Novi pristup glasovitom problemu iz japanskog hrama Gion

Leženić, Iva

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Iva Leženić

NOVI PRISTUP GLASOVITOM PROBLEMU IZ JAPANSKOG HRAMA GION

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2020.

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Iva Leženić

NOVI PRISTUP GLASOVITOM PROBLEMU IZ JAPANSKOG HRAMA GION

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvala

Na ovom mjestu htjela bih izraziti duboku zahvalnost onim ljudima koji su bili velika podrška, oslonac ili nadahnuće tijekom cjelokupnog studiranja te koji su omogućili da danas budem tu gdje jesam.

Prvo bih se zahvalila svojem mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru koji mi je pružio veliku čast omogućivši izradu ovog rada pod svojim vodstvom. Pamtim Vaša zanimljiva i poučna predavanja i intelektualno stimulirajuće usmene ispite koji su obilježili moju prvu godinu studiranja. Vi ste mi pomogli izgraditi jasnu i razumljivu sliku matematike kao apstraktne znanosti, što je uvelike olakšalo moje daljnje obrazovanje. I konačno, hvala Vam na iskazanoj pomoći, vodstvu, strpljenju i razumijevanju tijekom izrade ovog diplomskog rada.

Hvala mom ujaku Zdenku koji je jedan od razloga zašto sam upisala ovaj fakultet. Njemu posvećujem svoje prvo osvojeno mjesto na osnovnoškolskom natjecanju iz matematike.

Hvala mom rođaku Bojanu koji mi je poslužio kao primjer i vodilja tijekom studiranja. Hvala što si me motivirao i ohrabrio da upišem ovaj studij.

Hvala mojim drugim roditeljima, tetki i tetku, na svemu!

I konačno, najveća hvala mojim roditeljima! Hvala što ste uvijek bili konstanta u mom životu. Bez vaše podrške i povjerenja ovo ne bi bilo moguće.

Sadržaj

Uvod

U vremenu formiranja težnje za kolonijalnim osvajanjima pokazalo se da se malo koja zemlja oduprla tada nadmoćnim osvajačkim silama. Primjer jedne zemlje koja je promišljenim i zdravorazumskim odlukama uspjela sačuvati svoju slobodu jeste Japan. Naime u 17. stoljeću Japan je bio svjestan, kako nije vojna sila, da se neće uspjeti obraniti ratovanjem. Iz tog razloga je proizišla taktika zatvorene politike ili *sakoku*. Zatvorivši zemlju prekinula se sva trgovina, gospodarske veze i komunikacija s ostatkom svijeta. To je rezultiralo s 250 godina mira. No, povlačenjem sa svjetske scene, posljedično su iskusili i isključenost iz svih svjetskih otkrića i dostignuća u periodu od 17. – 19. stoljeća. Ipak, Japan nije stagnirao u tom periodu. Došlo je do procvata unutarnje trgovine, sveopćeg mira te povećanja stope pismenosti.

Obrazovanje stanovništva je jedna od većih odlika tog perioda. Naime, upravo tada je došlo do procvata „hramske geometrije“ koja i stoljećima poslije, intrigira i zapanjuje matematičare diljem svijeta. To je bilo vrijeme kada se proizvodio sangaku. Sangaku su bile drvene pločice na kojima su se rezbarili i ilustrirali razni geometrijski problemi i njihova rješenja. Stil sangaku-a se bitno razlikuje od zapadnjačkog grčkog stila. Problemi koji su oni razmatrali i rezbarili na drvene ploče odišu elegancijom te podsjećaju na spoj matematike i umjetnosti. No, pokazalo se da jednostavnost tih rezbarenih figura često krije neintuitivna i komplicirana rješenja koja izlaze iz okvira geometrije. Jedan od složenijih sangaku problema potječe iz hrama u četvrti Gion grada Kyoto. Upravo je on tema ovog diplomskog rada. Nakon vrijednih, ali dosta nezgrapnih i teško dostupnih rješenja japanskih matematičara iz 18. stoljeća, problem je dugo ostao izvan područja zanimanja i primjene metoda suvremene matematike. U drugoj polovici 20. stoljeća, zahvaljujući iznimnom entuzijazmu srednjoškolskog profesora Fukugawa Hidetoshija, tradicija sangaku matematike afirmirana je u samom Japanu te zatim i širom svijeta. Tek su 2013. godine J. Arias De Reyna, David Clark i Noam D. Elkies u članku *A Modern Solution to the Gion Shrine Problem* prikazali tehnički pregledniji pristup rješenju, dopunjen detaljnom analizom potojanja rješenja. U ovom radu ćemo većim dijelom slijediti njihov pristup.

Prvo poglavlje je pripremno te ćemo u njemu smjestiti sangaku u kontekst povijesti. Dodatno ćemo opisati prirodu motivacije izrade sangaku-a i njihovu strukturu. Na koncu ćemo opisati put upoznavanja Zapada s hramskom geometrijom, koji se ispostavio da je bio iznimno trnovit te ćemo predstaviti osobu koja je zaslužna za širenje koncepta sangaku-a van granica Japana.

U drugom i trećem poglavlju ćemo iskazati, ilustrirati i analizirati problem iz hrama Gion, natuknuti strategiju rješavanja koja će, između ostalog, uključivati i skaliranje veličina s kojim ćemo raditi. Također ćemo istaknuti vezu između skaliranja i homotetije.

U četvrtom poglavlju ćemo istaknuti uz koje uvjete rješenje postoji te komentirati ekstremni slučaj postavljenog problema.

U petom poglavlju ćemo dati detaljan postupak rješavanja zadatka u skupu realnih brojeva. Rješenje će uglavnom podrazumijevati domišljate i pogodne supstitucije kojima ćemo sve veličine na koncu izraziti preko jednog parametra t. Rješenje ćemo tražiti razmatranjem veličine q kao funkcije parametra t te ćemo na koncu dati konačno rješenje u skupu realnih brojeva.

U šestom poglavlju ćemo ispitati postoje li rješenja danog problema u skupu racionalnih brojeva. Ispostavit će se korisnim Fermatova metoda beskonačnog spusta kojom ćemo dokazati da ona ne postoje. Osim toga, uspostavit će se veza između postojanja racionalnih rješenja problema iz hrama Gion i slavnog Fermatovog rezultata iz teorije brojeva.

Poglavlje 1

Povijesni kontekst

Japan je danas jedna od tehnološki i ekonomski najrazvijenijih zemalja svijeta. Između ostalog globalni je lider na tržištu robotike te prednjači u istraživanjima i proizvodnji tehnoloških inovacija. Ukoliko to u čitatelja već ne izaziva divljenje i strahopoštovanje, tada valja istaknuti i činjenicu da je Japan sve to naglo postigao, u samo proteklih 150 godina [2]. Naime, Japan je od 17. do polovine 19. stoljeća prakticirao zatvorenu politiku. Razlog tome je bila želja za prekidom svih odnosa sa zapadom u svrhu očuvanja stabilnosti i mira. Uzmemo li u obzir kako je to bilo vrijeme uspona doba kolonijalizma i posebno jačanja španjolskog carstva i njegovog utjecaja na istoku, tada uviđamo motiv specifične japanske reakcije.

Kako je Japan bio organiziran kao feudalna a ne vojna zemlja, tako je bio svjestan da nije u mogućnosti voditi i pobijediti rat s nadmoćnom Španjolskom. Jedini izlaz su vidjeli u zatvaranju države prema ostatku svijeta. Uvjeti za provedbu zatvorene politike su bili više nego idealni zbog njihovog jedinstvenog izoliranog geografskog položaja. I to se pokazalo iznimno uspješnom strategijom. Vrijeme koje je uslijedilo narednih 250 godina je nazvano Edo period ili „doba velikog mira“.

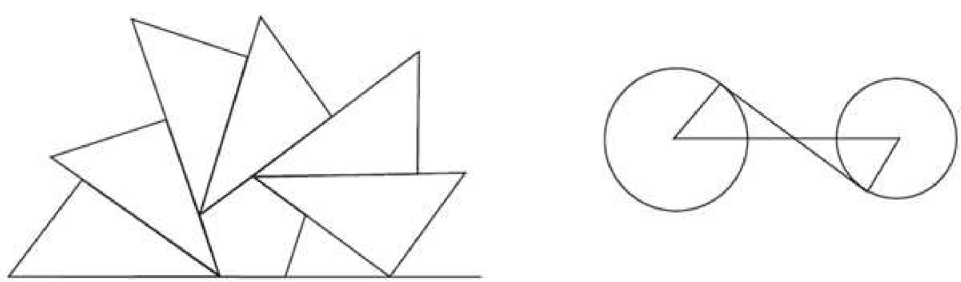
Početkom 17. stoljeća Tokugawa Ieyasu je postao šogun Japana. Uspostavio je Tokugawa dinastiju koja je vladala narednih 300 godina, sve do prisilnog otvaranja Japana vanjskom svijetu. Središte vlasti je preseljeno u glavnu japansku luku Edo (današnji Tokio) po kojem taj period i nosi ime.

Kako je Japan prekooceanskom trgovinom ostvarivao kontakte s ostatkom svijeta, tako je bio neizbježan doticaj s kršćanstvom i zapadnom kulturom. Nakon dolaska brojnih isusovačkih misionara, koji su bili predani evangelizaciji, osnovane su mnoge kršćanske zajednice. Broj kršćana je bio procijenjen na 300 000. Japan je do tad imao dvije religije: autohtoni šintoizam i iz Kine preuzeti budizam. Kako se smatralo da kršćanstvo predstavlja izravnu prijetnju japanskoj kulturi, načinu života i zakonodavnom tijelu, tako je započeo progon i službena zabrana kršćanstva. Kao posljedica toga, Japan je zabranio trgovinu i zatvorio luke za sve strane brodove, osim za nizozemske, kineske i korejske. Nizozemci kao protestanti su imali povlaštenu ulogu te su predstavljali most između

Japana i Europe [2]. Unatoč tome, nijednom brodu nije bilo dozvoljeno prekomjerno zadržavanje te je bio zabranjen kontakt s japanskim stanovništvom. Za njih su bile osigurane posebne izolirane luke. Tako je započela zatvorena politika ili *sakoku*.

1.1 Sangaku

Za vrijeme politike izolacije Japan je uživao u dugom razdoblju mira i stabilnosti. No, raskidanje svih veza s ostatkom svijeta, moralo je, i jeste uzelo svoj danak. Japan je uglavnom ostao uskraćen za sva svjetska tehnološka i znanstvena dostignuća te je bio primoran prilagoditi se novonastaloj situaciji. Tako je kao alternativa zapadnoj matematici *yosan* nastala tradicionalna japanska matematika *wasan*. Smatra se da je *wasan* nastao u Edo periodu pojavom japanskog abakusa soronban koji je revolucionalizirao njihovu matematiku, gospodarstvo i poslovanje.
Dok su se u tom razdoblju u Europi udarali temelji kombinatorne teorije vjerojatnosti, analitičke geometrije, projektivne geometrije i infitezimalnog računa, u Japanu se stvarao sangaku. Sangaku su bili drvene ploče na kojima su se rezbarili razni geometrijski problemi i njihova rješenja. Njihovi autori su ih postavljali u budističkim i šintoističkim hramovima kao žrtve bogovima, ali i u svrhu predstavljanja izazova ostalim matematičarima. Iz tog razloga se matematika tog perioda naziva „geometrija japanskih hramova" ili jednostavnije „hramska geometrija". Putem sangaku-a matematičari su za vrijeme perioda izolacije stvarali jedinstvene i zahtjevne probleme te ih rješavali na sebi svojstven način. Estetika zadataka pa i njihovih rješenja se razlikuje od nama poznatog grčkog stila zapadne matematike na koji smo naučeni. Može se reći da su japanski matematičari



Slika 1.1: Primjer tradicionalnog japanskog (lijevo) i zapadnjačkog problema (desno) [1]

imali svoj poseban stil te da su bili ljubitelji geometrijskih problema. U prilog tome ide elegancija rezbarenih geometrijskih figura koja često krije neintuitivna i komplicirana rješenja. Stoga se drži da je tradicionalna japanska geometrija kombinacija umjetnosti i matematike.

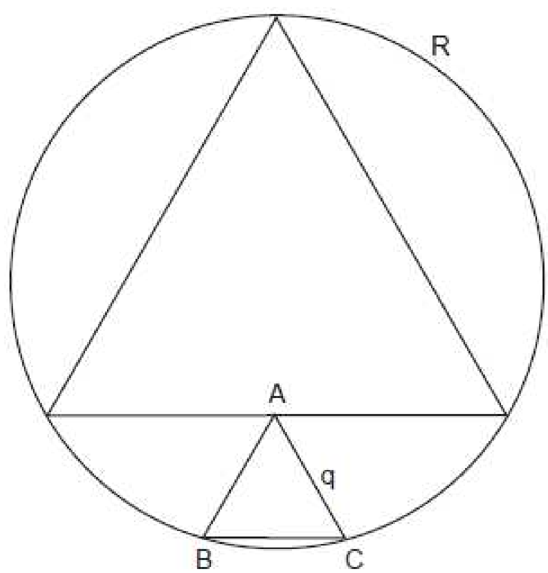
Slika 1.2: Primjer sangaku-a

Tradicionalni japanski geometričari su svoj matematički svijet vidjeli drukčijim očima te su rješenju pristupali nezapadnjačkim metodama. Iako je matematika univerzalan jezik naglasimo da
učiti tradicionalnu japansku matematiku znači otkriti novi način razmišljanja.[1]

[1] To learn traditional Japanese mathematics is to learn another way of thinking.[1]

Tradicija postavljanja sangaku-a u hramovima ima svoje korijene u starim običajima šintoističke religije. Stoljećima prije su se bogovi štovali te su im se u hramovima prinosile žrtve i donosili darovi. Vjerovalo se kako su bogovi bili ljubitelji konja, a kako su konji bili skupi tako su se počele prinositi njihove slike na drvenim pločama. Postavljanje sangaku-a je vrlo brzo izumrlo nakon otvaranja Japana svijetu te ih je mnoštvo i izgubljeno. Unatoč tome, oni su se nastavili otkrivati te se pronalaze i proučavaju i dan danas. Najnoviji je otkriven 2005. godine i datira iz 1870. godine.
Većina sangaku-a sadrži geometrijske figure i samo konačno rješenje. U zadatcima se uglavnom traži da se odrede razni elementi ili da se izraze preko nekih poznatih veličina ili njihovih omjera. Njihovim rješavanjem se u konačnici ustanovi primjena gotovo svih danas poznatih sadržaja iz planimetrije i stereometrije ili njihovih japanskih inačica. Prije ili kasnije budu potrebni svi teoremi vezani uz kružnice, trokute i četverokute. Uz strpljivost, najvažniji alati su jasna i precizna skica te Pitagorin poučak [1]. Pogledajmo primjer jednog jednostavnijeg sangaku problema.

Primjer. [1]
U veliku kružnicu polumjera R upisan je veliki i mali jednakostranični trokut (kao što je prikazano da slici 1.3). Izrazi duljinu stranice q malog jednakostraničnog trokuta ABC pomoću R, ako je A polovište jedne stranice velikog trokuta.



Slika 1.3: Skica sangaku problema [1]

Rješenje se lako dobije primjenom Pitagorinog poučka.

Osim toga, tradicionalni japanski matematičari Edo perioda su bili veoma vješti u baratanju jednadžbama visokog stupnja, što, između ostalog, potvrđuje takozvani *Problem iz hrama Gion*. Prvo zabilježeno rješenje, barem implicitno, dano je u obliku algebarske jednadžbe stupnja $2^{10} = 1024$, pri čemu se autoru po imenu Tsuda Nobuhisa u nekim izvorima pripisuje i kreiranje samog zadatka. U ovom radu posvetit ćemo se upravo tom zadatku, ali uz znatno moderniji pristup.

1.2 Samuraji

Mir, kojemu je Tokugawa Ieyasu težio, iz valjanih je razloga u početku Edo razdoblja bio neizgledan. Naime, veliku prijetnju stabilnosti zemlje predstavljali su samuraji. Stoljetna ratovanja su ih učinila nasilnim, divljim i polupismenim vojnicima [1]. Dolaskom razdoblja mira, njihova funkcija u državi se zato morala promijeniti. Stoga je Togukawa dinastija primarni cilj vidila u pacifizaciji i izobrazbi samuraja. I tako su, kao rezultat generacijske asimilacije novom načinu života, samuraji postali dio cijenjenog visokoobrazovanog staleža. Oni su u Edo razdoblju odigrali ključnu ulogu u obrazovanju i umjetnosti. Njihov doprinos Japanu je usporediv onom od isusovaca u Europi. Oboje su bili zaslužni za izobrazbu, školovanje te povećanje stupnja pismenosti stanovništva. Kako u tom periodu u Japanu nije bilo sveučilišta, tako se obrazovanje odvijalo u malim privatnim ruralnim školama *juku*, gdje su se samuraji zapošljavali kao učitelji. Te škole su bile predane trima područjima: čitanju, pisanju i aritmetici. Odnosno, bile su predane izučavanju trima slova „R“: „reading, 'riting i 'rithmetic“ [5]. Učenje aritmetike se odnosilo na soroban. Kako su škole pohađala djeca, žene i odrasli muškarci, tako je *juku* školovanje rezultiralo visokom pismenošću sveopćeg stanovništva. Osim što su ljudi sangaku postavljali u svrhu samoreklame po uspješno riješenom zadatku, sangaku je služio i kao alternativa objavljivanju knjiga. Obični ljudi koji su pohađali *juku* te koji si nisu mogli financirati objavljivanje knjige, svoje su rezultate postavljali u hramovima. Procjenjuje se da je do konca Edo perioda postojalo oko 80 000 *juku* škola diljem Japana [1].

Slika 1.4: *Juku* škola iz 19. stoljeća koja je ostala sačuvana do dan danas [1]

1.3 Uspon sangaku-a na Zapadu

Sangaku je dugo ostao znan samo Japanu te shodno tome nepoznat Zapadu. Upoznavanje i širenje koncepta i bogate povijesti sangaku-a diljem svijeta, dugujemo prijateljstvu i korespodenciji Pedo Daniela i Fukagawa Hidetoshija.

Put ka upoznavanju Zapada s hramskom geometrijom bio je u najmanju ruku dug i iscrpljujući. Sve je krenulo od japanskog profesora matematike - Fukagawa Hidetoshi koji je na koncu, proučavajući sangaku više od 40 godina, postao vodeći svjetski stručnjak za to područje.

Fukagawa Hidetoshi je rođen 1943. godine te i dan danas živi i djeluje u Japanu. Kao srednjoškolski profesor matematike djelovao je u periodu 1967.–2004. godine. Od tada je stekao doktorat znanosti te radi kao izvanredni profesor na više sveučilišta.

Fukagawa Hidetoshi je još kao srednjoškolski profesor, izučavajući staru knjigu tradicionalne japanske matematike, naišao na sangaku. Otkrivši kako su neki geometrijski problemi lako primjenjivi u nastavi i da su, štoviše, zanimljivi učenicima, odlučio je posvetiti se ozbiljnijem proučavanju hramske geometrije. Tako je započela Hidetoshijeva ljubav prema sangaku-u. Svjestan težine i značaja tog otkrića, nastojao je prvo Japan

pa onda i Zapad upoznati s matematikom Edo perioda. U vlastitoj zemlji je odmah naišao na nerazumijevanje i neodobravanje. Štoviše, sunarodnjaci nisu priznavali njegov rad jer se općenito smatralo da matematika prakticirana u Edo periodu nema vrijednosti te se uz to degradirala i zaboravila. Uz to, prema japanskom hijerarhijskom akademskom sistemu srednjoškolski profesor je pripadao nižem staležu, stoga je bilo nemoguće uspostaviti komunikaciju s profesorima višeg staleža.
No, Hidetoshi nije odustajao te je odlučio poslati pisma stranim svjetskim matematičarima kojima je područje interesa bila povijest i geometrija. Tome je prethodilo učenje engleskog jezika. Tako je motivirani Hidetoshi učio engleski jezik u 42. godini života. Napisao je ukupno 10 pisama i ni na jedno nije dobio odgovor. [5] Sve dok Daniel Pedoe (UK) nije uvidio potencijal sangaku-a te mu je jedini odgovorio i poručio: *Svijet sangaku-a je predivan, stoga ćemo ga zajedno istražiti.*[2] Pedoe i Fukagawa su čak imali poteškoća i s publikacijom svog rada na Zapadu, no 1989. su ipak objavili knjigu „Japanese Temple Geometry Problems“, kojom se napokon odalo priznanje tradicionalnoj japanskoj hramskoj matematici.
Nakon toga je, potpuno očekivano, porasla zainteresiranost za bogati matematički svijet Edo razdoblja te je uslijedila suradnja s Tony-em Rothmanom (SAD) koja je rezultirala još jednom knjigom „Sacred Mathematics“. Knjiga je pisana jednostavnim i zanimljivim stilom te nije predviđena samo za profesionalne matematičare. Njom se po prvi puta hramska geometrija stavila u kontekst japanske kulture, notacije i povijesti. Osim toga, ona čitatelju daje uvid u otežan proces stvaranja knjige između dvaju, iako motiviranih, autora iz različitih zemalja s različitih kontinenata [1]. Istaknut ćemo jednu zanimljivost koja je bitna i za širi kontekst ovog diplomskog rada. Naime, kako je u Japanu običaj da se osoba oslovljava prvo prezimenom, tako je i ovdje, po uzoru na prethodno spomenutu knjigu, taj običaj ispoštovan te je Hidetoshi (ime) Fukagawa (prezime) postao Fukagawa Hidetoshi, a Ieyasu Tokugawa je postao Tokugawa Ieyasu [1]. Zbog lingvističke barijere i razlike u kulturama koja je dijelila matematičare japanskog i engleskog govornog područja, obe suradnje su bile otežane, ali ipak moguće, zahvaljujući univerzalnosti matematičkog jezika. Zbog upornosti i predanosti nekolicine matematičara, u kratkom vremenu se proširila svijest o sangaku-u pa ga, između ostalog, sada možemo pronaći i u hrvatskim udžbenicima, Edutoriju i časopisu MIŠ.

Hidetoshijev materinji jezik je daleko od engleskog, a ja ne poznam japanski jezik. Srećom, matematika je univerzalna. [3]

[2] Sangaku is a wonderful world, so we two will research it. [1]

[3] Hidetoshi's native language is far from English, and I speak no Japanese. Fortunately, mathematics is universal. [1]

Poglavlje 2

Analiza čuvenog problema iz hrama Gion

Jedan od najslavnijih, a po težini ”ozloglašenijih” sangaku problema sigurno je problem iz hrama Gion, koji je ujedno i tema ovog rada. Nakon već spomenutog rješenja Tsuda Nobuhisa iz 1749. godine, kojim je problem načelno sveden na određivanje nultočaka polinoma stupnja $2^{10} = 1024$, Nakata je značajno smanjio stupanj jednadžbe na 46. Najveći napredak ostvario je 1774. godine Ajima Naonubu, inače jedan od vodećih japanskih matematičara i astronoma tog razdoblja, redukcijom problema na polinom stupnja 10. Njegovo vrlo zanimljivo rješenje postalo je šire dostupno tek 1966., objavljivanjem knjige sabranih radova rekonstruiranih iz izvornih rukopisa. Od tada su Arias de Reyna, Clark i Elkies objavili modernu analizu i rješenje problema u svom radu *A Modern Solution to the Gion Shrine Problem.* U ovom radu ćemo predstaviti to rješenje koje također uključuje polinom stupnja 10, ali uz uporabu formalne trigonometrije. Osim toga, diskutirat ćemo egzistenciju rješenja posebno u skupovima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.
Istaknimo da zasad ne postoji eksplicitno rješenje ovog problema. No, ipak, pokazat ćemo da rješenje postoji, da je jedinstveno te da nema racionalnih rješenja.

Iskaz problema iz hrama Gion.

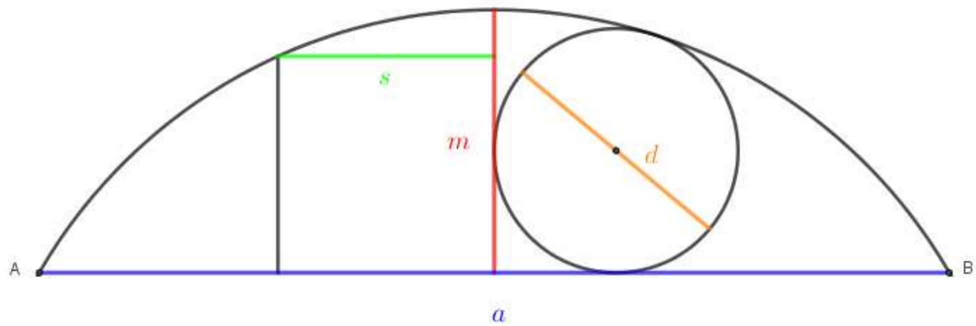
Dan je kružni odsječak. Dužina duljine m raspolavlja luk i dužinu $\overline{AB}$. Na prikazan način, upišemo kvadrat sa stranicom duljine s i upišemo kružnicu promjera d. Neka je $|AB| = a$. Tada, ako označimo:

$$p = a + m + s + d$$

i

$$q = \frac{m}{a} + \frac{d}{m} + \frac{s}{d},$$

izrazi a, m, s i d pomoću p i q.



Slika 2.1: Ilustracija problema iz hrama Gion

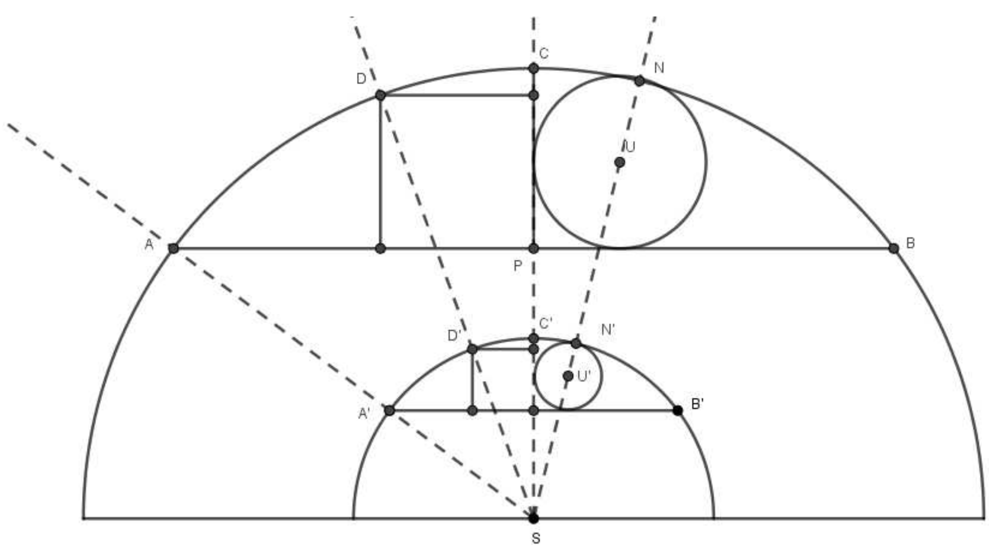
Sa slike je vidljivo da je riječ o kružnom odsječku, nikako samo o polukrugu. Nadalje, kružni odsječak sadrži dužinu duljine m koja raspolavlja i luk AB i tetivu $\overline{AB}$. U lijevoj polovici kružnog odsječka upisan je kvadrat duljine stranice s čiji jedan vrh leži u središtu tetive, po jedan vrh leži na lijevoj polovici tetive i na dužini koja je okomita na tetivu. Krajnji vrh leži na luku AB. U desnoj polovici kružnog odsječka upisana je kružnica promjera d.

U nizu modernih interpretacija spomenutog problema postavljali su se razni dizajni skice koji su se razlikovale u nijansama. Neki su radili s polumjerom male kružnice r, dok su neki ispoštovali starojapanski običaj obilježavanja promjera d. Također valja istaknuti da su u originalnom sangaku-u krajnje točke tetive A i B bile izostavljene zbog jednostavnosti slike. Njihova jedina svrha leži u definiranju duljine tetive.

Poglavlje 3

Posljedice skaliranja

U rješenju koje su dali Arias de Reyna, Clark i Elkies dva puta se skaliraju određene veličine. Prvi puta skaliramo polumjer velike kružnice R koja sadrži dani odsječak te drugi put skaliramo veličine koje su dane u obliku funkcija $a(t), m(t), s(t), d(t)$. Ovdje ćemo pokazati kako je taj korak opravdan i kako ne utječe na konačno rješenje, već samo olakšava postupak rješavanja.
Naime, spomenutim skaliranjem samo se dobiva homotetična slika originalnog problema. Promotrimo polukružnicu polumjera R sa središtem S koja sadrži dani odsječak u kojeg su upisani kvadrat i kružnica na prethodno opisan način ($|AB| = a, |PC| = m$, duljina stranice kvadrata je s i duljina promjera kružnice upisane u desnu polutku odsječka je d). Tada svaka polukružnica polumjera R' sa istim središtem S sadrži kružni odsječak čije su upisane figure homotetične početnoj slici s obzirom na središte S.



Slika 3.1: Skaliranje kao homotetija

Lako se vidi da iz homotetije sa središtem S i parom pridruženih točaka $C \longmapsto C'$ slijedi da je:

- $\frac{|AP|}{|A'P'|} = \frac{|SA|}{|S'A'|} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a'}{2}} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{R}{R'}$
- $\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{m}{m'} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{R}{R'}$
- $\frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{s}{s'} = \frac{R}{R'}$
- $\frac{|UN|}{|U'N'|} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{R}{R'}$

Dakle, skaliramo li veličine a, m, s, d, R dobit ćemo homotetičnu sliku prvotnog problema. Na koncu je potrebno samo pomnožiti skalirane veličine faktorom homotetije $\frac{R}{R'}$ i dobit će se krajnje rješenje:

$$a = \frac{R}{R'}a'$$

$$m = \frac{R}{R'}m'$$

$$s = \frac{R}{R'}s'$$

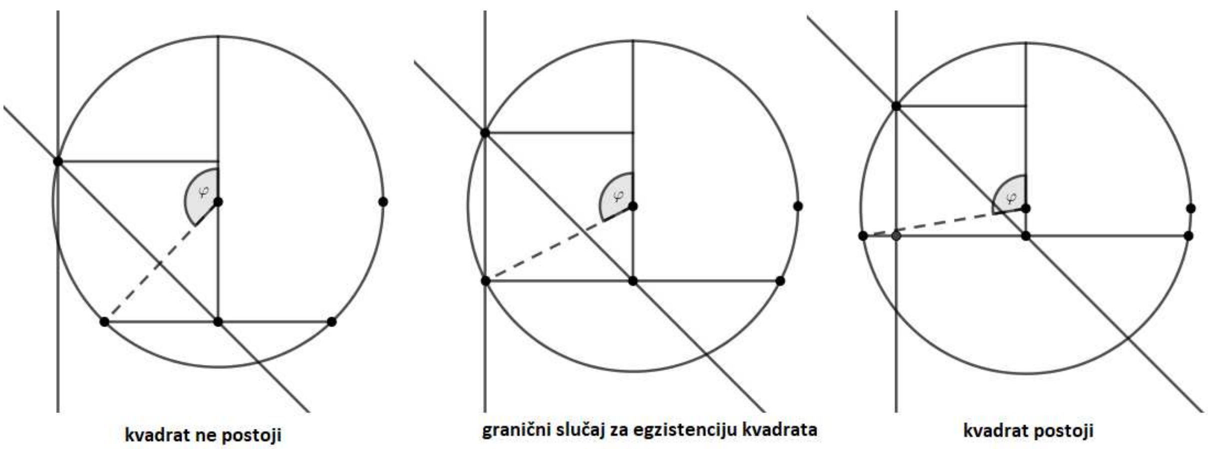
$$d = \frac{R}{R'}d'$$

I to će biti zadnji korak pri određivanju krajnjeg rješenja.

Poglavlje 4

Egzistencija rješenja

Prilikom diskusije rješenja razmatrat ćemo problem pri kojem je $R = 1$. Kako kružni odsječak (pa i rješenje) u potpunosti ovisi o kutu iz kojeg se dana tetiva vidi, tada zaključujemo da rješenje ovisi o kutu φ koji je naznačen na slici ispod. No, kut φ ne može poprimiti bilo koju vrijednost.



Slika 4.1: Slučajevi za $\varphi > \frac{\pi}{2}$

Dakle, φ je ograničen. Označimo s φ_0 krajnji slučaj kuta φ kad kvadrat postoji (slika u sredini).

Neka je $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, gdje je α šiljasti kut, s vrhom u središtu velike kružnice, pravokutnog trokuta u donjoj polovici kvadrata.

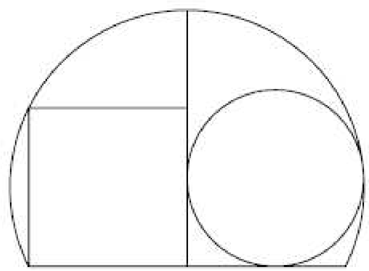
Kako središte velike kružnice raspolavlja stranicu kvadrata tada se dobije:

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2}.$$

Dakle, φ je ograničen na interval

$$0 < \varphi \leq \varphi_0 := \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2} \approx 117^\circ.$$

Razlog tome je što u slučaju $\varphi > \varphi_0$ kvadrat više nije upisan u kružni poluodsječak. Na slici ispod je prikazan krajnji slučaj kad je $\varphi = \varphi_0$.



Slika 4.2: Ekstreman slučaj za $\varphi = \varphi_0$ [3]

Za daljnje potrebe ovog rada bit će potrebno odrediti i $\cos \varphi_0$. Kako imamo $0 < \varphi \leq \varphi_0$ i kako je $\cos \varphi$ padajuća na $\langle 0, \pi \rangle$ tako je: $1 > \cos \varphi \geq \cos \varphi_0$.

Izračunajmo $\cos \varphi_0$.

Kako je $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2}$ i kako je $\alpha = \arctan \frac{1}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ tako je: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$. Osim toga općenito vrijedi: $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ pa zaključujemo da je:

$$\cos \varphi_0 = \cos(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}) = -\sin(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Poglavlje 5

Rješenje u skupu $\mathbb{R}$

Neka je dano

$$p = a + m + s + d$$

i

$$q = \frac{m}{a} + \frac{d}{m} + \frac{s}{d},$$

.

Skaliramo li veličine a, m, s, d s $\lambda \in \mathbb{R}$ dobijemo

$$a' = \lambda a$$

$$m' = \lambda m$$

$$s' = \lambda s$$

$$d' = \lambda d.$$

Tada je vidljivo da vrijedi:

$$p' = \lambda(a + m + s + d)$$

i

$$q' = \frac{m\lambda}{a\lambda} + \frac{d\lambda}{m\lambda} + \frac{s\lambda}{d\lambda} = q.$$

Dakle, zaključujemo da q ostaje invarijantan na skaliranje. Prema tome, zadatak je neovisan o skaliranju te će se iz tog razloga promatrati jednostavniji problem kod kojeg je polumjer pripadne kružnice danog kružnog odsječka $R = 1$.
Kako kružni odsječak ovisi o kutu pod kojim se dana tetiva vidi, tako ćemo malo detaljnije proučiti i konstrukciju skice te pronaći središte veće kružnice koja sadrži dani kružni odsječak.

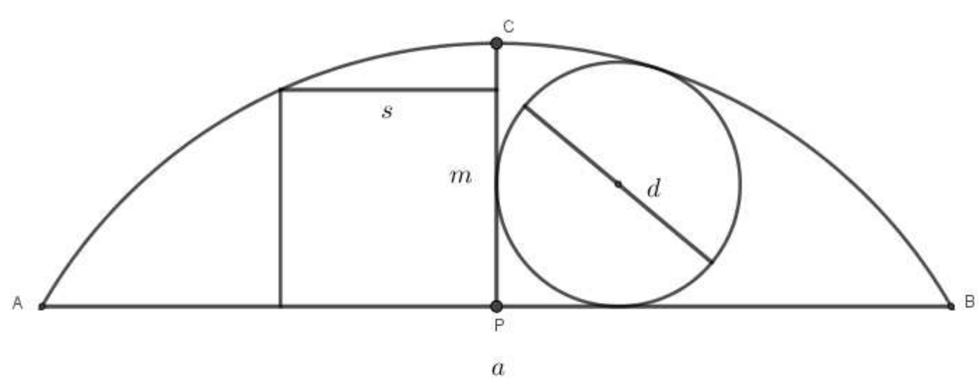
5.1 Strategija rješavanja

Postupak rješavanja danog geometrijskog problema svest ćemo na pronalazak nultočke funkcije q. Iz tog razloga bit će potrebno što jednostavnije sve veličine prikazati preko jedne nepoznanice.
Rješenje danog problema u skupu realnih brojeva sastojat će se od više dijelova:

1. konstrukcija središta velike kružnice koja sadrži dani kružni odsječak
2. relacije koje povezuju trigonometrijske funkcije središnjih kutova i veličina a, m, s, d
3. svođenje veličina a, m, s na $a(R, \sin\varphi)$, $m(R, \cos\varphi)$, $s(R, \cos\varphi, \sin\varphi)$
4. svođenje veličina $a(R, \sin\varphi)$, $m(R, \cos\varphi)$, $s(R, \cos\varphi, \sin\varphi)$ na $a(R, r)$, $m(R, r)$, $s(R, r)$
5. skaliranje polumjera R
6. supstitucija: $\sqrt{1-2r} = \sqrt{(x-1)^2}$, $x > 1$
7. racionalna parametrizacija kružnice $x^2 + y^2 = 4$
8. skaliranje veličina a, m, s, d s $2(1+t^2)^2$ i graf funkcije q
9. konačno rješenje u skupu $\mathbb{R}$

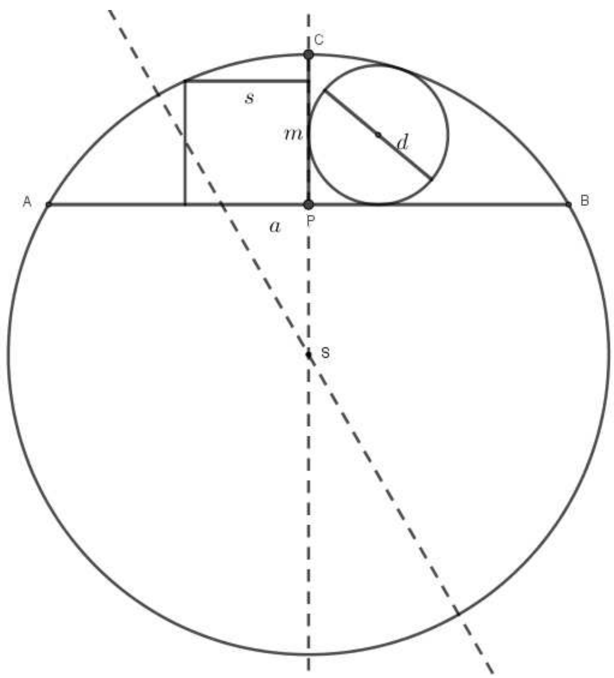
5.1.1 Konstrukcija središta velike kružnice

Označimo dužinu duljine m koja je okomita na tetivu $\overline{AB}$ s $\overline{PC}$, gdje je P polovište tetive $\overline{AB}$.



Slika 5.1: Skica problema iz hrama Gion

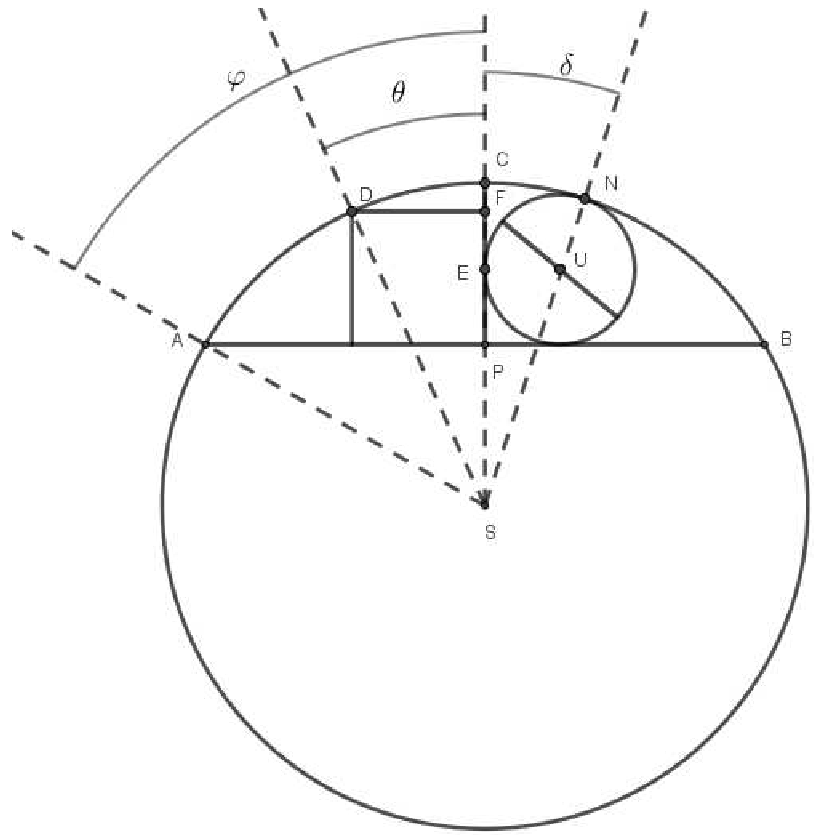
Produljimo dužinu $\overline{PC}$ te povucimo simetralu s dužine $\overline{AC}$. Kako su $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ tetive velike kružnice K tada je središte velike kružnice GMT sjecišta s i PC. Neka dobivena kružnica ima polumjer R, tj označimo je s $K(S, R)$.



Slika 5.2: Konstrukcija kružnice $K(S, R)$ koja sadrži dani kružni odsječak

5.1.2 Trigonometrijske funkcije središnjih kutova

Izrazimo veličine a, m, s, d preko jedne varijable. Detaljnijim proučavanjem velike kružnice zaključuje se da je moguće spomenute veličine izraziti preko trigonometrijskih funkcija odgovarajućih kutova čiji se vrh nalazi upravo u središtu velike kružnice.
Zbog jednostavnijeg praćenja zasad ispustimo oznake za duljine a, m, s, d sa skice te uvedimo još neke nove oznake za središnje kutove φ, θ, δ te za točke D, E, F, U, N.
Promotrimo te oznake na sljedećoj slici.



Slika 5.3: Središnji kutovi φ, θ, δ

Sada ćemo promatrati neke pravokutne trokute, kako bi veličine a, m, s, d izrazili preko kutova φ, θ ili δ te na koncu kako bi ih izrazili preko polumjera velike kružnice R i polumjera male kružnice $r = \frac{d}{2}$. Dakle, na koncu ćemo dobiti $a(R,r), m(R,r), s(R,r), d(R,r)$.

- Promotrimo trokut ASP.

  (i) Vrijedi: $\sin\varphi = \frac{|AP|}{|AS|} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$. Dakle,

  $a = 2R\sin\varphi$.

  (ii) Vrijedi: $\cos\varphi = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|PS|}{R}$.

  $$\cos\varphi = \frac{|PS|}{R} \tag{1}$$

- Promotrimo trokut SFD.

(i) Vrijedi: $\cos\theta = \frac{|SF|}{|DS|} = \frac{|SP|+|PF|}{|DS|} = \frac{s+|PS|}{R}$.

$$\cos\theta = \frac{s+|PS|}{R}. \tag{2}$$

(ii) Vrijedi:

$$\sin\theta = \frac{s}{R}. \tag{3}$$

- Promotrimo trokut SUE.

  Budući da kružnica $k(U,r)$ dira dva pravca i kružnicu $K(S,R)$, to klasificiramo upravo kao Apolonijev problem PPK. Prema tome točke S, U, N su kolinearne pa vrijedi: $|SU| = |SN| - |UN| = R - r$.

  (i) Vrijedi:

  $$\cos\delta = \frac{|SE|}{|SU|} = \frac{|SC|-|CP|+|PE|}{|SU|} = \frac{R-m+r}{R-r} \tag{4}$$

  (ii) Vrijedi:

  $$\sin\delta = \frac{|UE|}{|SU|} = \frac{r}{R-r} \tag{5}$$

- Promotrimo dužinu $|SC|$.

  Vrijedi: $|CP| = |CS| - |PS|$, tj. $m = R - |PS|$.

  Iz (1) slijedi:

  $m = R - R\cos\varphi$.

Oduzmimo (1) i (2).

$\cos\theta - \cos\varphi = \frac{s+|PS|}{R} - \frac{|PS|}{R} = \frac{s}{R}$.

Prema (3) također vrijedi $\frac{s}{R} = \sin\theta$. Iz toga zaključujemo da vrijedi:

$$\cos\theta - \cos\varphi = \sin\theta. \tag{6}$$

5.1.3 Veličine a, m, s, d kao funkcije po $\cos\varphi$ i/ili $\sin\varphi$

Dakle, zasad smo veličine a i m izrazili pomoću trigonometrijskih funkcija kuta φ. Veličina s je dana preko sinusa kuta θ. Izrazimo dakle $\sin\theta$ preko sinusa i kosinusa kuta φ. Iz tog razloga, kvadrirajmo relaciju (6).

$$\cos^2\theta = \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\theta + \sin^2\theta$$
$$\Rightarrow 1 - \sin^2\theta = \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\theta + \sin^2\theta$$
$$\Rightarrow 2\sin^2\theta + 2\cos\varphi\sin\theta + (\cos^2\varphi - 1) = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin^2\theta + 2\cos\varphi\sin\theta - \sin^2\varphi = 0$$

Uvedimo supstituciju: $\sin\theta = x$ i riješimo kvadratnu jednadžbu po x.

$$\Rightarrow 2x^2 + 2(\cos\varphi)x - \sin^2\varphi = 0$$

Iz Vieteove formule vrijedi: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\sin^2\varphi}{2}$. Dakle, rješenja x_1 i x_2 su različitih predznaka. Ali, kako je $\sin\theta = \frac{s}{R} > 0$ pozitivan, tada ćemo uzeti samo pozitivno rješenje:

$$x_1 = \frac{-2\cos\varphi + \sqrt{4\cos^2\varphi + 8\sin^2\varphi}}{4}$$
$$= \frac{-2\cos\varphi + \sqrt{(4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi) + 4\sin^2\varphi}}{4}$$
$$= \frac{-2\cos\varphi + \sqrt{4 + 4\sin^2\varphi}}{4}$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{-2\cos\varphi + \sqrt{4 + 4\sin^2\varphi}}{4}$$

Sad imamo:

$$s = R\sin\theta = R \cdot \frac{-2\cos\varphi + \sqrt{4 + 4\sin^2\varphi}}{4}$$

5.1.4 Veličine a, m, s, d kao funkcije po R i/ili r

Dakle, u ovom trenutku smo sve veličine izrazili u sljedećim varijablama: $a(R, \sin\varphi)$, $m(R, \cos\varphi)$, $s(R, \cos\varphi, \sin\varphi)$.
Izrazimo sad sve navedene trigonometrijske funkcije kuta $\varphi \in \langle 0, \varphi_0]$ preko polumjera R i r.
Pokazali smo da vrijedi:

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \cos\delta = \frac{R-m+r}{R-r}$

$\Rightarrow (R-r)\cos\delta = R-m+r$

$$\Rightarrow m = R-(R-r)\cos\delta + r \quad (7)$$

Osim toga također vrijedi: $\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} \overset{(5)}{=} \sqrt{1-(\frac{r}{R-r})^2}$ (8)

Uvrstimo (8) u (7):

$\Rightarrow m = R-(R-r)\cdot\sqrt{1-(\frac{r}{R-r})^2} + r$

$\Rightarrow m = R-(R-r)\cdot\sqrt{\frac{(R-r)^2-r^2}{(R-r)^2}} + r$

$$\overset{R>r}{\Rightarrow} m = R-\sqrt{(R-r)^2-r^2} + r \quad (9)$$

Izrazimo sad $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ preko R i r.

Kako imamo $m = R-\sqrt{(R-r)^2-r^2}+r$ i $m = R-R\cos\varphi$ tada lako dobijemo $\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2-2Rr}-r}{R}$.

U tom slučaju se $\sin\varphi > 0$ lako izrazi preko R i r koristeći relaciju $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$.

5.1.5 Skaliranje polumjera R

Kako smo na početku već istaknuli kako zadatak ne ovisi o skaliranju, uzmimo $R = 1$. Istaknimo da u tom slučaju imamo granice i na r, tj. vrijedi: $0 < r < \frac{1}{2}$.

Tada imamo:

- $\cos\varphi = \sqrt{1-2r} - r$ (10)
- $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-(\sqrt{1-2r}-r)^2} = \sqrt{1-(1-2r)+2\sqrt{1-2r}r-r^2} = \sqrt{2r+2r\sqrt{1-2r}-r^2}$
- $s = \sin\theta = \frac{-2cos\varphi+\sqrt{4+4sin^2\varphi}}{4} = \frac{r-\sqrt{1-2r}+\sqrt{1+2r\sqrt{1-2r}-r^2+2r}}{2}$

Kako smo sve veličine iskazali preko polumjera r tada ćemo u nastavku precizirati granice polumjera r.

Kako iz (10) slijedi da je $\cos\varphi = \sqrt{1-2r} - r$, a u poglavlju 4 smo zaključili da je $\cos\varphi \geq \cos\varphi_0 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ tako je:

$$\sqrt{1-2r} - r \geq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

odnosno:

$$0 < r \leq r_0 = -1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}} \approx 0.49868 < \frac{1}{2}$$

I konačno imamo (11):

$$a = 2\sin\varphi = 2\sqrt{2r + 2r\sqrt{1-2r} - r^2}$$

$$m = 1 + r - \sqrt{1-2r}$$

$$d = 2r$$

$$s = \frac{r - \sqrt{1-2r} + \sqrt{1 + 2r - r^2 + 2r\sqrt{1-2r}}}{2}$$

5.1.6 Supstitucija $\sqrt{1-2r} = \sqrt{(x-1)^2}$

Kako smo sve veličine a, m, s, d izrazili preko r, tako bi mogli i veličine p i q izraziti preko r te pronaći $r \in \langle 0, r_0]$ preko danog q koristeći Mathematicu ili neki sličan program. No, takva jednadžba bi imala nepotrebno veliki stupanj zbog niza korijena u (11). Iz tog razloga u sljedećem koraku uvodimo supstituciju.

supstitucija: $\sqrt{1-2r} = \sqrt{(x-1)^2}$, $x > 1$

Iz supstitucije slijedi:
$\Rightarrow 1 - 2r = (x-1)^2$
$\Rightarrow d = 2r = x(2-x)$

Zaista imamo restrikciju na parametar x, jer kako je $r \leq r_0 < \frac{1}{2}$ tada je

$\overset{r \leq r_0}{\Rightarrow} x \geq x_0 = 1 + \sqrt{1 - 2r_0} \approx 1.051462 > 1$ i

$\overset{r > 0}{\Rightarrow} x < 2.$

Dakle, $x \in [x_0, 2\rangle$.

Izrazimo a:

$$
\begin{aligned}
a &= 2\sqrt{x(2-x)+x(2-x)(x-1)-(\frac{x(2-x)}{2})^2} \\
&= 2\sqrt{x(2-x)\{1+(x-1)-\frac{x(2-x)}{4}\}} \\
&= 2\sqrt{x(2-x)\frac{x^2+2x}{4}} \\
&= 2\sqrt{\frac{x^2(2-x)(2+x)}{4}} \\
&= 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} \\
&= x\sqrt{4-x^2}
\end{aligned}
$$

Izrazimo m:

$$
\begin{aligned}
m &= 1+r-\sqrt{1-2r} \\
&= 1+\frac{x(2-x)}{2}-(x-1) \\
&= 2-x+\frac{x(2-x)}{2} \\
&= \frac{4-x^2}{2}
\end{aligned}
$$

Izrazimo s:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}(r-\sqrt{1-2r}+\sqrt{1+2r-r^2+2r\sqrt{1-2r}}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{x(2-x)}{2}-(x-1)+\sqrt{1+x(2-x)-(\frac{x(2-x)}{2})^2+x(2-x)(x-1)}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{2-x^2}{2}+\sqrt{1+x(2-x)(\frac{x^2+2x}{4})}) \\
&= \frac{1}{4}(2-x^2+\sqrt{4+4x^2-x^4})
\end{aligned}
$$

5.1.7 Racionalna parametrizacija kružnice $x^2 + y^2 = 4$

Kako smo veličine a, m, s, d predstavili funkcijama:

$$a(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

$$m(x) = \frac{4 - x^2}{2}$$

$$s(x) = \frac{1}{4}(2 - x^2 + \sqrt{4 + 4x^2 - x^4})$$

$$d(x) = x(2 - x)$$

tako ih možemo parametrizirati kako bi uklonili korijen $\sqrt{4 - x^2}$. Korijen ćemo ukloniti racionalnom parametrizacijom kružnice $x^2 + y^2 = 4$.
Kako je jedna racionalna parametrizacija jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$: $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ tada je racionalna parametrizacija kružnice $x^2 + y^2 = 4$: $(2\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{4t}{1+t^2})$

Izrazimo t preko x:

$$x = 2\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 2\frac{1 + t^2 - 2t^2}{1 + t^2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 - \frac{2t^2}{1 + t^2}$$

$$\frac{2t^2}{1 + t^2} = \frac{2 - x}{2}$$

$$\frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{2 - x}{4}$$

$$\frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} = \frac{2 - x}{4}$$

$$1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{2 - x}{4}$$

$$t^2 = \frac{2 - x}{2 + x}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$$

Restringirajmo i parametar t.

Kako je $t^2 = \frac{2-x}{2+x}$ padajuća funkcija i $x_0 \leq x < 2$, onda je $t^2(2) = 0 < t^2(x) \leq t^2(x_0) = t_0^2$.

$\Rightarrow t^2 \in \langle 0, t_0^2 \rangle$

Dakle, $t > 0$ i $t^2 < t_0^2$, tj.

$$0 < t \leq t_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5} + \sqrt{2(5-\sqrt{5})}) \approx 0.557537.$$

Prije nastavka, napravimo malu digresiju. Naime, na kraju se ispostavi kako novi parametar t nije slučajan. Ispada da vrijedi $t = \frac{d}{a}$. Dakle, ključni parametar, do kojeg smo došli drukčijim putem, zapravo je jednak omjeru dviju od osnovnih veličina u zadatku

$$\begin{aligned}\frac{d}{a} &= \frac{x(2-x)}{x\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{x(2-x)}{x\sqrt{(2-x)(2+x)}} \\ &= \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} \\ &= t\end{aligned}$$

Vratimo se zadatku.
Sad imamo:

$$a(t) = \frac{8t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad t \in \langle 0, t_0]$$

$$m(t) = \frac{8t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad t \in \langle 0, t_0]$$

$$s(t) = \frac{-1 + 6t^2 - t^4 + \sqrt{1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8}}{2(1+t^2)^2}, \qquad t \in \langle 0, t_0]$$

$$d(t) = \frac{8t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad t \in \langle 0, t_0]$$

5.1.8 Skaliranje veličina a, m, s, d s $2(1+t^2)^2$

Još je preostalo uvrstiti veličine a, m, s, d u p i q. No, u svrhu pojednostavljenja krajnje jednadžbe, skalirajmo još jednom sve veličine s $2(1+t^2)^2$.
Tada imamo:

$a'(t) = a(t) \cdot 2(1+t^2)^2 = 16t(1-t^2)$

$m'(t) = m(t) \cdot 2(1+t^2)^2 = 16t^2$

$s'(t) = s(t) \cdot 2(1+t^2)^2 = -1 + 6t^2 - t^4 + \sqrt{1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8}$

$d'(t) = d(t) \cdot 2(1+t^2)^2 = 16t^2(1-t^2)$

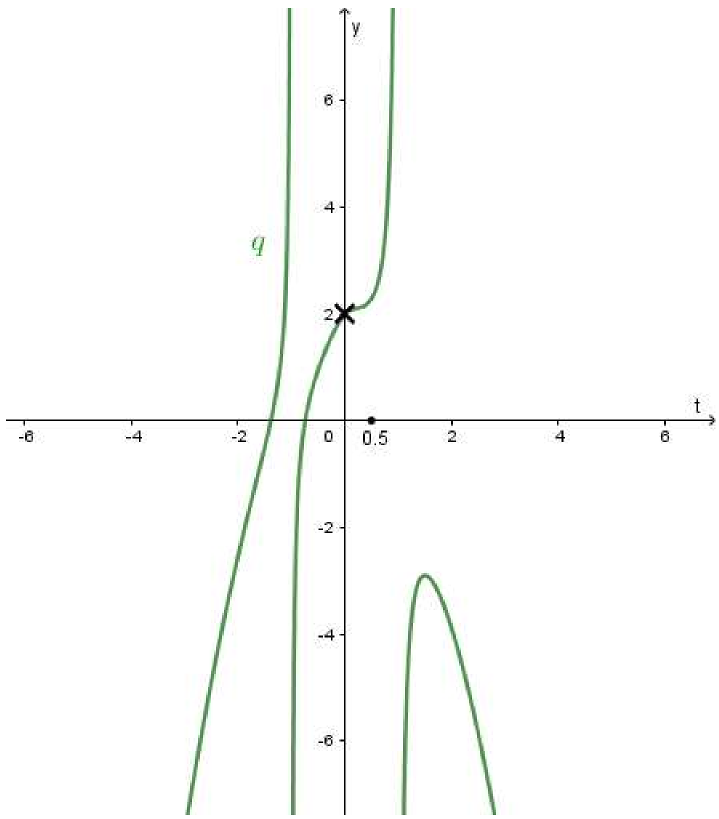
Kako smo već rekli da je q invarijantan na skaliranje veličina, uvrstimo tada nove veličine a', m', s' i d' u q.

Tada imamo:

$$q(t) = \frac{-1 + 22t^2 + 16t^3 - 33t^4 + 16t^6 + \sqrt{1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8}}{16t^2(1-t^2)} \tag{12}$$

Iz grafa funkcije $q(t)$ (što se ustanovi i derivacijom) vidi se da je funkcija q na intervalu $(0, t_0]$ rastuća.

Dakle, kako je q definirana za $0 < t \leq t_0 = 0.557537$, tako će nam u nastavku koristiti da je: $\lim_{t \to 0} q(t) = 2$.



Slika 5.4: Graf funkcije q na $\mathbb{R}$

U sljedećem koraku je potrebno još odrediti interval u kojem je q definiran, odnosno potrebno je odrediti interval od q za koji problem ima rješenje. Naime, nisu sve vrijednosti od q dozvoljene.

Kako smo već dobili da je $0 < t \leq t_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5} + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})}) \approx 0.557537$,
tako je i

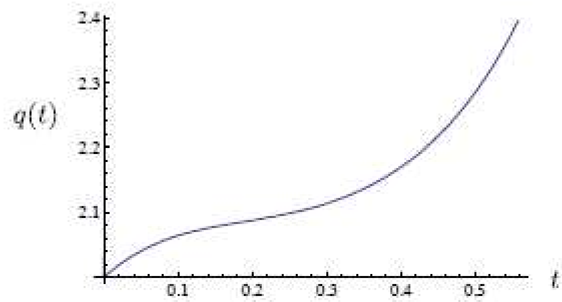
$$\xrightarrow[\text{rastuća na}(0,t_0)]{q} \lim_{t \to 0_+} q(t) = 2 < q \leq q_0 = q(t_0) = -3 + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}(125 - 41\sqrt{5}) \approx 2.394972,$$

tj. $q \in \langle 2, q_0]$.

Dakle, ako $q \notin \langle 2, q_0]$ tada ne postoji $t \in \langle 0, t_0]$ za koji bi postojalo rješenje.

5.2 Konačno rješenje u skupu $\mathbb{R}$

Budući da je q rastuća funkcija na tom intervalu, onda posebno za svaki $y \in \langle 2, q_0]$ postoji jedinstven $t \in \langle 0, t_0]$ tako da je $q(t) = y$.



Slika 5.5: Restrikcija funkcije q na $\langle 0, t_0]$ [3]

Ovime smo došli do posljednjeg koraka.

Na koncu je potrebno još pronaći vrijednost od t koja odgovara danoj vrijednosti q.

Jednadžba (12) se može zapisati kao:

$$(16t^2(-1+t^2)q + (-1+22t^2+16t^3-33t^4+16t^6))^2 = 1+20t^2-26t^4+20t^6+t^8.$$

Daljnjim raspisivanjem se ona svede na oblik $32t^2P(t,q) = 0$, gdje je

$$P(t,q) = 8t^{10} + (16q-33)t^8 + 16t^7 + (8q^2-49q+56)t^6 + (16q-33)t^5 - (16q^2-55q+39)t^4 - (16q-22)t^3 + (8q^2-23q+18)t^2 - t + q - 2.$$

Dakle, uz dane vrijednosti p i q prvo riješimo $P(t,q) = 0$ na način da izaberemo korijen $t \in \langle 0, t_0]$.

Zatim izračunamo vrijednosti $a'(t), m'(t), s'(t), d'(t)$.

Preostaje još pronaći a, m, s, d, a to lako dobijemo recipročnim skaliranjem veličine $p' = a' + m' + s' + d'$.

Zaključujemo,

- za $q \in \langle 2, q_0]$ **rješenje problema iz hrama Gion je jedinstveno.**
- za $q \leq 2$ ili $q > q_0$ **problem iz hrama Gion nema rješenja**, jer t nije ni definiran na $\mathbb{R} \setminus \langle 0, t_0]$.

Poglavlje 6

Rješavanje u skupu $\mathbb{Q}$

U ovom poglavlju ispitat ćemo egzistenciju rješenja promatranog problema za

$$a, m, s, d, p, q \in \mathbb{Q}.$$

Pretpostavimo, dakle, da su $a, m, s, d \in \mathbb{Q}$. Tada su i $p, q \in \mathbb{Q}$, a također, zbog $t = \frac{d}{a}$, tada je i $t \in \mathbb{Q}$.

Neka je $s \in \mathbb{Q}$. U prethodnom poglavlju dobili smo da je $s'(t) = s(t) \cdot 2(1+t^2)^2$. Tada mora vrijediti $s'(t) = s(t) \cdot 2(1+t^2)^2 \in \mathbb{Q}$.
Kako je

$$s' = -1 + 6t^2 - t^4 + \sqrt{1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8} \in \mathbb{Q}$$

i kako je $\mathbb{Q}$ zatvoren za zbrajanje tada je i $s' + 1 - 6t^2 + t^4 \in \mathbb{Q}$, tj. vrijedi:

$$\mathbb{Q} \ni s' + 1 - 6t^2 + t^4 = \sqrt{1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8} \tag{12}$$

pa mora biti i $\sqrt{1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8} \in \mathbb{Q}$.

Kvadriranjem (12) ne izlazimo iz skupa $\mathbb{Q}$ pa kvadrirajmo (12).

$$\Rightarrow (s' + 1 - 6t^2 + t^4)^2 = 1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8$$

Označimo $u := s' + 1 - 6t^2 + t^4$.

Tada imamo

$$\Rightarrow u^2 = 1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8 \tag{13}$$

Sada tražimo racionalno rješenje (t, u) koje zadovoljava (13).

Za $t = 0$ očito je $u = \pm 1$.

Neka je $t \neq 0$. Podijelimo (13) s t^4 :

$$\Rightarrow (\frac{u}{t^2})^2 = t^{-4} + 20t^{-2} - 26 + 20t^2 + t^4$$

$$\Rightarrow (\frac{u}{t^2})^2 = (t - \frac{1}{t})^4 + 24(t - \frac{1}{t})^2 + 16$$

Označimo

$$U := \frac{u}{t^2}$$

i

$$T := t - \frac{1}{t}.$$

$$\Rightarrow U^2 = T^4 + 24T^2 + 16 \tag{14}$$

Sada je $(T, U) = (t - \frac{1}{t}, \frac{u}{t^2})$ rješenje jednadžbe (14).

Za $T = 0$ očito je $U = \pm 4$.

Neka je $\delta = T^2 - U \Rightarrow U = T^2 - \delta$. (15)

Iz $T, U \in \mathbb{Q}$ slijedi da je i $\delta \in \mathbb{Q}$.

Uvrstimo (15) u (14):

$$\Rightarrow (T^2 - \delta)^2 = T^4 + 24T^2 + 16$$

$$\Rightarrow T^4 - 2\delta T^2 + \delta^2 = T^4 + 24T^2 + 16$$

$$\Rightarrow T^2(24 + 2\delta) = \delta^2 - 16$$

$$\Rightarrow T^2(24 + 2\delta) = (\delta - 4)(\delta + 4) \tag{16}$$

Pomnožimo (16) s $(24 + 2\delta)$:

$$\Rightarrow T^2(24 + 2\delta)^2 = (24 + 2\delta)(\delta - 4)(\delta + 4) \tag{17}$$

Iz (17) onda slijedi da je $(24 + 2\delta)(\delta - 4)(\delta + 4)$ kvadrat racionalnog broja.

Daljnjom zamjenom varijabli $\delta = 8X - 4$ iz (17) dobijemo:

$$(24 + 2\delta)(\delta - 4)(\delta + 4) = (16X + 16)(8X - 8)(8X) = 2^{10}(X - 1)(X + 1)X$$

tj.

$$T^2(24+2\delta)^2 = 2^{10}(X-1)(X+1)X = 2^{10}(X^3-X).$$

Na koncu dolazimo do zaključka da $2^{10}(X^3-X)$ mora biti kvadrat racionalnog broja.

Označimo $Y = \frac{T(24+2\delta)}{2^5}, Y \in \mathbb{Q}$ Tada tražimo racionalno rješenje (X,Y) jednadžbe:

$$Y^2 = X^3 - X. \tag{18}$$

Pitanje u kojem smo razmatrali postojanje racionalnih rješenja jednadžbe (13) svodi se, dosta neočekivano, na traženje netrivijalnih racionalnih rješenja jednadžbe $Y^2 = X^3 - X$, koja ima važnu ulogu u povijesnom razvitku teorije brojeva. Usko je povezana s Fermatovim rješavanjem diofantske jednadžbe $x^4 + y^4 = z^4$ njegovom metodom beskonačnog spusta.

Navest ćemo samo nekoliko činjenica u vezi jednadžbe (18) kako bismo barem donekle naznačili povezanost ovog "egzotičnog" sangaku zadatka s nekima od klasičnih problema iz povijesti matematike.

Pri rješavanju diofantskih jednadžbi, dakle polinomijalnih jednadžbi sa cjelobrojnim koeficijentima za koje se traže racionalna rješenja, vrlo često se primjenjuje osnovni rezultat o primitivnim Pitagorinim trojkama.

Neka su a, b, c pozitivni cijeli brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, tj. neka su a, b, c cjelobrojne duljine stranica pravokutnog trokuta. Za određivanje svih takvih Pitagorinih trojki pa i za određivanje racionalnih rješenja dovoljno je promatrati primitivne Pitagorine trojke. To su takve trojke a, b, c koje nemaju zajedničkog djelitelja većeg od 1. Također, bez ograničenja općenitosti može se izabrati da a bude neparan, b paran cijeli broj (očito ne mogu biti oba parna ili neparna). Tada vrijedi:

Teorem.
Neka je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka. Tada postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$. Pritom su m i n relativno prosti i različite parnosti.

Razmotrimo sada jednadžbu $Y^2 = X^3 - X$.
Zbog $Y^2 = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ očigledna su cjelobrojna rješenja za $Y = 0$, a to su $(0,0), (1,0)$ i $(-1,0)$.
U daljnjem pretpostavimo da su X i Y racionalni brojevi, oba različita od 0.

Uvedimo supstituciju $Y = \alpha X$ (očito je i α racionalan). Možemo pretpostaviti da je $\alpha > 0$, jer (18) ima rješenje (X, Y) ako i samo ako ima rješenje $(X, -Y)$. Također, $\alpha \neq 1$ jer za $Y = X$ nema racionalnih rješenja osim 0.

Uvrštavanjem u (18) i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu u X:

$$X^2 - \alpha^2 X - 1 = 0$$

Njezina je diskriminanta $\alpha^4 + 4$, a njezina vrijednost trebao bi biti kvadrat racionalnog broja (da bi postojalo racionalno rješenje za X). Stavimo $\alpha = \frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti prirodni brojevi, pritom različiti. Uvjet za racionalnost diskriminante svodi se tada na uvjet da je $p^4 + 4q^4$ cjelobrojni kvadrat.

Stavimo $p^4 + 4q^4 = s^2$, za neki cijeli broj s.
Drukčije,

$$(p^2)^2 + (2q^2)^2 = s^2$$

pa $(p^2, 2q^2, s)$ čine primitivnu Pitagorinu trojku, ako možemo pretpostaviti da je p neparan. Naime, tada su p i $2q$ relativno prosti. Lako se vidi da to doista možemo uzeti bez ograničenja općenitosti, jer za parni p, uzmimo $p = 2r$, dobiva se jednadžba jednakog oblika, samo za trojku $(q^2, 2r^2, \frac{s}{2})$.

Prema Teoremu o primitivnim Pitagorinim trojkama, postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $p^2 = m^2 - n^2$, $2q^2 = 2mn$, $s = m^2 + n^2$. Uz to su m i n relativno prosti.

Dakle, $q^2 = mn$, a kako su m i n relativno prosti, moraju oba biti cjelobrojni kvadrati. Naime, svaki primbroj djelitelj od q dijeli s parnim eksponentom i desnu stranu jednakosti, a onda mora dijeliti ili m ili n.

Stavimo $m = u^2$ i $n = v^2$ pa jednakost $p^2 = m^2 - n^2$ prelazi u oblik $p^2 = u^4 - v^4$.

Napišemo li ovu jednakost u obliku

$$p^2 + v^4 = u^4$$

ponovno prepoznajemo jednu primitivnu Pitagorinu trojku (p, v^2, u^2). Naime, p je neparan, a u^2 i v^2 relativno prosti.
Analogno kao prije, zaključujemo da postoje prirodni brojevi g i h, relativno prosti, takvi da je $p = g^2 - h^2, v^2 = 2gh$ i $u^2 = g^2 + h^2$.

Sad iz $v^2 = 2gh$, slično kao prije, vidimo da je jedan od brojeva g i h kvadrat cijelog broja, a drugi je jednak dvostrukom kvadratu (jer v je očito paran pa je gh jednak $2(\frac{v}{2})^2$). Ne možemo biti sigurni koji od g i h ima pojedini oblik, ali kako je $u^2 = g^2 + h^2$, a $\{g, h\} = \{j^2, 2k^2\}$ za neke cjelobrojne j i k, imamo

$$j^4 + 4k^4 = u^2.$$

Ovo je jednadžba jednakog oblika kao $p^4 + 4q^4 = s^2$.

Uočimo da je $s > m$, zbog $s = m^2 + n^2$, a da je $m > u$, jer je $m = u^2$. Stoga je $u < s$.

Time smo došli do ključnog zaključka za primjenu metode koju je Fermat nazvao **metodom beskonačnog spusta**.

Naime, ponavljanjem prethodnog postupka formira se strogo padajući niz prirodnih brojeva. U sljedećem koraku dobili bismo trojku prirodnih brojeva koja čini rješenje jednadžbe jednakog oblika, ali na desnoj strani bio bi kvadrat prirodnog broja koji je strogo manji od u i tako dalje.

Budući da ne postoji beskonačni strogo padajući niz prirodnih brojeva, imamo proturječje s pretpostavkom da početna jednadžba $p^4 + 4q^4 = s^2$ ima rješenje u skupu cijelih brojeva različitih od 0.

Time niti jednadžba $X^2 - \alpha^2 X - 1 = 0$ nema racionalnih rješenja.

Dakle, promatrana jednadžba

$$Y^2 = X^3 - X$$

nema racionalnih rješenja (X, Y) za koje je $Y \neq 0$.

Zaključujemo da su jedina racionalna rješenja jednadžbe

$$Y^2 = X^3 - X$$

upravo $(0, 0), (1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Odatle slijedi

$$(24 + 2\delta)(\delta - 4)(\delta + 4) = 2^{10}(X - 1)(X + 1)X$$

$$\Rightarrow (24 + 2\delta)(\delta - 4)(\delta + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \delta \in \{-12, 4, -4\}.$$

No, ako je $\delta = -12$ onda u (16) imamo $0 = (\delta - 4)(\delta + 4)$, iz čega bi slijedilo da je δ istovremeno i 4 ili -4.
Dakle, $\delta = -12$ je nemoguće.

Ako je $\delta = 4$ ili $\delta = -4$ onda bi iz (16) slijedilo $T = 0$. U tom slučaju iz $T = t - \frac{1}{t}$ dobijemo $t \in \{-1, 1\}$. Iz (13) izravno dobijemo $u^2 = 16$, tj. $u \in \{4, -4\}$. pa su rješenja jednadžbe (13) parovi $(t, u) \in \{(1, 4), (1, -4), (-1, 4), (-1, -4)\}$.

Na početku smo još komentirali da jednadžba (13) ima rješenja $(0, 1), (0, -1)$.

I konačno, sva racionalna rješenja početne jednadžbe $u^2 = 1 + 20t^2 - 26t^4 + 20t^6 + t^8$ su: $(t, u) \in \{(1, 4), (1, -4), (-1, 4), (-1, -4), (0, 1), (0, -1)\}$.

No, niti jedno rješenje ne odgovara uvjetu $t \in \langle 0, t_0]$.

Dakle, promatrani problem nema rješenja u skupu racionalnih brojeva.

Zanimljvo je, da je, metodom beskonačnog spusta, koja je korištena i ovdje, dokazano da i Fermatova jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema netrivijalnih cjelobrojnih rješenja. Naime, zbog $(z^2)^2 = z^4$ je ta jednadžba posebni slučaj jednadžbe $x^4 + y^4 = t^2$.

To je, dakle, slučaj $n = 4$ znamenitog Fermatovog problema o nepostojanju netrivijalnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x^n + y^n = z^n$ za $n > 2$.

Navest ćemo još jednu pojavu jednadžbe $Y^2 = X^3 - X$ u problemu s geometrijskom motivacijom, a zapravo je riječ o Fermatovom teoremu u kojem je prvi put prikazao metodu beskonačnog spusta.

Znamo da su cjelobrojne duljine stranica pravokutnog trokuta proporcionalne članovima primitivne Pitagorine trojke. Površina trokuta jednaka je polovini umnoška kateta; uzmimo da su to $a = k(m^2 - n^2)$ i $b = 2kmn$, dakle ta površina je cijeli broj oblika $k^2(m^2 - n^2)mn$.

Stavimo li $\frac{m}{n} = X$, površina je jednaka umnošku racionalnih brojeva $k^2n^2(X^2 - 1)X$. Ako bi površina bila jednaka kvadratu nekog cijelog broja, uzmimo p^2, onda bi vrijedilo $\frac{p^2}{(kn^2)^2} = (X^2 - 1)X$ pa bi jednadžba $Y^2 = X^3 - X$ imala netrivijalno racionalno rješenje $X = \frac{m}{n}, Y = \frac{p}{kn^2}$.

To daje negativan odgovor na problem postojanja pravokutnog trokuta sa cjelobrojnim duljinama stranica čija je površina jednaka kvadratu cijelog broja. Rezultat očito vrijedi i uz pretpostavku da se cjelobrojne vrijednosti zamijene racionalnima, kako je taj problem Fermat izvorno i postavio.

Bibliografija

[1] H. Fukagawa, T. Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*; Princeton University Press, Princeton, 2008

[2] I. Ivić, *Japan i politika izolacionizma* (1638-1853), Pro tempore, No 4, 2007, ISHA Zagreb - Klub studenata povijesti

[3] J. A. de Reyna, D. Clark, N. D. Elkies, *A Modern Solution to the Gion Shrine Problem*, Mathematics Magazine, 92:2 (2019), 110–122.

[4] M. Holly, *The Gion Shrine Problem: A Solution in Geometry*, Virginia Commonwealth University, 2018. `https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1807/1807.01105.pdf`

[5] Sujatha Ramdorai, *Interview with Hidetoshi Fukagawa*, Asia Pacific Mathematics Newsletter, Vol. 4, No 4, 2013, 30-36. `https://www.asiapacific-mathnews.com/03/0304/0030_0036.pdf`

Sažetak

Iz japanske tradicije postavljanja sangaku-a u svetištima i hramovima proiziašli su mnogi zanimljivi problemi, od kojih je jedan, takozvani *Problem iz hrama Gion*. Iako se japanski matematičar Ajima Naonobu još 1774. godine pročuo rješenjem u kojem je složeni geometrijski zadatak sveo na rješavanje algebarske jednadžbe stupnja 10, tek je u 21. stoljeću objavljeno sažetije rješenje i temeljita analiza postojanja rješenja.

U ovom radu prikazano je to rješenje, a postupak rješavanja je sistematiziran i detaljno objašnjen. Određeno je područje vrijednosti parametra u skupu realnih brojeva za koje je problem rješiv, a rješenje je tada jedinstveno. Ponovno ključnu ulogu ima polinom 10. stupnja, ali njegov je zapis ovaj put značajno jednostavniji, zahvaljujući povoljnijem izboru varijable, dobivene slijedom supstitucija proizašlih iz trigonometrijskih relacija.

Dodatno, razmatra se postojanje racionalnih rješenja problema. Zanimljivo je da se problem svodi na traženje netrivijalnih rješenja diofantske jednadžbe $Y^2 = X^3 - X$ koja je imala značajnu ulogu u razvitku teorije brojeva. Svojom metodom beskonačnog spusta P. Fermat pokazao je da diofantska jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema netrivijalnih racionalnih rješenja, odakle slijedi da ni razmatrani problem iz hrama Gion nema odgovarajućih rješenja u racionalnim brojevima.

Summary

Japanese tradition of hanging Sangaku in temples and shrines resulted in many interesting problems, one of which is, so called, *Gion Shrine Problem*. Although a Japanese mathematician Ajima Naonobu was famed in 1774 for deriving a solution in which he reduced a complex geometric problem to that of solving an algebraic equation of degree 10, it was only in 21st century that it was published a concise and more thorough analysis of existence of solutions.

That solution is presented in this paper and the entire solution process is systemized and explained in detail. A domain, in which a parameter is defined in the reals and for which the problem is solvable, is specified. It then follows that a solution is unique. A crucial role plays again a polynomial of degree 10, but this time with a significantly simpler notation, thanks to a much more favorable choice of variable obtained from a sequence of supstitutions regarding trigonometric relations.

In addition, the existence of rational solutions is examined. It is interesting to point out that the said problem is reduced to finding nontrivial solutions of Diophantine equation $Y^2 = X^3 - X$, which played a remarkable role in history of number theory. With his method of infinite descent P. Fermat showed that a Diophantine equation $x^4 + y^4 = z^4$ has no nontrivial rational solutions, from which it followed that said *Gion Shrine Problem*, likewise, does not have solutions in rationals.

Životopis

Rođena sam 19. srpnja 1994. godine u Dubrovniku.
Svoje obrazovanje započela sam u Osnovnoj školi Kardinala Stepinca u Neumu. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja, 2009. godine upisala sam prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Gimnaziji Metković. Po završetku srednješkolskog obrazovanja 2013. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2017. godine stekla sam diplomu prvostupnice edukacije matematike. Nakon toga sam 2017. godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički također na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.