Modeliranje igara na sreću pomoću Brownovog gibanja i primjene

Mesarić, Emil Miroslav

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:951012

Modeliranje igara na sreću pomoću Brownovog gibanja i primjene

Mesarić, Emil Miroslav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Emil Miroslav Mesarić

MODELIRANJE IGARA NA SREĆU POMOĆU BROWNOVOG GIBANJA I PRIMJENE

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Emil Miroslav Mesarić

MODELIRANJE IGARA NA SREĆU POMOĆU BROWNOVOG GIBANJA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Zoran Vondraček

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Ideja igara na sreću seže daleko u prapovijest, kada nastaju prve primitivne kockice, astragaoli, koji su bili korišteni i u Rimskom carstvu. Nadalje, kombinatorika i vjerojatnost su nastale upravo iz analiziranja igara na sreću o čemu su pisali talijanski matematičari u 16. stoljeću. Prve službene kockarske kuće nastaju u prostorijama američkih salona, a danas ih poistovjećujemo sa onima u Las Vegasu i Monte Carlu.

Igre na sreću koje nude kockarnice dijele se na igre uživo (sudjeluje krupije) i igre na automatima. Najpoznatije igre uživo su rulet i blackjack. Danas je gotovo nemoguće prošetati ulicama bilo kojeg većeg grada, a ne ugledati barem jedan automat klub što govori da taj biznis bilježi sve veći rast. Također, sve veću popularnost dobivaju i online casina.

Kako bi privukle što veći broj igrača, kockarnice nude bonuse i promocije (češće se vežu uz online casina). Ideja koja stoji iza bonusa jest da ukoliko napravite uplatu na vaš korisnički račun, casino vam daje dodatni besplatni novac za igru. Promocije, s druge strane, promoviraju takve bonuse, no uz to uključuju i razne turnire, povrate na gubitak, vremenski ograničene bonuse, jednokratne bonuse itd.

Opće je poznato da su sve igre na sreću namještene tako da je kockarnica u dugoročnoj prednosti nad igračem. Taj pojam definiramo kao prednost kuće (*eng. House Advantage, HA*) To bi značilo da koliko god igrali, kao igrač ćete biti dugoročno u gubitku. Promocije su također u osnovi zamišljene da igrača stave u još nepovoljniji položaj. No, ponekad se dogodi da kockarnice objave lošu promociju koja ih dovede u negativnu prednost. Jedan takav primjer je priča o Don Johnsonu koji je tokom 6 mjeseci u 2011. godini igrajući blackjack osvojio preko 15 milijuna dolara u tri kockarnice u Atlantic Cityju. U nastavku ćemo detaljnije proučiti kako funkcioniraju casino bonusi i promocije, modelirati igre na sreću s uključenim povratom na gubitak pomoću Brownovog gibanja s driftom te odrediti optimalna vremena zaustavljanja dobitka, odnosno gubitka, s ciljem maksimizacije dugoročnog profita.

Poglavlje 1

Casino igre

Kockarnice u svojoj ponudi imaju razne vrste igara na sreću. Kako bismo ih u konačnici modelirali pomoću Brownovog gibanja, matematički ćemo ih definirati očekivanjem te varijancom, odnosno standardnom devijacijom, a kako bismo odredili te vrijednosti, ishode igara na sreću ćemo predstaviti kao diskretnu slučajnu varijablu. Za početak, definirajmo diskretnu slučajnu varijablu i njenu vjerojatnosnu distribuciju, matematičko očekivanje te standardnu devijaciju kao u [7].

Definicija 1.0.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zove se* diskretna slučajna varijabla *ako postoji prebrojiv skup* $D = \{a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{R}$ *takav da je*

i) $X(\omega) \in D$ *za sve* $\omega \in D$

ii) $\{X = a_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_j\} \in \mathcal{F}$ *za sve* $j \in \mathbb{N}$

Napomena 1.0.2. *Neka je* Ω *konačan ili prebrojiv te* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. *Tada je svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *diskretna slučajna varijabla.*

Diskretnom slučajnom varijablom X ćemo modelirati slučajni ishod igre na sreću iz perspektivne igrača.

Definicija 1.0.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $X : \Omega \to D = \{a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{R}$ *diskretna slučajna varijabla. Funkcija* $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definirana sa*

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

zove se diskretna (vjerojatnosna) funkcija gustoće *slučajne varijable* X.

Neka je $p_j = \mathbb{P}(X = a_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f(x) = \begin{cases} p_j, & x = a_j \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Gornju relaciju često pišemo kao

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

i zovemo *distribucija* od X.

Definicija 1.0.4. *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funckijom gustoće f. Ako vrijedi $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f(x) < \infty$, onda kažemo da X ima* matematičko očekivanje *koje definiramo kao*

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x).$$

Uočimo, ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix},$$

onda je $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f(x) = \sum_{a_j \in D} |a_j| p_j$ i $\mathbb{E}(X) = \sum_{a_j \in D} a_j p_j$. Ako X poprima najviše konačno mnogo vrijednosti, onda X nužno ima očekivanje. Češće ćemo koristiti notaciju $\mu = \mathbb{E}X$.

Matematičko očekivanje u svijetu kockanja predstavlja očekivani iznos novca koji igrač može osvojiti ili izgubiti dugoročno na pojedinačni ulog. Ako je očekivanje negativno, kao što je na većinu oklada, igrač može očekivati da će izgubiti novac u dugom roku.

Prednost kuće, HA (*eng. house advantage*), je suprotna očekivanju. Ona je najčešći pokazatelj vrijednosti neke igre na sreću. Iz perspektive kockarnice, HA predstavlja koliko mnogo, u terminu postotka uloženog novca, kockarnica očekuje da će zadržati u dugom roku.

Definicija 1.0.5. *Neka je X diskretna slučajna varijabla koja predstavlja ishode neke igre na sreću. Tada se prednost kuće računa prema formuli*

$$HA = -\frac{\mathbb{E}X}{x} \cdot 100\%$$

gdje x predstavlja ulog po rundi igre na sreću.

Definicija 1.0.6. *Igra na sreću je "fer" ako vrijedi očekivanje* $\mathbb{E}X = 0$.

Definicija 1.0.7. *Neka je* X *diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f *i očekivanjem* μ. Varijanca *od* X *definira se kao*

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mu)^2].$$

Standardna devijacija *od* X *je definirana kao* $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Dok nam s jedne strane očekivanje govori o tipičnom ishodu, devijacija nam daje tipično odstupanje od očekivanog ishoda.

1.1 Rulet

U igri rulet, mala metalna kuglica se baca u kotač i pada u numerirani džepić. Europski rulet sadrži 37 brojeva, gdje je 0 označena zelenom bojom, a ostalih 36 brojeva podijeljeno je podjednako na crvenu i crnu boju. Američki rulet, u odnosu na europski, sadrži i dvostruku nulu, 00, koja je također u zelenoj boji.

Što se tiče isplata, ovise o tipu uloga. U tablici 1.1 prikazani su svi tipovi uloga s pripadnim vjerojatnostima te isplatnim omjerima. Kada govorimo o ruletu, sve primjere i izračune temeljimo na europskom ruletu (37 brojeva). Vjerojatnosti dobitka dobivamo po formuli

$$\mathbb{P}(dobitak) = \frac{\#\text{uključenih brojeva u ulog}}{\#\text{brojeva na kotaču}}$$

a isplatni omjer, za ulog na n brojeva se računa $\frac{36-n}{n}$: 1. Ako igrač postigne dobitak, inicijalni ulog mu se vraća sa isplatom.

Napomena 1.1.1.

1. *Ulog* ***košara*** *je dostupan samo u američkom ruletu i odnosi se na kombinaciju brojeva* 0,00,1,2 *i* 3. *Formula za isplatni omjer ne vrijedi u ovom slučaju.*

2. *Ulog* ***tucet*** *obuhvaća uloge na brojeve od* 1 *do* 12, 13 *do* 24 *te* 25 *do* 36 *ili na bilo koji od* 3 *stupca sa slike.*

3. *Ulozi* ***par-nepar***, ***niski-visoki***($1 - 18$ *ili* $19 - 36$) *imaju iste vrijednosti kao ulog* ***crno-crveno***.

Ulog	Brojeva uključeno	Vjerojatnost	Omjer za isplatu
Izravno	1	1/37	35 : 1
Razdvajanje	2	2/37	17 : 1
Red	3	3/37	11 : 1
Kut	4	4/37	8 : 1
Košara	5	5/38	6 : 1
Redak	6	6/37	5 : 1
Tucet	12	12/37	2 : 1
Crno-crveno	18	18/37	1 : 1

Tablica 1.1: Tipovi uloga

Primjer 1.1.2. *Neka je X slučajna varijabla koja predstavlja ishod uloga od 1 kn na broj 17 u ruletu. Vjerojatnosna distribucija varijable X je tada*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 35 \\ \frac{36}{37} & \frac{1}{37} \end{pmatrix}$$

Matematičko očekivanje slučajne varijable X je tada

$$\mathbb{E}X = -1 \cdot \frac{36}{37} + 35 \cdot \frac{1}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0.027\text{kn}$$

Generalno, za bilo koji ulog na n brojeva, distribucija slučajne varijable X je

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & \frac{36-n}{n} \\ \frac{37-n}{37} & \frac{n}{37} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

te je očekivanje

$$\mathbb{E}X = -1 \cdot \frac{37-n}{37} + \frac{36-n}{n} \cdot \frac{n}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$$

U kontekstu kockanja, $\mathbb{E}X$ predstavlja "tipični" ishod. U jednoj rundi ruleta, nećemo izgubiti 0.027 kn na ulog od 1kn, ali ako odigramo veliki broj rundi, primjetit ćemo da nam je prosječan gubitak po rundi upravo blizu tog iznosa. U generaliziranom primjeru, možemo primjetiti da očekivanje ne ovisi o broju n, što znači da kazina imaju konstantnu prednost od 2.7% na svaki ulog u ruletu.

Što se tiče standardne devijacije ruleta, promotrit ćemo ju na generaliziranom slučaju za ulog na n brojeva.

Primjer 1.1.3. *Neka je X slučajna varijabla distribucije 1.1. Standardna devijacija joj je tada*

$$\sigma(X) = \sqrt{(-1)^2 \cdot \frac{37-n}{n} + \frac{(36-n)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{37} - \left(\frac{-1}{37}\right)^2} = \sqrt{\frac{1296}{37n} - \frac{1296}{1369}}$$

Primjetimo da $\sigma(X)$ ovisi o broju n te se lako pokaže da je takva funckija padajuća, odnosno ako ulažemo na više brojeva, devijacija se smanjuje. To se također vidi iz distribucije X, jer se povećanjem n smanjuju vrijednosti od X pa je i devijacija manja.

Primjer 1.1.4. *Odredimo vjerojatnosne distribucije te standardnu devijaciju za uloge razdvajanje ($n = 2$) te za ulog tucet ($n = 12$).*

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ \frac{35}{37} & \frac{2}{37} \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{25}{37} & \frac{12}{37} \end{pmatrix}$$

- *razdvajanje* $\sigma(X_1) = \sqrt{16.57} = 4.07$
- *tucet* $\sigma(X_2) = \sqrt{1.97} = 1.404$

1.2 Blackjack

Igranje Blackjack-a je strateško razmatranje svih mogućnosti i izbora poteza koji statistički daju najveći očekivani povrat. Igra se s minimalno jednim špilom igračih karata. Cilj igre je uzeti karte što bliže, ali ne i više od vrijednost 21 i pobijediti djelitelja. Međutim, ako Vaša ruka prijeđe 21, smatrati će se da ste izgubili bez obzira na ruku djelitelja. Djelitelj na početku dobiva 2 karte, jednu okrenutu licem prema gore, drugu prema dolje. Isplate u blackjack-u su 1 : 1, a ako pogodite **blackjack** isplata je 3 : 2.

Vrijednosti karata :

- kralj, kraljica i dečko vrijede 10
- karte s brojevima zadržavaju nominalnu vrijednost
- as vrijedi 1 ili 11, ovisno o igraču

Na početku, igrač postavlja ulog. Nakon primitka prve dvije karte, igrač ima nekoliko opcija koje treba razmotriti. U početku, odluka će biti hoće li tražiti **još** (*eng. hit*) ili **dosta** (*eng. stand*) - to su dvije najosnovnije odluke u blackjacku.

Ako tražite **još**, a treća karta daje ukupnu vrijednost veću od 21, igrač gubi. Ako vrijednost nije veća od 21, možete tražiti **još** dok niste zadovoljni svojom rukom. **Dosta** znači da ste zadovoljni svojom trenutnom rukom.

Primjer 1.2.1. *Primjer gdje igrač koristi odluku* ***još*** *- dobiva* $K\diamondsuit 6\clubsuit$ *gdje je ukupna suma* 16*. Uzima još jednu,* $9\spadesuit$ *što rezultira gubitkom zato što je ukupna vrijednost veća od* 21 $(16 + 9 = 25)$*.*

Primjer 1.2.2. *Primjer gdje igrač koristi odluku* ***još****, a zatim odluku* ***dosta*** *- dobiva* $Q\spadesuit 4\clubsuit$ *gdje je ukupna suma* 14*. Uzima još tri karte* $3\diamondsuit$*,* $A\spadesuit$*,* $2\heartsuit$ *što rezultira mogućim dobitkom* $(14 + 3 + 1 + 2 = 20)$*.*

Odluke koje igrač može upotrijebiti su također:

- udvostručiti/*double down* - dozvoljena nakon podjele prve dvije karte, dopušteno je staviti dodatan ulog na već postojeći te nakon toga moguće je tražiti još samo jednu kartu
- razdvojiti/*split* - ako prve dvije karte imaju isto vrijednost npr. $K\diamondsuit K\clubsuit$, mogu se razdvojiti u dvije odvojene ruke. Razdvojene ruke postaju odvojeni ulozi i djelitelj će na svaku dodati još po jednu kartu
- predaja/*surrender* - nudi se kada djelitelj dobije ili as ili kartu vrijednosti 10. Prilikom predaje, igrač daje pola uloga kući
- osiguranje/*insurance* - kad je okrenuta djeliteljeva karta as, može se uzeti osiguranje u slučaju da on ima **blackjack** (osiguranje je dodatna oklada). Ako djelitelj ima blackjack, Vi pobjeđujete te se isplaćuje 2 : 1
- izjednačeno/*push,tie*

Odluke su detaljnije opisane u [1]. Zbog svih ovih mogućnosti, jedna runda blackjack-a može imati i preko 15 različitih ishoda. Još jedan važan pojam jest **osnovna strategija** (*eng. basic strategy*). To je skup pravila za odlučivanje koje igrač mora slijediti temeljen na velikom broju simuliranih ruku. Osnovna strategija igraču daje najbolji savjet o tome kako igrati ruku s obzirom na njegov par karata te djeliteljev.

Ovisno o skupu pravila, prednost kuće, HA, u blackjack-u varira između 0% i 3% za igrače koji igraju osnovnom strategijom. Ako igramo bez osnovne strategije, HA se povećava. Pretpostavimo da na početku igramo sa jednim špilom za koji vrijede standardna pravila:

- djelitelj staje na bilo kojem zbroju ≥ 17,

- igrač može udvostručiti za bilo koji par karata te može udvostručit nakon razdvajanja para,
- asevi mogu biti ponovo razdvojeni,
- **blackjack** se isplaćuje 3 : 2.

U ovakvom slučaju, igrajući jednim špilom karata, blackjack je gotovo "fer" igra ako koristimo osnovnu strategiju. U knjizi [3] opisana je tablica s popisom dodatnih pravila u blackjack-u koja se primjenjuju u kockarnicama te kako ona utječu na prednost kuće.

Pravilo	Efekt na HA
2 špila	+0.32%
4 špila	+0.48%
6 špilova	+0.54%
8 špilova	+0.57%
Djelitelj uzima "još" na *soft* 17*s*	+0.20%
Ne može se udvostručiti na *soft* zbroj	+0.13%
Moguće udvostručiti samo na 10 i 11 (D10)	+0.26%
Ne može se udvostručiti na 9	+0.13%
Ne može se udvostručiti na 10	+0.52%
Samo se može udvostručiti na 11	+0.78%
Ne može se udvostručiti	+1.60%
Ne mogu se razdvojiti asevi	+0.18%
Nema razdvajanja parova	+0.40%
Djelitelj pobjeđuje remi	+9.00%
blackjack se isplaćuje 6 : 5	+1.39%
blackjack se isplaćuje 1 : 1	+2.32%
Može se udvostručiti na 2 ili više karata	−0.24%
Može se udvostručiti nakon razdvajanja (DAS)	−0.14%
Kasna predaja (LSR)	−0.06%
Rana predaja (ESR)	−0.62%
Asevi se mogu ponovo razdvojiti (RSA)	−0.06%
"Blackjack" se isplaćuje 2 : 1	−2.32%
6 karata u zbroju manjem od 21 pobjeđuje	−0.15%

Tablica 1.2: Efekti na HA promjenom pravila u Blackjacku

Napomena 1.2.3. *Za Tablicu* 1.2 *vrijedi:*

- *Postoci će se neznatno razlikovati ovisno o broju špilova.*
- *Kada ćemo definirati pravila blackjack-a koja vrijede za određenu kockarnicu, koristit ćemo se kraticama.*
- $S17$ *- djelitelj igra* ***dosta*** *na* 17
- $H17$ *- djelitelj igra* ***još*** *na* 17
- *DOA - dozvoljeno udvostručiti na na bilo koje prve dvije karte*
- *HA za blackjack sa određenim skupom pravila dobivamo sumirajući "efekte na HA".*

Primjetili smo kako zbog velikog broja mogućnosti i varijacije u pravilima otežava prikazivanje jedne runde blackjack-a kao diskretnu slučajnu varijablu te određivanje očekivanja. Analogno vrijedi i za varijancu. Stoga se iste dobivaju simulacijom velikog broja odigranih ruka. Iskoristit ćemo podatke sa web stranice *wizardofodds.com.* Tamo se također nalazi i nekoliko primjera vjerojatnosne distribucije slučajne varijable koja opisuje rundu blackjack-a. Sljedeća tablica prikazuje očekivanja i varijance za različite skupove pravila.

# špilova	$soft17$	DAS	LSR	RSA	μ	σ^2
6	dosta	da	da	da	-0.00281	1.303
6	dosta	ne	ne	ne	-0.00573	1.295
6	još	da	da	da	-0.00473	1.312
6	još	ne	ne	ne	-0.00787	1.346
6	još	da	ne	ne	-0.00628	1.303
8	još	ne	ne	ne	-0.00812	1.309
2	još	da	ne	ne	-0.00398	1.341

Tablica 1.3: Očekivanje i varijanca za različite skupove pravila

Primjer 1.2.4. *Što se tiče našeg glavnog primjera o Don Johnsonu, on je igrao blackjack u Atlantic City-u sa sljedećim pravilima :* 6 *špilova, DOA, DAS,* $S17$*, LSR i RSA, gdje* $HA = 0.2903\%$ *te* $\sigma = 1.141$.

1.3 Igre na automatima

Igre na automatima (*eng. slot machines*), poznatije kao slotovi, dolaze u različitim varijantama. Tradicionalni slotovi imali su 3 valjka i bili su mehanički. Današnje igre na automatima su računalne video igre s istim konceptom kao i tradicionalni slotovi. Klasična igra sadrži 5 valjaka sa određenim brojem simbola. Nakon što se postavi željeni ulog, zavrte se valjci te će igra biti dobitna ako nekoj od dobitnih linija pojave najčešće 3 ili više istih simbola. Kod modernih igara, pozicija svakog valjka nakon pritiska tipke "zavrti" je determinirana generatorom slučajnih brojeva (*eng. random number generator, RNG*). Svaka kombinacija simbola ima svoju vjerojatnost pojavljivanja te se pojavljuje slučajno. Određivanje HA te σ ćemo pokazati na jednostavnom primjeru.

Primjer 1.3.1. *Pretpostavimo da igra ima* 3 *valjka na kojem se nalaze* 3 *simbola :* $\spadesuit$*,* $\clubsuit$ *i* $\diamondsuit$*. Igrač ulaže* 1 *kn po vrtnji. Dobitak se isplaćuje ako se pojave* 3 *ista simbola u liniji, a isplate su :* $3 \times \spadesuit = 4\text{kn}$ *,* $3 \times \clubsuit = 6\text{kn}$ *i* $3 \times \diamondsuit = 12\text{kn}$*. Ovakvu igru lako možemo predstaviti kao slučajnu varijablu* X *sa razdiobom*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & 12 \\ \frac{24}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

Očekivanje je tada $\mu = 0.074$*, a* $\sigma = 2.854$*. Prednost kuće je* $HA = 7.4\%$*. Češće se koristi pojam povrat igraču (eng. return to player, RTP), što je komplement prednosti kuće, odnosno* $RTP = 1 - HA$*. Tipičan* RTP *je u rasponu od* $93 - 97\%$*.*

Važan pojam za igre na automatima u kombinaciji sa promocijama jest "broj uplata u igru". Tijekom igre događa se niz gubitaka i dobitaka što znači da će ukupan iznos svih uloga (prije nego što izgubimo sve) biti veći od početnog iznosa s kojim igramo. Broj uplata u igru predstavlja ukupan teoretski iznos svih uloga u igru, te se određuje pomoću RTP-a.

Primjer 1.3.2. *Neka igrač započinje igrati neku igru na automatu* ($RTP = 96\%$) *sa* 100 kn*. Teoretski, ako igrač postavi maksimalan ulog, isplatit će mu se* $96\% \cdot 100 = 96\text{kn}$*. U sljedećoj vrtnji postavi ponovo maksimalan ulog, te će mu dobitak biti* $96\% \cdot 96 = 92.16\text{kn}$*. Broj uplata u igru je u ovom trenutku* $100 + 96 = 196\text{kn}$*. Ako ponavljamo ovaj postupak beskonačno mnogo puta, primjetimo da se ovdje radi o geometrijskom redu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ *gdje je* a_1 *početni iznos, a* q *je* $RTP < 1$ *te red konvergira pa mu je suma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot 0.96^{n-1} = \frac{100}{1 - 0.96} = 2500\text{kn}$$

Općenito, za početni iznos x te RTP igre na automatu vrijedi da je broj uplata u igru $u = \frac{x}{1-RTP}$ prije nego izgubimo sve. Igre na automatima neće biti primjer za promociju povrata na gubitak jer je HA najćešće vrlo visok, ali su često uključene u druge promocije.

Definicija 1.3.3. *Frekvencija dobitka (eng. hit frequency) je postotak vremena kad igra na automatu daje dobitke te se računa kao* $\frac{\#\text{broj dobitinih kombinacija}}{\#\text{broj svih kombinacija}}$.

Definicija 1.3.4. *Volatilnost je mjerilo nepredvidive promjene neke varijable u nekom vremenskom periodu. U kontekstu igara na sreću, govori nam kolike varijacije od* HA *(ili* RTP*-a) možemo očekivati te za određivanje je li promatrani* HA *odgovarajuć za igru na sreću.*

Definicija 1.3.5. *Indeks volatilnosti je mjera volatilnosti te se računa po formuli*

$$V.I. = z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma$$

gdje je σ *standardna devijacija po jednom ulogu,* α *razina značajnosti te* z *vrijednost za pripadnu vjerojatnost jedinične normalne razdiobe.*

Primjer 1.3.6. *Pretpostavimo da imamo dvije igre na sreću, A i B, gdje igra A ima veći indeks volatilnosti. Općenito, to znači da igra A ima manju frekenciju dobitka u odnosu na B, no dobitci će biti veći.*

Kockarnice žele imat u vidu i moguće oscilacije $RTP - a$ nakon n vrtnji, odnosno žele na razini značajnosti α odrediti $(1-\alpha)100\%$ pouzdane intervale. Najčešće su to intervali s pouzdanošću 90%.

Definicija 1.3.7. *Neka je* n *broj vrtnji u igri na automatu. Gornja i donja granica* $(1-\alpha)100\%$ *pouzdanog intervala za* RTP *je*

$$RTP \pm \frac{V.I.}{\sqrt{n}}.$$

Te granice su točne za veliki broj vrtnji zbog centralnog graničnog teorema koji osigurava da distribucija povrata bude normalna (detaljnije u primjeru 1.4.2). Analogno možemo odrediti granice i za HA.

Za svaku igru proizvođači naprave tablicu (*eng. par sheet*) na kojem su prikazani mogući ishodi, pripadne vjerojatnosti, HA, RTP, frekvenciju dobitaka, indeks volatilnosti te pouzdane intervale za RTP, odnosno HA.

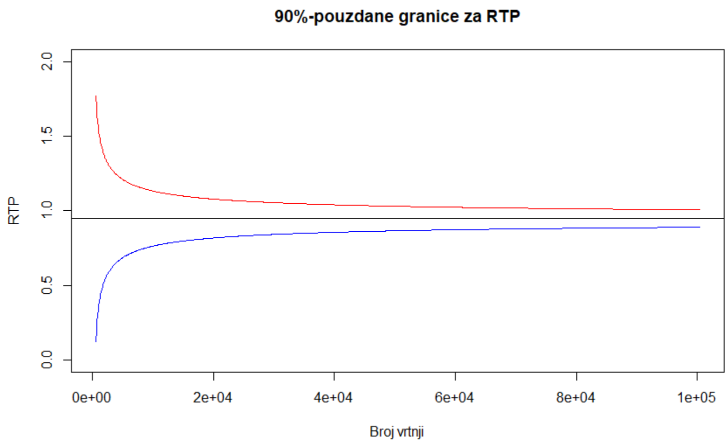
Iz tablice 1.4 vidimo da se radi o igri sa RTP-om 94.83%. te će kockarnica dugoročno zaraditi 5.17% od ukupnog uloga u igru. Pouzdani intervali za parametre normalne razdiobe dani su na razini značajnosti od 10% za RTP i HA za 10^n, $n = 3, 4, 5, 6, 7$ vrtnji. Npr., nakon 10^5 vrtnji, vjerojatnost je 90% da će povrat igraču biti između 89.00% i 100.66%, gdje je marginalna greška je $\pm 5.83\%$. Kako se n povećava tako se granice pouzdanih intervala približavaju. Ovo je primjer kako funkcionira zakon velikih brojeva kako bi se osiguralo da stvarni RTP, dugoročno, bude blizu teoretskog, što se i vidi na sljedećem grafu. U knjizi [3] navedeni su još neki primjeri PAR sheet-a.

PAR sheet - igra na automatu A			
HA	5.17%	Broj simbola na valjku	90
Razina značajnosti	10%	Indeks volatilnosti	18.438
Ulog	1	Frekvencija dobitka	14.84%
Ukupan broj vrtnji	729000	μ	-0.052
Broj dobitaka	108183	σ	11.174
Broj valjaka	3	RTP	94.83%
Dobitak	Isplata	Broj pogodaka	Vjerojatnosti
0	-1	620817	0.851601
2	1	74324	0.101953
5	4	14256	0.019556
10	9	13200	0.018107
25	24	4200	0.005761
40	39	960	0.001317
50	49	500	0.000686
100	99	240	0.000329
150	149	180	0.000247
200	199	100	0.000137
250	249	120	0.000165
300	299	40	0.000055
500	499	16	0.000022
750	749	24	0.000033
1250	1249	12	0.000016
1500	1499	10	0.000014
2000	1999	1	0.000001
90%-pouzdani intervali za RTP			
Broj vrtnji	Donja granica	Gornja granica	
1000	36.53%	153.14%	
10000	76.39%	113.27%	
100000	89.00%	100.66%	
1000000	92.99%	96.68%	
10000000	94.25%	95.42%	

Tablica 1.4: Par sheet za neku hipotetsku igru na automatu

Broj vrtnji	Donja granica	Gornja granica
1000	-53.14%	63.47%
10000	-13.27%	23.61%
100000	-0.66%	11.00%
1000000	3.32%	7.01%
10000000	4.58%	5.75%

Tablica 1.5: 90%-pouzdani intervali za HA



Slika 1.1: 90% pouzdane granice za RTP

1.4 Baccarat

Možda ne toliko popularna na našim prostorima, ali svakako zanimljiva za matematičku analizu, baccarat je igra na sreću niske HA te se često rade promocije vezane uz nju. Postoji nekoliko vrsta, a mi ćemo opisati igru sa sljedećim konceptom:

- igrači postavljaju uloge na pobjedu strane "igrač" (*eng. Player,P*) ili "bankar" (*eng. Banker,B*)
- svaka strana dobiva 2 karte i gleda se njihov zbroj
- pobjeđuje strana čiji je zbroj bliže 9
- vrijednosti karata sa slikom i 10 vrijede 0, as vrijedi 1, ostale zadržavaju nominalnu vrijednost

Igrači se mogu kladiti i na "remi". Ovisno o prve dvije karte, izvlače se i treće. U sljedećoj tablici nalaze se opisane sve situacije. Baccarat se obično igra s 8 špilova

Zbroj P	Odluka P	Zbroj B	3. karta P	Odluka B
0,1,2,3,4,5	Vuci	0,1,2	Bilo koja	Vuci
		3	1,2,3,4,5,6,7,9,0	Vuci
			8	Dosta
		4	2,3,4,5,6,7	Vuci
			1,8,9,0	Dosta
		5	4,5,6,7	Vuci
			1,2,3,8,9,0	Dosta
		6	6,7	Vuci
			1,2,3,4,5,8,9,0	Dosta
		7	Bilo koja	Dosta
6,7	Dosta	0,1,2,3,4,5	-	Vuci
		6,7,8,9	-	Dosta
Ako P ili B na prve dvije karte imaju zbroj 8 ili 9, runda je gotova				

Tablica 1.6: Pravila za izvlačenje karata

karata. Kako bi odredili distribuciju slučajne varijable koja opisuje ishode, potrebno je proći sve moguće kombinacije ruku "igrača" i "bankara", 6−kombinacije od 412 karata (ruka može imati do 6 karata).

Primjer 1.4.1. *Ako se kladimo na pobjedu "igrača" s ulogom od* 1 *kn, distribucija je*

$$X_P \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.4585974 & 0.0951560 & 0.4462466 \end{pmatrix}$$

Analogno se odredi i za "bankara" i remi, samo su isplate prilikom dobitka 0.95 *kn i* 8 *kn respektivno. Odgovarajuća očekivanja su tada* $\mu_P = -0.01235$, $\mu_B = -0.01058$, $\mu_{remi} = -0.14360$, *a devijacije* $\sigma_P = 0.951153$, $\sigma_B = 0.927372$.

Prednost kuće je tada $HA = 1.24\%$, $HA = 1.06\%$ te $HA = 14.36\%$ respektivno. Također, često pri određivanju prednosti kuće ignorira remi. Prednosti kuće su tada $HA = 1.36\%$ te $HA = 1.17\%$ za igrača i bankara.
Odredimo sad i intervale za stvarni ukupni dobitak/gubitak za igrača. Prikazat ćemo intervale koji pokrivaju $(1-\alpha)\%$ mogućih ukupnih dobitaka oko prosječnog.

Primjer 1.4.2. *Neka su X_i, $i = 1, 2, ..., n$, $n > 30$ n.j.d. slučajne varijable gdje svaka X_i opisuju jednu rundu igre na sreću*

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ. Neka je $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ slučajna varijabla koja prikazuje dobitak nakon n rundi. Vrijedi $\mathbb{E}[S_n] = n\mu$ te $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma$. Kod takavog niza od n jednakih uloga, prema centralnom graničnom teoremu vrijedi

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1), n \to \infty$$

odnosno distribucija ukupnog gubitka/dobitka je normalna s navedenim parametrima. Tada se na razini značajnosti α može odrediti interval unutar kojeg se se nalazi $1-\alpha$ podataka oko očekivanog gubitka/dobitka te je on

$$[n\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\sigma, n\mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\sigma]$$

Pogledajmo sad situaciju sa strane kockarnice. Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da se igrač podjednako kladi na pobjedu "igrača" i "bankara", pa će prosječna prednost kuće biti $HA = 1.15\%$, a devijacija $\sigma = 0.94$ po rundi.

Primjer 1.4.3. *Pretpostavimo da igrač igra* 1000 *rundi baccarat-a s ulogom od* 500 *kn po rundi. Očekivani dobitak za kockarnicu je tada* $1000 \cdot 1.15\% \cdot 500\text{kn} = 5,750\text{kn}$ *s odgovarajućom devijacijom* $0.94 \cdot \sqrt{1000} \cdot 500\text{kn} = 14,863\text{kn}$. *Dakle vrijedi da se* 95% *ukupnih mogućih dobitaka (razina značajnosti* $\alpha = 5\% \Rightarrow z_{0.025} = 1.96$ *) za kockarnice nalazi u intervalu* $[-23,381\text{kn}, 34,881\text{kn}]$.

Broj rundi	5000	10000	50000	100000
Očekivani dobitak	28,750.00 kn	57,500.00 kn	287,500.00 kn	575,000.00 kn
St. devijacija	33,234.02 kn	47,000.00 kn	105,095.19 kn	148,627.05 kn
Donja granica	- 36,388.68 kn	- 34,620.00 kn	81,513.42 kn	283,690.98 kn
Gornja granica	93,888.68 kn	149,620.00 kn	493,486.58 kn	866,309.02 kn

Tablica 1.7: Granice za 95% profita kockarnica - ulog po rundi 500 kn

Na primjer, iz tablice vidimo da je vjerojatnost 95% da će nakon 10^5 rundi baccarat-a s ulogom od 500 kn dobitak za kockarnicu biti između $283,690.98$ kn i $866,309.02$ kn.
Svaku od navedenih igara smo prikazali kao diskretne slučajne varijable te im odredili očekivanje i standardnu devijaciju jer će nam one trebati pri modeliranju istih Brownovim gibanjem s driftom.

Poglavlje 2

Promocije

Promocije, u kontekstu kockarnica i igara na sreću, su marketinške tehnike čija je svrha privlačenje novih igrača te održavanje postojećih. Promocije dolaze u različitim oblicima:

- promocije s bodovima - tijekom igre skupljate bodove koji se kasnije mogu upotrijebiti kao ulog u igri, hranu i piće, smještaj u hotelu i sl.

- besplatan novac za igru - izračunava se na temelju igračeve uobičajene potrošnje no može biti i u obliku bonusa na uplatu (online casino), povrata na gubitak, besplatne vrtnje na automatima, vaučeri za besplatni ulog itd.

- promocije za nove igrače - na primjer bonus na prvu uplatu (online casino)

- turniri

Promocije su kvalitetno smišljene te plasirane ne samo kako bi privukle igrače, već iste stavljaju u još nepovoljniji položaj i osiguravaju siguran profit. S druge strane, često se dogodi da kockarnice plasiraju loše dizajniranu promociju na način da prednost kuće postane negativna te ju napredni i iskusni igrači, kao što je Don Johnson, iskoriste te profitiraju. U sljedećem poglavlju definirat ćemo promocije te ih matematički analizirati.

2.1 Bonusi na uplatu i besplatne vrtnje

Promocija bonusa na uplatu najčešće se veže za online casina. Općenito, ako želite igrati igre na sreću online, potrebno je uplatiti neki iznos na korisnički račun online casina. Česta promocija kojojm se privlače igrači je bonus na prvu uplatu. Na primjer, ako uplatite 200 kn, kockarnica vam daje još 50% od uplaćenog iznosa, odnosno

100 kn, te tako imate 300 kn za igru.

Općenitno, na uplaćeni iznos x kn, dobivate bonus b na uplaćeni isnos, te imate $x(1 + b)$ kn za igru. Kako bi isplatili taj novac, potrebno je zadovoljiti uvjet **broj uplata u igru**, koji može biti vezan samo na bonus novac ili ukupan iznos nakon dodjeljivanja bonusa. Na tržištu igara na sreću, najčešće je potrebno da broj uplata u igru bude $30 - 40$ puta veći od dodjeljenog bonusa. Štoviše, kockarnice dopuštaju da se ovakvi bonusi na uplatu smiju iskoristiti samo na igrama na automatima.

Na primjer, ako je bonus od 100 kn potrebno odigrati barem 30 puta, znači broj uplata u igru iznosi barem 3000 kn, a u primjeru 1.3.2 smo vidjeli da je $u = 2500$ kn što bi značilo da je teoretski nemoguće isplatiti bonus.

Primjer 2.1.1. *Pretpostavimo da igrač uzima bonus kao što smo prethodno definirali te igra igru na automatu s* $RTP = 96\%$. *Ukupan broj svih uplata (prije nego što izgubi sve) u igru je* $u = \frac{300}{1-0.96} = 7500$ kn, *a uvjet je bio da odigra* 3000 kn, *što znači da je mogao uplatiti još* $7500 - 3000 = 4500$ *kn. Nadalje, vidimo da je na igraču ostalo* $4500 = \frac{x}{1-0.96} \Rightarrow x = 4500 \cdot 0.04 = 180$ *kn. Dakle, nakon što je ispunio uvjet za bonus, igrač je izgubio* 20 kn.

Iz ovoga lako možemo zaključiti da je općenito loš izbor uzeti bonus na uplatu. U sljedećoj tablici bit će prikazani neki bonusi koje nude online casina, s pripadnim uvjetima za ostvarivanje, RTP-om igre koju igraju i konačnim hipotetskim profitom casina. Pretpostavit ćemo da igrač koristi bonus novac na igre s $RTP = 95.05\%$.

Uplata	Bonus	Uvjet	Bonus	Uvjet (iznos)	Saldo (igrača)	Profit
100.00 kn	40%	30	40.00 kn	1,200.00 kn	80.60 kn	19.40 kn
150.00 kn	100%	40	150.00 kn	6,000.00 kn	3.00 kn	147.00 kn
200.00 kn	150%	20	300.00 kn	6,000.00 kn	203.00 kn	-3.00 kn
250.00 kn	50%	35	125.00 kn	4,375.00 kn	158.44 kn	91.56 kn

Tablica 2.1: Primjeri bonusa na uplatu s pripadnim zahtjevima za isplatu

Bonus u trećem retku je primjer loše promocije za kockarnicu. Razlog tome jesu visoki iznos bonusa te nizak uvjet na broj uplata u igru. Visok RTP također čini promociju lošijom za kockarnice.

Uz bonuse na uplatu, online casina dodatno nude i besplatne vrtnje na igrama na automatima. Bonus besplatnih vrtnji omogućuje igraču besplatno igranje točno određenih igri na automatima za stvarni novac. Dobitci se dodjeljuju nakon dovršetka svih besplatnih vrtnji. Besplatne vrtnje su ekvivalentne besplatnom ulogu na neku igru na stolovima.

Dobitci od besplatnih vrtnji isplaćuju se u obliku bonusa (za koji vrijede prethodno navedeni uvjeti) ili stvarnog novca. Uvjet za isplatu je da se barem jednom odgiraju.

Primjer 2.1.2. *Online casino na uplatu od* 200 kn *(ili više) daje* 20 *besplatnih vrtnji u vrijednosti* 1 kn *po vrtnji na igri s* $RTP = 94.63\%$. *Ukupni iznos novca za ulog koji daje casino je* 20 kn *te je očekivani dobitak za igrača tada* $20 \cdot 94.63\% = 18.92$ kn.

Možemo zaključiti da besplatne vrtnje predstavljaju neprofitabilan potez za kockarnice. Štoviše, postoji vjerojatnost da igrač osvoji i Jackpot. Iz tog razloga, casina definiraju ograničenja na isplatu dobitka. Također, besplatne vrtnje definira i vrijednost, koja je niska, npr. od $0.10 - 1$ kn po vrtnji.

2.2 Turniri

Kod online casina, vrlo česta promocija jesu turniri. Turniri imaju sljedeći koncept:

- prezicno vrijeme održavanja,
- minimalan uvjet za sudjelovanje (kuponi),
- izvlačenje dobitnika i podjela nagrada

Turniri kakve promatramo, ne zahtjevaju posebne vještine kako bi se osvojila glavna nagrada jer se pobjednici izvlače generatorom slučajnih brojeva, tako da više sliče nagradnim igrama. Jedini način kako biste uvećali šanse za dobitak jest da uložite što više kupona. Kuponi se osvajaju tako da uložite određeni iznos sredstava. Na sljedećem primjeru turnira objasnit ćemo navedeni koncept te procijeniti profit casina.

Primjer 2.2.1. *Pretpostavimo da online casino ima bazu od* 500 *igrača koji će sudjelovati u turniru. Organizirat će turnir u trajanju od* 4 *dana. Kako bi se kvalificirao za sudjelovanje u turniru, igrač mora uložiti najmanje* 100 kn *na odabrane slot igre. Za svakih uloženih* 100 kn *igrač automatski osvaja jedan kupon. Kupone može osvojiti igrajući igru opisanu u tablici 1.4, RTP-a* 94.83%. *Kao nagradu, casino će podjeliti* 1450 *besplatnih vrtnji u vrijednosti* 1.25 kn *po vrtnji, na istu slot igru, na sljedeći način:* 1. *mjesto* 300 *vrtnji,* 2. *mjesto* 150 *vrtnji,* 3. *mjesto* 100 *vrtnji te* 30 *nagrada po* 30 *vrtnji.*

Casino očekuje da će 500 igrača sudjelovati u promociji, što znači da u 4 dana svaki igrač mora imati uložen barem 1 kupon. Kako bi osvojio 1 kupon, igrač mora napraviti broj uplata u igru u vrijednosti $u = 100$ kn. Kako je $RTP = 94,83\%$, slijedi da je očekivani iznos koji će igrač izgubiti prilikom toga $u = \frac{x}{1-RTP} \Rightarrow x = 100 \cdot 5.17\% = 5.17$ kn.

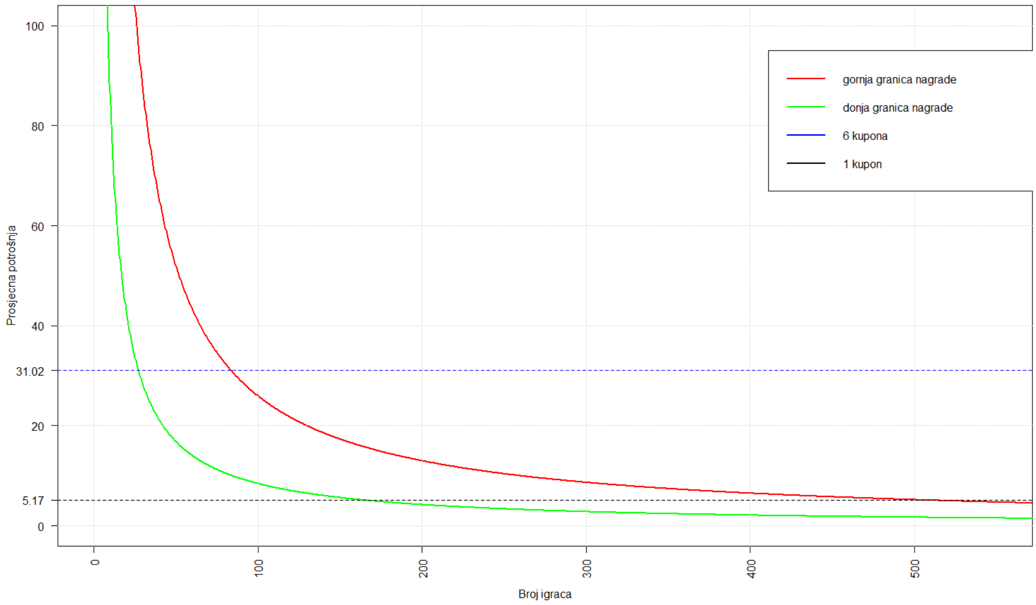
Profit casina ćemo prikazati pomoću "krivulje nagrade" koja prikazuje minimalan broja igrača i prosječnu potrošnju po igraču kako bi se pokrio iznos nagrade. U ovom slučaju, nagrada se isplaćuje u obliku 1450 besplatnih vrtnji u vrijednosti 1.25 kn po vrtnji, što joj daje ukupnu "vrijednost" od 1812.50 kn. Uzevši u obzir RTP igre na kojoj se treba iskoristiti nagrada, stvarna vrijednost joj je $1812.50 \cdot 94,83\% = 1718.79$ kn. No, kako je broj vrtnji malen, RTP će zbog volatilnosti varirati u intervalu $[46.41\%, 143.25\%]$ s pouzdanošću 90%. Dakle, stvarna vrijednost nagrade će biti u intervalu $[841.22, 2, 596.45]$ kn. U sljedećoj tablici su prikazani intervali za pojedinačne nagrade.

Granice RTP-a za ukupnu nagradu		
Broj vrtnji	Donja granica	Gornja granica
1450	46.412%	143.253%
Očekivana stvarna vrijednost nagrade		
1,812.50 kn	841.22 kn	2,596.45 kn
Granice RTP-a za pojedinačne nagrade		
300	0.00%	201.283%
150	0.00%	245.377%
100	0.00%	279.211%
30	0.00%	431.460%
Očekivana stvarna vrijednost pojedinačne nagrade		
375.00 kn	0.00 kn	754.81 kn
187.50 kn	0.00 kn	460.08 kn
125.00 kn	0.00 kn	349.01 kn
37.50 kn	0.00 kn	161.80 kn

Tablica 2.2: Intervali za nagradu promocije turnira

Ono što možemo primjetiti kod pojedinačnih nagrada, donje granice za RTP su negativne, što u primjeni nema smisla jer bi to značilo da casino dodatno uzima sredstva na računu igrača, tako da je ograničen na 0%. To također znači da za sve pojedinačne nagrade postoji pozitivna vjerojatnost da dobitniku bude isplaćeno 0 kn.

Kako bi casino osigurao profit od promocije, zbroj svih sredstava, odnosno vrijednosti kupona, mora biti veći od gornje granice očekivane stvarne vrijednosti nagrade. Grafički ćemo ga prikazati pomoću "krivulje nagrade" gdje će na $x-$osi biti prikazan broj igrača, a na $y-$osi prosječni iznos sredstava iskorišten za dobivanje kupona. Ukupan iznos sredstava dobivamo kao umnožak $x \cdot y$. Krivulja gornje granice nagrade $x \cdot y = 2596.45$ prikazana je crvenom bojom, a krivulja donje granice nagrade $x \cdot y = 841.22$ zelenom.



Slika 2.1: Krivulje nagrada

Iz sljedećeg grafa možemo zaključiti

- casino osigurava profit za $x \cdot y \geq 2596.45$ kn
- profit će možda postojati za $841.22 \leq x \cdot y \leq 2596.45$ kn
- casino nema profit za $x \cdot y \leq 841.22$ kn

U našem slučaju ako 500 igrača sudjeluje, prosječna minimalna vrijednost dobitka casina je $500 \cdot 5.17 = 2585$ kn što je malo ispod krivulje gornje granice nagrade. Naravno, očekuje se da će dobar dio igrača uložiti više kupona čime će si povećati šanse za osvajanje nagrade.

Ako uzmemo u obzir pretpostavku da je igrač imao namjeru igrati neku igru, više će vremena provesti igrajući igru koja mu uz standardne dobitke nudi i dodatne kroz promociju, zasigurno će uložiti više od jednog kupona. Primjetimo da je minimalna nagrada 30 besplatnih vrtnji koje teoretski vrijede 37.50 kn. Tada bi mogli očekivati da će prosječni igrač htjeti uložiti manje od minimalne nagrade, što je na primjer 6 kupona u vrijednosti 31.02 kn. Tada bi vrijednost dobitka casina bila $15,510$ kn, što bi nakon podjele nagrade dalo profit u granicam $[12,913.55, 14,668.78]$. U sljedećoj tablici nalazi se još nekoliko primjera mogućeg profita za različit broj igrača.

			Profit	
Broj igrača	Prosječna potrošnja	Dobitak casina	Donja granica	Gornja granica
500	10.34 kn	5,170.00 kn	2,573.55 kn	4,328.7 kn
200	12.48 kn	2,496.00 kn	-100.45 kn	1,654.78 kn
150	7.84 kn	1,176.00 kn	-1,420.45 kn	334.78 kn
300	20.17 kn	6,051.00 kn	3,454.55 kn	5,209.78 kn
450	8.52 kn	3,834.00 kn	1,237.55 kn	2,992.78 kn
85	15.51 kn	1,318.35 kn	- 1,278.10 kn	477.13 kn

Tablica 2.3: Granice profita casina nakon završetka promocije

Možemo primjetiti da su negdje granice negativne, što nam govori da promocija loša. To se može dogoditi zbog visoke nagrade, malog broja igrača, niske potrošnje igrača ili zbog lošeg marketinga. Prije objavljivanja ovakvog tipa promocije, kockarnice moraju analizirati svoju bazu igrača i procijeniti njihove potrošačke navike. Što se tiče naprednih igrača, ovakvi tipovi promocija im nisu zanimljivi jer se svodi na kocept nagradne igre i ne može se manipularati.

2.3 Bonus mrtvi žeton

Mrtvi žetoni (*eng. dead chips*) su žetoni za igre na sreću u kockarnicama, no ne mogu se unovčiti niti zamjeniti za žetone za igru. Jednom kad igrač iskoristi sve takve žetone, ostale regularne može zamijeniti za gotovinu. Općenita ideja je igračima dodjeliti bonus na kupovinu takvih žetona u zamjenu za prednost kuće. Upravo iz tog razloga, kocarnice moraju biti oprezne prilikom dodjele bonusa, kako prednost kuće nebi postala negativna. Takva novonastala prednost kuće naziva se efektivna prednost kuće (*eng. effective house advantage*) i označavat ćemo ju sa HA^*.

Smanjenje prednosti kuće uzrokovano ovom promocijom je povezano s prosječnim vremenom prije nego što igrač izgubi sva sredstva, koje ovisi o vjerojatnosti gubitka. Ako je q vjerojatnost gubitka oklade, tada je prosječno vrijeme do prvog gubitka $\frac{1}{q}$. Primjetimo da ovaj rezultat u skladu s geometrijskom vjerojatnosnom razdiobom. Ako p predstavlja vjerojatnost uspjeha bilo kojeg nezavisnog Bernoullijevog pokusa te $X =$ "broj pokusa do prvog uspjeha", očekivanje je tada $\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$.

Ovakav tip bonusa vrlo je sličan bonusu na uplatu kod online casina, samo što je ovdje množitelj za broj uplata u igru jednak 1, odnosno čim igrač napravi ulog mrtvim žetonom i postigne dobitak, isplaćen je u stvarnim žetonima. Također, igrač ne dobiva samo bonus novac u obliku mrtvih žetona, već cijeli iznos (kod bonusa na uplatu broj uplata u igru se najčešće odnosio na bonus novac, a ne na cijeli iznos) te igrač smije korisititi ovakve žetone na svim igrama na sreću. Sljedeći primjer će nam poslužiti za razumijevanje formalng matematičkog rezultata.

Primjer 2.3.1. *Pretpostavimo da igrač plati* $100,000.00$ kn *i dobiva* $101,500.00$ kn *vrijednih mrtvih žetona (bonus od* 1.5%*). Pretpostavimo da igrač igra samo tim žetonima i ulaže* 1 *žeton po ulogu u igri baccarat na bankara, gdje je distribucija slučajne varijable koja opisuje jednu rundu dana*

$$X_P \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0.95 \\ 0.4463 & 0.0952 & 0.4586 \end{pmatrix}$$

Prosječno vrijeme prije nego što izgubi sve mrtve žetone je $\frac{101500}{0.4463} = 227,452.7$ *rundi, nakon čega igrač može očekivati dobitak od* $0.4586 \cdot 227,452.7 \cdot 0.95 = 99,093.7$ kn*. Profit koji casino ostvaruje je* 906.30 kn*, pa je efektivna prednost kuće tada* $\frac{906.30}{227,452.7} = 0.0040 = 0.4\%$.

Teorem 2.3.2 (Fundamentalni teorem o mrtvim žetonima)**.** *Pretpostavimo da igrač primi $x(1+B)$ mrtvih žetona u zamjenu za x kuna, pa B predstavlja bonus. Pretpostavimo da igrač igra samo tim žetonima dok ih ne izgubi sve, jedan po ulogu, gdje su ulozi nezavisni. Vjerojatnost dobitka w jedinica je p, a gubitak jedne jedinice q. Također, izgubljene oklade uzima djelitelj, a dobitci su isplaćeni u regularnim žetonima.*

1. *Tada je efektivna prednost kuće dana* $HA^* = HA - \frac{B}{1+B}q$
2. $B > \frac{HA}{wp} \Rightarrow HA^* < 0$.

Dokaz. Za dokaz prve tvrdnje, koristit ćemo činjenicu da je prosječno vrijeme prije nego što igrač iskoristi 1 žeton $\frac{1}{q}$ pa je prosječan broj rundi prije nego što iskoristi svih

$x(1+B)$ žetona $\frac{x(1+B)}{q}$. Igračev očekivani dobitak jest $\frac{x(1+B)}{q} \cdot wp$, a profit kockarnice je $x - \frac{x(1+B)}{q} \cdot wp$. Efektivna prednost kuće je tada

$$HA^* = \frac{x - \frac{x(1+B)}{q} \cdot wp}{\frac{x(1+B)}{q}} = \frac{q - wp - Bwp}{1+b}$$

Koristeći činjenicu da je $HA = q - wp$, izraz postaje

$$HA^* = \frac{HA - Bwp}{1+B} = \frac{HA - B(q - HA)}{1+B} = HA - \frac{B}{1+B}q.$$

Druga tvrdnja slijedi direktno iz prve. □

Primjetimo da nam druga tvrdnja daje maksimalan mogući bonus prije nego što igrač bude u prednosti. U sljedećoj tablici prikazat ćemo efektivnu prednost kuće na europskom ruletu s ovim tipom bonusa.

Napomena 2.3.3. *Za navedenu tablicu vrijedi:*

- *Marginalne greške smo odredili iz* 95%*-pouzdanih intervala.*
- *Ako kockarnica daje* 2.5% *bonusa na mrtve žetone, igrajući na ulog tucet, efektivna prednost kuće* 1.05%*. Ako uzmemo u obzir i marginalnu grešku za* 10000 *vrtnji ruleta, tada je* $HA^* \in [-1.703\%, 3.803\%]$.
- *Maksimalan bonus koji kockarnica smije dodjeliti igraču koji igra ulog tucet prije nego što* $HA^* < 0$ *je* 4.17%.

Generalizirani oblici teorema 2.3.2 za višestruki broj kupnji mrtvih žetona, oklade s više ishoda (npr. igre na automatima, video poker, keno, itd.) te oklade na više igara na sreću s pripadnim dokazima, mogu se naći u [3].

2.4 Promocija za baccarat

Na web-stranici *https://wizardofvegas.com/*, neki igrač je objavio promociju na igru baccarat iz jednog američkog casina. Ovim problemom bavio se i *Eliot Jacobson, Ph.D.* (vidi [4]). Promocija funkcionira na sljedeći način:

- igrač kupuje žetone u vrijednosti $\$60,000$
- dobiva bonus u vrijednosti $\$30,000$

Tip uloga	Par-nepar	Tucet	Izravno
HA	2.70%	2.70%	2.70%
	Marginalne greške		
10000	±1.959%	±2.753%	±11.273%
100000	±0.620%	±0.870%	±3.565%
1000000	±0.196%	±0.275%	±1.127%
Bonus	HA^*		
0.00%	2.70%	2.70%	2.70%
0.25%	2.57%	2.53%	2.46%
0.50%	2.45%	2.37%	2.22%
0.75%	2.32%	2.20%	1.98%
1.00%	2.19%	2.03%	1.74%
1.25%	2.07%	1.87%	1.50%
1.50%	1.94%	1.70%	1.26%
1.75%	1.82%	1.54%	1.03%
2.00%	1.70%	1.38%	0.79%
2.25%	1.57%	1.22%	0.56%
2.50%	1.45%	1.05%	0.33%
2.75%	1.33%	0.89%	0.10%
3.00%	1.21%	0.73%	-0.13%
MAX Bonus	5.56%	4.17%	2.86%

Tablica 2.4: Efektivna prednost kuće - rulet

- igrač smije unovčiti samo ako ima više od $\$90,000$ i to razliku (ukupni iznos sredstava (*eng. bankroll*) $-\$90,000$) koliko puta želi

Sigurno će se dogoditi da igrač izgubi sva sredstva. Može se dogoditi da igrač nikad ne prijeđe iznos $\$90,000$ te tako izgubi svih $\$60,000$, no kako je igraču dano dodatnih $\$30,000$, to će mu ublažiti negativne oscilacije te mu omogućiti da prednost kuće okrene na svoju stranu ako može raditi dovoljno velike uloge što ćemu povećati volatilnost. Naime, ograničenje na jedan ulog je bilo $\$10,000$.

Strategija koja bi bila optimalna u ovoj situaciji je : igrati na maksimalan ulog te isplatiti svaki put kad igrač prijeđe $\$90,000$. Sljedeća tablica prikazuje statistički rezultat za 6 simulacija igre s navedenom promocijom i strategijom (napravljeno u programu `RStudio`).

Promatrajmo slučaj kada igrač igra samo maksimalan ulog na *Banker*:

Ulog	n	Prosjek rundi	Dobitne runde (%)	Prednost igrača	Profit igrača
Oklada na *Banker* $p = 0.5068$					
\$ 10,000.00	100000	74.9	47.82%	2.69%	\$ 20,139.57
\$ 6,000.00	10000	205.97	44.95%	1.18%	\$ 14,444.13
Oklada na *Player* $p = 0.4932$					
\$ 10,000.00	100000	82.77	43.31%	2.28%	\$ 18,856.20
\$ 3,000.00	10000	719.209	36.08%	0.04%	\$ 864.30
Oklada na *Tie* $p = 0.0951$					
\$ 10,000.00	100000	15.32	44.48%	14.74%	\$ 22,618.10
\$ 5,000.00	10000	46.64	42.61%	7.39%	\$ 16,934.50

Tablica 2.5: Očekivani profiti igrača za razne tipova oklada

- simulirano je $100,000$ igrača te uzet prosjek njihovih rezultata
- Prosječan broj odigranih rundi je 74.9
- 47.82% simuliranih igrača će na kraju imati pozitivan profit, odnosno to je vjerojatnost da igrač pobjedi casino
- Očekivani profit je $\$20,139.57$. Na inicijalnu investiciju od $\$60,000$, očekuje profit od 33.56%
- za svaku simulaciju, igrač ima pozitivan očekivani profit

2.5 Povrat na gubitak

Ovaj tip promocije baziran je na promatranju igračeve igre i njegovih gubitaka. Ideja je u ponuditi igraču povrat na gubitak u svrhu poticanja lojalnosti i promicati daljnje poslovanje s igračem.

Kako prednost kuće ne bi postala negativna, kockarnice preferiraju povrat na teoretski gubitak, TLR koji je gotovo uvijek manji od stvarnog gubitka.

Primjer 2.5.1. *Pretpostavimo da igrač ima ukupno* $8,000$ kn *te je odigrao sva sredstva na ruletu. Stvarni gubitak nakon nekog vremena mu je bio* $2,000$ kn*, dok je teoretski gubitak* $2.72\% \cdot 8000 = 217.6$ kn*. Casino nudi povrat od* 20% *te on iznosi* 43.52 kn.

Možemo primjetiti da bi u ovom slučaju igrač mogao biti nezadovoljan promocijom. Povrat na stvarni gubitak, LR, u ovom primjeru je 400 kn. Nadalje, u tekstu ćemo LR smatrati samo povratom na gubitak.

Primjer 2.5.2. *Pretpostavimo da casino nudi* 20% *povratna na gubitak na svaku rundu baccarata. Tada bi očekivanje na oklade Player i Banker bile*

$$\mu_B = 0.95 \cdot 0.4589 + (-1 \cdot (1 - 20\%) \cdot 0.4462) = 0.0787$$

$$\mu_P = 1 \cdot 0.4462 + (-1 \cdot (1 - 20\%) \cdot 0.4586) = 0.0794$$

Igrač bi dugoročno bio u prednosti 7.9%.

Ovo bi bio primjer loše promocije povrata na gubitak za casino. S druge strane, ako bi igrač igrao dovoljno dugo da bi zakon velikih brojeva osigurao prednost kuće od 1.15%, 20% povrat na gubitak bi umanjio prednost kuće na $(1-20\%) \cdot 1.15\% = 0.92\%$. Iz ovoga možemo zaključiti da je ova promocija rizična ako igrač igra kratkoročno.

Model koji će optimizirati ovaj tip promocije je postavio *Andrew MacDonald* te je opisan u knjizi [2]. Ideja je odrediti postotak povrata na gubitak koji je ekvivalentan specifičnom povratu na teoretski gubitak za konačan broj odigranih rundi.

Povrat na gubitak za specifičan povrat na teoretski gubitak je funkcija od HA, n odigranih rundi te željenog TLR. Izračun zahtjeva i linearnu funkciju gubitka $L(z) = \int_z^\infty (t-z)\phi(t)dt$, gdje je $\phi(t)$ funckija gustoće standardna normalna razdiobe. Uz pretpostavku da su sve oklade jednake, dobivamo sljedeću formulu :

$$LR = \frac{n \cdot HA \cdot TLR}{(n \cdot HA) + [L(z) \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma]} \tag{2.1}$$

gdje su $z = \frac{n \cdot HA}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$ i σ standardna devijacija igre po ulogu. Vrijednost $n \cdot HA$ predstavlja igračev očekivani gubitak, a $\sqrt{n} \cdot \sigma$ standardnu devijaciju uzorka.

Primjer 2.5.3. *Pretpostavimo da casino želi dati bonus povrat na stvarni gubitak za igrače koji igraju samo ulog tucet na ruletu za vrijednost* $TLR = 50\%$ *te nakon odigranih* $n = 1200$ *rundi. Prednost kuće je* $HA = 2.72\%$, *a* $\sigma = 1.404$. *Standardna devijacija uzorka je* $\sqrt{1200} \cdot 1.404 = 48.649$, $z-$*vrijednost* $\frac{1200 \cdot 2.72\%}{48.649} = 0.671$, *a* $L(0.671) = 0.147$. *Ekvivalentan povrat na stvarni gubitak jest*

$$LR = \frac{1200 \cdot 2.72\% \cdot 50\%}{(1200 \cdot 2.72\%) + [0.147 \cdot 48.649]} = 0.4101 = 40.87\%$$

Rulet-ulog tucet		n	z	$L(z)$	LR
HA	2.72%	10	0.06	0.369	2.85%
σ	1.404	50	0.14	0.334	5.81%
TLR	20%	100	0.19	0.310	7.70%
		150	0.24	0.291	8.97%
		250	0.31	0.264	10.74%
		1000	0.61	0.165	15.75%

Tablica 2.6: Povrati na stvarni gubitak za različiti broj vrtnji

Vratimo se na primjer 2.5.1. Ako bi naš igrač odigrao 1000 oklada nakon kojih bi bio u gubitku od 2000 kn, mogao bi dobiti povrat na gubitak $2000 \cdot 15.75\% = 315$ kn što je naravno prihvatljivija opcija za igrača, a casino nije pretprio negativni HA.

U našem glavnom primjeru o Don Johnsonu, on je upravo iskoristio lošu oblik ove promocije. U njegovom slučaju povrat na gubitak je bio 20% i nije bio ograničen brojem rundi. Uz to, mogao je ulagati do $\$100,000$ po ulogu što je igru činilo volatilnijom.

Poglavlje 3

Don Johnson i Monte Carlo simulacije

3.1 Don Johnson i blackjack

Donald Johnson (DJ) je profesionalni kockar, tzv. *advantage player, AP*. Takav način igre podrazumijeva korištenje legalnih metoda za dobivanje prednosti nad kockarnicom. Primjeri takvih metoda su brojenje karata u backjack-u, kontrola kocki, visoke vrijednosti Jackpot-ova, loše promocije itd.
Don Johnson je 2011. godine u periodu od 6 mjeseci osvojio 15.1 milijuna dolara u tri kockarnice u Atlantic City-u igrajući blackjack. Kako bi stekao prednost nad kućom, dogovorio je sljedeća pravila

- početni iznos sredstava $\$1,000,000$,
- svaki put kada izgubi minimalno $\$500,000$, može prestati s igrom i primiti 20% povrata na gubitak,
- maksimalan ulog po rundi je $\$100,000$ (nekad $\$50,000$).

Sljedeći korak je odrediti momente kada prestati igrati, odnosno naći optimalno vrijeme zaustavljanja za slučaj kada pobjeđuje i kad gubi (*eng. Win exit point, Loss exit point*) kako bi maksimizirao očekivani profit. Odredit ćemo ih pomoću Monte Carlo metode u programu `RStudio`.

Prvo ćemo napraviti funkciju koja opisuje jednu sesiju igre na sreću. Jedna sesija predstavlja period od momenta kad igrač počinje igrati do momenta kad igračev bankroll dosegne točku zaustavljanja. Ulazne varijable su ulog po rundi u, početni bankroll, povrat na gubitak (u %) te Win i Loss exit point. Kao rezultat, funkcija daje broj odigranih rundi (iteracije), krajnji bankroll te povrat (u \$) ako igrač dosegne Loss exit point. Sljedeće, odabiremo određeni broj različitih parova točaka zaustavljanja te za svaki simuliramo dovoljno velik broj sesija (u našem slučaju $n = 10^6$) kako bi Monte Carlo metodom dobili što bolje rezultate. Nadalje, za svaki dobiveni uzorak izračunamo prosjek. Očekivani dnevni dobitak igrača (po sesiji) dobivamo zbrajanjem prosječnog povrata i krajnjeg bankroll-a te odredimo efektivnu prednost kuće. U nastavku, koristit ćemo opisani model za sve igre na sreću s povratom na gubitak.

Što se tiče DJ-a, on je igrao blackjack s pravilima navedenima u primjeru 1.2.4. Distribucija slučajne varijable koja opisuje jednu rundu blackjack-a s navedenim pravilima, navedena je na web-stranici *wizardofodds.com*. Promatramo 16 simulacija gdje je Loss exit point gubitak od $\$500,000$, a Win exit point dobitci u rasponu od $\$500,000$ do $\$2,000,000$. Kao rezultat istaknut ćemo efektivnu prednost kuće, dobitak igrača te prosječan broj rundi do postizanja vremena zaustavljanja. Ulog po rundi je $\$100,000$. Rezultati su prikazani u sljedećoj tablici.

Loss exit point	Win exit point	HA^*	Očekivani profit	Broj rundi
-500000	500000	-2.10%	\$45,698.50	21.8
-500000	600000	-1.93%	\$50,014.50	26.0
-500000	700000	-1.70%	\$51,109.20	30.1
-500000	800000	-1.61%	\$55,171.40	34.2
-500000	900000	-1.57%	\$60,106.50	38.2
-500000	1000000	-1.37%	\$57,471.90	42.1
-500000	1100000	-1.32%	\$61,051.40	46.3
-500000	1200000	-1.18%	\$58,985.60	50.2
-500000	1300000	-1.11%	\$60,079.40	54.1
-500000	1400000	-1.08%	\$63,194.50	58.4
-500000	1500000	-1.03%	\$64,236.60	62.4
-500000	1600000	-0.99%	\$65,936.60	66.3
-500000	1700000	-0.94%	\$65,601.00	70.0
-500000	1800000	-0.85%	\$63,350.00	74.3
-500000	1900000	-0.83%	\$64,464.40	77.5
-500000	2000000	-0.76%	\$62,617.70	82.5

Tablica 3.1: Analiza vremena zaustavljanja, ulog \$ 100,000

Na temelju simulacije možemo zaključiti da je optimalno vrijeme zaustavljanja dobitak od $\$1,600,000$ na ukupni iznos sredstava, gdje je prosječan broj rundi do prestanka igre 66.3, efektivna prednost kuće -0.995% te očekivani dobitak $\$65,936.6$. Kako je DJ počeo dan sa $\$1,000,000$, prestao je igrati kada je mu je ukupni iznos sredstava bio $\$500,000$ ili $\$2,600,000$.

Analogno, ako bi ulog po rundi bio $\$50,000$, a ostale pretpostavke iste, optimalno vrijeme zaustavljanja je dobitak od $\$1,000,000$ na ukupni iznos sredstava, gdje je prosječan broj rundi do prestanka igre 160.3, efektivna prednost kuće -0.58% te očekivani dobitak $\$46,850.80$.

Loss exit point	Win exit point	HA^*	Očekivani profit	Broj rundi
-500000	500000	-1.05%	$43,212.60	82.4
-500000	600000	-0.91%	$44,682.70	97.9
-500000	700000	-0.81%	$45,756.70	113.4
-500000	800000	-0.66%	$43,036.70	129.7
-500000	900000	-0.63%	$45,942.90	145.2
-500000	1000000	-0.58%	$46,850.80	160.3
-500000	1100000	-0.51%	$44,786.10	175.2
-500000	1200000	-0.48%	$46,146.70	191.8
-500000	1300000	-0.45%	$46,450.30	206.8
-500000	1400000	-0.42%	$46,448.90	221.4
-500000	1500000	-0.38%	$45,097.00	237.3
-500000	1600000	-0.32%	$41,086.80	253.2
-500000	1700000	-0.32%	$42,771.40	270.0
-500000	1800000	-0.31%	$43,066.60	280.3
-500000	1900000	-0.29%	$42,799.90	296.7
-500000	2000000	-0.27%	$42,025.40	315.7

Tablica 3.2: Analiza vremena zaustavljanja, ulog $ 50,000

Nadalje, možemo preispitivati kredibilitet donje točke zaustavljanja. Don Johnson je rekao da je ponekad izgubio više od $\$500,000$ prije no što je prestao s igrom taj dan. Ako pretpostavimo da je donja točka zaustavljanja $\$200,000$, odnosno gubitak od $\$800,000$, Monte Carlo simulacijom dobivamo da je gornja točka zaustavljanja pri dobitku od $\$2,000,000$, prosječan broj rundi do prestanka igre 136.9, efektivna prednost kuće je -0.58% te očekivani profit $\$79,886$.

Također, primjetimo da je jedna od pretpostavki dnevni početni bankroll točno $\$1,000,000$. U nijednoj izjavi, DJ nije rekao da je položio više. Pitanje je, je li DJ mogao osvojiti više manipulirajući početnim iznosom sredstava?

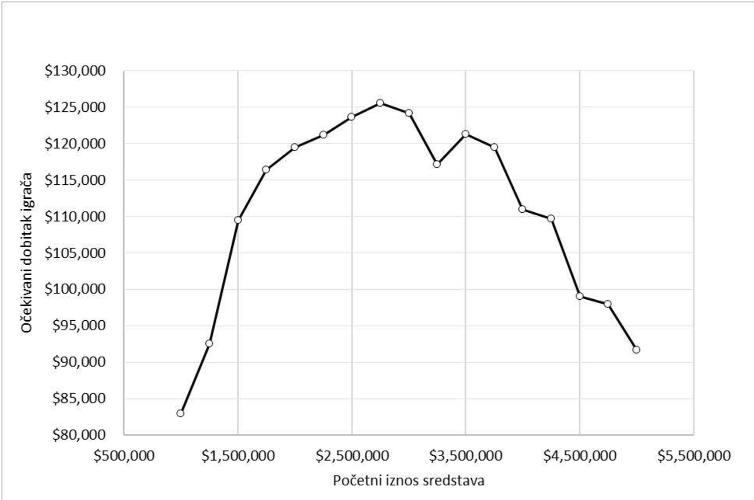
Sljedeće simulacije ćemo provesti na bankroll-u u rasponu od $\$1,000,000$ do $\$5,000,000$ (povećavajući za $\$250,000$). Donje točke zaustavljanja će u svakom slučaju biti kad ukupni iznos sredstava padne ispod $\$200,000$. Za svaki iznos sredstava, odredili smo optimalnu gornju točku zaustavljanja za koju imamo maksimalan očekivani dobitak. Za svaki par Win i Loss exit point, istaknut ćemo efektivnu prednost kuće, prosječan broj rundi prestanka igre, neto dobitak casina, očekivani povrat na gubitak te očekivani dobitak igrača.

Bankroll	Win exit point	HA^*	Broj rundi	Dobitak casina	Povrat na gubitak	Očekivani dobitak
$1,000,000	$1,600,000	-0.763%	108.7	$34,140	$117,110	$82,970
$1,250,000	$1,700,000	-0.616%	150.3	$44,245	$136,754	$92,509
$1,500,000	$2,200,000	-0.461%	237.2	$64,995	$174,419	$109,424
$1,750,000	$2,000,000	-0.466%	249.7	$72,575	$189,012	$116,437
$2,000,000	$2,100,000	-0.389%	306.9	$90,085	$209,516	$119,431
$2,250,000	$2,200,000	-0.329%	368.2	$105,165	$226,321	$121,156
$2,500,000	$2,200,000	-0.306%	403.9	$118,460	$242,065	$123,605
$2,750,000	$2,200,000	-0.276%	454.7	$128,110	$253,655	$125,545
$3,000,000	$2,100,000	-0.261%	480.3	$134,280	$258,432	$124,152
$3,250,000	$2,000,000	-0.236%	497.4	$143,340	$260,484	$117,144
$3,500,000	$2,000,000	-0.228%	531.4	$155,870	$277,126	$121,256
$3,750,000	$1,900,000	-0.217%	550.1	$155,515	$274,994	$119,479
$4,000,000	$1,800,000	-0.198%	561.1	$160,780	$271,732	$110,952
$4,250,000	$2,100,000	-0.160%	684.5	$198,750	$308,417	$109,667
$4,500,000	$1,900,000	-0.150%	659.2	$194,525	$293,544	$99,019
$4,750,000	$2,100,000	-0.127%	771.0	$225,205	$323,149	$97,944
$5,000,000	$1,800,000	-0.133%	687.0	$200,385	$292,004	$91,619

Tablica 3.3: Analiza vremena zaustavljanja za blackjack, ulog $ 100,000

Graf 5.1 je rezultat tablice 3.3. Prikazuje očekivani dnevni neto dobitak igrača u odnosu na početni iznos sredstava. Iz grafa slijedi da početni iznos sredstava ima značajnu ulogu u maksimizaciji očekivanog dobitka. Na temelju dobivenih podataka optimalna strategija za maksimizaciju dnevnog očekivanog dobitka je :

- početni denvni iznos sredstava $\$2,750,000$
- gornja točka zaustavljanja - dobitak od $\$2,200,000$ (ukupno $\$4,950,000$)
- donja točka zaustavljanja - gubitak od $\$2,550,000$ (ukupno $< \$200,000$)



Slika 3.1: Očekivani dobitak u odnosu na početni iznos sredstava

U ovom slučaju :

- efektivna prednost kuće -0.276%
- očekivani dobitak po danu $\$125,545$
- očekivani broj rundi 455
- u odnosu na iznos sredstava od $\$1,000,000$, DJ je mogao imati aproksimativno 51.31% veći očekivani dnevni dobitak

3.2 Povrat na gubitak - baccarat i rulet

Promociju povrata na gubitak koriste i druge kockarnice na ostalim igrama poput baccarat-a i ruleta. Uz promociju nude i hranu, piće, noćenje u hotelu i slično. Jedan casino napravio je promociju povrata na gubitak na igri baccarat, gdje nije bilo uvjeta minimalnog vremena igranja prije isplate povrata. Pokazat ćemo da je takav oblik promocije vrlo neprofitabilan za casino.

Baccarat je vrlo robusna igra što se tiče povrata na gubitak. Ima malu varijancu (za razliku od ruleta i blackjacka) te nisku prednost kuće (odmah iza blackjacka) pa rijetko privlači profesionalne igrače koji koriste povrat na gubitak. No, zbog toga što ne postoji minimalan uvjet za ostvarivanje povrata, igrači s visokim početnim iznosom sredstava mogu značajno profitirati.

Vodeći se istim modelom kao i prije, odredit ćemo optimalna vremena zaustavljanja za povrate od 10%, 12%, 15%, 18% i 20%. Promatramo slučaj kada igrač igra samo na "bankara", gdje je $HA = 1.06\%$. Sljedeća tablica nam daje analizu za ulog od $\$100,000$ po rundi.

Povrat (%)	Loss exit point	Win exit point	Broj rundi	Dobitak casina	Povrat	Očekivani dobitak
10%	-250000	130000	6.6	$7,203.05	$11,894.07	$4,691.02
12%	-300000	230000	10.0	$10,858.52	$18,194.42	$7,335.90
15%	-400000	270000	14.9	$14,984.81	$27,634.95	$12,650.15
18%	-450000	360000	23.1	$24,399.97	$42,132.17	$17,732.20
20%	-550000	400000	31.3	$32,707.46	$54,898.42	$22,190.96

Tablica 3.4: Analiza vremena zaustavljanja za baccarat

Na baccarat stolu s bržim tempom, odigra se oko 70 rundi po satu. Ako igrač nađe igru s 20% povrata na gubitak od minimalno $\$550,000$, u prosjeku će odigrati 31 rundu ili 27 minuta prije nego dosegne točku zaustavljanja. Za to vrijeme može očekivati dobitak od $\$22,190.96$. Vrlo slično je napravio i Don Johnson.

Analogno, promatrat ćemo ovaj model na ruletu za dva tipa uloga : izravno i kompletna oklada. Pretpostavimo da igrač igra europski rulet gdje je maksimalan ulog $\$1,000$ na jedan broj. Za svaki pojedini povrat (od 10% do 20%) odredimo optimalan par vremena zaustavljanja koji maksimizira očekivani dobitak. U sljedećoj tablici je sumirana analiza povrata na gubitak za igrača koji se kladi na ulog izravno.

Povrat (%)	Loss exit point	Win exit point	Broj rundi	Dobitak casina	Povrat	Očekivani dobitak
10%	-34000	22000	32.1	$1,029.99	$1,693.03	$663.04
12%	-41000	27000	44.3	$1,350.28	$2,390.73	$1,040.45
15%	-54000	38000	80.1	$2,157.82	$4,075.11	$1,917.29
18%	-65000	50000	115.4	$3,186.29	$5,949.22	$2,762.93
20%	-74000	57000	147.1	$3,989.86	$7,490.87	$3,501.01

Tablica 3.5: Analiza vremena zaustavljanja za rulet, ulog izravno

Kada je limit $\$1,000$, vjerojatnost da će igrači biti zainteresirani je mala. S druge strane, oklade tipa kompletan ulog su sasvim drugačija priča. Takav tip oklade je zapravo kombinacija ostalih oklada do na šest brojeva. Na primjer, kompletna oklada na broj 17 je ekvivalentna ulozima od

- $\$2,000$ na 13, 15, 19 i 21
- $\$4,000$ na 14, 20
- $\$6,000$ na 16, 18
- $\$12,000$ na 17

Ova oklada omogućuje igraču ulog od $\$40,000$ na stolu s limitom $\$1,000$. Slučajna varijabla koja opisuje kompletan ulog ima distribuciju (vrijednosti u tisućama)

$$X_{ku} \sim \begin{pmatrix} -40 & 32 & 104 & 176 & 392 \\ \frac{28}{37} & \frac{4}{37} & \frac{2}{37} & \frac{2}{37} & \frac{1}{37} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Sljedeća tablica sumira analizu povrata na gubitak za igrača koji radi kompletan ulog $\$40,000$.

Povrat (%)	Loss exit point	Win exit point	Broj rundi	Dobitak casina	Povrat	Očekivani dobitak
10%	-210000	100000	7.1	\$8,729.84	\$11,657.04	\$2,927.20
12%	-260000	140000	9.7	\$10,119.44	\$16,750.98	\$6,631.54
15%	-320000	180000	13.0	\$14,202.24	\$24,633.97	\$10,431.73
18%	-400000	240000	18.5	\$21,914.08	\$35,591.77	\$13,677.69
20%	-430000	280000	22.0	\$22,687.20	\$43,848.82	\$21,161.62

Tablica 3.6: Analiza vremena zaustavljanja za rulet, kompletan ulog

U tipičnoj situaciji, na ruletu se unutar sat vremena odigra 30 do 40 rundi. Prosječan broj rundi implicira da se točka zaustavljanja dogodi unutar tih sat vremena. Očekivani profit, za slučaj 20% povrata je $\$21,161.62$. Najbolja opcija za kockarnice u ovom slučaju bi bila ponuditi povrat na teoretski gubitak ili uvjetovati minimalno vrijeme igre.

Svi rezultati u ovom poglavlju dobiveni su simulacijama, odnosno nisu egzaktni. Simulacijom stvarne igre, rezultati daju precizne brojeve unutar ograničenja veličine uzorka. U nastavku, do egzaktnih rezultata doći ćemo modelirajući igre na sreću pomoću Brownovog gibanja. Analizu vremena zaustavljanja za sve navedene slučajeve proveo je i *Eliot Jacobson* te su njegovi rezultati nalaze u [4].

Poglavlje 4

Modeliranje igara na sreću pomoću Brownovog gibanja

Do sada smo prikazali ishod igre na sreću kao diskretnu slučajnu varijablu. Igrač gotovo uvijek odigra veći broj rundi te želimo imati u vidu igračev iznos sredstava nakon svake runde. Neka su Y_i slučajne varijable s distribucijom

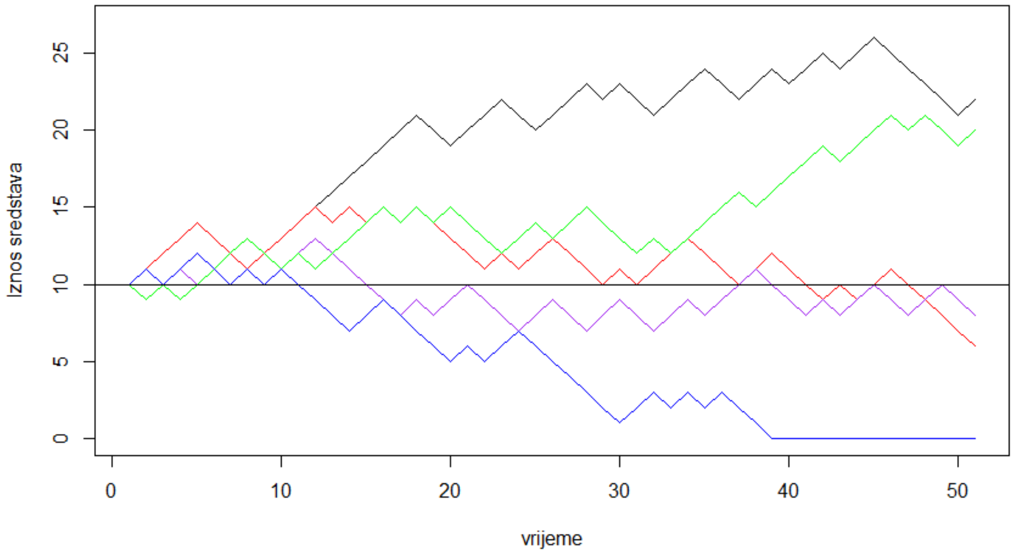
$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{19}{37} & \frac{18}{37} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

za $i = 1, ..., 50$ koje opisuju 50 ishoda oklade na ruletu na ulog crno-crveno od 1 kn. Znamo da vrijedi $\mu = \mathbb{E}Y_i = -0.0272 < \infty$. Pretpostavimo da igrač počinje igrati s $X_0 = 10$ kn te definiramo $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $n = 1, ..., 50$. Ovaj izraz predstavlja ukupni iznos sredstava u trenutku n. Implicitno se pretpostavlja da igrač koji padne na nulu ostaje na nuli.

Slika 4.1 prikazuje simulaciju 5 različitih igrača koji su igrali rulet pod navedenim uvjetima. Primjetimo da 4 igrača nakon 50 rundi imaju pozitivan iznos sredstava, a 2 igrača bilježe i dobitak. Također, vidimo iznos sredstava za svakog pojedinog igrača za svaku pojedinu rundu. Ovo je bio primjer *slučajnog procesa* s diskretnim vremenom koji je *slučajna šetnja.* Sljedeće definicije se nalaze u [10].

Definicija 4.0.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, te neka je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ X_n slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$. Familija $X = (X_n : n \geq 0)$ naziva se slučajni proces (s diskretnim vremenom).*

Definicija 4.0.2. *Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih, integrabilnih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo sa μ njihovo zajedničko očekivanje, $\mu = \mathbb{E}Y_1 \in \mathbb{R}$. Definiramo $X_0 = 0$ te $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Familija $X = (X_n : n \geq 0)$ je slučajni proces s vrijednostima u $\mathbb{R}$ koji nazivamo slučajna šetnja.*



Slika 4.1: Simulacije 5 igrača u igri rulet

4.1 Kockareva propast

Neka je $N \geq 2$ cijeli broj te neka je $1 \leq i \leq N-1$. Promatramo igrača koji započinje igru sa i kn te svaku rundu osvoji ili izgubi 1 kn s vjerojatnostima p i $q = 1-p$ respektivno.
Sa X_n definiramo ukupni iznos sredstava nakon $n-$te runde. Cilj igrača je osvojiti iznos N kn, prije nego što ostane bez sredstava. Nakon oba slučaja, igrač prestaje s igrom. Vidimo da je X_n slučajna šetnja

$$X_n = i + \Delta_1 + \cdots + \Delta_n, \quad n \geq 1, \quad X_0 = i,$$

gdje je $\{\Delta_n\}$ niz nezavisnih jednako distriburianih slučajnih varijabli

$$\Delta \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Kako igra staje kada $X_n = 0$ ili $X_n = N$, s

$$\tau_i = \min\{n \geq 0 : X_n \in \{0, N\} | X_0 = i\},$$

definiramo prvo vrijeme u kojem igra staje ako $X_0 = i$. Ako $X_{\tau_i} = N$, igrač pobjeđuje, a ako $X_{\tau_i} = 0$, casino pobjeđuje, odnosno dogodila se *kockareva propast*.

Neka je $\mathbb{P}_i(N) = \mathbb{P}(X_{\tau_i} = N)$ vjerojatnost pobjede igrača ako $X_0 = i$. Prema definiciji, $\mathbb{P}_0(N) = 0$ i $\mathbb{P}_N(N) = 1$, dok je vjerojatnost $\mathbb{P}_i(N)$, za $1 \leq i \leq N-1$ dana sljedećom propozicijom.

Propozicija 4.1.1 (Kockareva propast)**.**

$$\mathbb{P}_i(N) = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}, & p \neq q; \\ \frac{i}{N}, & p = q = 0.5. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dokaz. Dokaz tvrdnje nalazi se u članku [8]. □

Primjer 4.1.2. *Pretpostavimo da se igrač kladi na ulog crno-crveno u ruletu,* 1 *kn po ulogu i počinje igru sa* $i = 10$ kn. *Igra ima vjerojatnosnu razdiobu kao u 4.1. Odlučuje da će prestati igrati ako osvoji* 20 *kn. Vrijedi* $\frac{q}{p} = \frac{19}{18}$. *Prema propoziciji 4.1.1 slijedi*

$$\mathbb{P}_{10}(20) = \frac{1-(\frac{19}{18})^{10}}{1-(\frac{19}{18})^{20}} = 0.368.$$

Vjerojatnost da igrač osvoji 20 *kn, prije nego što izgubi sve je* 36.8%.

Vidjeli smo kako možemo igru modelirati pomoću slučajne šetnje te pokazali vjerojatnost osvajanja određenog iznosa prije nego što izgubimo sve. Taj rezultat ćemo poopćiti aproksimirajući slučajnu šetnju Brownovim gibanjem.

4.2 Brownovo gibanje i aproksimacija

Za početak, definirajmo standardno Brownovo gibanje kao u [9].

Definicija 4.2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B(t), t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje ako vrijedi :*

i) *Putovi* $t \mapsto B(t)(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*

ii) $B(0) = 0$

iii) *Za sve* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$B(t_1) = B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), ..., B(t_m) - B(t_{m-1})$$

nezavisni.

iv) *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$

Igračev iznos sredstava nakon svake runde igre na sreću možemo prikazati kao nesimetričnu slučajnu šetnju. Nadalje, promatrat ćemo skaliranu simetričnu slučajnu šetnju i pokazat da je njen limes Brownovo gibanje.

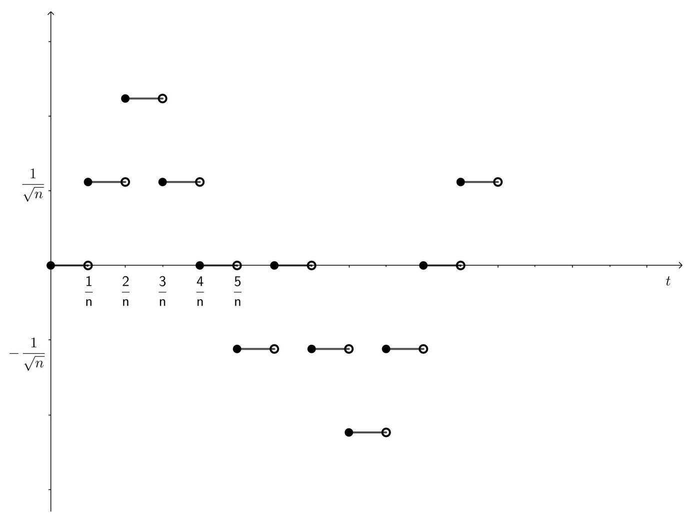
Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je $(U_k^n)_{k\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ (za različite n možemo imati različite vjerojatnosne prostore). Zbog jednostavnosti pretpostavimo da su svi isti, odnosno $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nadalje, pretpostavljamo da je

$$U_k^n \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, k \geq 1, \tag{4.3}$$

tj. U_k^n je simetrična Bernoullijeva s korakom $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pomoću niza $(U_k^n)_{k\geq 1}$ definiramo slučajni proces $(X_t^n)_{t\geq 0}$ formulom

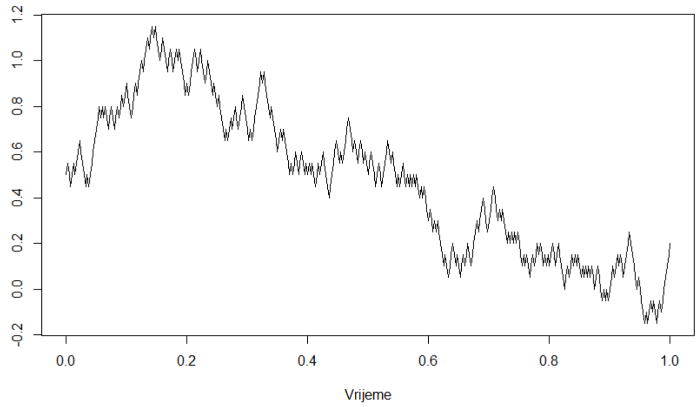
$$X_t^n := \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} U_k^n$$

Uočimo da je $X^n = (X_t^n)_{t\geq 0}$ zapravo vremenski i prostorno skalirana simetrična slučajna šetnja.



Slika 4.2: Skaliranje simetrične slučajne šetnje

Na slici 4.3 prikazana je simulacija puta X_t^{400} do vremena 1. Taj put generiran je pomoću 400 realizacija simetričnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima $\pm\frac{1}{20}$. Želimo se pozvati na Teorem VIII. 2.29 iz [5] pa provjeravamo uvjete tog



Slika 4.3: Simulacija puta

teorema. Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $h(x) = x$ za $x \leq 1$. Tada je zbog $|U_k^n| \leq 1$,

$$\mathbb{E}[h(U_k^n)] = \mathbb{E}[U_k^n] = 0$$

$$\mathbb{E}[h^2(U_k^n)] = \mathbb{E}[|U_k^n|^2] = \frac{1}{n}.$$

Tada je

i) $\sup_{s \leq t} |\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[h(U_k^n)]| = 0$, za sve $t \geq 0$

ii) $\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[h^2(U_k^n)] = \frac{1}{n}\lfloor nt \rfloor \to t$, za sve $t \geq 0$

iii) Za svaku neprekidnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je jednaka nuli u nekoj okolini ishodišta, $\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[g(U_k^n)] = 0$ za dovoljno veliki n (ako je $g = 0$ na $\langle -\epsilon, \epsilon \rangle$, dovoljno je uzeti $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$)

Prema Teoremu VIII. 2.29. slijedi da $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ gdje je $X = (X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces s karakteristikama (B, C, ν) t.d. je $B_t = 0$, $C_t = t$, $\nu_t = 0$, tj. X je standardno Brownovo gibanje. To je klasični Donskerov teorem.

4.3 Brownovo gibanje s driftom i aproksimacija

Definicija 4.3.1. *Neka je $B = (B(t), t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje te neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \in \mathbb{R}_+$ fiksni. Brownovo gibanje s parametrom drifta μ i varijancom σ^2*

je proces

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t)$$

za $t \geq 0$.

Alternativno, Brownovo gibanje s driftom ima nezavisne priraste te za $0 \leq s < t$ prirasti $X(t) - X(s)$ imaju normalnu distribuciju s očekivanjem $\mu(t-s)$ i varijancom $\sigma^2(t-s)$. Za $X(0) = x$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) \leq y | X(0) = x) =& \mathbb{P}(\mu t + \sigma B(t) \leq y | \sigma B(0) = x)\\ =& \mathbb{P}\Big(B(t) \leq \frac{y - \mu t}{\sigma} \Big| B(0) = \frac{x}{\sigma}\Big)\\ =& \Phi_t\Big(\frac{y - x - \mu t}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{y - x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\Big),\end{aligned}$$

gdje je $\Phi_t(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{t}}\phi(x/\sqrt{t})dx = \Phi(z/\sqrt{t})$ funkcija distribucije normalne razdiobe s očekivanjem 0 i varijancom t. Promotrimo sada umjesto niza $(U_k^n)_{k\geq 1}$ niz n.j.d. slučajnih varijabli $(V_k^n)_{k\geq 1}$ gdje je

$$V_k^n \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Pomoću niza $(V_k^n)_{k\geq 1}$ definiramo (nesimetričnu) skaliranu slučajnu šetnju $Y^n = (Y_t^n)_{t\geq 0}$ kao

$$Y_t^n := \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} V_k^n.$$

Vrijedi

$$\mathbb{E}[h(V_k^n)] = \mathbb{E}[V_k^n] = -\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sqrt{n}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sqrt{n}}\Big) = \frac{\mu}{n}$$

$$\mathbb{E}[h^2(V_k^n)] = \mathbb{E}[(V_k^n)^2] = \frac{1}{n}$$

Stavimo $B_t = \mu t$. Provjeravamo uvjete Teorema VIII. 2.29. iz [5]:

i) $\sup_{s\leq t} |\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathbb{E}[h(V_k^n)] - B_s| = \sup_{s\leq t} |\frac{\mu}{n}\lfloor ns \rfloor - \mu s| \to 0$ za sve $t \geq 0$.

ii) $\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \Big[\mathbb{E}[h^2(V_k^n)] - (\mathbb{E}[h(V_k^n)])^2\Big] = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \Big[\frac{1}{n} - \frac{\mu^2}{n^2}\Big] = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{1}{n}\Big[1 - \frac{\mu^2}{n}\Big] = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\Big(1 - \frac{\mu^2}{n}\Big) \to t$, za sve $t \geq 0$

iii) Analogno prijašnjem dokazu, $\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[g(V_k^n)] \to 0$.

Zaključujemo da $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ gdje je $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces s karakteristikama (B, C, ν), $B_t = \mu t$, $C_t = t$, $\nu_t = 0$, tj. Brownovo gibanje s driftom.

Napomena 4.3.2. *Ako se u 4.4* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *zamijeni sa* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *u gornjem retku, a* $\frac{\mu}{2\sqrt{n}}$ *sa* $\frac{\mu}{2\sigma\sqrt{n}}$ *u donjem retku, tada će* Y^n *konvergirati prema* Y *gdje* Y *ima karakteristike* (B, C, ν) *gdje je sada* $B_t = \mu t$, $C_t = \sigma^2 t$. *To su karaktaristike Brownovog gibanja s driftom* μt *i s volatilnosti* σ.

Pokazali smo da se igračev iznos sredstava tijekom igranja igara na sreću, odnosno igra na sreću može modelirati pomoću Borwnovog gibanja s driftom.

Nadalje, pokazat ćemo neka svojstva Brownovog gibanja s driftom vezana uz vrijeme zaustavljanja. Kako bi ih pokazali, postavit ćemo notaciju koja opisuje promjene u Brownovom gibanju s driftu u malom vremenskom intervalu Δt. Neka su $\Delta X = X(t+\Delta t) - X(t)$ i $\Delta B = B(t+\Delta t) - B(t)$. Tada je $\Delta X = \mu\Delta t + \sigma\Delta B$ i

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta X = X(t) + \mu\Delta t + \sigma\Delta B. \tag{4.5}$$

Vidimo da su uvjetni momenti od Δt, za $X(t) = x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta X | X(t) = x] &= \mu\Delta t + \sigma\mathbb{E}[\Delta B] = \mu\Delta t && (4.6)\\
\mathrm{Var}[\Delta X | X(t) = x] &= \mathbb{E}[(\Delta X - \mu\Delta t)^2 | X(t) = t] \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[(\Delta B)^2] = \sigma^2\Delta t && (4.7)\\
\mathbb{E}\Big[(\Delta X)^2 | X(t) = x\Big] &= \mathbb{E}[(\mu\Delta t + \sigma\Delta B)^2 | X(t) = t] \\
&= \sigma^2\Delta t + (\mu\Delta t)^2 = \sigma^2\Delta t + O(\Delta t) && (4.8)\\
\mathbb{E}\big[(\Delta X)^n\big] &= O(\Delta t), \qquad n > 2. && (4.9)
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $X(0) = x$ te neka su $a < x$ i $b > x$ fiksne vrijednosti. Zanimaju nas svojstva slučajnog vremena T u kojem proces prvi puta dosegne vrijednost a ili b. Takav T nazivamo *vrijeme pogađanja* i definiramo ga kao

$$T = T_{ab} = \min\{t \geq 0; X(t) = a \text{ ili } X(t) = b\}.$$

Analogno problemu *Kockareva propast* iz propozicije 4.1.1, odredit ćemo vjerojatnost izlaska Brownovog gibanja iz intervala $\langle a, b\rangle$, u vrijednosti b.

Teorem 4.3.3. *Za Brownovo gibanje s driftom* $X = (X(t) : t \geq 0)$ *s parametrima* μ *i* σ^2 *te* $a < x < b$ *vrijedi*

$$u(x) = \mathbb{P}(X(T_{ab}) = b | X(0) = x) = \frac{e^{\frac{-2\mu x}{\sigma^2}} - e^{\frac{-2\mu a}{\sigma^2}}}{e^{\frac{-2\mu b}{\sigma^2}} - e^{\frac{-2\mu a}{\sigma^2}}}. \tag{4.10}$$

Dokaz. Pretpostavimo sljedeće tvrdnje : (1) $u(x)$ je diferencijabilna reda 2 te (2) možemo odabrati proizvoljan mali vremenski prirast Δt da se izlazak iz intervala $\langle a, b\rangle$ prije vremena Δt može zanemariti. Uz ove pretpostavke, u vremenu Δt Brownovo gibanje će biti na poziciji $X(0) + \Delta X = x + \Delta X$ pa je uvjetna vjerojatnost izlaska u gornjoj granici b $u(x + \Delta X)$. Iz zakona potpune vjerojatnosti slijedi

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{P}(X(T) = b|X(0) = x) \\ &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{P}(X(T) = b|X(0) = x, X(\Delta t) = x + \Delta X)|X(0) = x\Big] \\ &= \mathbb{E}[u(x + \Delta X)], \end{aligned}$$

za $a < x < b$. Sljedeći korak je razviti $u(x + \Delta X)$ u Taylorov red, pri čemu $u(x + \Delta X) = u(x) + u'(x)\Delta X + \frac{1}{2}u''(x)(\Delta X)^2 + O(\Delta X)^2$. Tada je

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}[u(x + \Delta X)] \\ &= u(x) + u'(x)\mathbb{E}[\Delta X] + \frac{1}{2}u''(x)\mathbb{E}\Big[(\Delta X)^2\Big] + \mathbb{E}[O(\Delta t)]. \end{aligned}$$

Koristeći 4.6, 4.8 4.9 da procjenimo momente od ΔX, pa dobivamo

$$u(x) = u(x) + u'(x)\mu\Delta t + \frac{1}{2}u''(x)\sigma^2\Delta t + O(\Delta t),$$

koja, nakon sređivanja i puštanja $\Delta t \to 0$ postaje diferencijalna jednadžba

$$0 = \mu u'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x), \tag{4.11}$$

za $a < x < b$. Rješenje 4.11 je

$$u(x) = Ae^{\frac{-2\mu x}{\sigma^2}} + B,$$

gdje su A i B konstante integracije. Određujemo ih iz uvjeta $u(a) = 0$ i $u(b) = 1$, odnosno vjerojatnost izlaska u točki b, ako proces kreće iz a je 0 i obratno. Kada odredimo A i B dobivamo željeni rezultat. □

Nadalje nas zanima koliko je očekivano vrijeme do izlaska iz intervala $\langle a, b\rangle$.

Teorem 4.3.4. *Za Brownovo gibanje s driftom s parametrima μ, σ^2 te $a < x < b$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[T_{ab}|X(0) = x] = \frac{1}{\mu}[u(x)(b - a) - (x - a)], \tag{4.12}$$

gdje je $u(x)$ dan u Teoremu 4.3.3.

Dokaz. Neka je $v(x) = \mathbb{E}[T_{ab}|X(0) = x]$. Kao u dokazu Teorema 4.3.3, pretpostavit ćemo (1) da je $v(x)$ diferencijablina reda 2 te (2) možemo odabrati prirast vremena Δt dovoljno mali da se izlazak iz intervala $\langle a, b\rangle$ prije vremena Δt može zanemariti.

S navedenim pretpostavkama, Brownovo gibanje će nakon Δt vremena biti na poziciji $X(0) + \Delta X = x + \Delta X$, a uvjetno očekivano vrijeme izlaska iz intervala je sada $\Delta t + v(x + \Delta X)$. Iz zakona potpune vjerojatnosti vrijedi

$$\begin{aligned} v(x) = \mathbb{E}[T|X(0) = x] &= \mathbb{E}\big[\Delta t + \mathbb{E}[T - \Delta t|X(0) = x, X(\Delta t) = x + \Delta X]\big|X(0) = x\big] \\ &= \Delta t + \mathbb{E}[v(x + \Delta X)], \end{aligned}$$

gdje je $a < x < b$. Sljedeći korak je razviti $v(x + \Delta X)$ u Taylorov red, pa dobivamo $v(x + \Delta X) = v(x) + v'(x)\Delta X + \frac{1}{2}v''(x)(\Delta X)^2 + O(\Delta X)^2$. Tada je

$$\begin{aligned} v(x) &= \Delta t + \mathbb{E}[v(x + \Delta X)] \\ &= \Delta t + v(x) + v'(x)\mathbb{E}[\Delta X] + \frac{1}{2}v''(x)\mathbb{E}\Big[(\Delta X)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[O(\Delta X)^2\Big]. \end{aligned}$$

Koristeći 4.6, 4.8 4.9 da procjenimo momente od ΔX, pa dobivamo

$$v(x) = \Delta t + v(x) + v'(x)\mu\Delta t + \frac{1}{2}v''(x)\sigma^2\Delta t + O(\Delta t),$$

koji, nakon sređivanja i puštanja $\Delta t \to 0$, postaje diferencijablina jednadžba

$$-1 = \mu v'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 v''(x) \tag{4.13}$$

za $a < x < b$. Kako je vrijeme do izlaska iz intervala 0 ako proces počinje u granicama intervala, slijedi $v(a) = v(b) = 0$. Iz ovih uvjeta, rješenje jednadžbe 4.13 jedinstveno je dano izrazom 4.12. □

Teoremi 4.3.3 i 4.3.4 nalaze se u [6] i bit će temelj daljnje analize, odnosno koristit ćemo ih kako bi odredili optimalne vremena zaustavljanja prilikom igre na sreću te koliko nam je prosječno vremena potrebno do prestanka igre. Konkretnije, odredit ćemo iznos osvojenih sredstava pri kojemu igrač staje s igrom.

Poglavlje 5

Teoremi o povratu na gubitak

U poglavlju o Don Johnson-u, pokazali smo koliku prednost dobivaju igrači koristeći promociju povrata na gubitak pomoću Monte Carlo metode. Igre na sreću, odnosno vrijednost igračevog bankroll-a je bio promatran kao diskretan slučajni proces.

Cilj nam je bio pomoću Monte Carlo metode i velikog broja simulacija odrediti optimalna vremena zaustavljanja kako bi igrač maksimizirao profit. Simulacijom stvarne igre, rezultati su bili precizni unutar ograničenja veličine simuliranog uzorka. Također, zbog velike količine kombincija, teško je odrediti distribuciju slučajne varijable za blackjack. U nastavku ćemo pomoću teoretskog pristupa odrediti optimalnu strategiju koristeći očekivanje igre μ te standardnu devijaciju σ.

Pokazali da igru na sreću možemo modelirati pomoću Brownovog gibanja s driftom te naveli dva teorema. Teorem 4.3.3 nam daje vjerojatnost da proces dosegne točku b prije nego točku a, gdje je $a < b$. Točke a i b su ekvivalentne igračevom bankroll-u umanjemom za Loss exit point, odnosno uvećanom za Win exit point. Točke a i b nazivat ćemo *Loss goal* i *Win goal point* respektivno. Teorem 4.3.4 nam daje očekivano vrijeme do izlaska iz intervala $\langle a, b\rangle$ što je ekvivalentno očekivanom broju rundi do prestanka igre. Zbog svega navedenog, na temelju navedenih teorema, formiramo sljedeći.

Teorem 5.0.1 (Teorem o povratu na gubitak)**.** *Pretpostavimo da igrač dolazi u casino igrati igru G s očekivanjem $\mu < 0$ te standardnom devijacijom σ. Pretpostavimo da igrač ima bankroll x i igra dok ne izgubi cijeli bankroll ili dosegne Win-goal b, gdje je $b > x$ (osvaja $b - x$ jedinica). Sa $p(x, b)$ definiramo vjerojatnost da igrač dosegne Win goal b prije no što izgubi cijeli bankroll x. Tada je* *i) Vjerojatnost dostizanja b prije gubitka cijelog x*

$$p(x,b) \approx \frac{e^{\frac{-2\mu x}{\sigma^2}} - 1}{e^{\frac{-2\mu b}{\sigma^2}} - 1} \tag{5.1}$$

ii) Očekivan broj rundi do prestanka igre

$$playtime(x,b) \approx \frac{1}{\mu} \cdot (p(x,b) \cdot b - x) \tag{5.2}$$

Pretpostavimo da je igraču ponuđen povrat na gubitak, odnosno, ako izgubi bankroll x, igrač dobiva povrat L (u %). Tada je igračev očekivani neto dobitak

$$w(x,b,L) \approx (1-L) \cdot (1-p(x,b)) \cdot (-x) + p(x,b) \cdot (b-x) \tag{5.3}$$

Dokaz. Izrazi 5.1 i 5.2 slijede direktno iz teorema 4.3.3 i 4.3.4 respektivno za $a = 0$. Neto dobitak igrača možemo sada promatrati kao diskretnu slučajnu varijablu s distribucijom

$$X_{neto} \sim \begin{pmatrix} -x \cdot (1-L) & b-x \\ 1-p(x,b) & p(b,x) \end{pmatrix},$$

s vrijednostima gubitka $-x \cdot (1-L)$ umanjenog za L te dobitka $b-x$. Očekivani neto dobitak igrača je $w(x,b,L) = \mathbb{E}X_{neto}$. □

Primjer 5.0.2 (Don Johnson)**.** *Monte Carlo metodom smo pokazali da bi Don Johnson-ova optimalna strategija bila igrati početnim bankroll-om* $\$2,750,000$*, Win exit point* $\$2,200,000$*, očekivani dobitak* $\$125,545$ *te prosječan broj rundi* 455*. Za iste ulazne parametre, pomoću teorema 5.0.1, rezultati su prikazani u sljedećoj tablici. Podsjetimo se, očekivanje igre je $\mu = -0.0029036$, a standardna devijacija $\sigma = 1.1417$.*

Don Johnson - Blackjack	
Povrat	20%
Bankroll	$ 2,550,000
Win exit point	$ 2,200,000
Očekivani dobitak	$ 124,474.8
Vjerojatnost dobitka	51.05%
Broj rundi	478.9

Tablica 5.1: Teorem o povratku na dobitak za Don Johnson-a

Bankroll je umanjen za $\$200,000$ *jer je pretpostavka da igrač igra tako dugo dok ne izgubi sve. Možemo primjetiti da su teoretski rezultati vrlo slični simuliranim.*

Primjer 5.0.3 (Baccarat). *Pretpostavimo da igrač igra baccarat, kladeći se samo na "bankara" s ulogom po rundi* \$100,000. *Očekivanje igre je* $\mu = -0.010579$, *devijacija* $\sigma = 0.927372$, *a povrat* $L = 18\%$. *Prema tablici 3.2, vidimo da je optimalna strategija pri tom povratu bila igrati sa bankroll-om* \$450,000 *te Win goal-om* $b =$ \$810,000. *Prema sljedećoj tablici vidimo da je Monte Carlo metoda dala jako slične podatke.*

Baccarat	
Povrat	18%
Bankroll	\$ 450,000
Win exit point	\$ 360,000
Očekivani dobitak	\$ 18,013,83
Vjerojatnost dobitka	53.08%
Broj rundi	18.9

Tablica 5.2: Teorem o povratku na dobitak za baccarat

Primjer 5.0.4. *U Atlantic City-u* 2013. *Revel Casino-Hotel objavio je promociju koja esencijalno nudi* 100% *povrata na gubitak igrajući igre na automatima uz dva uvjeta*

- *maksimalan gubitak za koji se dobiva* 100% *povrata je* \$100,000,
- *povrat na gubitak se dobiva maksimalno* \$5,000 *tjedno kroz* 20 *tjedana.*

Strategija je pronaći igru koja ima najveći mogući ulog te najmanje očekivanje, odnosno najveći RTP. U ovom slučaju, radi se o Video pokeru, ulog \$125 *po rundi, očekivanje* $\mu = -0.01019217$ *te* $\sigma = 6.479582$. *Povrat na gubitak od* \$100,000 *te* \$125 *ulog daje nam bankroll od* 800 *jedinica. Ako bi igrač prestao igrati dok osvoji* 1326 *jedinica (*\$165,750*), teorem 5.0.1 nam daje sljedeće rezultate :*

Video poker - Atlantic City	
Povrat	100%
Bankroll	\$ 100,000
Win exit point	\$ 165,750
Očekivani dobitak	\$ 43,530.87
Broj rundi	23709
Vjerojatnost dobitka	26.26%

Tablica 5.3: Prvi teorem o povratu na gubitak - Video poker

Ako bi mogli napraviti 500 *rundi po satu, možemo očekivati* 47.4 *sati igre. Očekivani dobitak jest* 348.2 *jedinice. Ako bi promatrali pojedinačni sat, igrač očekuje dobitak od* \$918.37 *po satu. Napomenimo da jedna sesija ovdje predstavlja razdoblje od* 20 *tjedana.*

Nadalje postavljamo pitanje optimalnog vremena zaustavljanja, odnosno optimalnim vrijednostima x i b za koje igrač postiže maksimalan očekivani dobitak. Na to pitanje odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem 5.0.5 (Drugi teorem o povratu na gubitak)**.** *Pretpostavimo da igrač igra igru* G *s očekivanjem* $\mu < 0$ *te standardnom devijacijom* σ*. Pretpostavimo da igrač ima bankroll* x *te igra dok ne izgubi sav bankroll ili dostigne Win goal* b*, gdje je* $b > x > 0$*. Pretpostavimo da je igraču ponuđen povrat na gubitak* L*. Tada su vrijednosti* x *i* b *za koje je očekivani dobitak maksimalan*

$$x = \frac{\sigma^2}{2\mu}\Big(1 + \frac{\ln(1-L)}{L}\Big), \tag{5.4}$$

$$b = \frac{\sigma^2}{2\mu}\ln(1-L). \tag{5.5}$$

Win exit point pri kojem igrač maksimizira profit je

$$b - x = \frac{\sigma^2}{2\mu}\Big(\ln(1-L) - \frac{\ln(1-L)}{L} - 1\Big)$$

Dokaz. Određivanje optimalnih vrijednosti x i b je ekvivalentno traženju točaka u kojima funkcija $w(x, b, L)$ poprima maksimum. Fiksirajmo $L \in \langle 0, 1\rangle$. Zbog jednostavnosti, radimo supstituciju $t = \frac{-2\mu}{\sigma^2} > 0$. Tada tražimo ekstrem funkcije dvije varijable

$$w(x, b) = (1-L)\frac{e^{tb} - e^{tx}}{e^{tb} - 1} \cdot (-x) + \frac{e^{tx} - 1}{e^{tb} - 1} \cdot (b - x). \tag{5.6}$$

Nadalje, parcijalne derivacije funkcije w su

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-e^{tx}(Ltx + L - tb) + (L-1)e^{tb} + 1}{e^{tb} - 1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial b} = -\frac{(e^{tx} - 1)(e^{tb}(-Ltx + tb - 1) + 1)}{(e^{tb} - 1)^2}.$$

Nakon izjednačavanja s 0, stacionarne točke će biti rješenje sustava

$$-e^{tx}(Ltx + L - tb) + (L-1)e^{tb} + 1 = 0$$

$$e^{tb}(-Ltx + ty - 1) + 1 = 0$$

Supstitucijom $tx = \frac{1}{L}(e^{-tb} - 1 + tb)$ iz druge jednadžbe, rješavamo sustav te dobivamo stacionarnu točku

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{1}{t}\ln(1-L), \\ x_0 &= -\frac{1}{t}\Big(1 + \frac{\ln(1-L)}{L}\Big). \end{aligned}$$

Nakon što odredimo druge parcijalne derivacije te u njih uvrstimo stacionarnu točku, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, b_0) &= -\frac{(1-L)^{1-1/L}t}{e}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial b^2}(x_0, b_0) &= \frac{(-(1-L)^{1-1/L} - eL + e)t}{eL}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial b}(x_0, b_0) &= -\frac{(-(1-L)^{1-1/L} - eL + e)t}{eL}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial b}(x_0, b_0) = -\frac{\partial^2 w}{\partial b^2}(x_0, b_0)$. Nakon što dobivene vrijednosti uvrstimo u Hesseovu matricu, te izračunamo determinantu, dobivamo da će u točki (x_0, b_0) postojati ekstrem ako vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} - \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial b}\Big)^2 &> 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial b^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial b^2}\Big) &> 0 \end{aligned}$$

Lako se pokaže da je $\frac{\partial^2 w}{\partial b^2} < 0$ za $0 < L < 1$, dok se drugi izraz svede na

$$(-(1-L)^{1-1/L} - e) \cdot (L+1) < 0, \text{ za } 0 < L < 1,$$

pa postoji ekstrem u točki (x_0, b_0). Također, lako se pokaže da $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} < 0$, te možemo zaključiti da funkcija očekivanog dobitka postiže maksimum u toj točki. Vraćanjem početne supstitucije, dobivamo izraze 5.4 i 5.5. □

Sada vrlo lako, uvrštavajući vrijednosti u formulu 5.4 i 5.5 možemo odrediti optimalne točke zaustavljanja za Don Johnsona. Rezultate vidimo u sljedećoj tablici. Možemo zaključiti da ako bi Don Johnson ulagao $\$100,000$ po rundi, optimalna strategija bi bila :

- DJ bi trebao prestati igrati nakon što osvoji $\$2,411,300$,

- DJ bi trebao prestati igrati nakon što izgubi $\$2,597,400$,

Don Johnson - Blackjack	
Ulazne vrijednosti	
μ	-0.0029036
σ	1.1417
Povrat L	20%
Izlazne vrijednosti	
Win exit point	24.113
Loss exit point	25.974
p_{win}	49.07%
HA^*	-0.2601%
Broj rundi	480.65
Očekivani dobitak	1.25000

Tablica 5.4: Drugi teorem o povratu na gubitak - Don Johnson

- vjerojatnost dostizanja Win exit point-a je 49.07%,
- DJ ima efektivnu prednost nad kućom od 0.206%,
- očekivni broj rundi do prestanka igre je 481,
- očekivani dobitak po sesiji za DJ-a je $\$125,000$.

Za kraj, iskazat ćemo još općenitu formulu za maksimalan očekivani dobitak sljedećim korolarom.

Korolar 5.0.6 (Treći teorem o povratu na gubitak)**.** *Pretpostavimo da igrač igra igru G s očekivanjem $\mu < 0$ te standardnom devijacijom σ. Pretpostavimo da je igraču ponuđen povrat na gubitak L takav da $0 < L < 1$. Za igrača koji koristi optimalne točke zaustavljanja (dane u teoremu 5.0.5), maksimalan očekivani dobitak iznosi*

$$maxwin(\mu, \sigma, L) = -\frac{\sigma^2}{2\mu} \cdot f(L), \tag{5.7}$$

gdje je $f(L)$ koeficijent povrata na gubitak, dan sa

$$f(L) = \frac{1-L}{L}\Big(\ln(1-L) + \frac{L}{e(1-L)^{\frac{1}{L}}}\Big)$$

Dokaz. Ponovo, zbog jednostavnosti koristimo supstituciju $t = \frac{-2\mu}{\sigma}$. Funkciju očekivanog dobitka $w(x, b, L)$ raspišemo te dobivamo

$$w(x, b, L) = \frac{xe^{tb}(L-1) - Lxe^{tx} + b(e^{tx} - 1) + x}{e^{tb} - 1}$$

te uvrstimo vrijednosti 5.4 i 5.5 u kojima postiže maksimum pa dobivamo

$$\begin{aligned} w(L) &= \frac{1}{t} \cdot \frac{(1-L)^{-1/L}(L + e(1-L)^{-1/L} \cdot \ln(1-L))}{eL} \\ &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1-L}{L}\Big(\ln(1-L) + \frac{L}{e(1-L)^{\frac{1}{L}}}\Big). \end{aligned}$$

Vraćanjem supstitucije $t = \frac{-2\mu}{\sigma^2}$ dobivamo funkciju maksimalnog očekivanog dobitka $maxwin(\mu, \sigma, L)$ koja ovisi o povratu L, očekivanju te devijaciji igre G, gdje $f(L)$ nazivamo koeficijent povrata. □

Napomena 5.0.7. *Za $L \to 0$, izraz $(1-L)^{\frac{1}{L}}$ konvergira ka $\frac{1}{e}$ te $f(L)$ teži u 0 pa maksimalni očekivani dobitak teži u 0. Ova tvrdnja je intuitivno jasna jer kako je povrat na gubitak manji, manji će biti i očekivani dobitak. S druge strane, pokažimo što se događa ako $L \to 1$, odnosno izračunajmo $\lim_{L\to 1} f(L)$. Izraz $f(L)$ zapišimo kao*

$$f(L) = \frac{(1-L)\ln(1-L)}{L} + \frac{1-L}{e(1-L)^{1/L}}$$

te imamo

$$\lim_{L\to 1} f(L) = \lim_{L\to 1} \frac{(1-L)\ln(1-L)}{L} + \lim_{L\to 1} \frac{1-L}{e(1-L)^{1/L}} = A + \frac{1}{e}B.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lim_{L\to 1}(1-L)\ln(1-L)}{\lim_{L\to 1} L} = \Big[\frac{0\cdot\infty}{1}\Big] = \lim_{L\to 1} \frac{\ln(1-L)}{\frac{1}{1-L}} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{L\to 1} \frac{-\frac{1}{1-L}}{\frac{1}{(1-L)^2}} = \lim_{L\to 1}(-1+L) = 0 \\ B &= \lim_{L\to 1}(1-L)^{\frac{L-1}{L}} = \lim_{L\to 1} e^{\frac{L-1}{L}\ln(1-L)} = e^{\lim_{L\to 1} \frac{L-1}{L}\ln(1-L)} \\ &= e^A = 1 \\ \lim_{L\to 1} f(L) &= 0 + \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Dakle, možemo zaključiti da $maxwin(\mu, \sigma, L) \to \frac{1}{e} \cdot \frac{-\sigma^2}{2\mu}$ kako $L \to 1$.

Na temelju korolara 5.0.6 i napomene 5.0.7 možemo zaključiti da je maksimalan očekivani dobitak

- direktno proporcionalan varijanci igre (udvostručimo standardnu devijaciju, dobitak se poveća 4 puta),

- obrnuto proporcionalan očekivanju igre (udvostručimo očekivanje, dobitak se upola smanji),
- strogo veći od 0 za $0 < L < 1$.

U konačnici, korolar 5.0.6 govori da svaka promocija povrata na gubitak, koja nije ograničena (npr. minimalno vrijeme igranja, maksimalan ulog, itd.) na bilo koju casino igru je pobjediva.

Sada vrlo lako na temelju korolara 5.0.6 možemo odrediti maksimalne očekivane dobitke ako igrač igra optimalnom strategijom.

Treći teorem o povratu na gubitak			
	Blackjack (DJ)	Rulet - Izravno	Baccarat - Banker
μ	-0.002904	-0.0270270	-0.010579
σ	1.1417	5.83784	0.92737
Povrat L	20%	12%	18%
Koef. povrata $f(L)$	0.005569	0.001916	0.004459
$maxwin(\mu, \sigma, L)$	1.250004	1.208273	0.181249
Ulog po rundi	\$ 100,000.00	\$ 1,000.00	\$ 100,000.00
Očekivani dobitak	\$ 125,000.41	\$ 1,208.27	\$ 18,124.90

Tablica 5.5: Maksimalni očekivani dobitci za razne casino igre

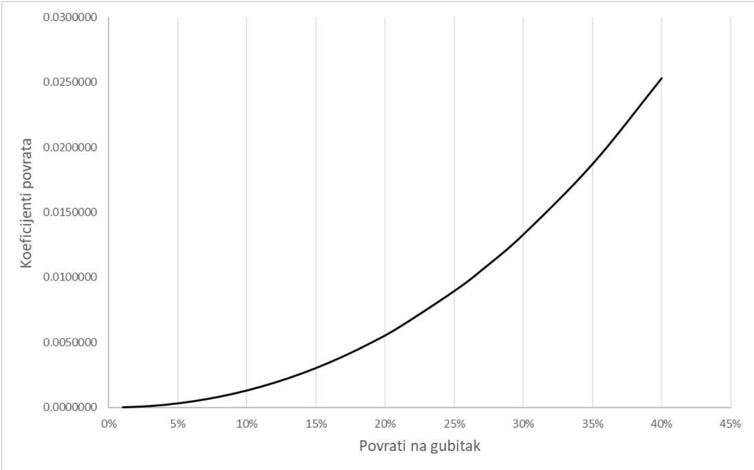
Promatrajmo sada još koeficijent povrata $f(L)$. U sljedećoj tablici dani su $f(L)$ za najčešće povrate na gubitak.

Povrati L	$f(L)$
5%	0.0003206
8%	0.0008336
10%	0.0013165
12%	0.0019164
15%	0.0030444
18%	0.0044590
20%	0.0055690
25%	0.0089643

Tablica 5.6: Koeficijenti povrata za najčešće povrate na gubitak

Za fiksnu igru G, za povrat 10%, koeficijent povrata je 0.0013165, dok je pri 20%, koeficijent 0.0055690. To povlači da će maksimalan očekivani dobitak pri 20%

povrata biti 0.0055690/0.0013165 = 4.23 puta veći od onoga kojeg bi očekivali pri 10% povrata. Na sljedećem grafu vidimo kako koeficijent povrata ima eksponencijalni rast.



Slika 5.1: Koeficijent povrata u odnosu na povrat na gubitak

Web stranica *statista.com* navodi da je ukupni prihod svih kockarnica u SAD-u 2011. godine bio 62.76 milijardi dolara, a 2018. godine 79.42 milijardi dolara te i dalje raste. Činjenica da je DJ osvojio 15.1 milijuna nije ostavila značajan trag u vidu godišnjeg profita casina, no potaknula je mnoge *advantage* igrače da iskoriste loše promocije, no i casina da detaljnije preispituju promocije prije nego što ih plasiraju na tržište.

Bibliografija

[1] M. Bollman, *Basic Gambling Mathematics: The Numbers Behind the Neon*, CRC Press, 2014.

[2] J. Fax, A.F. Lucas i J. Kilby, *Casino Operations Management*, John Wiley & Sons, Incorporated, 2004.

[3] R.C. Hannum i A.N. Cabot, *Practical Casino Math*, Casino management series, Institute for the Study of Gambling & Commercial Gaming, 2005.

[4] E. Jacobson, *Advantage Play - Promotions, coupons, rebates and discounts*, (2013.), `https://www.888casino.com/blog/apheat/all-apheat-posts`, posjećena ožujak 2020.

[5] J. Jacod i A. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer Science & Business Media, 2013.

[6] M. Pinsky i S. Karlin, *An introduction to stochastic modeling*, Academic Press, 2010.

[7] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjerojatnost*, PMF, skripta s predavanja (2019), `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/materijali.php`, posjećena veljača 2020.

[8] K. Sigman, *Gambler's Ruin Problem*, (2009), `http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I.html`, posjećena veljača 2020.

[9] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, PMF, skripta s predavanja (2008), `hhttps://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm18-predavanja.html`, posjećena veljača 2020.

[10] ———, *Slučajni procesi*, PMF, skripta s predavanja (2010), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp18-predavanja.html`, posjećena veljača 2020.

Sažetak

Kockarnice ponekad naprave promociju tipa povrat na gubitak što im može donijeti i gubitak. Najpoznatiji primjer je onaj u kojem je Don Johnson tijekom 6 mjeseci u 2011. godini igrajući blackjack osvojio preko 15 milijuna dolara u tri kockarnice u Atlantic City-ju. Cilj diplomskog rada je opisati i proučiti igre na sreću s uključenim povratom na gubitak, te pronaći optimalna vremena zaustavljanja u slučaju dobitka, odnosno gubitka, kojima se maksimizira dugoročni profit. U matematičkim izračunima koristit će se Brownovo gibanje s driftom kao aproksimacija diskretnog slučajnog procesa.

Summary

Casinos can sometimes make such a promotion in which they return some percentage of a person's losses, but this may cause their own losses. The most famous example is when Don Johnson managed to win over 15 million dollars playing blackjack in three casinos over a six months period in 2011, in Atlantic City. The aim of this thesis is to describe and study the games of chance, which include the return on loss, as well as to determine the optimal exit time. This includes leaving the game while they are still at a gain level rather than losing money, in order to maximize the long-term profit. The Brownian motion with drift as an approximation of the discrete random process will be used in the mathematics calculations.

Životopis

Rođen sam 17. srpnja 1995. godine u Čakovcu, gdje sam 2010. godine završio II. osnovnu školu, a 2014. godine klasičnu gimnaziju, Srednja škola Čakovec. Iste godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Sveučilištu u Rijeci te sam titulu sveučilišni prvostupnik stekao 2017. godine. Također, te godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a.