$$\iff y \geq \frac{11}{20} \iff y \in \left[\frac{11}{20}, +\infty\right\rangle.$$

Za $y = 3$ jednadžba (3.13) je linearna i također ima rješenje po x ($x = -\frac{2}{7}$). Iz toga zaključujemo da jednadžba (3.13) ima rješenje po x za svaki $y \in \left[\frac{11}{20}, +\infty\right\rangle$, što znači da zadana funkcija ima minimum $\frac{11}{20}$, a nema maksimum.



Slika 3.3: Graf funkcije $y = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x+1}$



Slika 3.4: Graf funkcije $y = \frac{3x^2-x+1}{x^2+2x+1}$

Primjer 3.5. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}. \tag{3.14}$$

Rješenje. Iz (3.14) slijedi

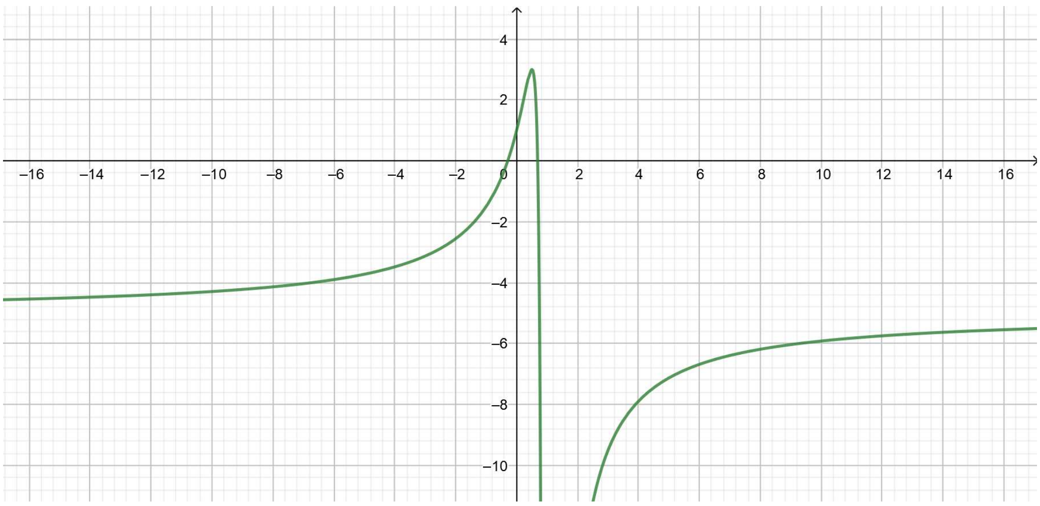
$$(y + 5)x^2 - (2y + 2)x + (y - 1) = 0. \tag{3.15}$$

Za $y \neq -5$, jednadžba (3.15) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (2y + 2)^2 - 4(y + 5)(y - 1) \geq 0 \iff -8y + 24 \geq 0$$

$$\iff y \leq 3 \iff y \in \langle -\infty, 3].$$

Ako je $y = -5$, i tada jednadžba (3.15) ima rješenje po x ($x = \frac{3}{4}$). Prema tome, jednadžba (3.15) ima rješenje po x za svaki $y \in \langle -\infty, 3]$, pa zadana funkcija ima maksimum 3, a nema minimum.



Slika 3.5: Graf funkcije $y = \frac{-5x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$

Primjer 3.6. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-2x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}. \tag{3.16}$$

Rješenje. Iz (3.16) slijedi

$$(y + 2)x^2 - (2y + 4)x + (y - 3) = 0. \tag{3.17}$$

Za $y \neq -2$, jednadžba (3.17) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (2y+4)^2 - 4(y+2)(y-3) \geq 0 \iff 20y + 40 \geq 0$$
$$\iff y \geq -2 \iff y \in [-2, +\infty\rangle.$$

Budući da za $y = -2$ iz jednadžbe (3.17) slijedi $-5 = 0$, zaključujemo da jednadžba (3.17) ima rješenje po x za sve $y \in \langle -2, +\infty\rangle$. Dakle, zadana funkcija nema ekstrema.

Primjer 3.7. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3x^2 + 4x}{9x^2 + 12x + 4}. \tag{3.18}$$

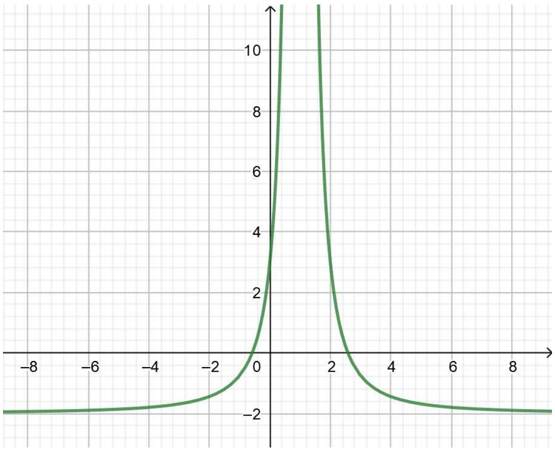
Rješenje. Iz (3.18) slijedi

$$(9y-3)x^2 + (12y-4)x + 4y = 0. \tag{3.19}$$

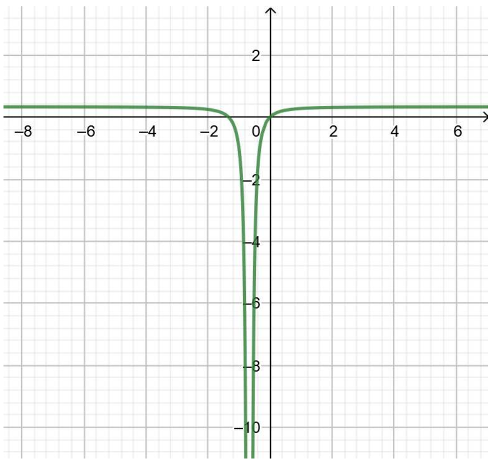
Ako je $y \neq \frac{1}{3}$, jednadžba (3.19) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (12y-4)^2 - 4(9y-3)4y \geq 0 \iff -48y + 16 \geq 0$$
$$\iff y \leq \frac{1}{3} \iff y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{3}\right].$$

Kako za $y = \frac{1}{3}$ iz jednadžbe (3.19) slijedi $\frac{4}{3} = 0$, zaključujemo da (3.19) ima rješenje po x za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{3}\right\rangle$, a to znači da zadana funkcija nema ekstrema.



Slika 3.6: Graf funkcije $y = \frac{-2x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$



Slika 3.7: Graf funkcije $y = \frac{3x^2+4x}{9x^2+12x+4}$

Primjer 3.8. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 4}. \tag{3.20}$$

Rješenje. Iz (3.20) slijedi

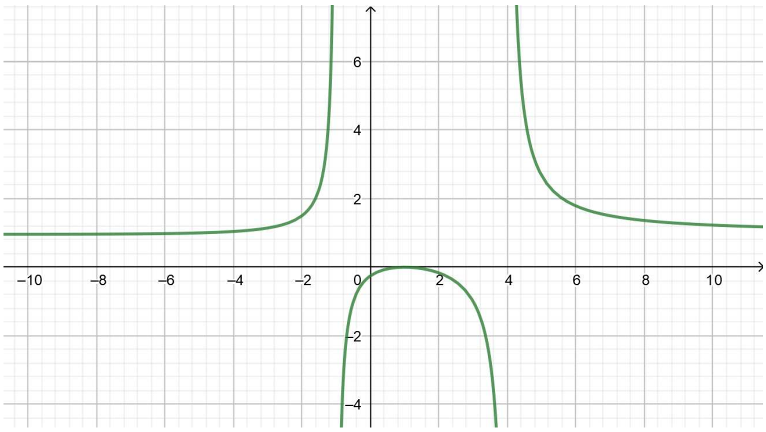
$$(y-1)x^2 - (3y-2)x - (4y+1) = 0. \tag{3.21}$$

Ako je $y \neq 1$, jednadžba (3.21) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (3y-2)^2 + 4(y-1)(4y+1) \geq 0 \iff 25y^2 - 24y \geq 0$$

$$\iff y(25y-24) \geq 0 \iff y \in \langle -\infty, 0] \bigcup \left[\frac{24}{25}, +\infty\right\rangle.$$

Za $y = 1$, iz jednadžbe (3.21) dobivamo $x = -5$, odnosno jednadžba ima rješenje po x. Prema tome, jednadžba (3.21) ima rješenje po x za svaki $y \in \langle -\infty, 0] \bigcup \left[\frac{24}{25}, +\infty\right\rangle$, što znači da zadana funkcija ima lokalni maksimum 0 i lokalni minimum $\frac{24}{25}$.



Slika 3.8: Graf funkcije $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x-4}$

Primjer 3.9. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-3x^2 + 3x - 1}{x^2 - x - 6}. \tag{3.22}$$

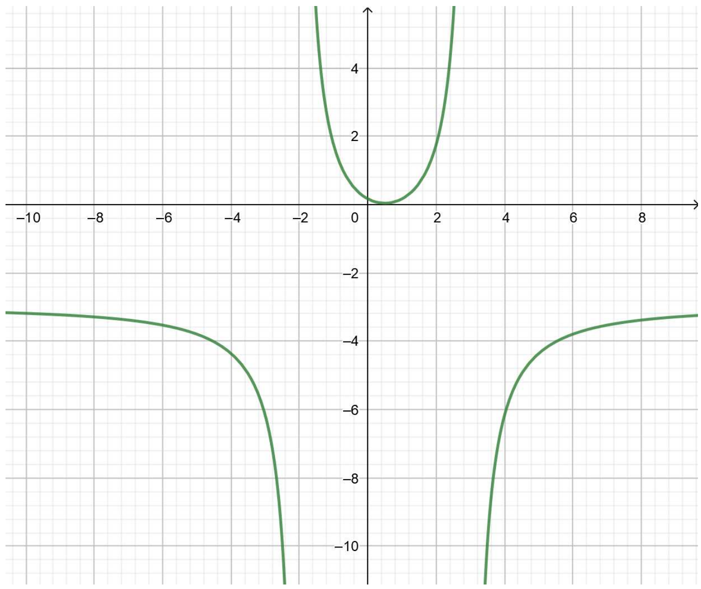
Rješenje. Iz (3.22) slijedi

$$(y+3)x^2 - (y+3)x - (6y-1) = 0. \tag{3.23}$$

Ako je $y \neq -3$, jednadžba (3.23) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (y+3)^2 + 4(y+3)(6y-1) \geq 0 \iff 25y^2 + 74y - 3 \geq 0. \tag{3.24}$$

Rješenje jednadžbe $25y^2 + 74y - 3 = 0$ je $y_{1,2} = \frac{-74 \pm 76}{50}$, odnosno $y_1 = -3$ i $y_2 = \frac{1}{25}$, pa slijedi da je $y \in \langle -\infty, -3] \bigcup \left[\frac{1}{25}, +\infty\right\rangle$ rješenje nejednadžbe (3.24). No, za $y = -3$, iz (3.23) slijedi $19 = 0$, odnosno jednadžba nema rješenja po x. Prema tome, jednadžba (3.23) ima rješenje po x za sve $y \in \langle -\infty, -3\rangle \bigcup \left[\frac{1}{25}, +\infty\right\rangle$, što znači da zadana funkcija ima lokalni minimum $\frac{1}{25}$, a nema lokalni maksimum.



Slika 3.9: Graf funkcije $y = \frac{-3x^2+3x-1}{x^2-x-6}$

Primjer 3.10. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4x - 6}. \tag{3.25}$$

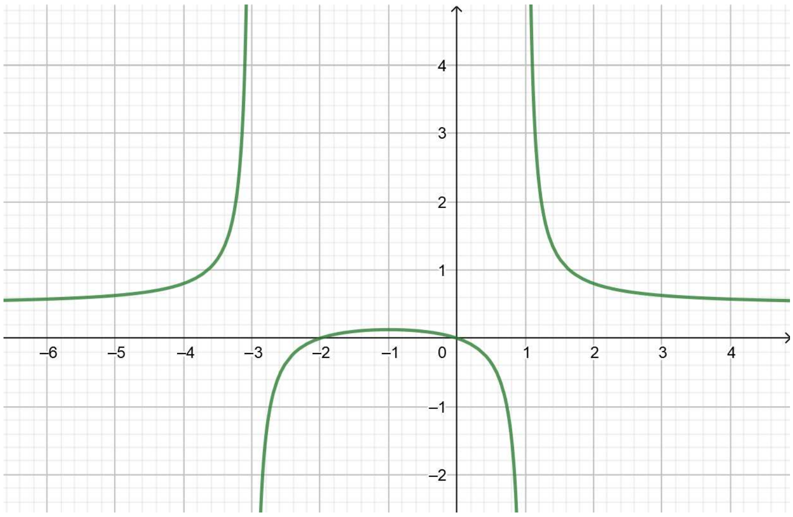
Rješenje. Iz (3.25) slijedi

$$(2y-1)x^2 + (4y-2)x - 6y = 0. \tag{3.26}$$

Ako je $y \neq \frac{1}{2}$, jednadžba (3.26) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (4y-2)^2 + 4(2y-1)6y \geq 0 \iff 64y^2 - 40y + 4 \geq 0. \tag{3.27}$$

Rješenje jednadžbe $64y^2 - 40y + 4 = 0$ je $y_{1,2} = \frac{40 \pm 24}{128}$, odnosno $y_1 = \frac{1}{8}$ i $y_2 = \frac{1}{2}$, pa slijedi da je $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{8} \right] \bigcup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ rješenje nejednadžbe (3.27). Kako za $y = \frac{1}{2}$ iz (3.26) dobivamo $-3 = 0$, zaključujemo da jednadžba (3.26) ima rješenje po x za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{8} \right] \bigcup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. Iz toga slijedi da zadana funkcija ima lokalni maksimum $\frac{1}{8}$, a nema lokalni minimum.



Slika 3.10: Graf funkcije $y = \frac{x^2+2x}{2x^2+4x-6}$

Primjer 3.11. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-2x + 3}{x - 1}. \tag{3.28}$$

Rješenje. Iz (3.28) slijedi

$$(y + 2)x - (y + 3) = 0 \iff x = \frac{y + 3}{y + 2}, \quad y \neq -2. \tag{3.29}$$

Dakle, jednadžba (3.29) ima rješenje po x za sve $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, iz čega slijedi da zadana funkcija nema ekstrema.

Primjer 3.12. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3x}{4x^2 - 9}. \tag{3.30}$$

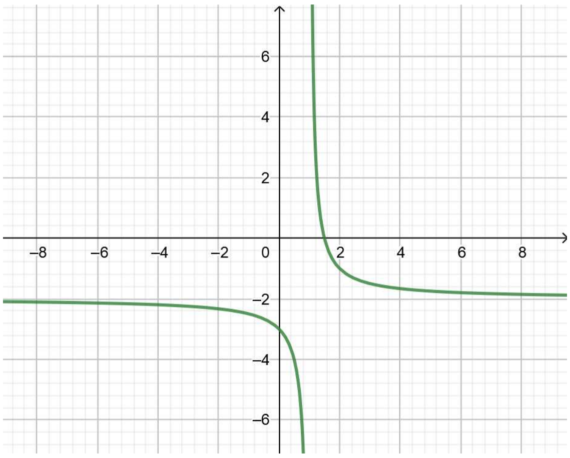
Rješenje. Iz (3.30) slijedi

$$4yx^2 - 3x - 9y = 0. \tag{3.31}$$

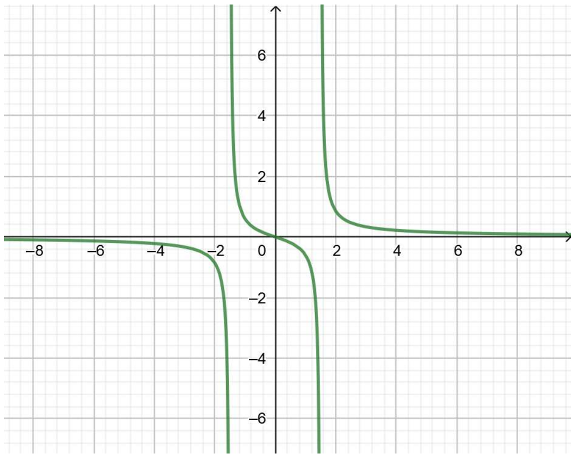
Za $y \neq 0$, jednadžba (3.31) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff (-3)^2 - 4 \cdot 4y(-9y) \geq 0 \iff 144y^2 + 9 \geq 0 \iff y^2 \geq -\frac{9}{144} \iff y \in \mathbb{R}.$$

Za $y = 0$ jednadžba (3.31) nije kvadratna, već linearna, ali također ima rješenje po x ($x = 0$). Dakle, jednadžba (3.31) ima rješenje po x za svaki $y \in \mathbb{R}$, što znači da zadana funkcija nema ekstrema.



Slika 3.11: Graf funkcije $y = \frac{-2x+3}{x-1}$



Slika 3.12: Graf funkcije $y = \frac{3x}{4x^2-9}$

3.3 Zadaci

Zadatak 3.1. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3\sqrt{x^2-1} + x^2}{x^2}. \tag{3.32}$$

Rješenje. Ako (3.32) zapišemo kao $y = \frac{3\sqrt{x^2-1}}{x^2} + 1$, vidimo da je $y \geq 1$ jer je $\frac{3\sqrt{x^2-1}}{x^2} \geq 0$. Također, zbog definicije drugog korijena imamo uvjet $x^2 - 1 \geq 0$, odnosno $x^2 \geq 1$. Uvedemo li supstituciju $t^2 = x^2 - 1$, tada (3.32) glasi

$$y = \frac{t^2 + 3t + 1}{t^2 + 1}. \tag{3.33}$$

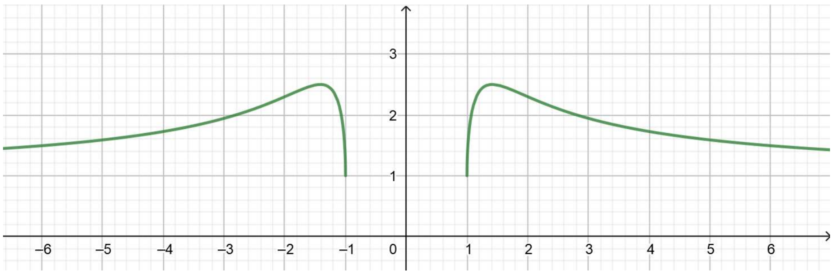
Iz (3.33) slijedi

$$(y-1)t^2 - 3t + (y-1) = 0. \tag{3.34}$$

Za $y \neq 1$, jednadžba (3.34) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 9 - 4(y-1)^2 \geq 0 \iff (y-1)^2 \leq \frac{9}{4} \iff y - 1 \leq \frac{3}{2} \iff y \leq \frac{5}{2}.$$

Za $y = 1$ jednadžba (3.34) nije kvadratna, već linearna, ali također ima rješenje po t ($t = 0$). Dakle, jednadžba (3.34) ima rješenje po t za svaki $y \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$, što znači da zadana funkcija ima minimum 1 i maksimum $\frac{5}{2}$.



Slika 3.13: Graf funkcije $y = \frac{3\sqrt{x^2-1}+x^2}{x^2}$

Zadatak 3.2. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{2\sqrt{x} - 7}{x}. \tag{3.35}$$

Rješenje. Prirodna domena funkcije je $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}$. Nakon što uvedemo supstituciju $t = \sqrt{x}$, jednadžba (3.35) glasi

$$y = \frac{2t - 7}{t^2}. \tag{3.36}$$

Iz (3.36) slijedi

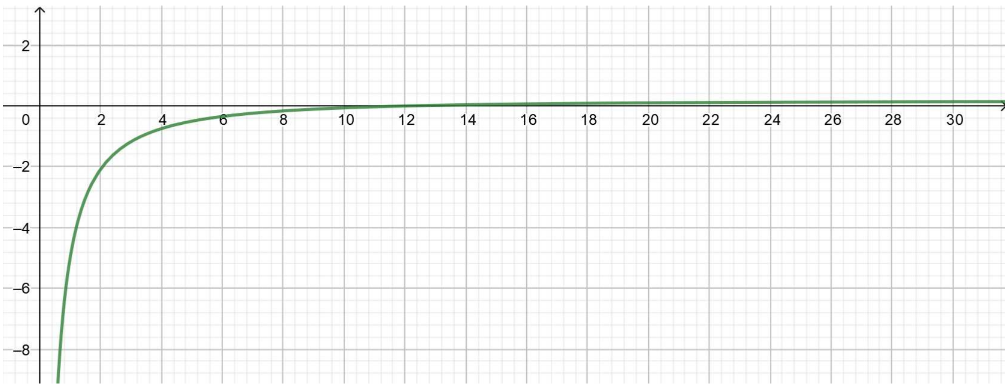
$$yt^2 - 2t + 7 = 0. \tag{3.37}$$

Ako je $y \neq 0$, tada je (3.37) kvadratna jednadžba pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 4 - 28y \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{7}.$$

Međutim, definirali smo $t = \sqrt{x}$, pri čemu je $x > 0$, pa onda mora biti i $t > 0$. Provjerimo za koje $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{7}\right] \setminus \{0\}$ su rješenja $t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{D}}{2y}$ pozitivna. Riješimo prvo nejednadžbu $t_1 > 0$, odnosno $\frac{2+\sqrt{D}}{2y} > 0$. Množenjem sa $2y^2$ dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu $(2+\sqrt{D})y > 0$, a to vrijedi kada su oba faktora pozitivna ili oba negativna. Očito slučaj kada je $y > 0$ i $2 + \sqrt{D} > 0$ vrijedi za sve $y \in \left\langle 0, \frac{1}{7}\right]$ jer je drugi korijen broja uvijek nenegativan. Iz istog razloga odmah vidimo da drugi slučaj kada je $y < 0$ i $2 + \sqrt{D} < 0$ nije moguć jer $2 + \sqrt{D}$

uvijek pozitivan broj. Dakle, $t_1 > 0$ za sve $y \in \left\langle 0, \frac{1}{7} \right]$. Ako nejednadžbu $t_2 > 0$, odnosno $\frac{2-\sqrt{D}}{2y} > 0$ pomnožimo sa $2y^2$, dobivamo $(2 - \sqrt{D})y > 0$. Ako je $y < 0$ i $2 - \sqrt{D} < 0$, tada drugu nejednadžbu možemo zapisati kao $2 < \sqrt{D}$ pa kvadriranjem dobivamo $y < 0$. Dakle, ovaj slučaj vrijedi za sve $y \in \langle -\infty, 0 \rangle$. Ako je $y > 0$ i $2 - \sqrt{D} > 0$, tada drugu nejednadžbu možemo zapisati kao $2 > \sqrt{D}$ pa kvadriranjem dobivamo $y > 0$. Prema tome, ovaj slučaj vrijedi za sve $y \in \left\langle 0, \frac{1}{7} \right]$. Konačno zaključujemo da je $t_2 > 0$ za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{7} \right] \setminus \{0\}$. Iz ovoga slijedi da za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{7} \right] \setminus \{0\}$ postoji pozitivno rješenje jednadžbe (3.37). Za $y = 0$ jednadžba (3.37) također ima rješenje po t ($t = \frac{7}{2}$). Dakle, skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje (3.37) ima realno rješenje je $\left\langle -\infty, \frac{1}{7} \right]$, što znači da zadana funkcija ima maksimum $\frac{1}{7}$ i nema minimum.



Slika 3.14: Graf funkcije $y = \frac{2\sqrt{x}-7}{x}$

Zadatak 3.3. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = 6\sqrt{x-2} - x. \tag{3.38}$$

Rješenje. Budući da je prirodna domena funkcije $\{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\}$, možemo uvesti supstituciju $t^2 = x - 2$. Tada (3.38) glasi

$$y = -t^2 + 6t - 2, \tag{3.39}$$

odnosno

$$t^2 - 6t + (y + 2) = 0. \tag{3.40}$$

Jednadžba (3.40) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 36 - 4(y + 2) \geq 0 \iff y \leq 7.$$

Prema tome, jednadžba (3.40) ima realno rješenje za sve $y \in \langle -\infty, 7]$, što znači da zadana funkcija ima maksimum 7, a nema minimum.

Slika 3.15: Graf funkcije $y = 6\sqrt{x-2} - x$

Zadatak 3.4. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{4\sqrt{x}}{x+1}. \tag{3.41}$$

Rješenje. Prirodna domena zadane funkcije je $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, pa odmah vidimo da je $y \geq 0$. Uvedemo li supstituciju $t = \sqrt{x}$, tada (3.41) glasi

$$y = \frac{4t}{t^2+1}. \tag{3.42}$$

Iz (3.42) slijedi

$$yt^2 - 4t + y = 0. \tag{3.43}$$

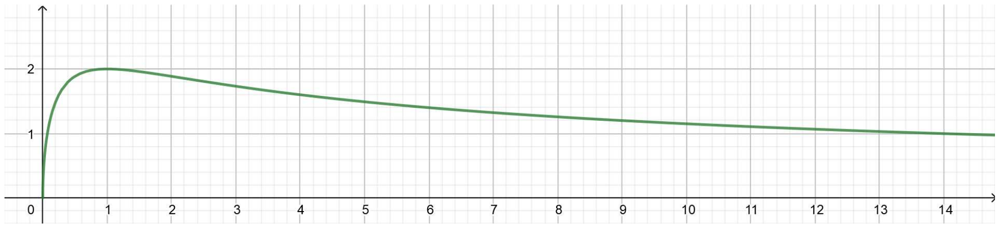
Ako je $y \neq 0$, onda je (3.43) kvadratna jednadžba pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 16 - 4y^2 \geq 0 \iff y^2 - 4 \leq 0 \iff (y+2)(y-2) \leq 0 \iff y \in [-2, 2].$$

Budući da promatramo slučaj kada je $y \neq 0$ i već znamo da je $y \geq 0$, slijedi da kvadratna jednadžba (3.43) ima realno rješenje za $y \in \langle 0, 2]$. No, kako je $t = \sqrt{x}$, trebamo provjeriti je li $t \geq 0$ za sve $y \in \langle 0, 2]$. Lako se vidi da je $t_1 = \frac{4+\sqrt{D}}{2y} \geq 0$ za sve $y \in \langle 0, 2]$. S druge strane, $t_2 = \frac{4-\sqrt{D}}{2y} \geq 0$ ako i samo ako je $4 - \sqrt{D} \geq 0$.

$$4 - \sqrt{D} \geq 0 \iff \sqrt{D} \leq 4 \iff 16 - 4y^2 \leq 16 \iff y^2 \geq 0,$$

a to vrijedi za sve $y \in \langle 0, 2]$. Za $y = 0$ jednadžba (3.43) također ima rješenje po t ($t = 0$). Zaključujemo da jednadžba (3.43) ima realno rješenje za sve $y \in [0, 2]$, što znači da zadana funkcija ima minimum 0 i maksimum 2.



Slika 3.16: Graf funkcije $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+1}$

Zadatak 3.5. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{4e^x - 1}{e^{2x}}. \tag{3.44}$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju $t = e^x$, a kako je $e^x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, to znači da je i $t > 0$. Sada (3.44) glasi

$$y = \frac{4t - 1}{t^2}. \tag{3.45}$$

Iz (3.45) slijedi

$$yt^2 - 4t + 1 = 0. \tag{3.46}$$

Za $y \neq 0$ je (3.46) kvadratna jednadžba pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 16 - 4y \geq 0 \iff y \leq 4.$$

Još nam preostaje provjeriti za koje $y \in \langle -\infty, 4] \setminus \{0\}$ dobivamo pozitivna rješenja $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2y}$. Množenjem nejednadžbe $t_1 > 0$, odnosno $\frac{4+\sqrt{D}}{2y} > 0$ sa $2y^2$ dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu $(4 + \sqrt{D})y > 0$, a to vrijedi kada su oba faktora pozitivna ili oba negativna. Očito $y > 0$ i $4 + \sqrt{D} > 0$ vrijedi za sve $y \in \langle 0, 4]$ jer je drugi korijen broja uvijek nenegativan. Iz istog razloga odmah vidimo da drugi slučaj kada je $y < 0$ i $4 + \sqrt{D} < 0$ nije moguć jer $4 + \sqrt{D}$ uvijek pozitivan broj. Dakle, $t_1 > 0$ za sve $y \in \langle 0, 4]$. Ako nejednadžbu $t_2 > 0$, odnosno $\frac{4-\sqrt{D}}{2y} > 0$ pomnožimo sa $2y^2$, dobivamo $(4 - \sqrt{D})y > 0$. Ako je $y < 0$ i $4 - \sqrt{D} < 0$, tada drugu nejednadžbu možemo zapisati kao $4 < \sqrt{D}$ pa kvadriranjem dobivamo $y < 0$. Dakle, ovaj slučaj vrijedi za sve $y \in \langle -\infty, 0 \rangle$. Ako je $y > 0$ i $4 - \sqrt{D} > 0$, tada drugu nejednadžbu možemo zapisati kao $4 > \sqrt{D}$ pa kvadriranjem dobivamo $y > 0$. Prema tome, ovaj slučaj vrijedi za sve $y \in \langle 0, 4]$. Konačno zaključujemo da je $t_2 > 0$ za sve $y \in \langle -\infty, 4] \setminus \{0\}$. Iz ovoga slijedi da za sve $y \in \langle -\infty, 4] \setminus \{0\}$ postoji pozitivno rješenje jednadžbe (3.46). Ako je $y = 0$, tada (3.46) također ima rješenje po t ($t = \frac{1}{4}$). Dakle, skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje (3.46) ima realno rješenje je $\langle -\infty, 4]$, što znači da zadana funkcija ima maksimum 4 i nema minimum.

Zadatak 3.6. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{e^x + 4}{2\sqrt{e^x}}. \tag{3.47}$$

Rješenje. Budući da je $e^x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odmah zaključujemo da je $y > 0$. Uvedemo li supstituciju $t = \sqrt{e^x}$, tada (3.47) glasi

$$y = \frac{t^2 + 4}{2t}. \tag{3.48}$$

Iz (3.48) slijedi

$$t^2 - 2yt + 4 = 0. \tag{3.49}$$

Kako je (3.49) kvadratna jednadžba, ona ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 4y^2 - 16 \geq 0 \iff y^2 - 4 \geq 0 \iff y \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle.$$

No, znamo da je $y > 0$ pa zaključujemo da jednadžba (3.49) ima realno rješenje za sve $y \in [2, +\infty\rangle$. Osim toga, definirali smo da je $t = \sqrt{e^x}$ pa još treba provjeriti je li zaista $t > 0$ za sve $y \geq 2$. Odmah vidimo da je $t_1 = \frac{2y+\sqrt{D}}{2} > 0$ za sve $y \geq 2$. S druge strane, $t_2 = \frac{2y-\sqrt{D}}{2} > 0$ ako i samo ako je $2y - \sqrt{D} > 0$.

$$2y - \sqrt{D} > 0 \iff 2y > \sqrt{D} \iff 4y^2 > 4y^2 - 16 \iff 0 > -16,$$

a to vrijedi za svaki $y \geq 2$. Prema tome, (3.49) ima realno rješenje za svaki $y \in [2, +\infty\rangle$, što znači da zadana funkcija ima minimum 2 i nema maksimum.

Zadatak 3.7. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{-\ln^2 x - 4}{\ln x}. \tag{3.50}$$

Rješenje. Uvedemo li supstituciju $t = \ln x$, tada (3.50) glasi

$$y = \frac{-t^2 - 4}{t}. \tag{3.51}$$

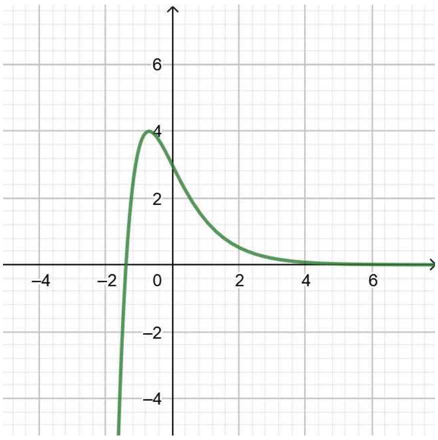
Iz (3.51) slijedi

$$t^2 + yt + 4 = 0. \tag{3.52}$$

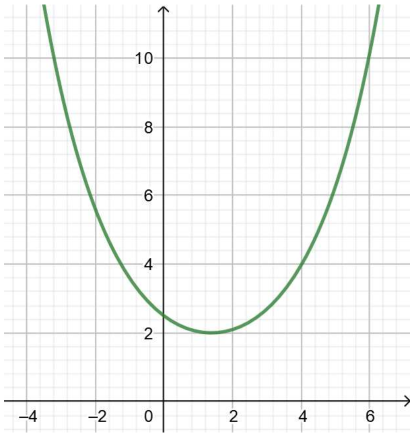
Jednadžba (3.52) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff y^2 - 16 \geq 0 \iff (y+4)(y-4) \geq 0 \iff y \in \langle -\infty, -4] \cup [4, +\infty\rangle.$$

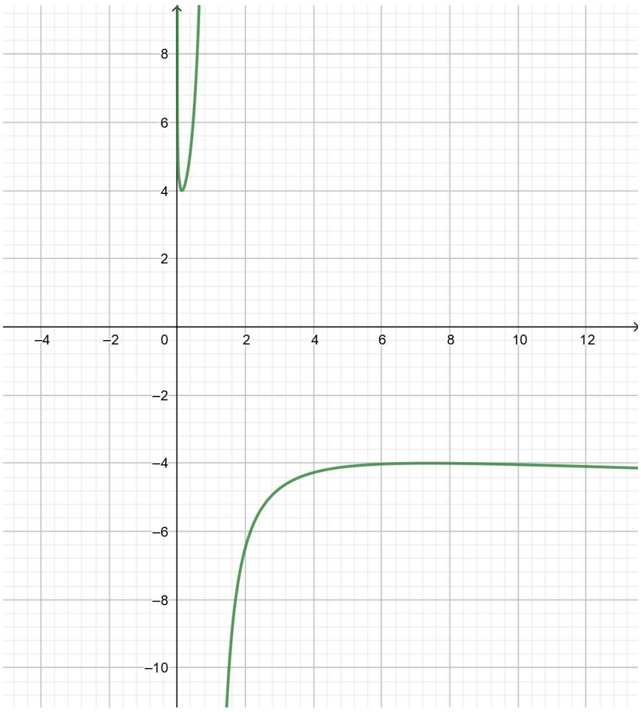
Zaključujemo da jednadžba (3.52) ima realno rješenje za sve $y \in \langle -\infty, -4] \cup [4, +\infty\rangle$, što znači da zadana funkcija ima lokalni minimum 4 i lokalni maksimum -4.



Slika 3.17: Graf funkcije $y = \frac{4e^x - 1}{e^{2x}}$



Slika 3.18: Graf funkcije $y = \frac{e^x + 4}{2\sqrt{e^x}}$



Slika 3.19: Graf funkcije $y = \frac{-\ln^2 x - 4}{\ln x}$

Zadatak 3.8. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{6 \ln x}{\ln^2 x + 9}. \tag{3.53}$$

Rješenje. Uvedemo li supstituciju $t = \ln x$, tada (3.53) glasi

$$y = \frac{6t}{t^2 + 9}. \tag{3.54}$$

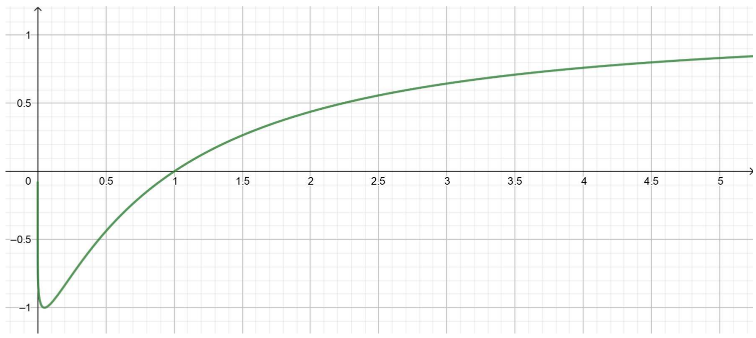
Iz (3.54) slijedi

$$yt^2 - 6t + 9y = 0. \tag{3.55}$$

Ako je $y \neq 0$, jednadžba (3.55) je kvadratna jednadžba pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 36 - 36y^2 \geq 0 \iff y^2 - 1 \leq 0 \iff (y+1)(y-1) \leq 0 \iff y \in [-1, 1].$$

Za $y = 0$ iz (3.46) dobivamo $t = 0$, što znači da i tada postoji rješenje po t ($t = \frac{1}{4}$). Dakle, skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje (3.55) ima realno rješenje je $[-1, 1]$, što znači da zadana funkcija ima minimum -1 i maksimum 1.



Slika 3.20: Graf funkcije $y = \frac{6 \ln x}{\ln^2 x + 9}$

Zadatak 3.9. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos x}. \tag{3.56}$$

Rješenje. Uvedemo li supstituciju $t = \cos x$, tada (3.56) glasi

$$y = \frac{1 + t^2}{t}. \tag{3.57}$$

Iz definicije funkcije slijedi $t \neq 0$. Budući da je $\cos x \in [-1, 1]$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, dobivamo uvjet $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Iz (3.57) slijedi

$$t^2 - yt + 1 = 0. \tag{3.58}$$

Jednadžba (3.58) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff y^2 - 4 \geq 0 \iff (y+2)(y-2) \geq 0 \iff y \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle.$$

Provjerimo vrijedi li uvjet $t_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{D}}{2} \in [-1, 1]$ za sve $y \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$. Prvi uvjet koji provjeravamo za t_1 je sljedeći:

$$t_1 \geq -1 \iff \frac{y + \sqrt{D}}{2} \geq -1 \iff \sqrt{D} \geq -2 - y.$$

Ako je $-2-y < 0$, odnosno $y > -2$, tada gornja nejednakost očito vrijedi jer je lijeva strana uvijek nenegativna. Ako je $-2 - y \geq 0$, odnosno $y \leq -2$, tada kvadriranjem nejednadžbe $\sqrt{D} \geq -2 - y$ dobivamo $y^2 - 4 \geq 4 + 4y + y^2$, što je ekvivalentno sa $y \leq -2$. Dakle, uvjet $t_1 \geq -1$ vrijedi za svaki $y \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$. Drugi uvjet koji provjeravamo za t_1 je:

$$t_1 \leq 1 \iff \frac{y + \sqrt{D}}{2} \leq 1 \iff \sqrt{D} \leq 2 - y.$$

Ako je $2 - y < 0$, odnosno $y > 2$, tada nejednadžba $\sqrt{D} \leq 2 - y$ očito nema rješenja jer je lijeva strana uvijek nenegativna. Ako je $2 - y \geq 0$, odnosno $y \leq 2$, tada kvadriranjem nejednadžbe $\sqrt{D} \leq 2 - y$ dobivamo $y^2 - 4 \leq 4 - 4y + y^2$, što je ekvivalentno sa $y \leq 2$. Dakle, uvjet $t_1 \leq 1$ vrijedi za svaki $y \in \langle -\infty, -2] \cup \{2\}$. Zaključujemo da uvjet $t_1 \in [-1, 1]$ vrijedi za svaki $y \in \langle -\infty, -2] \cup \{2\}$. Prvi uvjet koji provjeravamo za t_2 je

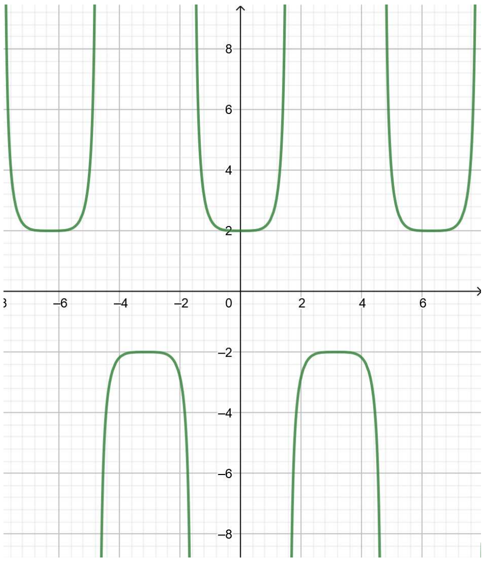
$$t_2 \geq -1 \iff \frac{y - \sqrt{D}}{2} \geq -1 \iff \sqrt{D} \leq y + 2.$$

Ako je $y + 2 < 0$, odnosno $y < -2$, tada nejednadžba $\sqrt{D} \leq y + 2$ očito nema rješenja jer je lijeva strana uvijek nenegativna. Ako je $y + 2 \geq 0$, odnosno $y \geq -2$, tada kvadriranjem nejednadžbe $\sqrt{D} \leq y+2$ dobivamo $y^2-4 \leq y^2+4y+4$, što je ekvivalentno sa $y \geq -2$. Prema tome, uvjet $t_2 \geq -1$ vrijedi za svaki $y \in [2, +\infty\rangle \cup \{-2\}$. Drugi uvjet koji provjeravamo za t_2 je

$$t_2 \leq 1 \iff \frac{y - \sqrt{D}}{2} \leq 1 \iff \sqrt{D} \geq y - 2.$$

Ako je $y - 2 < 0$, odnosno $y < 2$, tada nejednakost $\sqrt{D} \geq y - 2$ očito vrijedi jer je lijeva strana uvijek nenegtivna. Ako je $y - 2 \geq 0$, odnosno $y \geq 2$, tada kvadriranjem nejednadžbe

$\sqrt{D} \geq y-2$ dobivamo $y^2-4 \geq y^2-4y+4$, što je ekvivalentno sa $y \geq 2$. Prema tome, uvjet $t_2 \leq 1$ vrijedi za svaki $y \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$. Zaključujemo da uvjet $t_2 \in [-1, 1]$ vrijedi za svaki $y \in [2, +\infty\rangle \cup \{-2\}$. Dakle, za svaki $y \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$ postoji realno rješenje jednadžbe (3.58), što znači da zadana funkcija ima lokalni minimum 2 i lokalni maksimum -2.



Slika 3.21: Graf funkcije $y = \frac{1+\cos^2 x}{\cos x}$

Zadatak 3.10. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{\sqrt{3}\sin x - \frac{3}{2}}{\sin x}, \quad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{3.59}$$

Rješenje. Uočimo da za $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$ vrijedi da je $\sin x \in \langle 0, 1]$. Uvedemo li supstituciju $t^2 = 3\sin x$, imamo uvjet da je $t^2 \in \langle 0, 3]$, tj. $|t| \in \langle 0, \sqrt{3}]$. Tada (3.59) glasi

$$y = \frac{6t-9}{2t^2}. \tag{3.60}$$

Iz (3.60) slijedi

$$2yt^2 - 6t + 9 = 0. \tag{3.61}$$

Za $y \neq 0$ jednadžba (3.61) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff 36 - 72y \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{2} \iff y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right].$$

Rješenja kvadratne jednadžbe (3.61) su oblika $t_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{D}}{4y}$. Provjerimo za koje $y \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right], y \neq 0$ ta rješenja zadovoljavaju uvjete $t^2 \leq 3, t \neq 0$. Lako se vidi da je $t_1 = \frac{6+\sqrt{D}}{4y} \neq 0$ jer je brojnik uvijek pozitivan. Kako smo u slučaju gdje je $y \neq 0$, to je $\sqrt{D} \neq 6$ pa vrijedi $t_2 = \frac{6-\sqrt{D}}{4y} \neq 0$. Još nam preostaje provjeriti kada će vrijediti $|t| \leq \sqrt{3}$. Prvo ćemo izraz $t_{1,2}$ malo pojednostaviti na sljedeći način:

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{D}}{4y} = \frac{6 \pm 6\sqrt{1-2y}}{4y} \iff t_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{1-2y}}{2y} \qquad / \cdot 2yt_{1,2}$$

$$\iff 2yt_{1,2}^2 = (3 \pm 3\sqrt{1-2y})\, t_{1,2}.$$

Iz (3.61) slijedi

$$6t_{1,2} - 9 = (3 \pm 3\sqrt{1-2y})\, t_{1,2} \iff t_{1,2} = \frac{3}{1 \pm \sqrt{1-2y}}.$$

Ako je $t_1 = \frac{3}{1+\sqrt{1-2y}}$, tada imamo uvjet

$$|t_1| \leq \sqrt{3} \iff \frac{3}{1+\sqrt{1-2y}} \leq \sqrt{3} \iff \sqrt{1-2y} \geq \sqrt{3} - 1 \iff y \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}.$$

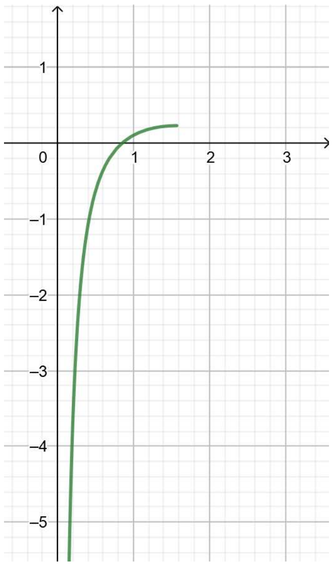
Dakle, uvjet $|t_1| \leq \sqrt{3}$ vrijedi za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}\right]$. Za $t_2 = \frac{3}{1-\sqrt{1-2y}}$ ćemo razlikovati dva slučaja, ovisno o tome je li nazivnik pozitivan ili negativan. Ako je $\sqrt{1-2y} < 1$, odnosno $y \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$, tada imamo

$$|t_2| \leq \sqrt{3} \iff \frac{3}{1-\sqrt{1-2y}} \leq \sqrt{3} \iff \sqrt{1-2y} \leq 1 - \sqrt{3},$$

no to nije moguće jer je lijeva strana nejednakosti uvijek nenegativna. Ako je $\sqrt{1-2y} > 1$, odnosno $y \in \langle -\infty, 0\rangle$, onda imamo

$$|t_2| \leq \sqrt{3} \iff \frac{3}{\sqrt{1-2y}-1} \leq \sqrt{3} \iff \sqrt{1-2y} \geq 1 + \sqrt{3} \iff y \leq -\frac{3+2\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle, uvjet $|t_2| \leq \sqrt{3}$ vrijedi za sve $y \in \left\langle -\infty, -\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right]$. Budući da i za $y = 0$ jednadžba (3.61) ima rješenje po t ($t = \frac{3}{2}$), slijedi da ta jednadžba ima realno rješenje za sve $y \in \left\langle -\infty, \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}\right]$. To znači da zadana funkcija ima maksimum $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$, a nema minimum.



Slika 3.22: Graf funkcije $y = \frac{\sqrt{3}\sin x - \frac{3}{2}}{\sin x}$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$

Zadatak 3.11. *Od svih pravokutnika zadane površine P, odredite onaj čiji je opseg najmanji.*

Rješenje. Označimo duljinu jedne stranice pravokutnika sa x, $x > 0$. Tada je duljina druge stranice pravokutnika jednaka $\frac{P}{x}$. Funkcija koja opisuje opseg tog pravokutnika je

$$y = 2\left(x + \frac{P}{x}\right). \tag{3.62}$$

Iz (3.62) slijedi

$$2x^2 - yx + 2P = 0. \tag{3.63}$$

Kako je (3.63) kvadratna jednadžba, ona ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff y^2 - 16P \geq 0 \iff (y + 4\sqrt{P})(y - 4\sqrt{P}) \geq 0$$
$$\iff y \in \langle -\infty, -4\sqrt{P}] \cup [4\sqrt{P}, +\infty\rangle.$$

Budući da opseg pravokutnika ne može biti negativna vrijednost, zaključujemo da y poprima vrijednosti iz skupa $[4\sqrt{P}, +\infty\rangle$. Dakle, najmanji opseg danog pravokutnika je $4\sqrt{P}$, a nas zanima za koji x se to postiže.

$$2\left(x + \frac{P}{x}\right) = 4\sqrt{P} \iff x^2 - 2\sqrt{P}x + P = 0 \iff (x - \sqrt{P})^2 = 0 \iff x = \sqrt{P}.$$

Kako se najmanji opseg postiže za $x = \sqrt{P}$, odnosno $P = x^2$, zaključujemo da od svih pravokutnika zadane površine P, najmanji opseg ima kvadrat sa stranicom duljine x.

Zadatak 3.12. *Broj 36 rastavite na dva faktora tako da zbroj tih faktora bude najmanji, odnosno najveći.*

Rješenje. Ako jedan faktor broja 36 označimo sa x, tada je drugi faktor jednak $\frac{36}{x}$. Uočimo da su faktori jednakog predznaka, ili su oba negativna ili su oba pozitivna. Funkcija koja opisuje zbroj tih faktora je

$$y = x + \frac{36}{x}. \tag{3.64}$$

Iz (3.64) slijedi

$$x^2 - yx + 36 = 0. \tag{3.65}$$

Jednadžba (3.65) je kvadratna pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$.

$$D \geq 0 \iff y^2 - 144 \geq 0 \iff (y + 12)(y - 12) \geq 0 \iff y \in \langle -\infty, -12] \cup [12, +\infty\rangle.$$

Ako promatramo slučaj kada su oba faktora negativna, tada je i y negativan pa je $y \in \langle -\infty, -12]$. Tada je -12 lokalni maksimum, a on se postiže za $x = -6$. Ako promatramo slučaj kada su oba faktora pozitivna, tada je i y pozitivan pa je $y \in [12, +\infty\rangle$. Tada je 12 lokalni minimum, a on se potiže za $x = 6$. Dakle, kada 36 rastavimo na dva faktora -6, tada će njihov zbroj biti najmanji, dok će zbroj biti najveći onda kada ga rastavimo na dva faktora 6.

Zadatak 3.13 (Državno natjecanje iz matematike u RH, 2009. godina, 4. razred, B varijanta)**.** *Koliki su minimum i maksimum funkcije*

$$\frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}? \tag{3.66}$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ *funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?*

Rješenje. Uočimo prvo da nazivnik možemo zapisati u obliku $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, odakle zaključujemo da je domena funkcije skup $\mathbb{R}$. Iz (3.66) slijedi

$$(1 - y)\sin^2 x - (1 + y)\sin x + (1 - y) = 0. \tag{3.67}$$

Za $y \neq 1$ jednadžba (3.67) je kvadratna (po $\sin x$) pa ima realno rješenje ako i samo ako je $D \geq 0$, tj.

$$D \geq 0 \iff (1 + y)^2 - 4(1 - y)^2 \geq 0 \iff 3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \iff y \in \left[\frac{1}{3}, 3\right].$$

Uvrštavanjem $y = 1$ u jednadžbu (3.67) dobivamo $\sin x = 0$ što znači da jednadžba ima rješenje po $\sin x$ za svaki $y \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Prema tome, minimum funkcije je $\frac{1}{3}$, a maksimum 3. Uvrstimo li $y = \frac{1}{3}$ u (3.67) dobivamo

$$\frac{2}{3}\sin^2 x - \frac{4}{3}\sin x + \frac{2}{3} = 0 \iff (\sin x - 1)^2 = 0 \iff \sin x = 1.$$

Budući da je $x = \frac{\pi}{2}$ jedini $x \in [0, 2\pi]$ koji zadovoljava tu jednadžbu, zaključujemo da funkcija na $[0, 2\pi]$ postiže minimum za $x = \frac{\pi}{2}$. Analogno za $y = 3$ dobivamo

$$-2\sin^2 x - 4\sin x - 2 = 0 \iff (\sin x + 1)^2 = 0 \iff \sin x = -1.$$

Budući da je $x = \frac{3\pi}{2}$ jedini $x \in [0, 2\pi]$ koji zadovoljava tu jednadžbu, zaključujemo da funkcija na $[0, 2\pi]$ postiže maksimum za $x = \frac{3\pi}{2}$.

Poglavlje 4

Metoda rješenja parne kratnosti

4.1 O metodi

Neka je $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ domena funkcije $y = f(x)$ i neka je f neprekidna na otvorenom skupu $I \subseteq \mathcal{D}$. Metoda rješenja parne kratnosti temelji se na tome da funkcija $y = f(x)$ u točki $x_0 \in I$ postiže lokalni ekstrem y_0 ako i samo ako je $x = x_0$ rješenje parne kratnosti jednadžbe $f(x) - y_0 = 0$.

Naime, ako je $x = x_0$ rješenje parne kratnosti jednadžbe $f(x) - y_0 = 0$, tada $f(x)$ možemo zapisati kao

$$f(x) = (x - x_0)^{2k} g(x), \quad g(x_0) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$f'(x) = 2k(x - x_0)^{2k-1} g(x) + (x - x_0)^{2k} g'(x),$$

što kraće možemo zapisati kao

$$f'(x) = (x - x_0)^{2k-1} h(x), \quad h(x_0) \neq 0.$$

Kako je $f'(x_0) = 0$, to je x_0 stacionarna točka funkcije f. Znamo i da graf funkcije h u točki x_0 ne siječe os apscisu jer je $h(x_0) \neq 0$. To znači da postoji $\varepsilon > 0$ takav da su vrijednosti funkcije h na intervalima $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ i $\langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$ istog predznaka. Lako se vidi da je $x - x_0 < 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ pa je onda i $(x - x_0)^{2k-1} < 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ jer je eksponent $2k - 1$ neparan broj. S druge strane, $x - x_0 > 0$ za svaki $x \in \langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$ pa je onda i $(x - x_0)^{2k-1} > 0$ za svaki $x \in \langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$. Iz toga slijedi da su vrijednosti funkcije f' na intervalima $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ i $\langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$ različitog predznaka. Dakle, $f'(x_0) = 0$ i f' mijenja predznak u okolini točke x_0 pa slijedi da funkcija f u točki x_0 postiže lokalni ekstrem $y_0 = f(x_0)$.

Obratno, ako funkcija $y = f(x)$ u točki $x_0 \in I$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = f(x_0)$ tada vrijedi $f'(x_0) = 0$ te postoji neki $\varepsilon_1 > 0$ takav da funkcija f' na intervalima $\langle x_0 - \varepsilon_1, x_0\rangle$ i $\langle x_0, x_0 + \varepsilon_1\rangle$ poprima vrijednosti suprotnog predznaka. Kako je $f'(x_0) = 0$, funkciju f' možemo zapisati kao

$$f'(x) = (x - x_0)^n g(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad g(x_0) \neq 0.$$

Analogno kao i za funkciju h, iz $g(x_0) \neq 0$ slijedi da postoji $\varepsilon_2 > 0$ takav da su vrijednosti funkcije g na intervalima $\langle x_0 - \varepsilon_2, x_0\rangle$ i $\langle x_0, x_0 + \varepsilon_2\rangle$ istog predznaka. Neka je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tada funkcija g na intervalima $\langle x_0 - \varepsilon, x_0\rangle$ i $\langle x_0, x_0 + \varepsilon\rangle$ poprima vrijednosti istog predznaka dok funkcija f' na istim intervalima poprima vrijednosti suprotnog predznaka. Prema tome, izraz $(x - x_0)^n$ mijenja predznak na tim intervalima pa zaključujemo da je n neparan, tj. $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. To pak povlači da je funkcija f oblika

$$f(x) = (x - x_0)^{2k} h(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad h(x_0) \neq 0.$$

Kako je $f(x_0) = y_0$, to je $c = y_0$ pa dobivamo

$$f(x) = (x - x_0)^{2k} h(x) + y_0.$$

To je ekvivalentno sa

$$f(x) - y_0 = (x - x_0)^{2k} h(x),$$

što znači da je $x = x_0$ rješenje parne kratnosti jednadžbe $f(x) - y_0 = 0$. U nastavku ćemo opisati dva načina primjene ove metode.

1. način. Izračunamo lokalni ekstrem y_0 funkcije $y = f(x)$, odnosno odredimo realan broj y_0 takav da jednadžba

$$f(x) - y_0 = 0 \tag{4.1}$$

ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Zatim rješavamo jednadžbu (4.1) po x kako bismo odredili točku x_0 u kojoj funkcija postiže vrijednost y_0. Na kraju još trebamo odrediti je li y_0 lokalni minimum ili maksimum, a to možemo na temelju predznaka razlike $f(x) - y_0$ u okolini točke x_0. Naime, ako je ta razlika negativna tada je $f(x) \leq y_0$ za svaki x iz okoline točke x_0 pa je y_0 lokalni maksimum, a ako je ta razlika pozitivna tada je $f(x) \geq y_0$ za svaki x iz okoline točke x_0 pa je y_0 lokalni minimum. Ako je $f(x) \leq y_0$, odnosno $f(x) \geq y_0$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, onda funkcija u točki x_0 postiže globalni minimum, odnosno globalni maksimum y_0. Budući da smo mi gledali samo $x_0 \in I$, a kandidati za točke globalnih ekstrema su i rubovi domene, na kraju provjeravamo i vrijednosti funkcije u tim točkama.

2. način. Izračunamo vrijednost x_0 za koju jednadžba

$$f(x) - f(x_0) = 0 \tag{4.2}$$

ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Zatim izračunamo lokalni ekstrem $y_0 = f(x_0)$. Na kraju odredimo je li y_0 lokalni minimum ili maksimum na isti način kao i u prvom slučaju te provjerimo vrijednosti funkcije u rubovima domene kako bismo provjerili postiže li funkcija globalne ekstreme u nekima od njih. Ovaj način je vrlo efikasan kada izraz $f(x) - f(x_0)$ možemo zapisati u obliku

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)F(x) \tag{4.3}$$

ili

$$f(x) - f(x_0) = P(x)Q(x). \tag{4.4}$$

Ako je $F(x_0) = 0$ ili $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, tada je $x = x_0$ višestruko rješenje jednadžbe (4.2). No, nas zanima kada će $x = x_0$ biti rješenje parne kratnosti. To je onda kada je $x = x_0$ nultočka neparne kratnosti funkcije F ili ako je zbroj kratnosti nultočke $x = x_0$ funkcija P i Q paran broj.

Jedan tip funkcija kod kojih možemo primijeniti i prvi i drugi način su funkcije oblika

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}, \tag{4.5}$$

gdje su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ realne konstante. Prirodna domena tih funkcija je $\{x \in \mathbb{R} : a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0\}$.

1. način. Prvo odredimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} - y_0 = 0, \tag{4.6}$$

odnosno

$$(a_1 - a_2y_0)x^2 + (b_1 - b_2y_0)x + (c_1 - c_2y_0) = 0 \tag{4.7}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$. To je moguće jedino ako je (4.7) kvadratna jednadžba s dvostrukim realnim rješenjem, odnosno ako je $a_1 - a_2y_0 \neq 0$ i diskriminanta $D = 0$. Dakle, rješavamo jednadžbu

$$(b_1 - b_2y_0)^2 - 4(a_1 - a_2y_0)(c_1 - c_2y_0) = 0 \tag{4.8}$$

po y_0, pri čemu je $a_1 - a_2y_0 \neq 0$. Ako jednadžba (4.8) nema realnih rješenja, tada funkcija (4.5) nema lokalnih ekstrema. Ako jednadžba (4.8) ima jedno realno rješenje, tada ono predstavlja lokalni minimum ili maksimum, a ako ima dva različita realna rješenja, tada jedno rješenje predstavlja lokalni minimum, dok drugo rješenje predstavlja lokalni maksimum. Nakon što znamo y_0, riješimo jednadžbu $f(x_0) = y_0$, uz uvjet $a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 \neq 0$, te dobijemo točku x_0 u kojoj funkcija postiže lokalni ekstrem y_0. Zatim na temelju predznaka razlike $f(x) - y_0$ odredimo je li y_0 lokalni minimum ili maksimum te provjerimo jesu li rubovi domene točke globalnih ekstrema.

2. način. Tražimo vrijednost x_0 za koju jednadžba

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} - \frac{a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1}{a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2} = 0, \tag{4.9}$$

odnosno

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2) - (a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) = 0 \tag{4.10}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, pri čemu je $a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 \neq 0$. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x - x_0)[(a_1b_2 - a_2b_1)xx_0 + (a_1c_2 - a_2c_1)(x + x_0) + (b_1c_2 - b_2c_1)] = 0. \tag{4.11}$$

Prema tome, $x = x_0$ će biti dvostruko rješenje jednadžbe (4.11) ako je ujedno i rješenje jednadžbe

$$(a_1b_2 - a_2b_1)xx_0 + (a_1c_2 - a_2c_1)(x + x_0) + (b_1c_2 - b_2c_1) = 0. \tag{4.12}$$

Ako jednadžba (4.12) nema realnih rješenja, tada funkcija (4.5) nema lokalnih ekstrema. Ako jednadžba ima jedno jednostruko realno rješenje, tada x_0 predstavlja točku lokalnog minimuma ili maksimuma, a ako ima dva različita realna rješenja, tada jedno rješenje predstavlja točku lokalnog minimuma, a drugo rješenje predstavlja točku lokalnog maksimuma. Kada znamo točku x_0 lokalnog ekstrema, tada lako izračunamo lokalni ekstrem $y_0 = f(x_0)$. Zatim odredimo je li y_0 lokalni minimum ili maksimum na temelju predznaka razlike $f(x) - y_0$ i provjerimo jesu li rubovi domene točke globalnih ekstrema.

4.2 Primjeri

Primjer 4.1. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}.$$

Rješenje. 1. način. Tražimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1} - y_0 = 0$, odnosno

$$(1 - y_0)x^2 + 2(3 + y_0)x + (8 - y_0) = 0 \tag{4.13}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, pri čemu je $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zbog prirodne domene funkcije. To je moguće jedino ako je (4.13) kvadratna jednadžba kojoj je diskriminanta jednaka nuli, tj. ako je $y_0 \neq 1$ i $D = 0$. Kako je

$$D = 0 \iff 4(3+y_0)^2 - 4(1-y_0)(8-y_0) = 0 \iff 60y_0 + 4 = 0 \iff y_0 = -\frac{1}{15},$$

zaključujemo da je $-\frac{1}{15}$ lokalni ekstrem zadane funkcije. Uvrštavanjem $y_0 = -\frac{1}{15}$ u jednadžbu (4.13) dobivamo:

$$\frac{16}{15}x^2 + \frac{88}{15}x + \frac{121}{15} = 0 \iff \left(x + \frac{11}{4}\right)^2 = 0 \iff x + \frac{11}{4} = 0 \iff x = -\frac{11}{4}.$$

To znači da funkcija u točki $x_0 = -\frac{11}{4}$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = -\frac{1}{15}$. Budući da je

$$f(x) - \left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1} + \frac{1}{15} = \frac{\left(x+\frac{11}{4}\right)^2}{15(x-1)^2} \geq 0,$$

slijedi da je $f(x) \geq -\frac{1}{15}$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pa je $-\frac{1}{15}$ globalni minimum zadane funkcije.

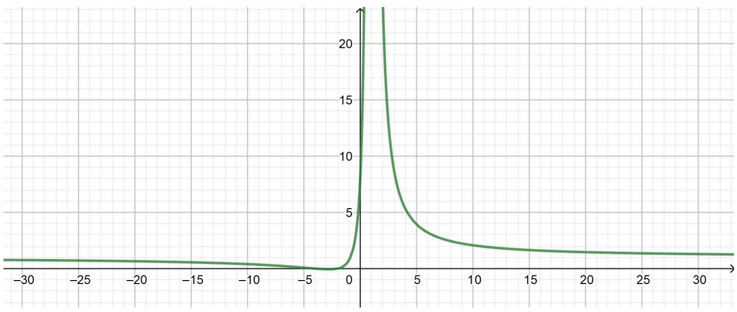
2. način. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ takav da jednadžba $\frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1} - \frac{x_0^2+6x_0+8}{x_0^2-2x_0+1} = 0$, odnosno

$$(x^2+6x+8)(x_0^2-2x_0+1) - (x_0^2+6x_0+8)(x^2-2x+1) = 0 \tag{4.14}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x-x_0)[8xx_0 + 7(x+x_0) - 22] = 0. \tag{4.15}$$

Jednadžba (4.15) imat će dvostruko rješenje $x = x_0$ ako je to i rješenje jednadžbe $8xx_0 + 7(x+x_0) - 22 = 0$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo $8x_0^2 + 14x_0 - 22 = 0$, odnosno $(x_0-1)(x_0+\frac{11}{4}) = 0$. Zbog prirodne domene funkcije slijedi da je $x_0 = -\frac{11}{4}$. Lako izračunamo da je lokalni ekstrem funkcije jednak $y_0 = f(x_0) = f(-\frac{11}{4}) = -\frac{1}{15}$. Kao i ranije, pokaže se da je $f(x) \geq -\frac{1}{15}$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ što znači da je $-\frac{1}{15}$ globalni minimum zadane funkcije.



Slika 4.1: Graf funkcije $y = \frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}$

Primjer 4.2. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x}{x^2+4}.$$

Rješenje. 1. način. Tražimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{x}{x^2+4} - y_0 = 0$, odnosno

$$y_0x^2 - x + 4y_0 = 0 \tag{4.16}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dakle, jednadžba (4.16) mora biti kvadratna jednadžba s diskriminantom $D = 0$. Kako je

$$D = 0 \iff 1 - 16y_0^2 = 0 \iff y_0^2 = \frac{1}{16} \iff (y_0)_{1,2} = \pm\frac{1}{4},$$

zaključujemo da je jedno od toga lokalni minimum, a drugo lokalni maksimum. Uvrštavanjem $y_0 = -\frac{1}{4}$ u jednadžbu (4.16) dobivamo:

$$-\frac{1}{4}x^2 - x - 1 = 0 \iff x^2 + 4x + 4 = 0 \iff (x+2)^2 = 0 \iff x = -2,$$

što znači da funkcija u točki $x_0 = -2$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = -\frac{1}{4}$. Budući da je

$$f(x) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{4} = \frac{x^2+4x+4}{4(x^2+4)} = \frac{(x+2)^2}{4(x^2+4)} \geq 0,$$

slijedi da je $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je $-\frac{1}{4}$ globalni minimum funkcije. Uvrštavanjem $y_0 = \frac{1}{4}$ u jednadžbu (4.16) dobivamo:

$$\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \iff x^24 - x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$$

pa zaključujemo da funkcija u točki $x_0 = 2$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = \frac{1}{4}$. Iz

$$f(x) - \frac{1}{4} = \frac{-x^2+4x-4}{4(x^2+4)} = -\frac{(x+2)^2}{4(x^2+4)} \leq 0,$$

slijedi da je $f(x) \leq \frac{1}{4}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno $\frac{1}{4}$ je globalni maksimum funkcije.

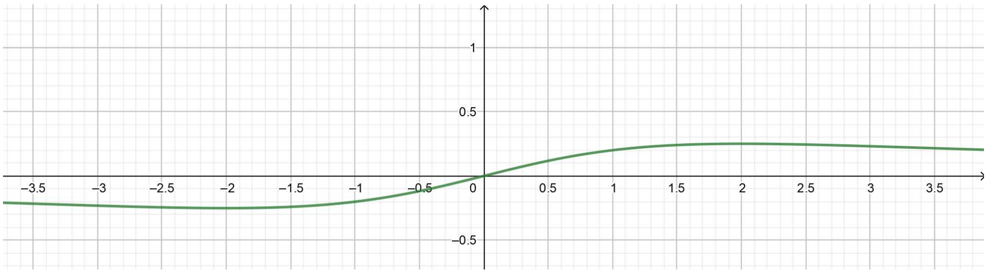
2. način. Zanima nas za koji $x_0 \in \mathbb{R}$ će jednadžba $\frac{x}{x^2+4} - \frac{x_0}{x_0^2+4} = 0$, odnosno

$$x(x_0^2+4) - x_0(x^2+4) = 0 \tag{4.17}$$

imati dvostruko rješenje $x = x_0$. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x - x_0)(4 - xx_0) = 0. \tag{4.18}$$

Jednadžba (4.18) imat će dvostruko rješenje $x = x_0$ ako je to i rješenje jednadžbe $4 - xx_0 = 0$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo $x_0^2 = 4$, odnosno $(x_0)_{1,2} = \pm 2$. Lako izračunamo da je $(y_0)_1 = f(-2) = -\frac{1}{4}$ i $(y_0)_2 = f(2) = \frac{1}{4}$. Zatim se pokazuje kao i u prvom načinu da je $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ i $f(x) \leq \frac{1}{4}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je $-\frac{1}{4}$ globalni minimum funkcije, dok je $\frac{1}{4}$ globalni maksimum funkcije.



Slika 4.2: Graf funkcije $y = \frac{x}{x^2+4}$

Primjer 4.3. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x}{x^2 - 3}.$$

Rješenje. 1. način. Tražimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{x}{x^2-3} - y_0 = 0$, odnosno

$$y_0 x^2 - x - 3y_0 = 0 \tag{4.19}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, pri čemu je $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. To je onda kada je (4.19) kvadratna jednadžba ($y_0 \neq 0$) s diskriminantom $D = 0$. Kako je $D = 1 + 12y_0^2 > 0$ zaključujemo da jednadžba (4.19) nema dvostruko rješenje, a tada ni funkcija nema lokalnih ekstrema.

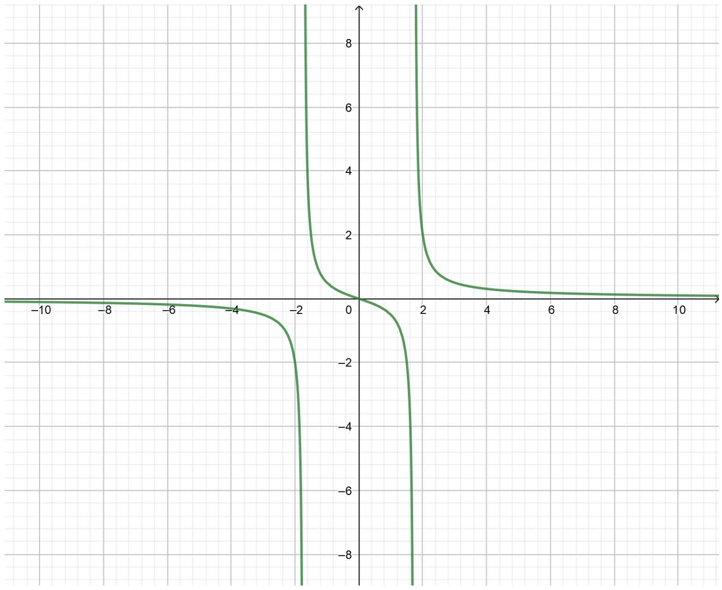
2. način. Zanima nas za koji $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ će jednadžba $\frac{x}{x^2-3} - \frac{x_0}{x_0^2-3} = 0$, odnosno

$$x(x_0^2 - 3) - x_0(x^2 - 3) = 0 \tag{4.20}$$

imati dvostruko rješenje $x = x_0$. Sređivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x - x_0)(3 + xx_0) = 0. \tag{4.21}$$

No, uvrštavanjem $x = x_0$ u jednadžbu $3 + xx_0 = 0$ dobivamo $x_0^2 = -3$, što nije moguće. Prema tome, ne postoji dvostruko rješenje $x = x_0$ jednadžbe (4.21) pa onda ni zadana funkcija nema lokalnih ekstrema.



Slika 4.3: Graf funkcije $y = \frac{x}{x^2-3}$

Primjer 4.4. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{4}{x^2+2}.$$

Rješenje. 1. način. Tražimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{4}{x^2+2} - y_0 = 0$, odnosno

$$y_0 x^2 + (2y_0 - 4) = 0 \tag{4.22}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. To vrijedi ako je $y_0 \neq 0$ i $D = 0$. Budući da je

$$D = 0 \iff 0 - 4(2y_0 - 4) = 0 \iff y_0(y_0 - 2) = 0,$$

očito je $y_0 = 2$ jedino rješenje. Uvrštavanjem $y_0 = 2$ u jednadžbu (4.22) dobivamo $2x^2 = 0$, odnosno $x_0 = 0$. Kako je

$$f(x) - 2 = \frac{4}{x^2+2} - 2 = -\frac{2x^2}{x^2+2} \leq 0,$$

slijedi da je $f(x) \leq 2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno 2 je globalni maksimum zadane funkcije.

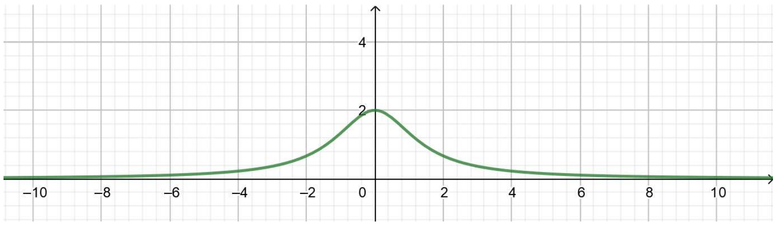
2. način. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji će jednadžba $\frac{4}{x^2+2} - \frac{4}{x_0^2+2} = 0$, odnosno

$$4(x_0^2 + 2) - 4(x^2 + 2) = 0 \tag{4.23}$$

imati dvostruko rješenje $x = x_0$. Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$(x - x_0)(x + x_0) = 0 \tag{4.24}$$

kojoj je $x = x_0$ dvostruko rješenje jedino ako je $x_0 = 0$. Lako izračunamo lokalni ekstrem $y_0 = f(0) = 2$ te kao i ranije pokažemo da je $f(x) \leq 2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, 2 je globalni maksimum zadane funkcije.



Slika 4.4: Graf funkcije $y = \frac{4}{x^2+2}$

Primjer 4.5. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 1}.$$

Rješenje. 1. način. Zanima nas za koji $y_0 \in \mathbb{R}$ jednadžba $\frac{x^2+6x+9}{x-1} - y_0 = 0$, odnosno

$$x^2 + (6 - y_0)x + (9 + y_0) = 0 \tag{4.25}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Jedini uvjet za to je $D = 0$, tj.

$$(6 - y_0)^2 - 4(9 + y_0) = 0 \iff y_0^2 - 16y_0 = 0 \iff y_0(y_0 - 16) = 0,$$

što znači da su $(y_0)_1 = 0$ i $(y_0)_2 = 16$ lokalni ekstremi funkcije. U jednadžbu (4.25) uvrštavamo $y_0 = 0$ i dobivamo $x^2 + 6x + 9 = 0$, odnosno $(x + 3)^2 = 0$ što znači da funkcija u točki $x_0 = -3$ poprima lokalni ekstrem $y_0 = 0$. Isto tako, ako uvrstimo $y_0 = 16$ dobivamo $x^2 - 10x + 25 = 0$, tj. $(x - 5)^2 = 0$ iz čega zaključujemo da funkcija u točki $x_0 = 5$ poprima lokalni ekstrem $y_0 = 16$. Još nam preostaje odrediti koje od toga je lokalni minimum, odnosno lokalni maksimum. Kako je

$$f(x) - 0 = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 1} = \frac{(x + 3)^2}{x - 1},$$

zaključujemo da je $f(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ i $f(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 1, +\infty\rangle$. Isto tako, iz

$$f(x) - 16 = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 1} - 16 = \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 1} = \frac{(x - 5)^2}{x - 1}$$

slijedi da je $f(x) < 16$ za svaki $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ i $f(x) \geq 16$ za svaki $x \in \langle 1, +\infty\rangle$. Prema tome, $f(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ pa je 0 lokalni maksimum funkcije. Isto tako, $f(x) \geq 16$ za svaki $x \in \langle 1, +\infty\rangle$ pa je 16 lokalni minimum funkcije.

2. način. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ za koji će jednadžba $\frac{x^2+6x+9}{x-1} - \frac{x_0^2+6x_0+9}{x_0-1} = 0$, odnosno

$$(x^2 + 6x + 9)(x_0 - 1) - (x_0^2 + 6x_0 + 9)(x - 1) = 0 \tag{4.26}$$

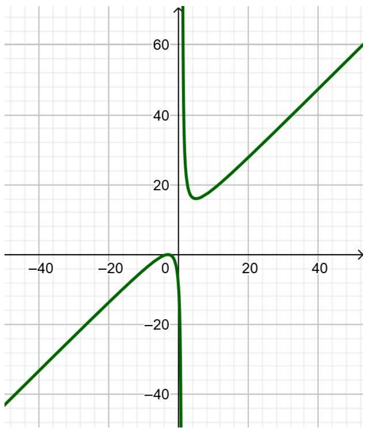
imati dvostruko rješenje $x = x_0$. Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$(x - x_0)[xx_0 - (x + x_0) - 15] = 0. \tag{4.27}$$

Znamo da je $x = x_0$ dvostruko rješenje jednadžbe (4.27) ako je rješenje jednadžbe $xx_0 - (x + x_0) - 15 = 0$. Uvrstimo $x = x_0$ i dobivamo

$$x_0^2 - 2x_0 - 15 = 0 \iff (x_0)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \iff (x_0)_1 = -3,\ (x_0)_2 = 5.$$

Sada izračunamo lokalne ekstreme $(y_0)_1 = f(-3) = 0$ i $(y_0)_2 = f(5) = 16$. Na isti način kao u prvom slučaju pokaže se da je $f(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ pa je 0 lokalni maksimum funkcije i $f(x) \geq 16$ za svaki $x \in \langle 1, +\infty\rangle$ pa je 16 lokalni minimum funkcije.



Slika 4.5: Graf funkcije $y = \frac{x^2+6x+9}{x-1}$

Primjer 4.6. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2}.$$

Rješenje. 1. način. Zanima nas $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{x^2+4x+4}{x^2+2} - y_0 = 0$, odnosno

$$(1 - y_0)x^2 + 4x + (4 - 2y_0) = 0 \tag{4.28}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Da bi to bilo moguće, jednadžba (4.28) mora biti kvadratna i njena diskriminanta treba biti jednaka nuli. Dakle, uvjeti su $y_0 \neq 1$ i $D = 0$, a iz toga slijedi

$$16 - 4(1 - y_0)(4 - 2y_0) = 0 \iff y_0^2 - 3y_0 = 0 \iff y_0(y_0 - 3) = 0,$$

što znači da su $(y_0)_1 = 0$, $(y_0)_2 = 3$ lokalni ekstremi funkcije. Kada u jednadžbu (4.28) uvrstimo $(y_0)_1 = 0$ dobivamo $x^2 + 4x + 4 = 0$, odnosno $(x + 2)^2 = 0$ što znači da je $(x_0)_1 = -2$. Budući da je

$$f(x) - 0 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2} = \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 2} \geq 0,$$

odnosno $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je 0 globalni minimum zadane funkcije. Slično, uvrštavanjem $(y_0)_2 = 3$ u jednadžbu (4.28) dobivamo $x^2 - 2x + 1 = 0$, odnosno $(x - 1)^2 = 0$ što znači da je $(x_0)_2 = 1$. Iz

$$f(x) - 3 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2} - 3 = \frac{-2x^2 + 4x - 2}{x^2 + 2} = -\frac{2(x - 2)^2}{x^2 + 2} \leq 0$$

vidimo da je $f(x) \leq 3$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je 3 globalni maksimum dane funkcije.

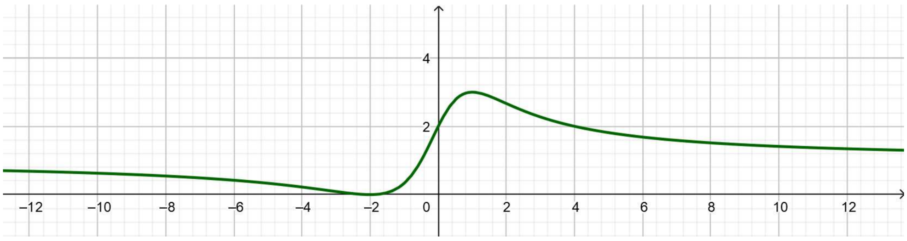
2. način. Zanima nas za koji $x_0 \in \mathbb{R}$ jednadžba $\frac{x^2+4x+4}{x^2+2} - \frac{x_0^2+4x_0+4}{x_0^2+2} = 0$, odnosno

$$(x^2 + 4x + 4)(x_0^2 + 2) - (x_0^2 + 4x_0 + 4)(x^2 + 2) = 0 \tag{4.29}$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo jednadžbu

$$(x - x_0)[2xx_0 + (x + x_0) - 4] = 0. \tag{4.30}$$

Ona će imati dvostruko rješenje $x = x_0$ ako je to i rješenje jednadžbe $2xx_0 + (x + x_0) - 4 = 0$. Uvrstimo $x = x_0$ te dobivamo jednadžbu $2x_0^2 + 2x_0 - 4 = 0$ čija su rješenja $(x_0)_1 = -2$ i $(x_0)_2 = 1$. Slijedi da su lokalni ekstremi $(y_0)_1 = f(-2) = 0$ i $(y_0)_2 = f(1) = 3$. Na kraju pokažemo kao i u prvom slučaju da je $f(x) \geq 0$ i $f(x) \leq 3$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je 0 globalni minimum, a 3 globalni maksimum funkcije.



Slika 4.6: Graf funkcije $y = \frac{x^2+4x+4}{x^2+2}$

U idućim primjerima bi prvi način određivanja ekstrema funkcije bio nepraktičan tako da ćemo u njima koristiti samo drugi način određivanja ekstrema funkcija.

Primjer 4.7. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^4 - 2}{x^4 + 3}.$$

Rješenje. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{x^4-2}{x^4+3} - \frac{x_0^4-2}{x_0^4+3} = 0$, odnosno

$$(x^4 - 2)(x_0^4 + 3) - (x_0^4 - 2)(x^4 + 3) = 0 \tag{4.31}$$

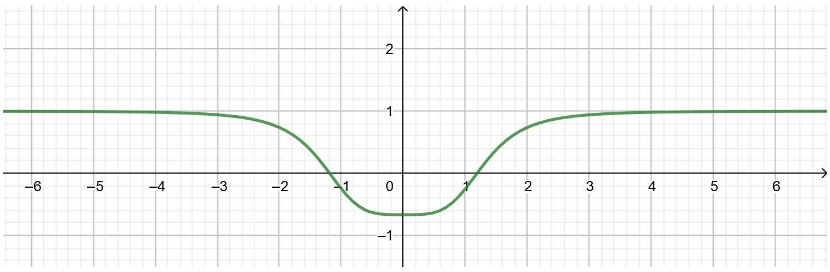
ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo jednadžbu

$$(x - x_0)(x + x_0)(x^2 + x_0^2) = 0. \tag{4.32}$$

Odavde vidimo da će $x = x_0$ biti rješenje parne kratnosti ako je ujedno i rješenje neparne kratnosti jednadžbe $(x + x_0)(x^2 + x_0^2) = 0$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo jednadžbu $4x_0^3 = 0$, odnosno $x_0 = 0$ je trostruko rješenje te jednadžbe. Dakle, zadana funkcija u točki $x_0 = 0$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = f(0) = -\frac{2}{3}$. Kako je

$$f(x) - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{x^4 - 2}{x^4 + 3} + \frac{2}{3} = \frac{5x^2}{3(x^2 + 3)} \geq 0,$$

odnosno $f(x) \geq -\frac{2}{3}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je $-\frac{2}{3}$ globalni minimum funkcije.



Slika 4.7: Graf funkcije $y = \frac{x^4-2}{x^4+3}$

Primjer 4.8. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = -\frac{2x^3}{x^6+1}.$$

Rješenje. Zanima nas za koji $x_0 \in \mathbb{R}$ jednadžba $-\frac{2x^3}{x^6+1} - \left(-\frac{2x_0^3}{x_0^6+1}\right) = 0$, odnosno

$$2x^3(x_0^6+1) - 2x_0^3(x^6+1) = 0 \tag{4.33}$$

ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo jednadžbu

$$(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)(x^3x_0^3 - 1) = 0 \tag{4.34}$$

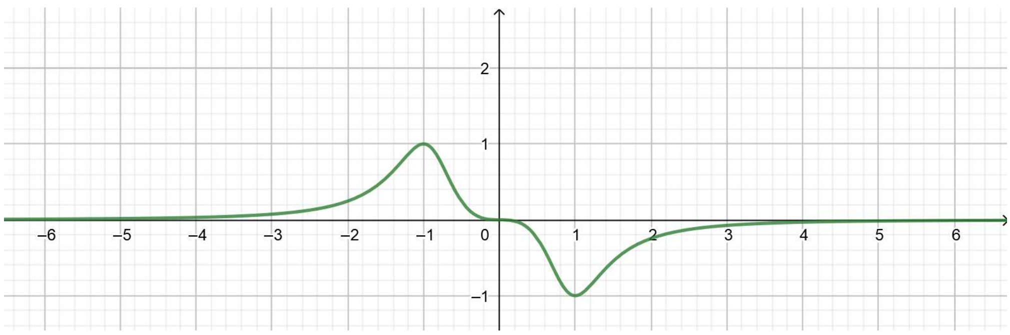
koja ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti ako je to ujedno i rješenje neparne kratnosti jednadžbe $(x^2 + xx_0 + x_0^2)(x^3x_0^3 - 1) = 0$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo jednadžbu $3x_0^2(x^6 - 1) = 0$, odnosno $3x_0^2(x^3 - 1)(x_0^3 + 1) = 0$. Kako $x_0 = 0$ dvostruko (parno) rješenje jednadžbe njega odbacujemo. Osim toga, imamo dva trostruka rješenja $(x_0)_1 = -1$ i $(x_0)_2 = 1$. U tim točkama funkcija postiže lokalne ekstreme $(y_0)_1 = f(-1) = 1$ i $(y_0)_2 = f(1) = -1$. Budući da je

$$f(x) - (-1) = -\frac{2x^3}{x^6+1} + 1 = \frac{x^6 - 2x^3 + 1}{x^6+1} = \frac{(x^3-1)^2}{x^6+1} \geq 0$$

tj. $f(x) \geq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je -1 globalni minimum funkcije. Analogno dobivamo da je

$$f(x) - 1 = -\frac{2x^3}{x^6+1} - 1 = -\frac{x^6 + 2x^3 + 1}{x^6+1} = -\frac{(x^3+1)^2}{x^6+1} \leq 0,$$

tj. $f(x) \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je 1 globalni maksimum funkcije.



Slika 4.8: Graf funkcije $y = -\frac{2x^3}{x^6+1}$

Primjer 4.9. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 5}.$$

Rješenje. Uočimo da je $x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ pa je domena funkcije skup svih $x \in \mathbb{R}$. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{x_0^2 - 3x_0 + 5} = 0$$

ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $x - x_0$ dobivamo jednadžbu

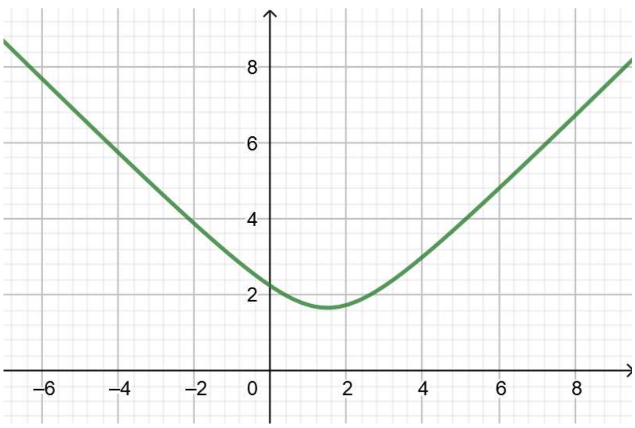
$$(x - x_0)(x + x_0 - 3) = 0 \tag{4.35}$$

koja ima rješenje $x = x_0$ dvostruke kratnosti jedino ako je to rješenje jednadžbe $x + x_0 - 3 = 0$. Uvrstimo $x = x_0$ i dobivamo rješenje $x_0 = \frac{3}{2}$. Dana funkcija u toj točki postiže lokalni ekstrem $y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Odredimo sada predznak razlike $f(x) - \frac{\sqrt{11}}{2}$:

$$f(x) - \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{x^2 - 3x + 5} - \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{2\sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{11}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{11}}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{11}}$$

$$= \frac{4(x^2 - 3x + 5) - 11}{2(2\sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{11})} = \frac{(2x - 3)^2}{2(2\sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{11})} \geq 0.$$

Prema tome, $f(x) \geq \frac{\sqrt{11}}{2}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je $\frac{\sqrt{11}}{2}$ globalni minimum funkcije.



Slika 4.9: Graf funkcije $y = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

Primjer 4.10. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

Rješenje. Budući da je $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$, domena funkcije je skup svih $x \in \mathbb{R}$. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji će jednadžba

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 4x_0 + 5}} = 0,$$

odnosno

$$\sqrt{x_0^2 + 4x_0 + 5} - \sqrt{x^2 + 4x + 5} = 0$$

imati rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Sređivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

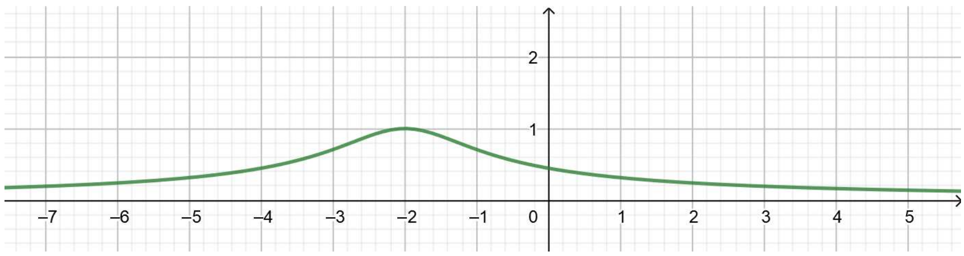
$$(x - x_0)(x + x_0 + 4) = 0 \tag{4.36}$$

kojoj će $x = x_0$ biti dvostruko rješenje ako je rješenje jednadžbe $x + x_0 + 4 = 0$. Nakon uvrštavanja $x = x_0$ dobivamo rješenje $x_0 = -2$. U toj točki zadana funkcija postiže lokalni ekstrem $y_0 = f(-2) = 1$. Budući da je

$$f(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4x + 5}}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}{1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}(1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5})} = \frac{(x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}(1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5})} \geq 0,$$

odnosno $f(x) \geq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je 1 minimum funkcije.



Slika 4.10: Graf funkcije $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Primjer 4.11. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = 2x^2\sqrt{x^2+3}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup svih $x \in \mathbb{R}$. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba

$$2x^2\sqrt{x^2+3} - 2x_0^2\sqrt{x_0^2+3} = 0$$

ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Sređivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x-x_0)(x+x_0)(x^4+x^2x_0^2+x_0^4+3) = 0 \tag{4.37}$$

kojoj će $x = x_0$ biti rješenje parne kratnosti jedino ako je to rješenje neparne kratnosti jednadžbe $(x+x_0)(x^4+x^2x_0^2+x_0^4+3) = 0$. Nakon uvrštavanja $x = x_0$ dobivamo jednadžbu $2x_0(3x_0^4+3) = 0$ čije je jedino rješenje $x_0 = 0$. Prema tome, funkcija postiže lokalni ekstrem $y_0 = f(0) = 0$. Kako je $f(x) - 0 = 2x^2\sqrt{x^2+3} \geq 0$, odnosno $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ zaključujemo da je 0 globalni minimum funkcije.

Primjer 4.12. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}.$$

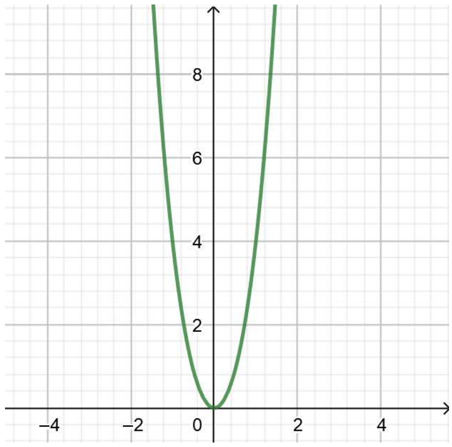
Rješenje. Tražimo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da jednadžba $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} - \left(\frac{x_0^2}{4} + \frac{1}{x_0^2}\right) = 0$, odnosno

$$(x-x_0)(x+x_0)(x^2x_0^2-4) = 0 \tag{4.38}$$

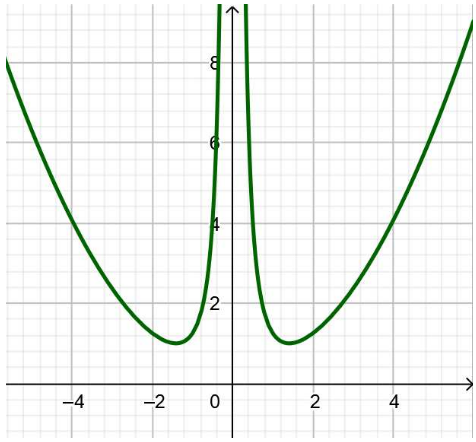
ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. To vrijedi jedino ako je $x = x_0$ rješenje neparne kratnosti jednadžbe $(x+x_0)(x^2x_0^2-4) = 0$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo jednadžbu $2x_0(x_0^2-2)(x_0^2+2) = 0$. Kako je $x_0 \neq 0$ i $x_0^2+2 > 0$, zaključujemo da je jedino rješenje $x_0^2 = 2$, odnosno $(x_0)_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Prema tome, zadana funkcija u točki $(x_0)_1 = -\sqrt{2}$ postiže lokalni ekstrem $(y_0)_1 = f(-\sqrt{2}) = 1$, dok u točki $(x_0)_2 = \sqrt{2}$ postiže lokalni ekstrem $(y_0)_2 = f(\sqrt{2}) = 1$. Kako je

$$f(x) - 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{x^4-4x^2+4}{4x^2} = \frac{(x^2-2)^2}{4x^2} \geq 0,$$

odnosno $f(x) \geq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zaključujemo da je 1 globalni minimum funkcije.



Slika 4.11: Graf funkcije $y = 2x^2\sqrt{x^2+3}$



Slika 4.12: Graf funkcije $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$

4.3 Zadaci

Zadatak 4.1. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{2\sqrt{x^2-1} + x^2}{x^2}.$$

Rješenje. Domena zadane funkcije je skup svih $x \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$. Nakon supstitucije $t = \sqrt{x^2-1}$, $t \in [0, +\infty\rangle$, zadana funkcija glasi

$$y = \frac{t^2+2t+1}{t^2+1}. \tag{4.39}$$

1. način. Zanima nas $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{t^2+2t+1}{t^2+1} - y_0 = 0$, odnosno

$$(1-y_0)t^2 + 2t + (1-y_0) = 0 \tag{4.40}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$, $t_0 \in \langle 0, +\infty\rangle$. To se postiže ako je $y_0 \neq 1$ i $D = 0$:

$$D = 0 \iff 4 - 4(1-y_0)^2 = 0 \iff y_0(y_0-2) = 0 \iff (y_0)_1 = 0,\ (y_0)_2 = 2.$$

Uvrštavanjem $y_0 = 0$ u jednadžbu (4.40) dobivamo:

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \iff (t+1)^2 = 0 \iff t = -1,$$

no znamo da je $t \geq 0$ pa ova jednadžba nema rješenja. Kada u (4.40) uvrstimo $y_0 = 2$ dobivamo:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \iff (t-1)^2 = 0 \iff t = 1,$$

odakle slijedi da funkcija (4.39) u točki $t_0 = 1$ ($(x_0)_{1,2} = \pm\sqrt{2}$) postiže lokalni ekstrem $y_0 = 2$. Budući da je

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1} - 2 = -\frac{(t-1)^2}{t^2 + 1} \leq 0$$

za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$, slijedi da je 2 globalni maksimum funkcije (4.39) pa onda i zadane funkcije. Kako je $t \in [0, +\infty\rangle$, još provjeravamo je li $t = 0$ ($x = 1$) točka globalnog ekstrema. Vrijednost funkcije (4.39) u točki $t = 0$ jednaka je 1 i vrijedi

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1} - 1 = \frac{2t}{t^2 + 1} \geq 0,$$

odnosno $\frac{t^2+2t+1}{t^2+1} \geq 1$ za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$ pa zaključujemo da je 1 globalni minimum funkcije.

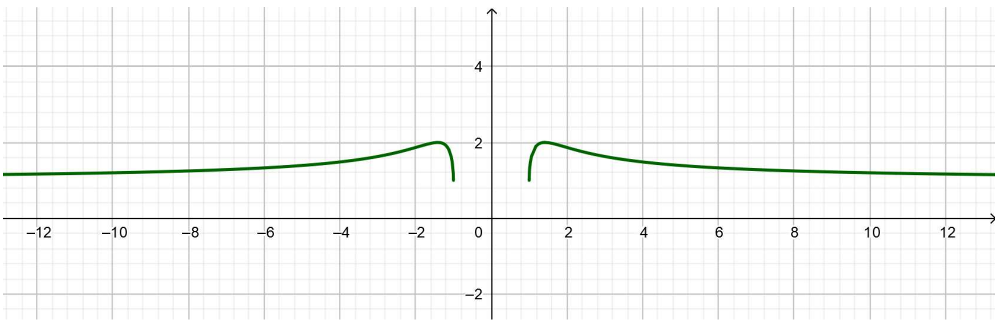
2. način. Zanima nas za koji $t_0 \in \langle 0, +\infty\rangle$ jednadžba $\frac{t^2+2t+1}{t^2+1} - \frac{t_0^2+2t_0+1}{t_0^2+1} = 0$, odnosno

$$(t^2 + 2t + 1)(t_0^2 + 1) - (t_0^2 + 2t_0 + 1)(t^2 + 1) = 0 \tag{4.41}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$. Raspisivanjem i izlučivanjem faktora $t - t_0$ dobivamo jednadžbu

$$(t - t_0)(1 - tt_0) = 0, \tag{4.42}$$

koja će imati dvostruko rješenje $t = t_0$ ako je to rješenje jednadžbe $1 - tt_0 = 0$. Uvrstimo $t = t_0$ i dobivamo $t_0^2 = 1$, što znači da je $t_0 = 1$ ($(x_0)_{1,2} = \pm\sqrt{2}$). Rješenje $t_0 = -1$ odbacujemo zbog uvjeta $t_0 > 0$. Sada lako izračunamo da je lokalni ekstrem $y_0 = \frac{t_0^2+2t_0+1}{t_0^2+1} = 2$. Kao i ranije, pokaže se da je $\frac{t^2+2t+1}{t^2+1} \leq 2$ za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$ pa je 2 globalni maksimum funkcije. Osim toga, funkcija u točki $t = 0$ ($x = 1$) postiže vrijednost 1 te je $\frac{t^2+2t+1}{t^2+1} \geq 1$ za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$ pa zaključujemo da je 1 globalni minimum funkcije.



Slika 4.13: Graf funkcije $y = \frac{2\sqrt{x^2-1}+x^2}{x^2}$

Zadatak 4.2. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{1 + \sin^2 x}{2 \sin x}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup svih $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Nakon supstitucije $t = \sin x$, $t \in [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$, zadana funkcija glasi

$$y = \frac{t^2 + 1}{2t}. \tag{4.43}$$

1. način. Zanima nas za koji $y_0 \in \mathbb{R}$ jednadžba $\frac{t^2+1}{2t} - y_0 = 0$, odnosno

$$t^2 - 2y_0 t + 1 = 0 \tag{4.44}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$. To je onda kada je diskriminanta jednaka nuli:

$$D = 0 \iff 4y_0^2 - 4 = 0 \iff y_0^2 = 1 \iff (y_0)_1 = -1,\ (y_0)_2 = 1.$$

Uvrštavanjem $y_0 = -1$ u jednadžbu (4.44) dobivamo

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \iff (t + 1)^2 = 0 \iff t = -1,$$

što znači da funkcija u točki $t_0 = -1$ ($x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) postiže lokalni ekstrem -1. Kako je

$$\frac{t^2 + 1}{2t} - (-1) = \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} = \frac{(t + 1)^2}{2t},$$

zaključujemo da je $\frac{t^2+1}{2t} > -1$ za svaki $t \in \langle 0, 1]$ i $\frac{t^2+1}{2t} \leq -1$ za svaki $t \in [-1, 0\rangle$. Uvrštavanjem $y_0 = 1$ u jednadžbu (4.44) dobivamo

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \iff (t - 1)^2 = 0 \iff t = 1,$$

što znači da funkcija u točki $t_0 = 1$ ($x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) postiže lokalni ekstrem 1. Iz

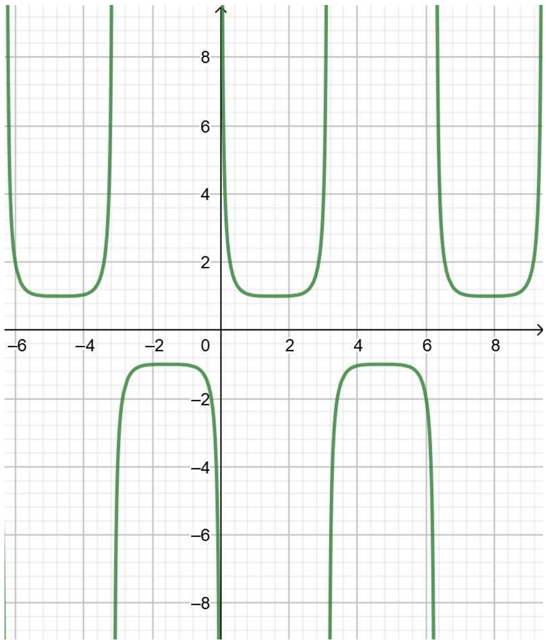
$$\frac{t^2 + 1}{2t} - 1 = \frac{t^2 - 2t + 1}{2t} = \frac{(t - 1)^2}{2t}$$

zaključujemo da je $\frac{t^2+1}{2t} \geq 1$ za svaki $t \in \langle 0, 1]$ i $\frac{t^2+1}{2t} < 1$ za svaki $t \in [-1, 0\rangle$. Prema tome, $\frac{t^2+1}{2t} \leq -1$ za svaki $t \in [-1, 0\rangle$ i $\frac{t^2+1}{2t} \geq 1$ za svaki $t \in \langle 0, 1]$ pa je 1 lokalni minimum, a -1 lokalni maksimum funkcije.

2. način. Želimo odrediti $t_0 \in [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$ takav da jednadžba $\frac{t^2+1}{2t} - \frac{t_0^2+1}{2t_0} = 0$, odnosno

$$(t - t_0)(tt_0 - 1) = 0 \tag{4.45}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$. To je moguće jedino ako je to rješenje jednadžbe $tt_0 - 1 = 0$. Uvrštavanjem $t = t_0$ dobivamo $t_0^2 = 1$, odnosno $(t_0)_{1,2} = \pm 1$ ($(x_0)_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(x_0)_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Sada izračunamo da funkcija u točki $t_0 = -1$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = -1$, a u točki $t_0 = 1$ postiže lokalni ekstrem $y_0 = 1$. Kao i ranije, pokaže se da je $\frac{t^2+1}{2t} \leq -1$ za svaki $t \in [-1, 0\rangle$ i $\frac{t^2+1}{2t} \geq 1$ za svaki $t \in \langle 0, 1]$ pa je 1 lokalni minimum, a -1 lokalni maksimum funkcije.



Slika 4.14: Graf funkcije $y = \frac{1+\sin^2 x}{2\sin x}$

Zadatak 4.3. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{3\ln x}{4\ln^2 x + 1}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup svih $x \in \langle 0, +\infty\rangle$. Nakon supstitucije $t = \ln x$, $t \in \mathbb{R}$, zadana funkcija se svodi na

$$y = \frac{3t}{4t^2 + 1}. \tag{4.46}$$

1. način. Tražimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{3t}{4t^2+1} - y_0 = 0$, odnosno

$$4y_0 t^2 - 3t + y_0 = 0 \tag{4.47}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$. To je moguće uz uvjete $y_0 \neq 0$ i $D = 0$:

$$D = 0 \iff 9 - 16y_0^2 = 0 \iff y_0^2 = \frac{9}{16} \iff (y_0)_{1,2} = \pm\frac{3}{4}.$$

Uvrštavanjem $(y_0)_1 = -\frac{3}{4}$ u jednadžbu (4.47) dobivamo:

$$-3t^2 - 3t - \frac{3}{4} = 0 \iff t^2 + t + 4 = 0 \iff \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff t = -\frac{1}{2},$$

dok uvrštavanjem $(y_0)_2 = \frac{3}{4}$ dobivamo:

$$3t^2 - 3t + \frac{3}{4} = 0 \iff t^2 - t + 4 = 0 \iff \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, funkcija (4.46) u točkama $(t_0)_1 = -\frac{1}{2}$ i $(t_0)_2 = \frac{1}{2}$ ($(x_0)_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $(x_0)_2 = \sqrt{e}$) postiže lokalne ekstreme $(y_0)_1 = -\frac{3}{4}$ i $(y_0)_2 = \frac{3}{4}$. Budući da za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{3t}{4t^2 + 1} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{12t^2 + 12t + 3}{4(4t^2 + 1)} = \frac{3\left(t + \frac{1}{2}\right)^2}{(4t^2 + 1)} \geq 0$$

i

$$\frac{3t}{4t^2 + 1} - \frac{3}{4} = -\frac{12t^2 - 12t + 3}{4(4t^2 + 1)} = -\frac{3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2}{(4t^2 + 1)} \leq 0,$$

slijedi da je $-\frac{3}{4}$ globalni minimum, dok je $\frac{3}{4}$ globalni maksimum funkcije.

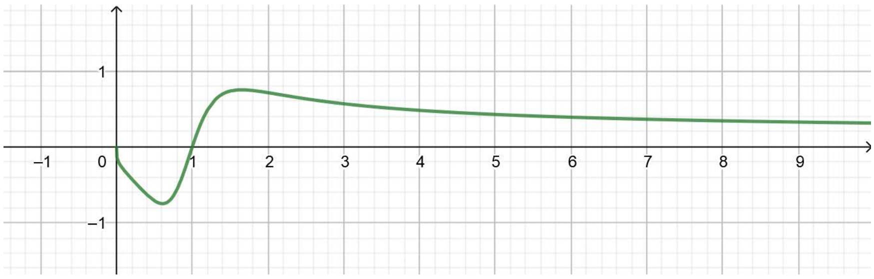
2. način. Želimo odrediti $t_0 \in \mathbb{R}$ za koji jednadžba $\frac{3t}{4t^2+1} - \frac{3t_0}{4t_0^2+1} = 0$, odnosno

$$3t(4t_0^2 + 1) - 3t_0(4t^2 + 1) = 0, \tag{4.48}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$. Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$(t - t_0)(1 - 4tt_0) = 0 \tag{4.49}$$

koja ima dvostruko rješenje $t = t_0$ jedino ako je to rješenje jednadžbe $1 - 4tt_0 = 0$. Uvrstimo $t = t_0$ i dobivamo $t_0^2 = \frac{1}{4}$, odnosno $(t_0)_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ ($(x_0)_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $(x_0)_2 = \sqrt{e}$). Uvrstimo u (4.46) i dobijemo lokalne ekstreme $(y_0)_{1,2} = \pm\frac{3}{4}$. Analogno kao i u prvom načinu pokaže se da je $\frac{3t}{4t^2+1} \geq -\frac{3}{4}$ i $\frac{3t}{4t^2+1} \leq \frac{3}{4}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ pa je $-\frac{3}{4}$ globalni minimum, a $\frac{3}{4}$ globalni maksimum funkcije.



Slika 4.15: Graf funkcije $y = \frac{3 \ln x}{4 \ln^2 x + 1}$

Zadatak 4.4. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{2\sqrt{x} - 1}{3x}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup svih $x \in \langle 0, +\infty\rangle$. Nakon supstitucije $t = \sqrt{x}$, $t \in \langle 0, +\infty\rangle$, zadana funkcija glasi

$$y = \frac{2t - 1}{3t^2}. \tag{4.50}$$

1. način. Želimo naći $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba $\frac{2t-1}{3t^2} - y_0 = 0$, odnosno

$$3y_0 t^2 - 2t + 1 = 0 \tag{4.51}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$, $t_0 > 0$. To je moguće uz uvjete $y_0 \neq 0$ i $D = 0$:

$$D = 0 \iff 4 - 12y_0 = 0 \iff y_0 = \frac{1}{3}.$$

Uvrštavanjem $y_0 = \frac{1}{3}$ u jednadžbu (4.51) dobivamo:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \iff (t-1)^2 = 0 \iff t = 1,$$

što znači da funkcija (4.50) u točki $t_0 = 1$ ($x_0 = 1$) postiže lokalni ekstrem $y_0 = \frac{1}{3}$. Kako je

$$\frac{2t-1}{3t^2} - \frac{1}{3} = -\frac{(t-1)^2}{3t^2} \leq 0$$

za svaki $t \in \langle 0, +\infty\rangle$, to je $\frac{1}{3}$ globalni maksimum zadane funkcije.

2. način. Tražimo $t_0 > 0$ takav da jednadžba $\frac{2t-1}{3t^2} - \frac{2t_0-1}{3t_0^2} = 0$, odnosno

$$3t_0^2(2t-1) - 3t^2(2t_0 - 1) = 0 \tag{4.52}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$. Sređivanjem dobivamo

$$(t - t_0)(t + t_0 - 2tt_0) = 0, \tag{4.53}$$

a ta jednadžba ima dvostruko rješenje $t = t_0$ ako je to rješenje jednadžbe $t + t_0 - 2tt_0 = 0$. Uvrstimo $t = t_0$ i dobivamo $t_0(1 - t_0) = 0$. Kako je $t_0 > 0$, slijedi da je jedino rješenje $t_0 = 1$ ($x_0 = 1$). Iz (4.50) izračunamo lokalni ekstrem $y_0 = \frac{2t_0-1}{3t_0^2} = \frac{1}{3}$. Kao i ranije, pokaže se da je $\frac{2t-1}{3t^2} \leq \frac{1}{3}$ za svaki $t \in \langle 0, +\infty\rangle$ pa je $\frac{1}{3}$ globalni maksimum funkcije.

Zadatak 4.5. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}.$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju $t = e^x$, $t \in \langle 0, +\infty\rangle$, nakon koje zadana funkcija postaje

$$y = \frac{t-1}{t^2}. \tag{4.54}$$

1. način. Tražimo $y_0 \in \mathbb{R}$ za koji jednadžba $\frac{t-1}{t^2} - y_0 = 0$, odnosno

$$y_0t^2 - t + 1 = 0 \tag{4.55}$$

ima dvostruko rješenje $t = t_0$, $t_0 > 0$. To je moguće uz uvjete $y_0 \neq 0$ i $D = 0$:

$$D = 0 \iff 1 - 4y_0 = 0 \iff y_0 = \frac{1}{4}.$$

Uvrštavamo $y_0 = \frac{1}{4}$ u jednadžbu (4.55) pa dobivamo:

$$\frac{1}{4}t^2 - t + 1 = 0 \iff t^2 - 4t + 4 = 0 \iff (t-2)^2 = 0 \iff t = 2.$$

Prema tome, funkcija (4.54) u točki $t_0 = 2$ ($x_0 = \ln 2$) postiže lokalni ekstrem $y_0 = \frac{1}{4}$. Kako je

$$\frac{t-1}{t^2} - \frac{1}{4} = -\frac{(t-2)^2}{t^2} \leq 0$$

za svaki $t \in \langle 0, +\infty\rangle$, zaključujemo da je $\frac{1}{4}$ globalni maksimum zadane funkcije.

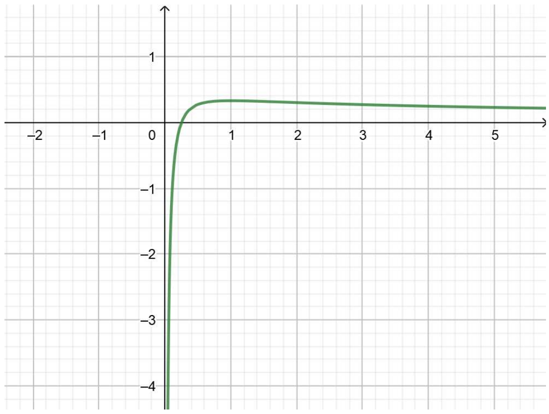
2. način. Želimo odrediti $t_0 > 0$ takav da jednadžba $\frac{t-1}{t^2} - \frac{t_0-1}{t_0^2} = 0$, odnosno

$$t_0^2(t-1) - t^2(t_0 - 1) = 0 \tag{4.56}$$

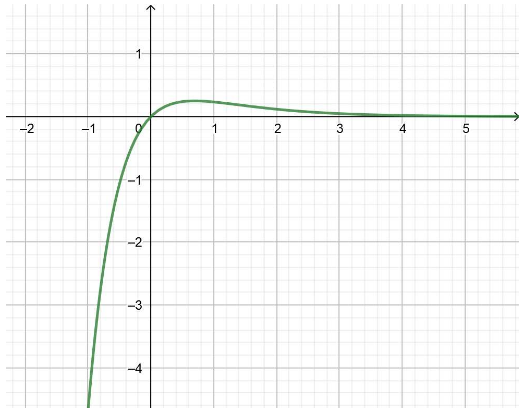
ima dvostruko rješenje $t = t_0$. Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$(t - t_0)(t + t_0 - tt_0) = 0 \tag{4.57}$$

koja će imati dvostruko rješenje $t = t_0$ jedino ako je to rješenje jednadžbe $t + t_0 - tt_0 = 0$. Uvrstimo $t = t_0$ i dobivamo $t_0(2 - t_0) = 0$. Kako je $t_0 > 0$, slijedi da je jedino rješenje $t_0 = 2$ ($x_0 = \ln 2$). Iz (4.54) slijedi da je lokalni ekstrem $y_0 = \frac{t_0-1}{t_0^2} = \frac{1}{4}$. Isto kao i u prvom načinu pokažemo da je $\frac{t-1}{t^2} \leq \frac{1}{4}$ za svaki $t \in \langle 0, +\infty\rangle$ pa je $\frac{1}{4}$ globalni maksimum funkcije.



Slika 4.16: Graf funkcije $y = \frac{2\sqrt{x}-1}{3x}$



Slika 4.17: Graf funkcije $y = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$

Zadatak 4.6. *U kuglu polumjera R upisan je valjak najveće površine plašta P. Odredite visinu i polumjer baze valjka.*

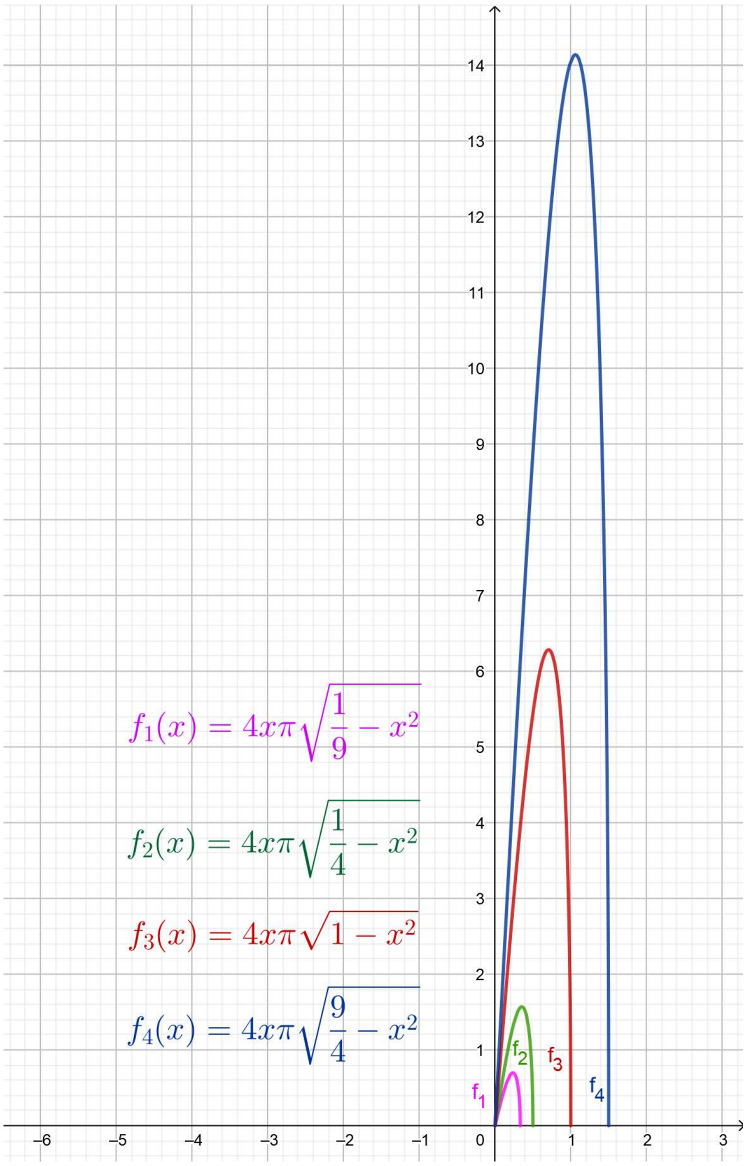
Rješenje. Ovaj je zadatak isti kao i zadatak 2.4, ali ćemo ga sada riješiti na drugi način. Uvodimo iste oznake: r za polumjer baze valjka i h za visinu valjka. Prema ranije pokazanom vrijedi $4r^2 + h^2 = 4R^2$, odakle slijedi $h = \sqrt{4R^2 - 4r^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Površina plašta valjka dana je formulom $P = 2r\pi h$ pa nakon uvrštavanja dobivamo $P = 4r\pi\sqrt{R^2 - r^2}$. Budući da je upisan valjak najveće površine plašta P, nas zanima za koji $r > 0$ funkcija P postiže maksimum. Dakle, tražimo $r_0 > 0$ takav da jednadžba

$$4r\pi\sqrt{R^2 - r^2} - 4r\pi\sqrt{R^2 - r_0^2} = 0$$

ima dvostruko rješenje $r = r_0$. Raspisivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(r - r_0)(r + r_0)[R^2 - (r^2 + r_0^2)] = 0$$

koja ima dvostruko rješenje $r = r_0$ ako je to rješenje jednadžbe $(r + r_0)[R^2 - (r^2 + r_0^2)] = 0$. Uvrštavanjem $r = r_0$ dobivamo $2r_0(R^2 - 2r_0^2) = 0$, no kako je $r_0 > 0$, jedino rješenje je $r_0 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Dakle, polumjer baze upisanog valjka jednak je $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Uvrstimo taj r u formulu za h i dobivamo $h = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{2}$. Prema tome, visina upisanog valjka je $h = R\sqrt{2}$.



Slika 4.18: Graf funkcije $f(x) = 4x\pi\sqrt{R^2 - x^2}$ za $R = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ i $x > 0$

Zadatak 4.7. *Odredite ekstremne vrijednosti funkcije*

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2}.$$

Rješenje. Domena funkcije je skup svih $x \in \mathbb{R}$ pa tražimo $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji jednadžba

$$\sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2} - \sqrt[3]{(x_0^2 - a^2)^2} = 0$$

ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti. Sređivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x - x_0)(x + x_0)(x^2 + x_0^2 - 2a^2) = 0 \tag{4.58}$$

koja ima rješenje $x = x_0$ parne kratnosti ako je to rješenje neparne kratnosti jednadžbe $(x + x_0)(x^2 + x_0^2 + 2a^2) = 0$. Uvrstimo $x = x_0$ te dobivamo

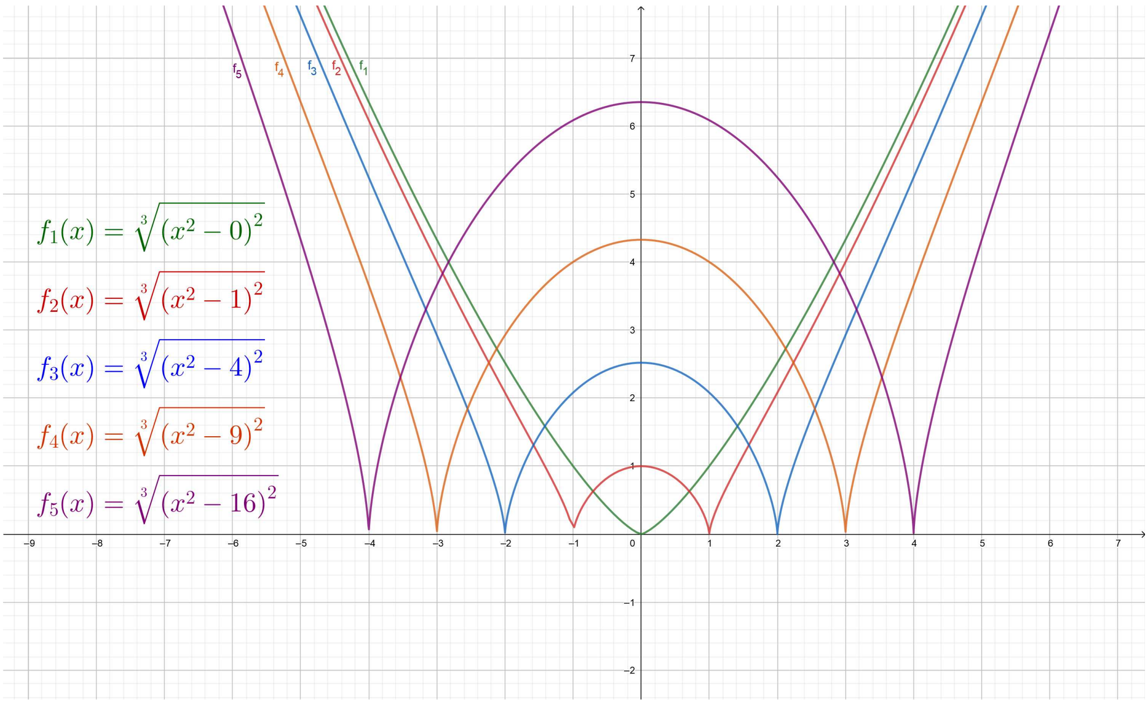
$$2x_0(2x_0^2 - 2a^2) = 0 \iff x_0(x_0 - a)(x_0 + a) = 0 \iff (x_0)_1 = 0,\ (x_0)_{2,3} = \pm a.$$

Dakle, funkcija postiže lokalne ekstreme $(y_0)_1 = f(0) = \sqrt[3]{a^4}$ i $(y_0)_{2,3} = f(\pm a) = 0$. Kako je $f(x) - 0 = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2} \geq 0$, tj. $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, to je 0 globalni minimum funkcije. Sada pretpostavimo da je $a \neq 0$. Za x iz okoline od $x_0 = 0$ promatramo izraz $f(x) - \sqrt[3]{a^4}$:

$$f(x) - \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2} - \sqrt[3]{a^4} = \frac{\sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2} - \sqrt[3]{a^4}}{1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2 - a^4)^4} + \sqrt[3]{(x^2 - a^4)^2 a^4} + \sqrt[3]{a^8}}{\sqrt[3]{(x^2 - a^4)^4} + \sqrt[3]{(x^2 - a^4)^2 a^4} + \sqrt[3]{a^8}}$$

$$= \frac{(x^2 - a^2)^2 - a^4}{\sqrt[3]{(x^2 - a^4)^4} + \sqrt[3]{(x^2 - a^4)^2 a^4} + \sqrt[3]{a^8}} = \frac{x^2(x^2 - 2a^2)}{\sqrt[3]{(x^2 - a^4)^4} + \sqrt[3]{(x^2 - a^4)^2 a^4} + \sqrt[3]{a^8}}.$$

Vidimo da je $f(x) \leq \sqrt[3]{a^4}$ za svaki $x \in [-\sqrt{2}\,|a|,\ \sqrt{2}\,|a|]$. Prema tome, funkcija ima lokalni maksimum $\sqrt[3]{a^4}$. Uspoređujući grafove zadane funkcije za $a = 0$ i $a \neq 0$ jasno vidimo da za $a = 0$ funkcija nema lokalnih maksimuma, za razliku od ostalih slučajeva.



Slika 4.19: Graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2}$ za $a = 0, 1, 2, 3, 4$

Zadatak 4.8 (Školsko natjecanje iz matematike u RH, 2009. godina, 2. razred, A varijanta). *Žicu duljine* 1 *m treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.*

Rješenje. Neka je $a > 0$ duljina stranice trokuta i $b > 0$ duljina stranice kvadrata. Budući da cijelu žicu treba iskoristiti, imamo uvjet $3a + 4b = 1$ odakle slijedi $b = \frac{1-3a}{4}$. Površina jednakostraničnog trokuta iznosi $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i površina kvadrata b^2 pa je njihov zbroj jednak

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + b^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1-3a}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1-6a+9a^2}{16} = \frac{(9+4\sqrt{3})a^2 - 6a + 1}{16}.$$

Budući da P i $16P$ postižu minimum za isti a, dovoljno je naći a za koji funkcija $16P = (9+4\sqrt{3})a^2 - 6a + 1$ postiže minimum. Tražimo $a_0 > 0$ takav da jednadžba

$$(9+4\sqrt{3})a^2 - 6a + 1 - [(9+4\sqrt{3})a_0^2 - 6a_0 + 1] = 0$$

ima dvostruko rješenje $a = a_0$. Raspisivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(a - a_0)[(9+4\sqrt{3})(a + a_0) - 6] = 0$$

koja ima dvostruko rješenje $a = a_0$ jedino ako je to rješenje jednadžbe $(9+4\sqrt{3})(a+a_0)-6 = 0$. Uvrstimo $a = a_0$ i dobivamo $2(9+4\sqrt{3})a_0 - 6 = 0$, odakle slijedi $a_0 = \frac{9-4\sqrt{3}}{11}$. Prema tome, P će biti najmanji ako je duljina stranice trokuta jednaka $a = \frac{9-4\sqrt{3}}{11} \approx 0.1883$ m, a duljina stranice kvadrata $b = \frac{1-3a}{4} = \frac{-4+3\sqrt{3}}{11} \approx 0.1087$ m.

Zadatak 4.9 (Školsko natjecanje iz matematike u RH, 2010. godina, 2. razred, A varijanta). *Žicom duljine* 10 *km treba ograditi pravokutno zemljište koje s jedne strane ima ravni zid (žicu je potrebno koristiti za preostale tri stranice), tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?*

Rješenje. Neka su $x, y > 0$ duljine stranica ograđenog pravokutnika. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je stranica paralelna sa zidom duljine y. Tada vrijedi $2x + y = 10$, odakle slijedi $y = 10 - 2x$. Nas zanima kolika je najveća površina ograđenog pravokutnika, tj. maksimum funkcije $P = xy = x(10 - 2x) = -2x^2 + 10x$. Tražimo $x_0 > 0$ takav da jednadžba

$$-2x^2 + 10x - (-2x_0^2 + 10x_0) = 0$$

ima dvostruko rješenje $x = x_0$. Raspisivanjem dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$(x - x_0)(x + x_0 - 5) = 0$$

koja ima dvostruko rješenje $x = x_0$ jedino ako je to rješenje jednadžbe $x + x_0 - 5 = 0$, odnosno $x_0 = \frac{5}{2}$. Dakle, odrađeni pravokutnik biti će najveće površine ako je $x = 2.5$ km i $y = 10 - 2x = 5$ km, a njegova površina će iznositi $P = xy = 12.5$ km^2.

Bibliografija

[1] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf` (svibanj 2020.).

[2] D. Ilišević, P. Lešković, *Elementarno određivanje ekstrema funkcije* $y = (a_1x^2 + b_1x + c_1)/(a_2x^2 + b_2x + c_2)$, Matematičko-fizički list LXX 4/280 (2019./2020.), 245–252.

[3] M. Ivović, *Ekstremne vrednosti funkcija*, MD Arhimedes, Beograd, 1995.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza 2: Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[5] Hrvatsko matematičko društvo, *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj*, dostupno na `http://www.matematika.hr/natjecanja/domaca/` (svibanj 2020.).

[6] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom radu izložene su tri elementarne metode za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija. Metoda nejednakosti često se pojavljuje na matematičkim natjecanjima i pogodna je za određivanje globalnih ekstrema funkcije. Druge dvije metode, metoda slike funkcije i metoda rješenja parne kratnosti, pogodne su za određivanje lokalnih i globalnih ekstrema funkcije. Sve metode su detaljno opisane i njihova primjena je pokazana na različitim primjerima.

Summary

In this thesis, three elementary methods for finding the extreme values of functions are presented. The inequality method often appears in mathematical competitions and is suitable for determining the global extrema of a function. The other two methods, the method of the range of a function and the method of solutions of even multiplicity, are suitable for determining both the local and global extrema of a function. Each method is described in detail and illustrated by various examples.

Životopis

Rođena sam 5. veljače 1996. godine u Bjelovaru. Odrasla sam u Daruvaru, malom gradu u zapadnom dijelu Slavonije, gdje sam 2010. godine završila osnovnu školu Vladimira Nazora. Zatim sam upisala Gimnaziju Daruvar koju sam završila 2014. godine, a iste godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika. Godinu dana kasnije prebacila sam se na nastavnički smjer. Sveučilišni preddiplomski studij Matematika; smjer: nastavnički završila sam 2018. godine te sam iste godine upisala diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.