Detaljna analiza problema brahistokrone

Radić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Radić

DETALJNA ANALIZA PROBLEMA BRAHISTOKRONE

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2020

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Radić

DETALJNA ANALIZA PROBLEMA BRAHISTOKRONE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Marko Erceg

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliku zahvalnost, u prvom redu, dugujem svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci i razumijevanju koju mi je pružala tijekom studiranja. Zahvaljujem se i prijateljima, bez kojih bi ovo putovanje vjerojatno kraće trajalo, ali ne bi bilo ni približno ovako lijepo. Posebne zahvale mom mentoru doc. dr. sc. Marku Ercegu na uloženom trudu, strpljenju i pomoći prilikom pisanja ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

Svi znamo da je najkraći put između dvije točke ravna linija, a što je s najbržim? Isto se zapitao i švicarski matematičar Johann Bernoulli još 1696. godine postavivši problem najbržeg puta, poznatijeg pod imenom Brahistokrona, čiji naziv dolazi iz starogrčkog jezika i znači najkraće vrijeme. Problem se zasniva na gibanju neke materijalne točke između dvije točke u vertikalnoj ravnini uz utjecaj jedino sile teže. Osnovna je ideja rješenja naći integral za potpuno vrijeme dolaska u drugu točku i minimizirati ga. Da je Brahistokrona krivulja cikloida, dokazao je upravo Bernoulli, ali i neki njegovi suvremenici. Ovaj problem je uveliko pridonio razvoju varijacijskog računa, a smatra se i jednim od osnovnih optimizacijskih problema čime je postavljen i temelj za uspostavljanje još nekih grana optimizacije.
Osim velikog značaja ovog problema u svijetu matematike, Brahistokrona ima primjenu svuda oko nas. U nekim sportovima u kojima je cilj prijeći stazu u što kraćem vremenu, aktivnostima u kojima se zbog atraktivnosti ili adrenalina želi postići što veća brzina, za stazu po kojoj se kretanje odvija uzima se upravo cikloida. Takvi primjeri mogu se pronaći u skijaškim skokovima, surfanju, vlakovima smrti, najatraktivnijim skate parkovima (vidi slike 0.1, 0.2, 0.3).
Cilj ovog rada je upoznati se s problemom i napraviti njegovu analizu pomoću više pristupa. Rad je podijeljen na 5 poglavlja. Prvo obrađuje kratku povijest Brahistokrone krivulje i pretpostavke koje ćemo uzeti u obzir u nastavku. U drugom, trećem i četvrtom poglavlju problem je riješen različitim pristupima, redom varijacijskim računom, optimalnim upravljanjem i Cauchy-Schwarzovom nejednakošću. U prvom dijelu zadnjeg, odnosno petog poglavlja, promijenjeni su uvjeti problema pa se, uz silu teže, pretpostavlja da djeluje i sila trenja dok je u drugom dijelu dana primjena Brahistokrone na gravitacijski vlak koji prolazi kroz Zemlju i minimizira vrijeme putovanja između dvije točke.

Slika 0.1: Adrenalinski park (slika preuzeta iz [16])

Slika 0.2: Skijaški skokovi (slika preuzeta iz [16])

Slika 0.3: Skateboard park (slika preuzeta iz [16])

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Definicija 1.1. *Neka je X podskup normiranog prostora $(E, \|\cdot\|)$ i f realna funkcija definirana na X. Kažemo da je $x_0 \in X$ lokalni minimum na X ako postoji $r > 0$ takav da za svaki $x \in B(x_0, r) \cap X$ vrijedi*

$$f(x_0) \leq f(x),$$

pri čemu smo s $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$ označili otvorenu kuglu oko x_0 radijusa r. Ako gornje vrijedi za svaki $x \in X$, tada kažemo da je x_0 (globalni) minimum.

Definicija 1.2. *Neka je E vektorski prostor, a f realna funkcija definirana na nepraznom podskupu X od E. Neka je v vektor iz E i neka postoji $\epsilon > 0$ takav da vrijedi da je zatvoreni segment $[x - \epsilon v, x + \epsilon v] \subseteq X$. Ako postoji limes*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon}$$

kažemo da postoji usmjerena derivacija od f u točki x u smjeru v, s oznakom $\partial_v f(x)$ i da je jednaka upravo tom limesu.

Smjerovi v za koje je definirana usmjerena derivacija $\partial_v f(x)$ zovu se dopušteni smjerovi.

Definicija 1.3. *i) Neka su x, y dvije točke u R^N. Skup*

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

zovemo segment s krajnjim točkama x, y.
ii) Podskup K od $\mathbb{R}^N$ zovemo konveksnim ako je za svake $x, y \in K$ segment $[x, y]$ sadržan u K.

Definicija 1.4. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^N$ neprazan konveksni skup. Kažemo da je funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ konveksna ako za sve $x, y \in K$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi:*

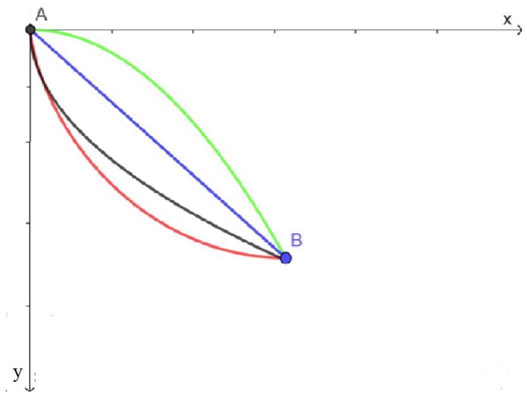
$$f\big((1 - \lambda x) + \lambda y\big) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y). \tag{1.1}$$

Ukoliko za sve $x \neq y$ i za svaki $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ u (1.1) vrijede stroge nejednakosti, funkciju f nazivamo strogo konveksnom.

Propozicija 1.1. *Neka je X otvoreni podskup $\mathbb{R}^N$ i $f : X \to \mathbb{R}$ klase C^2. Tada vrijedi:*
i) f je konveksna ako i samo ako vrijedi $f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)(x - y),\ x, y \in X$.
ii) f je konveksna na X ako i samo ako je Hessian funkcije f u svakoj točki $x \in X$ pozitivno semidefinitna matrica, tj. $H(f)(x) \geq 0$, $x \in X$.
iii) Ako je Hessian funkcije f u svakoj točki pozitivno definitna matrica, tada je f strogo konveksna.

1.1 Problem Brahistokrone krivulje

U ovom odjeljku postavit ćemo osnovni problem i naći funkcional koji ćemo u nastavku rada minimizirati, a on prati [1].
Problem Brahistokrone krivulje svodi se na nalaženje glatke funkcije čiji graf predstavlja putanju najbržeg puta između dviju proizvoljnih točaka A i B uz utjecaj sile teže, ali uz zanemareno trenje.
Postavimo problem tako da je u vertikalnoj ravnini y-os usmjerena prema „dolje”, tj. sila teže djeluje u smjeru y-osi. Fiksirajmo točke. Nulto vrijeme je vrijeme početka gibanja, a T je oznaka za ukupno vrijeme gibanja (od točke A do točke B). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su koordinate početne točke u ishodištu, tj. $A = (0, 0)$, a neka su koordinate točke B (a, b). Trajektoriju, odnosno krivulju, koju želimo dobiti modeliramo s $x \mapsto (x, y(x))$, gdje je $y : \langle 0, a\rangle \to \mathbb{R}$ glatka funkcija koja zadovoljava (rubne uvjete) $y(0) = 0$ i $y(a) = b$. Možemo pretpostaviti da je $a > 0$ jer se slučaj $a = 0$ svodi na trivijalan problem, a slučaj negativnog a lako dobijemo reflektiranjem danog problema s obzirom na os y. Budući da je y-os usmjerena prema „dolje”, možemo zaključiti da je $b > 0$ zato što točka B mora biti smještena ispod točke A da bi problem bio smisleno postavljen (vidi Sliku 1.1).



Slika 1.1: Neke krivulje između dvije točke (crvena boja označava cikloidu)

Dakle, objekt mase m kreće svoje gibanje iz ishodišta. Ključna tvrdnja koju koristimo na početku je zakon o očuvanju energije koji kaže da je zbroj potencijalne i kinetičke energije uvijek konstantan. U početnoj točki imamo stanje mirovanja, a razlika potencijalne energije između ishodišta i neke $(x, y(x))$ je $mgy(x)$ gdje je g gravitacijska konstanta. Formalizirajmo problem zakonom o sačuvanju energije:

$$E(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 - mgy(x)$$

$$E(0) = 0 \implies \frac{1}{2}mv(x)^2 = mgy(x),$$

iz čega jednostavnom računicom dolazimo do

$$v(x) = \sqrt{2gy(x)}.$$

Označimo duljinu puta između točaka $(0,0)$ i $(x, y(x))$ sa $s(x)$. Po Pitagorinom poučku zaključujemo da je $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$ pa je duljina puta između polazišne i proizvoljne točke jednaka

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}dt.$$

Neka je l duljina cijelog puta između naših dviju točaka. Ona je jednaka

$$l = s(a) = \int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Neka je T ukupno vrijeme putovanja. Brzina je tangencijalna na krivulju i ona je u svakoj točki $(x, y(x))$ jednaka umnošku $v(x)$ s jediničnom tangentom u toj točki. Iz definicije brzine slijedi

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Sada imamo

$$T = \int_0^l \frac{1}{v(s)}ds = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx.$$

Budući da je predmet našeg interesa zapravo problem najkraćeg puta, minimiziramo vrijeme iz čega možemo zaključiti da je funkcional kojeg optimiziramo upravo

$$I(y) := \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx.$$

Kako konstante ne utječu na minimizaciju funkcionala, dovoljno je pisati izraz bez $\frac{1}{\sqrt{2g}}$. Funkcional I promatramo na skupu

$$X := \{(\forall x \in [0, a])\ y(x) \geq 0\,,\ \int_0^a y(x)^{-\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Problem kroz povijest

Kratke povijesne napomene ovog odjeljka prate [2] i [3].

Problem prije Bernoullija

Jedan od prvih optimizacijskih problema s kojim se susrećemo u literaturi je izoperimetrički problem, poznat još i kao Didonin. Ime je inspirirano Vergilijevom mitološkom pričom o osnivanju Kartage, a legenda kaže da je princezi Didoni rečeno da može dobiti područje koje se može ograničiti jednom volovskom kožom te je na tom području nastala Kartaga. Taj se problem zapravo svodi na određivanje zadane duljine koja određuje maksimalnu površinu. Iako su još stari Grci zaključili da je rješenje ovog optimizacijskog problema kružnica, dokaz koji zadovoljava sve matematičke standarde iznesen je tek u 19. stoljeću.

Heron iz Aleksandrije u svom je djelu pokazao da kada ogledalo reflektira zraku svjetlosti koju emitira objekt, ona od objekta do oka slijedi najkraći od svih mogućih puteva. Sličnu je tvrdnju predstavio Fermat ističući kako svjetlo slijedi najbrži put. Upravo je Fermatov princip odigrao krucijalnu ulogu u Bernoullijevom rješenju Brahistokrone krivulje.

Prije Bernoullija sličan problem najbrže krivulje postavio je Galileo. On je izračunao vrijeme kretanja od početne do krajnje točke putem ravne linije i pokazao da bi objekt brže stigao do ciljne točke kad bi putovao putem dvije linije, a točka koja spaja te linije je točka na luku kružnice koja prolazi kroz sve tri točke. Iako je Galileo bio u pravu s tim argumentom, poveden tim pogrešno je zaključio da je najbrža staza luk kružnice.

Bernoullijev izazov

Johann Bernoulli je 1696. godine predstaviviši ovaj problem zadao izazov svojim suvremenicima. U roku od nekoliko mjeseci odazvalo se, i riješilo problem, nekoliko velikih matematičara. Osim Johanna Bernoullija, do rješenja su došli i Leibniz, koji je problem nazvao sjajnim, stariji Johannov brat, Jakob, Tschirnhaus, L'Hospital i konačno, Newton, za kojeg je poznato da je problem riješio u manje od pola dana i svoje je rješenje poslao anonimno, ali Bernoulliju nije dugo trebalo da prepozna autora.

Bernoullijevo rješenje

U ovom odjeljku ukratko je izložena ideja rješenja Johanna Bernoullija. U svom je rješenju podijelio ravninu između dvije točke na horizontalne trake, pretpostavio da objekt slijedi ravnu liniju u svakoj traci i zaključio da je staza po dijelovima linearna. Da bi odredio kut ravne linije u svakoj traci, primijenio je Fermatov princip o lomu zraka svjetlosti po kojem zraka uvijek slijedi najkraći mogući put.

Neka je v brzina u jednoj traci koja zatvara kut α s vertikalom i neka je u brzina u idućoj traci koja s vertikalom zatvara kut β. Tada po Fermatovom zakonu vrijedi

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin\beta}.$$

Trake postaju sve tanje i tanje, a kutovi linija s vertikalom postaju kutovi koje tangenta krivulje zatvara s vertikalom. Krivulja u nekoj točki (x, y) zadovoljava

$$\frac{v}{\sin\alpha} = C.$$

Uvrštavanjem izraza za brzinu $v = \sqrt{y}$, koji je bio poznat još Galileu, slijedi

$$\frac{\sqrt{y}}{\sin\alpha} = C,$$

odnosno

$$y = C^2 \sin^2\alpha.$$

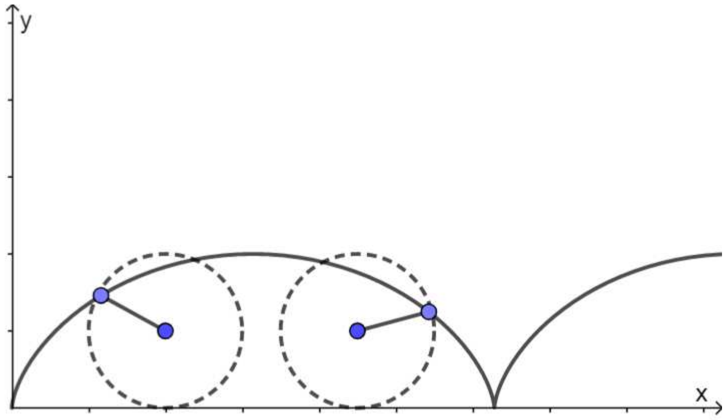
Koristeći $y' = \cot\alpha$ dobio je da vrijedi

$$y(1 + y'^2) = C^2$$

i da cikloida zadovoljavaju danu jednadžbu.

1.2 Cikloida

Definicija 1.5. *Cikloida je ravninska krivulja koju opisuje fiksna točka kružnice dok se kružnica kotrlja po pravcu.*

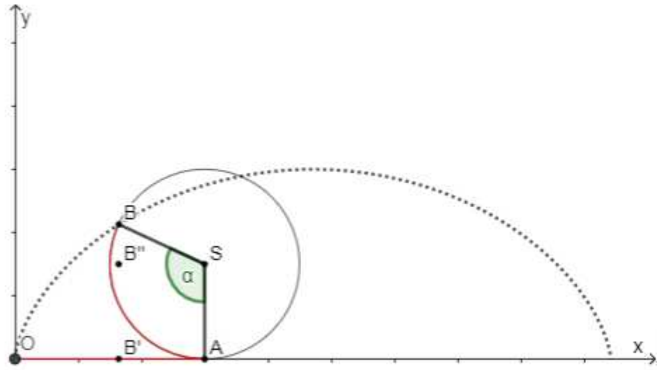


Slika 1.2: Cikloida

Bila je predmet proučavanja mnogih matematičara, a među njima je bio i Galileo Galilei koji joj je i dao ime koje na grčkom znači da je poput kruga. Od ostalih istaknut ćemo nizozemskog matematičara Huygensa koji je otkrio jedno zanimljivo svojstvo cikloide: spuštanjem više tijela s različitih visina krivulje sva tijela dođu u najnižu točku u isto vrijeme. Problem nalaženja takve krivulje nazvao je problem izokrone ili tautokrone (grč. isto vrijeme), a do njega je došao u želji da napravi što precizniji sat s njihalom. Bernoulli je bio oduševljen činjenicom da dva različita problema vezana uz kretanje tijela u određenom vremenu vode do istog rješenja.

Izvedimo jednadžbe cikloide.
Neka je S središte kružnice radijusa a koja se kotrlja. Označimo s O ishodište, s A točku kružnice na osi x, a s B sjecište naše kružnice s većom po kojoj se kotrlja. Oznake prate Sliku 1.3. Kretanje točke B određjuje cikloidu pa je cilj izraziti njene koordinate. Ortogonalna projekcija točke B na x- os neka je B', a s B'' označena je točka koja je udaljena od S za $|B'A|$, a ima istu x koordinatu kao i B i B'. Iz toga je jasno da vrijedi $|B''S| = |B'A|$. Kao i na slici, kut $\angle BSA$ ima oznaku α.

Koordinata x točke B je jednaka udaljenosti od ishodišta do B', a y koordinata je $|B'B|$. Udaljenosti označene crvenom bojom na slici su jednake, točnije vrijedi $|OA| = a\alpha$. Pogledajmo trokut $\triangle B''SB$ i primijetimo da je kut $\angle B''SB$ jednak $\beta = \alpha - 90°$. Iz osnovnih trigonometrijskih identiteta slijedi da je $\cos\beta = \frac{|B''S|}{a}$, a x koordinata točke B tada je jednaka $a\alpha - a\cos\beta = a\alpha - a\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = a\alpha - a\sin\alpha$. Kako su nam poznati svi kutevi



Slika 1.3: Cikloida

navedenog trokuta, možemo dobiti i stranicu $|B''B|$.
$|B''B| = a\sin\beta$, a $y = a + a\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = a(1 - \cos(\alpha))$. Dakle, pokazano je da vrijedi

$$B = \Big(a(\alpha - \sin\alpha), a(1 - \cos\alpha)\Big). \tag{1.2}$$

Jednadžbe cikloide glase:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t - \sin t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Izvedimo jednadžbu cikloide u Kartezijevim koordinatama:

$$\cos t = 1 - \frac{y}{a} \quad \Longrightarrow \quad t = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

$$\frac{x}{a} = t - \sin t$$

$$\frac{x}{a} = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2} = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{\frac{2y}{a} - \frac{y^2}{a^2}}.$$

Poglavlje 2

Pristup varijacijskim računom

Ovo poglavlje prati [5] i [6] za nešto općenitije tvrdnje varijacijskog računa te [4] za konkretan problem Brahistokrone krivulje.
Neka je $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna. Za $\gamma \in C^1([a,b])$ definiramo funkcional

$$I(\gamma) = \int_a^b f(t, \gamma(t), \gamma'(t))\, dt.$$

$I(\gamma)$ je dobro definiran zbog neprekidnosti podintegralne funkcije na $[a,b]$. Osnovni problem varijacijskog računa se svodi na nalaženje minimizatora upravo definiranog funkcionala $I(\gamma)$ na skupu $X := \{\gamma \in C^1([a,b]) : \gamma(a) = \alpha, \gamma(b) = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Podintegralna funkcija f zove se Lagrangian.

U slučaju Brahistokrone krivulje, kako je i pokazano u prethodnom odjeljku, vrijedi da je podintegralna funkcija $f(t, \gamma, \gamma') = \sqrt{\frac{1+\gamma'^2}{2g\gamma}}$, a kako vidimo da ona ne ovisi o varijabli t, dovoljno je pisati $f(\gamma, \gamma')$. U ovom slučaju $X := \{\gamma \in C^1([0,a]) : \gamma(0) = 0, \gamma(a) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Kako Lagrangian ima singularitet u 0, možemo zaključiti da se radi o nepravom integralu. U nastavku rada, radi pojednostavljivanja oznaka, pisat ćemo $[\gamma(t)]$ za $(\gamma(t), \gamma'(t))$ pa vrijedi

$$I(\gamma) = \int_0^a f[\gamma(t)] dt = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \gamma'(t)^2}{2g\gamma(t)}} dt. \tag{2.1}$$

Sljedeće dvije leme su ključne kod izvoda nužnih uvjeta optimalnosti danih Euler-Lagrangeovom jednadžbom, čime ćemo se baviti u sljedećem odjeljku.

Lema 2.1. *(Osnovna lema varijacijskog računa) Ako je $f \in C([0,a])$ i $\int_0^a f(t)v'(t)\, dt = 0$ za sve funkcije $v \in C^1([0,a])$ takve da vrijedi da je $v(0) = v(a) = 0$, tada je f konstantna funkcija.*

Dokaz. Neka je $c = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, dt$, a $v(s) = \int_0^s (f(t) - c)\, dt$. Vidimo da tada vrijedi da je $v(0) = v(a) = 0$ te da je v klase $C^1([0,a])$ s $v'(s) = f(s) - c$.

$$0 \leq \int_0^a (f(t) - c)^2\, dt = \int_0^a (f(t) - c)v'(t)\, dt = \int_0^a f(t)v'(t)\, dt - cv(t)\Big|_0^a = 0.$$

Zbog neprekidnosti $f(t) - c$, $f(t) - c = 0$ za svaki t, čime je teorem dokazan. □

Korolar 2.1. *Ako su $f, g \in C([0,a])$ i vrijedi*

$$\int_0^a f(t)v(t) + g(t)v'(t)\, dt = 0 \tag{2.2}$$

za sve funkcije $v \in C^1([0,a])$ takve da je $v(0) = v(a) = 0$, tada je i $g \in C^1([0,a])$ i vrijedi da je $g' = f$.

Dokaz. Za sve $s \in [0,a]$ definirajmo $F(s) = \int_0^s f(t)\, dt$. Vidimo da je $F \in C^1([0,a])$ i da je $F'(s)$ jednak upravo $f(s)$. Sada vrijedi

$$\int_0^a f(t)v(t)\, dt = F(t)v(t)\Big|_0^a - \int_0^a F(t)v'(t)\, dt = -\int_0^a F(t)v'(t)\, dt. \tag{2.3}$$

Uvrštavanjem (2.3) u pretpostavku (2.2) dobijemo

$$0 = \int_0^a (g(t) - F(t))v'(t)\, dt.$$

Iz Leme 2.1 slijedi da postoji konstanta iz $\mathbb{R}$ takva da je $g(t) - F(t) = c$. Stoga vrijedi da je $g = F + c$, $g \in C^1([0,a])$ i $g' = F' = f$. □

2.1 Uvjeti za ekstreme funkcionala

Neka je f realna C^1 funkcija definirana na otvorenom podskupu $O \subset \mathbb{R}^2$ i neka je γ realna C^1 funkcija definirana na segmentu $[0, a]$. Dodatno, $[\gamma(t)] \in O$ za sve $t \in [0, a]$ te je $I(\gamma) = \int f(t, \gamma(t), \gamma'(t))\, dt$. Neka je X podskup od $C^1([0, a])$ sastavljen od svih funkcija za koje vrijedi $\gamma(0) = 0, \gamma(a) = \alpha, (\gamma(t), \gamma'(t)) \in O, t \in [0, a]$.

Izvod Euler - Lagrangeove jednadžbe

Prvi korak u traženju nužnog uvjeta za ekstreme funkcionala je nalaženje izraza za usmjerenu derivaciju u nekom dopuštenom smjeru v.
Ako je v dopušteni smjer, tada za njega vrijedi da je klase $C^1([0, a])$ i $v(0) = v(a) = 0$. Za dovoljno mali ϵ takav da je $\gamma + \epsilon v \in X$, gdje je X definiran kao u uvodu odjeljka vrijedi:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{I(\gamma + \epsilon v) - I(\gamma)}{\epsilon} = \frac{dI}{d\epsilon}(\gamma + \epsilon v)|_{\epsilon=0}.$$

Neprekidnost podintegralne funkcije f s obzirom na ϵ omogućuje postojanje $\frac{dI}{d\epsilon}(\gamma + \epsilon v)$ pa je v dopušteni smjer. Raspišimo upravo navedeni izraz:

$$\frac{dI}{d\epsilon}(\gamma + \epsilon v) = \int_0^a \frac{df}{d\epsilon}[(\gamma + \epsilon v)(t)]dt = \int_0^a \frac{\partial f}{\partial \gamma}[(\gamma + \epsilon v)(t)]v(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[(\gamma + \epsilon v)(t)]v'(t)\, dt.$$

Kako je podintegralna funkcija neprekidna s obzirom na ϵ, za usmjerenu derivaciju vrijedi

$$\partial_v I(\gamma) = \int_0^a \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]v'(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Pokazali smo da su svi smjerovi $v \in C^1([0, a])$ takvi da vrijedi $v(0) = v(a) = 0$ dopušteni smjerovi. Oni tvore vektorski potprostor prostora $C^1([0, a])$.
Neka je γ ekstrem funkcionala I i neka je v dopušteni smjer. Tada je $\partial_v I(\gamma) = 0$. Pokažimo da to vrijedi tako da definiramo funkciju $\varphi(v) = I(\gamma + \epsilon v)$, za $v \in \langle 0, a \rangle$, $\epsilon \in \mathbb{R}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se radi o minimizatoru. Kako vrijedi da je γ minimizator funkcionala,

$$I(\gamma) \leq I(\gamma + \epsilon v),\ \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Minimalnu vrijednost φ postiže u 0, a po definiciji funkcije φ vrijedi $\varphi(0) = I(\gamma)$. Prema tome, $\varphi(0) = \frac{d}{d\epsilon} I(\gamma + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = \partial_v I(\gamma) = 0$.

Primjenom Korolara 2.1. na $\partial_v I(\gamma) = 0$ dolazimo do idućeg izraza, poznatijeg kao Euler - Lagrangeova jednadžba

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} f(t, \gamma(t), \gamma'(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \gamma'} f(t, \gamma(t), \gamma'(t)).$$

Važno je napomenuti da je izvedena Euler - Lagrangeova jednadžba nužan, no ne i dovoljan uvjet za lokalni ekstrem. Funkcije koje zadovoljavaju danu jednadžbu mogu, ali i ne moraju biti globalni pa čak ni lokalni ekstremi.

Ekstremi funkcionala definirani nepravim integralom

Već je napomenuto da se u slučaju Brahistokrone krivulje radi o nepravom integralu. Nađimo uvjete za ekstreme takvih funkcionala. Pretpostavimo da je f realna C^1 funkcija definirana na $\langle 0,\infty\rangle\times\mathbb{R}$, neka je $[\gamma(t)]\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ za $t\in\langle 0,a]$, $\gamma\in C([0,a])$ neprekidno diferencijabilna na $\langle 0,a]$. Neka je sada $I(\gamma)$ definiran kao u (2.1). Također definirajmo

$$\begin{aligned} X := \{\gamma\in C([0,a])\cap C^1(\langle 0,a]), \gamma(0)=0,\\ (\gamma(t),\gamma'(t))\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, t\in\langle 0,a], I(\gamma)<\infty\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pokažimo da je X neprazan. Ako je $\gamma(t)=\frac{\alpha}{a}t$, tada je $\gamma(0)=0, \gamma(a)=\alpha$, a $I(\gamma)=\int_0^a f(t,\frac{\alpha}{a}t,\frac{\alpha}{a})dt=\sqrt{\frac{2(a^2+\alpha^2)}{g\alpha}}<\infty$ čime su ispunjeni svi uvjeti da vrijedi da je $\gamma\in X$. Idući teorem daje nužan uvjet za minimizatora funkcionala.

Teorem 2.1. *Ako je γ ekstrem funkcionala I na X, tada γ zadovoljava Euler - Lagrangeovu jednadžbu na $\langle 0,a]$.*

Dokaz. Uzmimo $v\in C^1([0,a])$ takvu da je $v(a)=0$ i neka postoji $c\in\langle 0,a\rangle$ tako da v iščezava na $[0,c]$. Smjer v je dopušten za I za svaki γ iz X. Raspišimo još jednom (2.4), izraz za derivaciju u smjeru v :

$$\partial_v I(\gamma)=\int_c^a \frac{\partial f}{\partial\gamma}[\gamma(t)]v(t)+\frac{\partial f}{\partial\gamma'}[\gamma(t)]v'(t)\,dt.$$

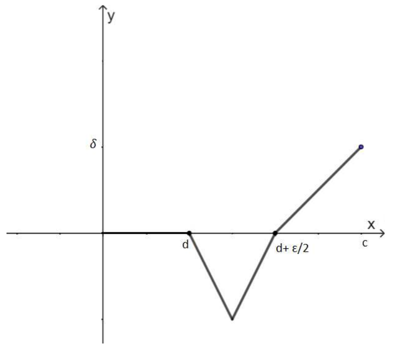
Neka je u restrikcija od v na $[c,a]$ klase $C^1([c,a])$ koja, osim $u(c)=u(a)=0$, dodatno zadovoljava i $u'(c)=0$. Ako je γ ekstrem, tada vrijedi da je

$$0=\partial_v I(\gamma)=\int_c^a \frac{\partial f}{\partial\gamma}[\gamma(t)]u(t)+\frac{\partial f}{\partial\gamma'}[\gamma(t)]u'(t)\,dt.$$

Vrijedilo bi da γ zadovoljava Euler - Lagrangeovu jednadžbu na intervalu $[c,a]$ kad bi mogli uvrstiti proizvoljnu funkciju u klase $C^1([c,a])$ za koju vrijedi da je $u(c)=u(a)=0$.

Neka je $u\in C^1([c,a])$ takav da vrijedi da je $u(c)=u(a)=0$ i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $u'(c)=\delta>0$ (inače samo zamijenimo u s $-u$). Uzmimo da je $\epsilon\in\langle 0,1]$ i $d=c-\epsilon>0$. Definirajmo realnu funkciju g na intervalu $[0,c]$ i podijelimo je na intervale

$[0, d], [d, d + \frac{\epsilon}{2}]$ i $[d + \frac{\epsilon}{2}, c]$. Na prvom intervalu jednaka je 0, na drugom je ona 'krović' funkcija visine δ dok je na trećem intervalu afina funkcija između 0 i δ, kako je i prikazano na slici 2.1.



Slika 2.1: Funkcija g na $[0, c]$

Ako definiramo

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^t g(s)\, ds, & \text{za } t \in [0, c] \\ u(t), & \text{za } t \in [c, a], \end{cases}$$

tada je v funkcija klase C^1 koja proširuje u na $[0, a]$ tako da je v jednak 0 na intervalu $[0, d]$ pa je v dopušteni smjer od I za γ.
Iz slike 2.1 vidimo da vrijedi da je $|g(t)| \leq \delta, t \in [0, c]$. Posebno, na intervalu $[d, c]$ tada vrijedi $v'(t) = g(t) \leq \delta$. Za $v(t)$ na istom intervalu vrijedi da je $|v(t)| = \left| \int_0^t g(s)\ ds \right| = \left| \int_d^c g(s) ds \right| \leq \delta \left| \int_d^c ds \right| = \delta(c - d) = \delta\epsilon \leq \delta$ pa nam nejednakost trokuta daje

$$\left| \int_d^c \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]v'(t)\ dt \right| \leq \delta \int_d^c \left| \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)] \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] \right| dt,$$

a taj izraz konvergira u 0 kada ϵ konvergira 0 jer i duljina intervala integracije $[d, d + \epsilon]$ ide u 0. Prema tome,

$$\int_d^c \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)]v(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]v'(t)\ dt = 0.$$

Iz Korolara 1.1 slijedi da γ zadovoljava E-L jednadžbu na $[c, a]$. Zbog toga što je c proizvoljno izabran iz intervala $\langle 0, a \rangle$, γ zadovoljava E-L jednadžbu na cijelom intervalu $\langle 0, a]$.

□

Propozicija 2.1. *Pretpostavimo da je f konveksna na $O = \langle 0, \infty\rangle \times \mathbb{R}$ i da $\gamma \in X$ zadovoljava Euler - Lagrangeovu jednadžbu na $\langle 0, a]$. Ako je $\frac{\partial f}{\partial \gamma}$ omeđena, tada je γ minimum funkcionala I na X. Posebno, ako vrijedi stroga konveksnost, radi se o jedinstvenom minimizatoru.*

Dokaz. f je klase C^1 pa je za bilo koju točku $t \in O$ definiran diferencijal $\nabla f(t)$ i usmjerena derivacija za sve smjerove $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_v f(t) = \nabla f(t) v = \frac{\partial f}{\partial \gamma}(t) v_1 + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}(t) v_2$$

Neka je u funkcija klase C^1 na $\langle 0, a]$ za koju vrijedi da je neprekidna na $[0, a]$, da je $\gamma + u \in X$ i da je jednaka 0 u rubovima. Ako je $c \in \langle 0, a\rangle$ i $t \in [c, a]$, tada $[(\gamma + u)(t)] \in O$ i

$$\int_c^a f[(\gamma + u)(t)]\, dt - \int_c^a f[\gamma(t)]\, dt \geq \int_c^a \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)] u(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] u'(t)\, dt.$$

Korištenjem Euler - Lagrangeove jednadžbe desna strane gornje jednakosti je jednaka

$$\begin{aligned}\int_c^a \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] u(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] u'(t)\, dt \\ = \int_c^a \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] u(t)\Big)\, dt = \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] u(t)\Big|_c^a = -\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(c)](u(c)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Kad prijeđemo na $\lim_{c \to 0}$ u gornjoj nejednakosti, uz pretpostavke da je $\frac{\partial f}{\partial \gamma}$ omeđen i $\gamma + u \in X$, zbog $u(0) = u(a) = 0$ slijedi

$$I(\gamma + u) - I(\gamma) = \int_0^a f[(\gamma + u)(t)] dt - \int_0^a f[\gamma(t)] dt \geq 0.$$

Prema tome, γ je minimum. Ako je f strogo konveksna, analognim razmišljanjem pokaže se da se radi o jedinstvenom minimumu. □

Teorem 2.2. *Pretpostavimo da je f klase C^2 i da parcijalna derivacija $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \gamma'}$ ne iščezava na $O = \langle 0, \infty\rangle \times \mathbb{R}$. Ako $\tilde{\gamma} \in X$ zadovoljava Euler- Lagrangeovu jednadžbu, tada je $\tilde{\gamma}$ klase C^2 na $\langle 0, a\rangle$.*

Dokaz. Neka je $t_0 \in \langle 0, a\rangle$, definiramo $\gamma_0 = \tilde{\gamma}(t_0)$ i $\gamma_0' = \tilde{\gamma}'(t_0)$. Promatramo preslikavanje

$$\phi : O \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(\gamma, \gamma') \to \Big(\gamma, \frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma, \gamma')\Big).$$

Jacobian od ϕ u (γ_0, γ_0') nije jednak nuli jer ni $\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma'^2}(\gamma_0, \gamma_0')$ nije nula. Iz teorema o inverznom preslikavanju slijedi da postoji okolina U oko (γ_0, γ_0') i okolina V (γ_0, z_0), gdje je $z_0 = \frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma_0, \gamma_0')$ takav da je $\phi : U \mapsto V$ difeomorfizam klase C^1 . Neka je h preslikavanje klase C^1. Za inverz od ϕ pišemo

$$\phi^{-1}(\gamma, z) = (\gamma, h(\gamma, z)).$$

Definiramo vektorsko polje $X : V \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ za koje vrijedi $X(\gamma, z) = \Big(h(\gamma, z), \frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma, h(\gamma, z))\Big)$. X je klase C^1 pa postoji maksimalna integralna krivulja $\phi(t) = (\gamma(t), z(t))$ takva da je klase C^1 i $\phi(t_0) = (\gamma_0, z_0)$ definiran na nekom otvorenom intervalu koji sadrži t_0. Kako vrijedi da je $\gamma'(t) = h\big(x(t), z(t)\big)$, i $\gamma'(t)$ je klase C^1. Iz toga slijedi da je $\gamma(t)$ klase C^2. Definirajmo

$$\psi(t) = \Big(\tilde{\gamma}(t), \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\tilde{\gamma}(t)]\Big).$$

Za neki t blizu t_0, koristeći činjenicu da je ϕ^{-1} inverz s drugom komponentom h od ϕ, vrijedi $h\Big(\tilde{\gamma}(t), \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\tilde{\gamma}(t)]\Big) = \tilde{\gamma}'(t)$, a ako iskoristimo E-L jednadžbu

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = \frac{\partial f}{\partial \gamma}\Big(\tilde{\gamma}(t), h(\tilde{\gamma}(t), \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\tilde{\gamma}(t)])\Big) = \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\tilde{\gamma}(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\tilde{\gamma}(t)].$$

Iz ovoga slijedi da je ψ integralna krivulja na X. Vidimo da vrijedi $\psi(t_0) = (\gamma_0, z_0)$ pa je $\psi(t) = \phi(t)$ na okolini t_0. Dakle, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ pa je $\tilde{\gamma}$ klase C^2 na okolini t_0. □

Ekvivalentni zapis Euler- Lagrangeove jednadžbe

Činjenica da Lagrangian funkcije ne ovisi o varijabli t može znatno pojednostavniti rješenje ovog problema budući da se kod potpune Euler - Lagrangeove jednadžbe radi o diferencijalnoj jednadžbi drugog reda (uglavnom nelinearnoj) čije rješavanje često traži zahtjevan račun. Promotrimo zato slučaj kada podintegralna funkcija ne ovisi o t varijabli, tj. vrijedi $f(t, \gamma, \gamma') = f(\gamma, \gamma')$. Prvi integral Euler - Lagrangeove jedandžbe u ovom slučaju je

$$f[\gamma(t)] - \gamma'(t) f_{\gamma'}[\gamma(t)] = C, C = \text{const.} \tag{2.7}$$

Ova jednadžba poznatija je kao Du Bois- Reymondova jednadžba, a u nekoj literaturi i kao Beltramijev identitet.

Napomena 2.1. *Ako γ zadovoljava Euler - Lagrangeovu jednadžbu, tada je nužno i rješenje (2.7), međutim, obrat ne vrijedi, tj. rješenja (2.7) nisu nužno stacionarne točke promatranog funkcionala. Ipak ako γ' ne iščezava na intervalu, tada je Euler - Lagrangeova jednadžba zadovoljena na intervalu. Pokažimo tu tvrdnju.*

Pretpostavimo da $\gamma'(t) \neq 0$ *na intervalu i da* γ *zadovoljava (2.7).*

$$\frac{d}{dt}f[\gamma(t)] = \frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]\gamma''(t).$$

Iz jednadžbe (2.7) slijedi

$$\frac{d}{dt}f[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}f[\gamma(t)](\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]\gamma'(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]\gamma''(t).$$

Stoga vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)]\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]\gamma'(t)$$

Kako vrijedi $\gamma'(t) \neq 0$, *dobili smo da je tvrdnja zadovoljena, tj.*

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)].$$

2.2 Račun

Vratimo se na konkretni problem i primijenimo dosadašnje zaključke.
Neka su $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Funkcija je sada dana izrazom $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+y^2}{x}}$ pa su

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x(1+y^2)}} \text{ i } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y^2}{x^3}}.$$

Funkcija f je klase C^1 na $\mathbb{R}_+$. Vidimo da su parcijalne derivacije od f definirane i neprekidne te zaključujemo da je f klase C^2 i da vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1+y^2)^3}} > 0. \tag{2.8}$$

Kako je f klase C^2 i vrijedi (2.8), zadovoljene su pretpostavke Teorema 2.2 pa je stacionarna funkcija klase C^2 i možemo koristiti (2.7). Konkretno, za γ iz (2.5) jednadžba (2.7) za Brahistokronu krivulju glasi:

$$\frac{\sqrt{1+\gamma'^2}}{\sqrt{\gamma}} - \gamma'\Big(\frac{\gamma'}{\sqrt{\gamma}\sqrt{1+\gamma'^2}}\Big) = C', \tag{2.9}$$

gdje je C' konstanta. Sređivanjem izraza dolazimo do $\frac{1}{\sqrt{\gamma(t)\left(1+\gamma'^2(t)\right)}} = C' > 0$. Konačno, sređeni izraz koji ćemo koristiti glasi

$$\gamma(t)(1 + \gamma'^2(t)) = C, C = \frac{1}{C'^2}. \tag{2.10}$$

Bilo koje rješenje Brahistokrone krivulje mora zadovoljavati danu jednadžbu na intervalu $\langle 0, a\rangle$.
Iduća propozicija pokazuje neka svojstva rješenja Brahistokrone.

Propozicija 2.2. *Neka je γ rješenje problema Brahistokrone krivulje. Tada vrijedi:*
(i) $lim_{t\to 0}\gamma'(t) = \infty$
(ii) γ nije konstantna na intervalu;
(iii) γ ima najviše jednu kritičnu točku, i to maksimum;
(iv) γ je ili strogo rastuća ili ima točno jedan globalni ekstrem
(v) γ' je strogo padajuća na $\langle 0, a\rangle$

Dokaz. i) Iz izraza (2.10) jasno se vidi da kad $\gamma(t)$ ide u 0, $\gamma'(t)^2$ ide u beskonačnost. Inače bi lijeva strana (2.10) išla u nulu, a C nije nula jer za $t = a$ lijeva strana nije nula.

ii) Iz izraza $\frac{\partial f}{\partial \gamma'}$ slijedi da postoje neprekidne funkcije a i b za koje vrijedi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)] = \frac{a(t)\gamma''(t) - \gamma'(t)b(t)}{\gamma(t)(1 + \gamma'^2(t))}.$$

Ako je γ konstanta na intervalu, tada $\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \gamma'}[\gamma(t)]$ iščezne na intervalu. Međutim, iz činjenice da $\frac{\partial f}{\partial \gamma}[\gamma(t)]$ ne iščezava i Euler - Lagrangeove jednadžbe, slijedi da γ nije konstanta na intervalu.

iii) Funkcija γ je omeđena s C i vrijednost C postiže u točki t_0 ako i samo ako je t_0 kritična točka. Neka su t_0 i t_1 kritične točke. Kako γ nije konstanta na intervalu $[t_0, t_1]$, postoji neka točka t na intervalu takva da je $\gamma(t) < C$. γ je neprekidna na kompaktnom intervalu $[t_0, t_1]$ pa kao takva postiže minimum u nekoj točki t_2. Kako vrijedi da je $\gamma(t_2) < C$ i $\gamma'(t_2) = 0$, zbog (2.10) dolazimo do kontradikcije. Stoga može postojati najviše jedna kritična točka i očito je to maksimum.

iv) Ako γ nema kritičnih točaka ili je a kritična točka, tada γ nema kritičnu točku u intervalu $\langle 0, a\rangle$. Ako postoje točke s, t uz $s < t$ takve da je $\gamma(s) = \gamma(t)$, iz Rolleovog teorema slijedi da postoji $r \in \langle s, t\rangle$ takav da je $\gamma'(r) = 0$ i dolazimo do kontradikcije. S druge strane, ako postoje s i t uz uvjet da je $s < t$ takav da je $\gamma(s) > \gamma(t)$, tada iz Teorema srednje vrijednosti slijedi da postoji $v \in \langle s, t\rangle$ takav da je $\gamma'(v) < 0$. Međutim, iz $\gamma(0) = 0$ i iz $\gamma(t) > 0$ za sve $t \in \langle 0, a]$, postoji $u \in \langle 0, v\rangle$ takav da vrijedi $\gamma'(u) > 0$. Iz Teorema srednje vrijednosti postoji $r \in \langle u, v\rangle$ takav da je $\gamma'(r) = 0$ čime dolazimo do kontradikcije. γ je strogo rastuća. Pretpostavimo sada da γ ima kritičnu točku t' na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Primjenom gornjih argumenata analogno zaključujemo da je γ strogo rastuća na $[0, t']$ i strogo padajuća na $[t', a]$.

v) Iz izraza (2.10) imamo $\gamma'(t)^2 = \frac{C}{\gamma(t)} - 1$, a iz iv) slijedi da postoje dvije mogućnosti. Ako je $\gamma(t)$ strogo rastuća, tada je $\gamma'(t)^2$ strogo padajuća po prethodnoj formuli. Kako je γ strogo rastuća, slijedi da je $\gamma'(t) > 0$ iz čega zaključujemo da je γ' strogo padajuća.
Ako γ ima lokalni maksimum u t_0 tada je $\gamma'(t) > 0$ za $t < t_0$, a za $t > t_0$ je $\gamma'(t)$ strogo negativna. Deriviranjem gornje formule dobijemo $2\gamma'(t)\gamma''(t) = -\frac{C\gamma'(t)}{\gamma(t)^2}$, a iz nje slijedi da je γ' zaista strogo padajuća u oba slučaja.

□

Kako su sva rješenja Euler - Lagrangeove jednadžbe i rješenja jednadžbe (2.7), dovoljno je riješiti (2.7). Međutim, važno je primijetiti da obrat vrijedi samo ako $\gamma'(t)$ ne iščezava na intervalu, kako je i pokazano u Napomeni 2.1. Konkretno, primijenimo li Napomenu 2.1 u slučaju Brahistokrone krivulje (poznato nam je da $\gamma'(t) \neq 0$ za $t \in \langle 0, a\rangle$) dobijemo

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\gamma'^2}{\gamma^3}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma(1+\gamma'^2)}}\Big(\frac{\gamma''}{1+\gamma'^2} - \frac{1}{2}\frac{\gamma'^2}{\gamma}\Big). \tag{2.11}$$

Kako su pretpostavke Teorema 2.2 zadovoljene, što je već i istaknuto, možemo zaključiti i da su svi minimizatori (ako postoje) klase barem C^2.

2.3 Moguća rješenja

Pretpostavimo da je γ rješenje problema. Cilj ovog odlomka je saznati kojeg je γ oblika. Kako bi dobili rješenje na $\langle 0, a]$, definiramo funkciju h na idući način:

$$h(t) = \begin{cases} 2\arctan\frac{1}{\gamma'(t)}, & t \in \langle 0, a] \text{ i } \gamma'(t) > 0 \\ \pi, & t \in \langle 0, a] \text{ i } \gamma'(t) = 0 \\ 2(\pi + \arctan\frac{1}{\gamma'(t)}), & t \in \langle 0, a] \text{ i } \gamma'(t) < 0. \end{cases}$$

Vidimo da je h neprekidna i neprekidno diferencijabilna funkcija kad γ' nije nula, a iz Propozicije 2.2 vidimo da je h strogo rastuća. Slijedi da je slika h interval $\langle 0, \theta_1]$ što je podskup $\langle 0, 2\pi\rangle$, a $h(a) = \theta_1$. Definirajmo skupove $I_1 = \langle 0, \theta_1\rangle \cap \langle 0, \pi\rangle$ i $I_2 = \langle 0, \theta_1\rangle \cap \langle \pi, 2\pi\rangle$ za koje možemo primijetiti da I_2 može biti prazan za razliku od prvog skupa. Ako pretpostavimo da $\gamma'(t) \neq 0$, vrijedi $\gamma'(t) = \cot\frac{h(t)}{2}$, a zatim slijedi da je

$$1 + \gamma'(t)^2 = 1 + \cot^2\frac{h(t)}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{h(t)}{2}}.$$

Iz izraza za rješenje Brahistokrone (2.8) slijedi

$$\gamma(t) = \frac{C}{1 + \gamma'(t)^2} = C\sin^2\frac{h(t)}{2}$$

$$\gamma(t) = \frac{C}{2}(1 - \cos h(t)),$$

a derivacijom dobijemo

$$\gamma'(t) = \frac{C}{2}(\sin h(t))h'(t).$$

Izjednačimo izraze za γ' :

$$\cot\frac{h(t)}{2} = \frac{C}{2}(\sin h(t))h'(t).$$

Neka je $h(t) = \theta$. Vrijedi da je $h'(t) = \frac{2\cot\frac{h(t)}{2}}{C\sin h(t)}$. Na skupu I_1 i I_2 (ako nije prazan) dobijemo

$$\frac{d}{d\theta}(h^{-1})(\theta) = \frac{C\sin h(t)}{2\cot\frac{\theta}{2}} = \frac{2C\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cot\frac{\theta}{2}} = C\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta).$$

Slijedi da na intervalu I_1 (i I_2) postoji konstanta $C_1 (C_2)$ takva da vrijedi da je

$$t = \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) + C_i.$$

Iz $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$ slijedi $C_1 = 0$ pa na intervalu I_1, za γ vrijedi

$$t = \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) \quad \text{i} \quad \gamma(t) = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta) \text{ za } \theta \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Pretpostavimo da je I_2 neprazan. Kako je h^{-1} neprekidna, $\lim_{\theta\to\pi+} \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) + C_2 = h^{-1}(\pi) = \lim_{\theta\to\pi-} \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta)$ pa je $C_2 = 0$.

Napomena 2.2. *Za $h(t) = \arccos(1 - \frac{2}{C}\gamma(t))$, h je neprekidno diferencijabilna funkcija na cijeloj domeni.*

Promotrimo neku funkciju β definiranu na $\langle 0, 2\pi\rangle$ na idući način:

$$\beta(\theta) = \frac{1 - \cos\theta}{\theta - \sin\theta}. \tag{2.12}$$

Očito vrijedi da je $\lim_{\theta\to 2\pi} \beta(\theta) = 0$. Isto tako, $\lim_{\theta\to 0} \beta(\theta) = \infty$ zbog

$$\theta - \sin\theta = \frac{\theta^3}{6} + o(\theta^3)$$

i

$$1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^3).$$

Deriviranjem izraza (2.12) dolazimo do

$$\beta'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - 2 + 2\cos\theta}{(\theta - \sin\theta)^2}.$$

Brojnik upravo navedenog izraza je strogo negativan na $\langle 0, 2\pi\rangle$ pa je zbog strogo pozitivnog nazivnika i β' negativan. Prema tome, β je strogo padajuća funkcija na $\langle 0, 2\pi\rangle$. Ovo znači da postoji jedinstveni $\tilde{\theta}$ takav da vrijedi da je $\beta(\tilde{\theta}) = \frac{\alpha}{a}$. Međutim, $\beta(\theta) = \frac{\alpha}{a}$ pa vrijedi da je $\tilde{\theta} = \theta$. Prema tome, iz izraza $\tilde{\theta} = \beta^{-1}(\frac{\alpha}{a})$, možemo odrediti je li γ strogo rastuća bez kritične točke (ako vrijedi da je $\tilde{\theta} < \pi$), strogo rastuća s jednom kritičnom točkom ($\tilde{\theta} = \pi$) ili strogo rastuća pa strogo padajuća (ako je $\tilde{\theta} > \pi$). Iz jednadžbe $a = \frac{C}{2}(\tilde{\theta} - \sin\tilde{\theta})$ ili jednadžbe $\alpha = \frac{C}{2}(1 - \cos\tilde{\theta})$ možemo odrediti konstantu C. Dakle, ono što smo pokazali je da ako postoji minimum γ koje je rješenje Brahistokrone, tada graf ima određen oblik, i to točno idući: Ako vrijedi $\tilde{\theta} = \beta^{-1}(\frac{\alpha}{a})$ i $C = \frac{2a}{\tilde{\theta} - \sin\tilde{\theta}}$, tada graf ima parametrizaciju

$$\begin{cases} t(\theta) = \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) \\ \gamma(\theta) = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

za $\theta \in [0, \tilde{\theta}]$. Krivulja je neprekidna na $[0, a]$, strogo pozitivna i neprekidno diferencijabilna funkcija koja za $\theta = 0$ poprima vrijednost $(0, 0)$, a za $\theta = \tilde{\theta}$ dobivamo točku (a, α). Dakle, dobivena krivulja se zaista nalazi u domeni funkcionala (2.5). Štoviše, u Odjeljku 1.2 je pokazano da je ovo upravo parametrizacija cikloide.

2.4 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Neka je γ_0 funkcija do koje smo došli na kraju prošlog odlomka. Cilj je pokazati da je to ujedno i jedinstveno rješenje ovog problema koristeći Propoziciju 2.1.

Za $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ izračunajmo Hessian funkcije $f(x, y) = \left(\frac{1+y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1+y^2}{y^5}} & -\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{x^3(1+y^2)}} \\ -\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{x^3(1+y^2)}} & \frac{1}{x^2(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$H(f) = \frac{1}{4(1+y^2)}\left(3\frac{1}{x^{\frac{9}{2}}} - \frac{y^2}{x^3}\right).$$

Po Hessianu funkcije se može zaključiti da f nije konveksna.

Sa svrhom dokazivanja egzistencije i jedinstvenosti rješenja Brahistokrone krivulje uvedimo drugi minimizacijski problem. Ideja postupka je pronaći konveksnu funkciju, iskoristiti njena svojstva te pronaći vezu konveksne s polaznom, nekonveksnom funkcijom. Za $(x, y) \in O = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ definirajmo

$$M(x, y) = \sqrt{x^{-2} + y^2}.$$

Hessian od M je $\frac{2}{(x^3y^2+x)^2} > 0$ pa možemo zaključiti da se radi o konveksnoj funkciji. Vidimo da je M klase C^1 jer vrijedi

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{x^3}(x^{-2} + y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ i } \quad \frac{\partial M}{\partial y} = y(x^{-2} + y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Za $\delta \in C[0, a]$ neprekidno diferencijabilnu na $\langle 0, a]$ uz uvjet $(\delta(t), \delta'(t)) \in O$ za sve $t \in \langle 0, a]$ definiramo

$$M(\delta) = \int_0^a M[\delta(t)]\, dt.$$

Neka je Y podskup od $C([0, a])$ sastavljen od svih δ koje su neprekidno diferencijabilne na $\langle 0, a]$, za koje vrijedi da je $\delta(0) = 0$, $\delta(a) = (2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ i za koji je integral definiran. Nađimo vezu između f i M. Za $\gamma \in X$, gdje je $X \in$ (2.5) definiramo $\delta = (2\gamma)^{\frac{1}{2}}$ i tada vrijedi

$$\gamma = \frac{\delta^2}{2} \quad \text{i} \quad \gamma' = \delta\delta'.$$

Nije teško vidjeti da vrijedi da je $\delta \in Y$ ako i samo ako $\delta = (2\gamma)^{\frac{1}{2}}$ za neke $\gamma \in X$ i tada vrijedi da je $f(\gamma) = 2^{\frac{1}{2}} M(\delta)$. Za γ_0 za koji je u Odjeljku 2.3 pokazano da je jedinstveno rješenje Euler - Lagrangeove jednadžbe definirajmo $\delta_0 = (2\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$.

Propozicija 2.3. *δ_0 je jedinstveni minimum od M na Y.*

Dokaz. Parcijalna derivacija drugog reda od M je definirana i neprekidna pa je M klase C^2. Raspišimo izraze za drugu parcijalnu derivaciju:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{2 + x^2y^2}{x^6(x^{-2} + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2(x^{-2} + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{y}{x^3(x^{-2} + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a Hessian od M jednak je

$$H(M) = \frac{2}{x^8(x^{-2} + y^2)^2}.$$

Kako je $H(M)$ strogo pozitivan na O, po Propoziciji 1.1 je strogo konveksna. Još vrijedi da je $\left|\frac{\partial M}{\partial y}\right| < 1$. Iz (2.10) slijedi

$$\gamma_0(1 + \gamma_0'^2) = C \implies \frac{\delta_0^2}{2}(1 + \delta_0^2\delta_0'^2) = C,$$

$$\begin{aligned}
M[\delta_0(t)] - \frac{\partial M}{\partial y}[\delta_0(t)] &= \left(\delta_0^{-2}(t) + \delta_0'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\delta_0^{-2}(t) + \delta_0'^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \delta_0'^2(t) \\
&= \delta_0^{-1}(t)\left(1 + \delta_0^2(t)\delta_0'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} - \delta_0(t)\left(1 + \delta_0^2(t)\delta_0'^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \delta_0'^2(t) \\
&= \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \delta_0^2(t)\delta_0'^2(t)\right) - \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{2}}}\delta_0^2(t)\delta_0'^2(t) = \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Slijedi da δ_0 zadovoljava E-L jednadžbu:

$$\frac{\partial M}{\partial x}[\delta_0(t)] = \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial y}[\delta_0(t)].$$

Primjenom Propozicije 2.1 slijedi tvrdnja. □

Teorem 2.3. *γ_0 je jedinstveni minimum od f na X.*

Dokaz. Neka je $\gamma \in X$ i neka vrijedi da $\gamma \neq \gamma_0$.

$$f(\gamma) = 2^{\frac{1}{2}} M((2\gamma)^{\frac{1}{2}}) > 2^{\frac{1}{2}} M(\delta_0) = f(\gamma_0)$$

□

Uzmimo sada različite uređene parove $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2)$ i njima odgovarajuća rješenja γ_1 i γ_2. Pokažimo da su rješenja također različita.
Ako vrijedi da $a_1 \neq a_2$, γ_1 i γ_2 nisu definirani na istim intervalima pa vrijedi da $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Moramo još promotriti slučaj kada γ_1 i γ_2 leže na istoj krivulji. Tada iz $C = \frac{2\alpha}{1-\cos\tilde{\theta}}$ vidimo da vrijedi $\tilde{\theta}_2 = 2\pi - \tilde{\theta}_1$ i $\alpha_2 = \alpha_1$.
Pretpostavimo da vrijedi da je $a_1 = a_2$ i $\alpha_1 < \alpha_2$. Ako je $\gamma_1 = \gamma_2$, tada

$$\frac{2a_1}{\tilde{\theta}_1 - \sin\tilde{\theta}_1} = \frac{2a_1}{\tilde{\theta}_2 - \sin\tilde{\theta}_2}$$

pa vrijedi jednakost

$$\tilde{\theta}_1 - \sin\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 - \sin\tilde{\theta}_2.$$

Upravo smo pokazali da je preslikavanje $F : (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \mathbb{R}_+^* \times \langle 0, 2\pi\rangle$ definirano kao $F(a, \alpha) = (C, \tilde{\theta})$ injekcija. Teorem kaže da je i više od toga.

Teorem 2.4. *Preslikavanje F je glatki difeomorfizam.*

Dokaz. Uzmimo $(C, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}_+^* \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Neka su $a = \frac{C}{2}(\tilde{\theta} - \sin\tilde{\theta})$ i $\alpha = \frac{C}{2}(1 - \cos\tilde{\theta})$ pa vidimo da vrijedi da je (a, α) iz domene. Kako sustav jednadžbi $a = \frac{C}{2}(y - \sin y)$ i $\alpha = \frac{C}{2}(1 - \cos y)$ ima jedinstveno rješenje na $\mathbb{R}_+^* \times \langle 0, 2\pi\rangle$, Brahistokrona krivulja koja pripada (a, α) je definirana uređenim parom $(C, \tilde{\theta})$ i time smo pokazali da je F surjekcija. Dakle, radi se o bijekciji. Za glatkoću funkcije F dovoljno je pokazati da je inverzno preslikavanje glatko i da ima parcijalne derivacije svih redova. □

2.5 Drugi način rješavanja problema

U odjeljku Moguća rješenja iskorištene su tvrdnje istaknute u posebnom slučaju Euler - Lagrangeove jednadžbe, ali problem se mogao riješiti i bez korištenja (2.7). Pokažimo to. Raspišimo općenitu Euler - Lagrangeovu jednadžbu za Brahistokronu.

$$-\frac{\sqrt{1+\gamma'^2}}{2\sqrt{\gamma^3}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma(1+\gamma'^2)}}\left(\frac{\gamma''}{1+(\gamma')^2} - \frac{1}{2}\frac{(\gamma')^2}{\gamma}\right) \tag{2.14}$$

Množenjem jednadžbe (2.14) s $2\Big(\gamma(1+\gamma'^2)\Big)^{\frac{3}{2}}$ i sređivanjem izraza dolazimo do nelinearne jednadžbe drugog reda

$$2\gamma\gamma'' + \gamma'^2 + 1 = 0.$$

Množeći izraz s γ' dobijemo $\gamma' + 2\gamma\gamma'\gamma'' + \gamma'^3 = 0$ što je jednako

$$(\gamma + \gamma\gamma'^2)' = 0.$$

Integriranje jednadžbe dovodi nas do:

$$\gamma + \gamma(\gamma')^2 = C,$$

pri čemu je C realna konstanta. Iz toga dobivamo

$$\gamma'^2 = \frac{C-\gamma}{\gamma}.$$

Neka je ϕ takav da vrijedi $tan\phi = \frac{1}{\gamma'(t)}$ (Po Propoziciji 2.2 je γ' jednako nuli eventualno samo u jednoj točki). Iz gornje jednakosti sada slijedi

$$\frac{\gamma}{C-\gamma} = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}.$$

Unakrsnim množenjem dobivamo funkciju γ izraženu preko ϕ

$$\gamma(\phi) = C\sin^2\phi = \frac{C}{2}(1-\cos 2\phi), \quad d\gamma = \frac{d\gamma}{d\phi}(\phi) = 2C\sin\phi\cos\phi.$$

Koristeći lančano pravilo slijedi

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{dt}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\phi} = \tan(\phi)2C\sin\phi\cos\phi = 2C\sin^2\phi = C(1-\cos(2\phi)).$$

Integriranjem konačno dobivamo

$$t = \frac{C}{2}(2\phi - \sin 2\phi), \ \gamma = \frac{C}{2}(1-\cos 2\phi)$$

što odgovara parametrizaciji cikloide tako da se rezultat podudara s ranije dobivenim.

Poglavlje 3

Pristup optimalnim upravljanjem

O optimalnom upravljanju koje je tema ovog poglavlja više se može pronaći u [8] dok je analiza Brahistokrone krivulje istim pristupom dana u [9]. Mnogi smatraju da se za godinu početka optimalnog upravljanja može uzeti upravo 1696., tj. godina kad je prvi put izložen problem Brahistokrone krivulje. Razlozi za to kriju se u tome što je Brahistokrona prvi problem za koji znamo da se bavi dinamičkim ponašanjem i eksplicitno traži optimalan izbor puta. I izoperimetrički i Newtonov problem minimalnog otpora rješavaju problem krivulje koja nije put tijela koji se kreće. I konačno, kao najvažniji razlog navodi se činjenica da se velik dio kasnije povijesti varijacijskog računa može shvatiti kao traženje najjednostavnije i najopćenitije formulacije nužnih uvjeta za optimalnost, a ta formulacija je dana upravo u principu maksimuma teorije optimalnog upravljanja. Princip maksimuma je osnovni alat za određivanje nužnih uvjeta koje bi optimalno upravljanje trebalo zadovoljavati.

Razlika varijacijskog računa i optimalnog upravljanja

Problemi varijacijskog računa svode se na optimizacijske probleme u idućem standardnom obliku:
i) naći minimum $I = \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t), t)$ takve da vrijedi $x(a) = \overline{x},\ x(b) = \tilde{x}$, odnosno
ii) naći minimum $I = \int_a^b f(x(t), u(t), t)$ takve da vrijedi $x(a) = \overline{x},\ x(b) = \tilde{x}$ i $\dot{x}(t) = u(t)$ za $a \leq t \leq b$. Minimizacija se kod varijacijskog računa odvija u prostoru „svih" funkcija pa sve netrivijalne karakteristike ovog problema nastaju zbog Lagrangiana f. Nasuprot tome, svi problemi optimalnog upravljanja uključuju minimizaciju na skupu krivulja U koji je određen nekim dinamičkim ograničenjima. Za primjer uzmimo neki skup C svih krivulja $t \mapsto x(t)$ koje zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ za neku funkciju upravljanja $t \mapsto u(t)$. Dodatno, može se dogoditi da krivulja C ne određuje jedinstveno upravljanje pa bi trebali govoriti o paru trajektorije i upravljanja. Ako stavimo da je Lagrangian f jednak 1, u optimalnom upravljanju imamo netrivijalnu dinamiku koja treba biti zadovoljena i problem nije trivijalan za razliku od pristupa varijacijskog računa gdje

bi to bio trivijalan problem. Problemi kod kojih želimo minimizirati vrijeme (postavljeni kao u (ii) i kod kojih je Lagrangian jednak 1) između svih krivulja $t \mapsto x(t)$ koje zadovoljavaju uvjete u (ii) i rješenja su danih diferencijalnih jednadžbi za neko upravljanje $t \mapsto u(t)$ zovu se problemi minimalnog vremena. Upravo takav problem je Brahistokrona krivulja. Idući argumenti pokazuju da je pristup optimalnog upravljanja daje bolje rezultate od varijacijskog računa. Kod pristupa optimalnog upravljanja ne moramo pretpostaviti da je optimalna krivulja graf funkcije $x_1 \to x_2(x_1)$. Također, egzistencija rješenja pristupom optimalnog upravljanja je trivijalan problem.

3.1 Općenito o optimalnom upravljanju

Neka je Σ sustav optimalnog upravljanja s vektorom stanja $x(t)$, vektorom upravljanja $u(t)$ i vektorom vrijednosti f. Sustav je opisan s

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Osnovni problem optimalnog upravljanja svodi se na minimizaciju ili maksimizaciju neke funkcije cilja. Da bismo pronašli vremenski optimalno upravljanje s fiksiranim početnim i krajnjim točkama, moramo pronaći upravljanje koje odgovara početnom i krajnjem stanju za koje funkcional postiže ekstremnu vrijednost u minimalnom vremenu. Neka su $f^1, ..., f^n$ komponente od f uz $f^0 = L$ definirane na $Q \times U_0 \times [a, b]$ gdje su Q, U_0 otvoreni podskupi od $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Neka je svaka funkcija $x \mapsto f^i(x, u, t)$ klase C^1 s obzirom na x za sve (u, t) iz $U_0 \times [a, b]$ i svako preslikavanje $(u, t) \mapsto f^i(x, u, t)$ Borel izmjerivo za fiksirani x iz Q. Neka je skup U podskup od U_0. Definiramo dopustivo upravljanje kao preslikavanje $[a, b] \mapsto u(t) \in U$ za koje vrijedi da za svaki kompaktni podskup K od Q postoji integrabilna funkcija $t \mapsto f_k(t)$ takva da vrijedi

$$||f^i(x, u(t), t)|| + ||\frac{\partial f^i}{\partial x}(x, u(t), t)|| \leq f_k(t)$$

za sve (x, t) iz $K \times [a, b]$, $i = 0, ..., n$. Skup svih dopustivih upravljanja je Ω_U. Par $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ zove se optimalno rješenje vremenski optimalnog problema kretanja između točaka α i β: Odrediti optimalno upravljanje $u \in C([a, b]; U)$ i odgovarajuću trajektoriju $x \in C^1([a, b]; Q)$ za koje vrijedi

$$\begin{aligned}
&b - a \to \min \\
&\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \ t \in \langle a, b \rangle \\
&u(t) \in \Omega_U, \ t \in \langle a, b \rangle \\
&x(a) = \alpha \\
&x(b) = \beta.
\end{aligned}$$

i za koje je funkcional

$$I = \int_a^b L(x(t), u(t), t)\, dt \tag{3.1}$$

minimalan. Sada navodimo sljedeću bitnu tvrdnju čiji dokaz preskačemo, a koji se može pronaći u [[14], Teorem 2.2].

Teorem 3.1 ([13], Teorem 2.1)**.** *(Pontrjaginov princip maksimuma)*

Nužni uvjet da funkcija $t \mapsto u_*(t)$ *na* $[a, b]$ *i odgovarajuće rješenje* $t \mapsto x_*(t)$ *od* $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ *minimiziraju problem (3.1) je da postoje funkcija* $t \mapsto \psi_*(t) \in \mathbb{R}^n$ *i konstanta* $\psi_0 \geq 0$ *takve da vrijedi iduće:*
i) $(\psi_*(t), \psi_0) \neq (0, 0)$ *za sve* $t \in [a, b]$
ii) $\dot{x}_*(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_0, t)$ *i* $-\dot{\psi}_*(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_0, t)$ *za* $t \in [a, b]$
iii)$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_0, t) = \sup_{u \in U} H(x_*(t), u, \psi_*(t), \psi_0, t)$,
gdje je Hamiltonian dan s $H(x, u, \psi, \psi_0, t) = \psi f(x, u, t) - \psi_0 L(x, u, t)$. *U slučaju kad je Lagrangian jednak* 1 *vrijedi da je* $H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_0, t) = 0$.

3.2 Brahistokrona kao problem optimalnog upravljanja

Postavimo pitanje Brahistokrone krivulje kao problem optimalnog upravljanja. Neka su m i n jednaki 2, odnosno vrijedi $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$. Da bismo uskladili oznake s uvodom u optimalno upravljanje, neka se gibanje odvija u x_1x_2 ravnini. Funkcija $f = u\sqrt{x_2}$ pa diferencijalne jednadžbe glase

$$\dot{x}_1 = u_1\sqrt{x_2}, \quad \dot{x}_2 = u_2\sqrt{x_2} \tag{3.2}$$

uz uvjet $u \in U$, gdje je $U = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 = 1\}$.
Uvrštavanjem u Lagrangian Brahistokrone funkcije funkcional za ukupno vrijeme je jednak

$$\int_0^T \sqrt{\frac{(dx_1/dt)^2 + (dx_2/dt)^2}{x_2}}dt = \int_0^T \sqrt{\frac{u_1^2x_2 + u_2^2x_2}{x_2}}dt = \int_0^T dt.$$

Problem optimalnog upravljanja je sada

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T dt \\ &f(x,u) = u\sqrt{x_2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Napomena 3.1. *Problem je, kao i u prvom poglavlju rada, postavljen samo na pozitivnom dijelu osi ordinata pa nije potrebno stavljati apsolutnu vrijednost ispod korijena, tj. dopušteno je pisati* $\sqrt{x_2}$.

Hamiltonian upravljanja je dan s

$$H(x,u,\psi,\psi_0) = H(x_1,x_2,u_1,u_2,\psi_1,\psi_2,\psi_0) = \psi f(x,u) - \psi_0 L = (\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2)\sqrt{x_2} - \psi_0.$$

Neka su x i ψ fiksni i želimo maksimizirati $u \mapsto H(x,u,\psi,\psi_0)$ uz uvjet $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Koristeći Lagrangeove multiplikatore znamo da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\nabla_u H(x,u,\psi,\psi_0) = \lambda\nabla_u(u_1^2 + u_2^2)$. Slijedi

$$\sqrt{x_2}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = 2\lambda\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}.$$

Raspisivanjem dobijemo

$$\sqrt{x_2}\psi_1 = 2\lambda u_1$$

$$\sqrt{x_2}\psi_2 = 2\lambda u_2$$

uz uvjet

$$u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Slijedi

$$\frac{\psi_1^2}{\psi_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2^2},$$

a iz uvjeta dobijemo

$$\frac{\psi_1^2}{\psi_2^2} = \frac{1 - u_2^2}{u_2^2}$$

i raspisivanjem dolazimo do

$$u_1(t) = \frac{\psi_1^2(t)}{\|\psi(t)\|}, \qquad u_2(t) = \frac{\psi_2^2(t)}{\|\psi(t)\|}, \tag{3.4}$$

a u_i i $\psi_i, i = 1, 2$ su istog predznaka da bi dobili maksimum.
Pontrjaginov princip maksimuma govori da optimalnost krivulje $t \mapsto \xi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ povlači tvrdnju da postoje apsolutno neprekidne funkcije $t \mapsto \psi_1(t)$ i $t \mapsto \psi_2(t)$ i nenegativna konstanta ψ_0 takve da su uvjeti za maksimizaciju Hamiltoniana (3.4), kao i sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(\psi, x, u) = 0 \tag{3.5}$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(\psi, \psi_0, x, u) = \frac{\psi_1(t)u_1(t) + \psi_2(t)u_2(t)}{2\sqrt{x_2(t)}} = -\frac{\|\psi(t)\|}{2\sqrt{x_2(t)}} \tag{3.6}$$

zadovoljeni za skoro svaki t. Primijetimo da je $\|\psi(t)\| \neq 0$. Princip maksimuma još daje uvjet $H = 0$. $\|\psi\| = 0$ bi povlačilo da je $\psi_0 = 0$, što je u kontradikciji s netrivijalnošću (ψ_1, ψ_2, ψ_0). Ako konstanta ψ_1 iščezne, tada vrijedi da je $\dot{x}_1 \equiv 0$ pa dobijemo vertikalnu liniju. Inače je $\dot{x}_1 \neq 0$ pa možemo koristiti x_1 za parametrizaciju rješenja. Kako vrijedi

$$x_2'(x_1) = \frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\psi_2}{\psi_1}, \tag{3.7}$$

slijedi da imamo

$$1 + x_2'(x_1)^2 = \frac{\|\psi\|^2}{\psi_1^2} \tag{3.8}$$

i

$$x_2''(x_1) = \frac{1}{\psi_1}\frac{d\psi_2}{dt}\frac{dt}{dx_1} = \frac{\dot{\psi}_2}{\psi_1 \dot{x}_1}.$$

Iz jednakosti (3.2) i (3.4) imamo

$$\dot{x}_1 = \frac{\psi_1 \sqrt{x_2}}{\|\psi\|}$$

iz čega uz (3.6) i (3.8) slijedi

$$x_2''(x_1) = -\frac{\dot{\psi}_2\|\psi\|}{\psi_1^2\sqrt{x_2}} = -\frac{\|\psi\|^2}{2x_2\psi_1^2}.$$

Zaključujemo da je

$$2x_2x_2'' = -\frac{\|\psi\|^2}{\psi_1^2} = -(1 + x_2'^2),$$

odnosno

$$1 + x_2'^2 + 2x_2x_2'' = 0,$$

što je ekvivalentno jednadžbi do koje smo došli i u prošlom poglavlju i za koju je pokazano da opisuje cikloidu.

3.3 Dokaz optimalnosti i problem egzistencije

Kod oba pristupa koja smo obrađivali krivulja koju smo dobili je samo kandidat za rješenje pa moramo dodatno pokazati i da je taj jedini kandidat minimum. Kod varijacijskog računa smo to napravili tako da smo preradili problem i iskoristili konveksnost dok je ovdje cilj pokazati da minimum postoji primjenom nužnog uvjeta optimalnosti.

Jedan od načina kojima se može pokazati da je upravo cikloida optimalna krivulja je prvo dokazati da postoji neka optimalna trajektorija. Kad riješimo problem egzistencije optimalne trajektorije $\zeta_* : [0, T] \mapsto H_+, H_+ = \{(x, y) : y \geq 0\}$ koja opisuje kretanje od početne do krajnje točke iz H_+, jasno je da je bilo koja restrikcija $\zeta_*[\alpha, \beta]$ svakog podintervala $[\alpha, \beta]$ iz intervala $[0, T]$ također optimalna za problem s krajnjim točkama $\zeta_*(\alpha)$ i $\zeta_*(\beta)$. Ako pretpostavimo da su $\zeta_*(\alpha)$ i $\zeta_*(\beta)$ točke interiora od H_+ za $0 < \alpha < \beta < T$, tada nužni uvjeti za optimalnost daju jedinstvenog kandidata za rješenje problema s krajnjim točkama $\zeta_*(\alpha)$ i $\zeta_*(\beta)$. Međutim, da bi mogli iskoristiti nužne uvjete optimalnosti, moramo isključiti mogućnost rješenja s krajnjim točkama A i B koje ima sjecište s x osi u nekoj drugoj točki.

Lema 3.1. *Pretpostavimo da je L horizontalna linija sadržana u interioru gornje polovice H_+. Neka su P, Q dvije različite točke od L. Tada je segment koji spaja P i Q strogo brži od bilo koje trajektorije ξ iz P u Q takve da ξ leži u potpunosti u donjoj zatvorenoj poluravnini određenoj s L i bar jedna točka od ξ leži strogo ispod L.*

Dokaz. Neka su T_ξ, T_ζ odgovarajuća vremena, a neka L ima y koordinatu $\tilde{y}$ takvu da je $\tilde{y} > 0$. Označimo koordinate točaka $P = (p, \tilde{y}), Q = (q, \tilde{y})$. Horizontalni segment između dvije točke označimo s $\zeta : [0, T] \mapsto H_+$. Tada je vrijeme

$$T_\zeta = \frac{|q - p|}{\sqrt{\tilde{y}}}.$$

Definirajmo sada trajektoriju između P i Q, $t \mapsto \xi(t) = (x(t), y(t)) \in H_+$ uz $\xi(a) = p$ i $\xi(b) = q$. Tada vrijedi

$$\dot{x}(t) \leq \|\dot{\xi}(t)\|$$

a iz zakona o očuvanju energije slijedi da je $\|\dot{\xi}\| = \sqrt{\dot{x} + \dot{y}} = \sqrt{E + 2gy}$ i, ako uzmemo da je $E = 0$ i $2g = 1$, dobijemo

$$\|\dot{\xi}(t)\| = \sqrt{y(t)} \leq \sqrt{\tilde{y}}.$$

Vrijedi

$$|q - p| = \left|x(b) - x(a)\right| = \left|\int_a^b \dot{x}(t)\, dt\right| < (b - a)\sqrt{\tilde{y}} = T_\xi \sqrt{\tilde{y}}.$$

Prema tome, slijedi da je

$$T_\xi > \frac{|q - p|}{\sqrt{\tilde{y}}} = T_\zeta.$$

□

Idući korolar je direktna posljedica upravo dokazane leme.

Korolar 3.1. *Neka su A, B različite točke iz H_+ i neka je $\zeta : [a, b] \mapsto H_+$ vremenski optimalna trajektorija. Tada je $\zeta(t)$ točka interiora od H_+ za svaki $t \in \langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Neka je t takav da je $a < t < b$. Pretpostavimo da $\zeta(t)$ pripada ∂H_+. Tada se ne može dogoditi da vrijedi da je $\zeta(s) \in \partial H_+$ za svaki $s \in [a, t]$ jer bi u tom slučaju brzina kretanja na intervalu $[a, t]$ iščezla pa $\zeta(a) = \zeta(t)$ i mogli bi dobiti trajektoriju s istim krajnjim točkama kao ζ koja je strogo brža od ζ zamjenom ζ njenom restrikcijom na $[t, b]$. Analogno bi pokazali da ne vrijedi da je $\zeta(s) \in \partial H_+$ za sve $s \in [t, b]$. Tada slijedi da postoji pozitivni broj δ i vremena s_1, s_2 takva da $a \leq s_1 < t < s_2 \leq b$ uz uvjet da $\zeta(s_1) \in L$ i $\zeta(s_2) \in L$, gdje je $L = \{(x, y) : y = \delta\}$. Definirajmo skup $S = \{s \in [a, b] : \zeta(s) \neq L\}$ koji je relativno otvoren podskup od $[a, b]$. Neka je I povezana komponenta od S koja sadrži t. Tada je I interval i relativno je otvoren na $[a, b]$. Kako vrijedi da ni s_1 ni s_2 nisu iz S, interval je otvoren u $\mathbb{R}$ pa je $I = [\tau_1, \tau_2]$, gdje je $s_1 \leq \tau_1 < t < \tau_2 \leq s_2$. Neka je ξ restrikcija od ζ na kompaktnom intervalu $[\tau_1, \tau_2]$. Iz Leme 3.1 slijedi da ξ nije optimalna. Prema tome, slijedi da $\zeta(t)$ nije iz ∂H_+. □

Jednostavnom primjenom Arzela-Ascoli teorema ([15]) lako se pokaže pitanje egzistencije. Za točke A i B iz H_+ neka je T infimum vremena svih trajektorija čije su krajnje točke A i B. Neka je s $\{\xi_j\}$ dan niz trajektorija iz navedenih točaka definiranih na intervalu $[0, T_j]$ takve da $T_j \downarrow T$. Tada su svi ξ_j sadržani u fiksnom kompaktnom podskupu od H_+ što se jednostavno može pokazati Gronwallovom lemom ([15]) i činjenicom da desna strana od (3.2) ima rast slabiji od linearnog kao funkcija x_1 i x_2. Tada iz derivacija (3.2) slijedi da su one jednoliko omeđene. Koristimo teorem Arzela - Ascoli da izdvojimo podniz koji

uniformno konvergira krivulji $\xi : [0, T] \mapsto H_+$. Znači, ξ je trajektorija sustava koji je postao konveksan i dan je kao u (3.2), ali upravljanje je ograničeno s $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ prije nego s $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Kad bi nejednakost $u_1(t)^2 + u_2(t)^2 \leq 1$ bila stroga na skupu pozitivne mjere, bilo bi moguće naći čak i bržu trajektoriju iz A u B reparametrizacijom krivulje ξ pa je lako vidjeti da je ξ trajektorija i sustava koji nije konveksan.
Ključna tvrdnja gornjeg argumenta je da postoji bar jedna trajektorija iz početne u krajnju točku u konačnom vremenu.

Dakle, ova metoda omogućila nam je rezultat koji je jači od onoga iz prethodnog poglavlja zato što nismo pretpostavili da je trajektorija graf neke funkcije.

Poglavlje 4

Dokaz pomoću Cauchy-Schwarzove nejednakosti

Literatura koju ovo poglavlje prati je dana s [7]. Jedan od načina rješavanja problema kojim se bavimo u ovom radu je standardni račun koji koristi samo Cauchy-Schwarzovu nejednakost.

Cauchy-Schwarzova nejednakost

Za bilo koje realne brojeve a, b, ξ, η vrijedi

$$a\xi + b\eta \leq (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1}$$

a jednakost se postiže ako i samo ako vrijedi $a\eta = b\xi$. Vidimo da (4.1) vrijedi zbog očite nejednakosti

$$(a\eta - b\xi)^2 \geq 0, \tag{4.2}$$

a jednakost u (4.1) se postiže ako i samo ako vrijedi jednakost u (4.2).

Lema 4.1. *Za sve $a > 0, \xi > 0$ i $b, \eta \in \mathbb{R}$ vrijedi iduća nejednakost*

$$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geq -\frac{a}{\xi}(a - \xi)^2 + a\xi + b\eta \tag{4.3}$$

koja se ekvivalentno može zapisati i kao

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geq \frac{a^2 - a^3\xi^{-1} + b\eta - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{4.4}$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $(\xi, \eta) = (a, b)$.

Pokažimo da su nejednakosti (4.3) i (4.4) ekvivalentne.
Množeći (4.4) s $\sqrt{a^2+b^2}$ očito je da je lijeva strana kao u (4.3), a desna je jednaka

$$-a^3\xi^{-1} + 2a^2 - a\xi + b\eta + a\xi = -\frac{a}{\xi}(a-\xi)^2 + a\xi + b\eta$$

čime smo dobili ekvivalentne jednadžbe.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz C-S nejednakosti. Po pretpostavci leme su a, ξ strogo veći od nule pa time vrijedi

$$-\frac{a}{\xi}(a-\xi)^2 + a\xi + b\eta \leq a\xi + b\eta.$$

Iz C-S nejednakosti i upravo zapisane jednadžbe slijedi

$$-\frac{a}{\xi}(a-\xi)^2 + a\xi + b\eta \leq \sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dokažimo i dio leme vezan za jednakosti. Pretpostavimo da vrijedi

$$-\frac{a}{\xi}(a-\xi)^2 + a\xi + b\eta = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

pa iz C-S nejednakosti slijedi

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{a^2+b^2} = a\xi + b\eta.$$

Kvadriranjem i sređivanjem tog izraza dobijemo

$$(a\eta - b\xi)^2 = 0$$

pa je $a\eta = b\xi$, a iz jednakosti

$$-\frac{a}{\xi}(a-\xi)^2 + a\xi + b\eta = a\xi + b\eta$$

dobijemo da je $a - \xi = 0$ pa vrijedi $(a, b) = (\xi, \eta)$.
Pokažimo da vrijedi i drugi smjer. Uvrštavanjem $(a, b) = (\xi, \eta)$ u (4.5) očito je da su lijeva i desna strana jednake. □

Vratimo se na problem Brahistokrone. Gibanje se odvija između dvije točke u xy ravnini koordinata redom $(0,0)$ i (a,α), a T je ukupno vrijeme kretanja definirano kao u (2.1). Uvedimo supstituciju tako da vrijedi da je $\Phi(x) := \sqrt{y(x)}$. Sada je ukupno vrijeme gibanja objekta između dvije točke jednako izrazu

$$T(y) := \frac{1}{2g}\int_0^a \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}dx = T(\Phi^2) = \frac{1}{2g}\int_0^a \sqrt{\Phi^{-2}(x)+4\Phi'^2(x)}dx$$

pa još jednom supstitucijom dolazimo do izraza

$$S(\Phi) := 2gT(\Phi^2) = \int_0^a \sqrt{\Phi^{-2}(x)+4\Phi'^2(x)}dx.$$

Funkcije $\Phi : \langle 0,a\rangle \to \langle 0,\infty\rangle$ za koje vrijedi $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(a) = \sqrt{\alpha}$ čine skup O neprekidno diferencijabilnih funkcija na $[0,a]$. Neka je $\tilde{\Phi} : [0,a] \to \mathbb{R}$ dana diferencijalnom jednadžbom

$$4\tilde{\Phi}'^2(x)\tilde{\Phi}^2(x) = C\tilde{\Phi}^{-2}(x) - 1, \quad 0 < x < a, \tag{4.5}$$

gdje je $\tilde{\Phi}(0) = 0$, a pozitivnu konstantu C biramo tako da $\tilde{\Phi}$ zadovoljava $\tilde{\Phi}(a) = \sqrt{\alpha}$. Kako je $\tilde{\Phi} > 0$ za $0 < x < a$, jasno je da je $\tilde{\Phi} \in O$. U prošlim poglavljima pokazano je da neprekidno diferencijabilno rješenje $\tilde{\Phi}$ postoji, a idućim teoremom pokazat ćemo da je ono vremenski optimalno.

Teorem 4.1. *Nejednakost $S(\Phi) > S(\tilde{\Phi})$ vrijedi za svaki $\Phi \neq \tilde{\Phi}, \Phi \in O$.*

Dokaz. Na početku dokaza primijetimo da su zadovoljeni uvjeti Leme 4.1 i da je možemo iskoristiti. U (4.4) uvedimo supstituciju da bi oznake ovog teorema bile u skladu s Lemom 4.1:

$$\xi \equiv \Phi^{-1}, \quad \eta \equiv 2\Phi', \quad a \equiv \tilde{\Phi}^{-1}, \quad b \equiv 2\tilde{\Phi}'.$$

Nejednakost iz Leme 4.1 sada glasi:

$$\sqrt{\Phi^{-2}+(2\Phi')^2} \geq \sqrt{\tilde{\Phi}^{-2}+(2\tilde{\Phi}')^2} + \frac{\tilde{\Phi}^{-2} - \Phi\tilde{\Phi}^{-3} + 4\tilde{\Phi}'\Phi' - 4\tilde{\Phi}'^2}{\sqrt{\tilde{\Phi}^{-2}+(2\tilde{\Phi}')^2}},$$

Uvedimo nove oznake:

$$k_\Phi := \sqrt{\Phi^{-2}+4\Phi'^2}$$
$$\rho := (\tilde{\Phi}^{-2} - \Phi\tilde{\Phi}^{-3} + 4\tilde{\Phi}'\Phi' - 4\tilde{\Phi}'^2)/k_\Phi.$$

Iz $k_\phi \geq k_{\tilde{\phi}} + \rho$ slijedi da vrijedi $S(\Phi) \geq S(\tilde{\Phi}) + \int_0^a \rho$. Da bi dokazali tvrdnju teorema, dovoljno je dokazati da vrijedi da je $\int_0^a \rho = 0$. Jednadžba (4.5) na $\langle 0,a\rangle$ povlači da vrijedi da je $k_{\tilde{\Phi}} = \tilde{\Phi}^{-2}\sqrt{C}$ pa za

$$j := 1 - \Phi^{-1}\Phi + 4\tilde{\Phi}^2\tilde{\Phi}'\Phi' - 4\tilde{\Phi}^2\tilde{\Phi}'^2$$

slijedi da je
$$\rho = \frac{j}{\sqrt{C}}.$$

Označimo s $u := 4\tilde{\Phi}^2\tilde{\Phi}'$. Množenjem (4.5) s $\tilde{\Phi}^2$ dobijemo
$$4\tilde{\Phi}'^2\tilde{\Phi}^4 = C - \tilde{\Phi}^2$$

iz čega slijedi
$$\begin{aligned}
&(2\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}^2)^2 = C - \tilde{\Phi}^2\\
&\left(\frac{u}{2}\right)^2 = C - \tilde{\Phi}^2\\
&u^2 = 4C - 4\tilde{\Phi}^2
\end{aligned}$$

Želimo dobiti izraz za u' pa deriviramo jednadžbu:
$$\begin{aligned}
&uu' = -4\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}'\\
&u' = -\frac{-4\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}'}{4\tilde{\Phi}^2\tilde{\Phi}'} = -\frac{1}{\tilde{\Phi}}.
\end{aligned}$$

Izraz za j sada možemo zapisati kao $j = -u'(\tilde{\Phi} - \Phi) + u(\Phi - \tilde{\Phi})' = R'$. Slijedi da je $R := u(\Phi - \tilde{\Phi})$. Primjećujemo da je $R(a) = R(0) = 0$, a to je točno jednako $\int_0^a \rho$. Dakle, upravo smo dokazali da je $S(\Phi) \geq S(\tilde{\Phi})$ na $\langle 0, a\rangle$.
Preostalo nam je vidjeti kad se postiže jednakost. Iz $\int_0^a \rho = 0$ slijedi da je $\int_0^a (k_\Phi - k_{\tilde{\Phi}} - \rho) = 0$. Ova podintegralna funkcija je nenegativna i neprekidna pa možemo zaključiti da je jednaka 0 na $\langle 0, a\rangle$. Dio leme o jednakosti kaže da $k_\Phi = k_{\tilde{\Phi}}$ na $\langle 0, a\rangle$ povlači $\Phi = \tilde{\Phi}$ na $\langle 0, a\rangle$. $\square$

Poglavlje 5

Posebni slučajevi Brahistokrone krivulje

5.1 Brahistokrona krivulja s trenjem

Kako je istaknuto na početku rada, jedina sila koju smo uzeli u obzir je sila teže. Ako u postavci problema ovaj put ne zanemarimo prisutnost trenja, jasno je da će se svi izrazi promijeniti. U ovom odjeljku pratimo [10].
Neka je (x, y) neka točka krivulje između početne $(0, 0)$ i krajnje točke (a, b). Neka su u toj točki vektori tangente i normale jednaki:

$$T = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j$$
$$N = -\frac{dy}{ds}i + \frac{dx}{ds}j.$$

Kako se materijalna točka giba samo po krivulji, to je gibanje moguće samo u tangencijalnom smjeru tako da su tangencijalne komponente sile teža i trenja jednake:

$$F_gT = mg\frac{dy}{ds}$$
$$F_NT = -\mu mg\frac{dx}{ds}$$

s koeficijentom trenja μ. Uvrštavanjem komponenti u drugi Newtonov zakon slijedi jednakost

$$m\frac{dv}{dt} = mg\frac{dy}{ds} = -\mu mg\frac{dx}{ds}. \tag{5.1}$$

Ako uvrstimo iduće

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2)$$

u (5.1) i zatim isto integriramo slijedi iduća jednadžba

$$\frac{1}{2}v^2 = g(y - \mu x), \text{ odnosno } v = \sqrt{2g(y - \mu x)}.$$

Vrijeme gibanja sada je jednako

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y - \mu x)}} dx,$$

a primjenom E-L jednadžbe imamo

$$(1 + y'^2)(1 + \mu y') + 2(y - \mu x)y'' = 0.$$

Uvođenjem supstitucija i parcijalnom integracijom možemo svesti jednadžbu na

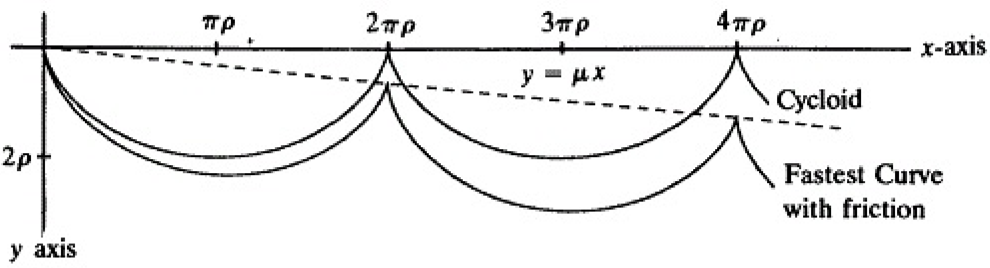
$$\frac{1 + y'^2}{(1 + \mu y')^2} = \frac{C}{y - \mu x} \tag{5.2}$$

s nenegativnom konstantom C. Slijedimo logiku klasičnog rješenja problema i supstituiramo $y' = \cot\theta/2$. Iz (5.2) slijedi da su jednadžbe rješenja

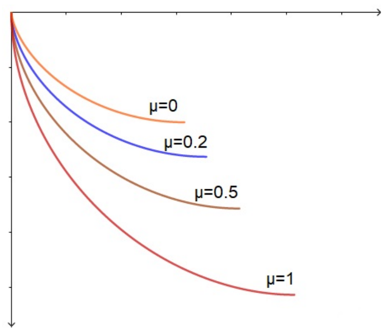
$$x = r[(\theta - \sin\theta) + \mu(1 - \cos\theta)] \quad \text{i}$$

$$y = r[(1 - \cos\theta) + \mu(\theta + \sin\theta)],$$

gdje je r radijus, a θ zakrivljenost krivulje. Vidimo da je Brahistokrona sada direktno ovisna o koeficijentu trenja i da je rješenje cikloida samo ako je koeficijent jednak 0.



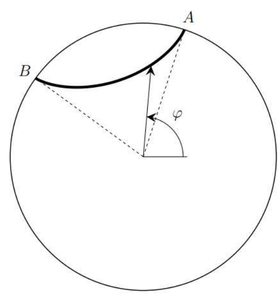
Slika 5.1: Usporedba Brahistokrone bez i s trenjem (slika preuzeta iz [10])



Slika 5.2: Ovisnost krivulje o koeficijentu trenja

5.2 Tunel unutar Zemljine kore

Obradili smo jednu zanimljivu primjenu ovog problema koristeći [11] i [12]. Pretpostavimo da gradimo tunel unutar Zemljine kore koji povezuje dva grada (A i B). Želimo odrediti oblik tunela kojim bi objekt najbrže stigao iz jedne u drugu točku ako zanemarimo utjecaj trenja. Modelirajmo Zemlju kao jednoliku čvrstu sferu radijusa R i mase M s konstantnom gustoćom ρ.



Slika 5.3: Skica tunela između 2 grada

Parametrizirajmo tunel koji je određen s dva grada koja povezujemo krivuljom $(x, r(x))$, gdje je r udaljenost objekta od Zemljina središta. Masa na udaljenosti r od središta Zemlje je

$$M = \rho\pi \int_0^r (2t)^2 dt = \frac{4}{3}\pi\rho r^3, \tag{5.3}$$

a gustoća ρ je konstantna i jednaka je

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \tag{5.4}$$

Efektivna masa unutar Zemlje se smanjuje s M na $M(\frac{r}{R})^3$ pa je akceleracija jednaka

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GMm}{R^3}r$$

s oznakom m za masu objekta koji se kreće. Zakon o sačuvanju energije u početnoj točki gdje je $r = R$ i brzina $v = 0$ glasi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}r^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$$

pa je brzina dana s

$$v = \sqrt{\frac{GM(R^2 - r^2)}{R^3}}.$$

Iz izraza

$$mg = \frac{MGm}{R^2}$$

slijedi da je gravitacijska konstanta jednaka $g \equiv \frac{GM}{R^2}$. Iz upravo izvedene formule slijedi da je brzina

$$v = \sqrt{\frac{g(R^2 - r^2)}{R}}.$$

Ukupno vrijeme gibanja objekta je jednako

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

pa uvrštavajući izraz za v i $ds^2 = dx^2 + dy^2$ dobijemo

$$T = \int_A^B \sqrt{\frac{(x'^2 + y'^2)R}{(R^2 - (x^2 + y^2))g}}.$$

Kako jednadžba ne ovisi o vremenu, opet je pogodno korištenje DuBois Reymondove jednadžbe:

$$f - x'\frac{\partial f}{\partial x'} = C_1 = \frac{y'^2\sqrt{\frac{R(x'^2 - y'^2)}{g(R^2 - x^2 - y^2}}}{y'^2 - x'^2}, \tag{5.5}$$

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C_2 = \frac{x'^2\sqrt{\frac{R(x'^2 - y'^2)}{g(R^2 - x^2 - y^2}}}{x'^2 - y'^2}, \tag{5.6}$$

Zbrajanjem i kvadriranjem (5.5) i (5.6) dolazimo do izraza

$$R(x'^2 + y'^2) = gC^2(R^2 - x^2 - y^2), \quad C = C_1 + C_2. \tag{5.7}$$

Krivulja

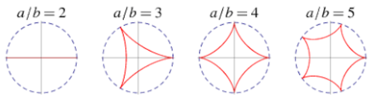
Rješenje (5.7) je hipocikloida čije su parametarske jednadžbe dane s

$$\begin{aligned} x(t) &= (R-b)\cos t + b\cos\left(\frac{R-b}{b}t\right) \\ y(t) &= (R-b)\sin t - b\sin\left(\frac{R-b}{b}t\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Deriviranjem (5.8) i uvrštavanjem istog u (5.7) možemo izraziti konstantu C

$$C = \sqrt{\frac{R(R-b)}{gb}}.$$

Hipocikloida je ravninska krivulja koju opisuje točka T neke kružnice k ako se kružnica k kotrlja po unutarnjoj strani druge kružnice K. U našem slučaju kružnica k koja se kotrlja je radijusa b, a K ima polumjer R.



Slika 5.4: Hipocikloide s kružnicama radijusa a i b

Vrijeme putovanja

Uvodimo polarne koordinate, neka je φ kut kao na Slici 5.3 i vrijedi

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$
$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Ukupno vrijeme je jednako

$$T = \int_A^B \sqrt{\frac{(x'^2 + y'^2)R}{(R^2 - (x^2 + y^2))g}}dt = \int_A^B C dt = \int_A^B \sqrt{\frac{R(R-b)}{bg}}dt$$

Vremenski interval dt možemo naći ako primijetimo iduće:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2b^2 - 2bR + R^2 + 2b(R-b)\cos\frac{Rt}{b}. \tag{5.9}$$

Ako uvrstimo $r = R$ u (5.9) imamo: $1 = \cos\frac{Rt}{b}$, tj. $\frac{Rt}{b} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Uzmimo da je $n = 1$ pa je $dt = \frac{2\pi b}{R}$, a ukupno vrijeme putovanja

$$T = \sqrt{\frac{R(R-b)}{bg}\frac{2\pi b}{R}}.$$

Neka je udaljenost između dva grada na Zemlji jednaka s. Tada je radijus manjeg kruga jednak $b = \frac{s}{2\pi}$ pa je vrijeme putovanja između ta dva grada jednako

$$T_{A\to B} = \sqrt{\frac{s}{R}\frac{(2\pi R - s)}{g}}.$$

Ako za primjer uzmemo hipocikloidu s $R/b = 2$ koja tvori ravnu liniju najkraćeg puta kroz centar Zemlje, ukupno je vrijeme putovanja jednako

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42.24 \text{ minute.}$$

Dakle, kad bi uz naše pretpostavke postojao tunel kroz središte Zemlje, od Zagreba do njemu suprotne strane svijeta, odnosno do južnog dijela Pacifika mogli bi doći za nešto više od 42 minute. Može se pokazati da bi putovanje ravnom linijom kroz Zemlju između bilo koja dva grada trajalo oko 42 minute. S druge strane, hipocikloidnim tunelom kroz Zemlju od Zagreba do, recimo, New Yorka došli bi za približno 31,78 minutu. Dakle, hipocikloidni tunel bi do iste lokacije doveo putnike desetak minuta brže nego onaj kojeg opisuje ravna linija, ali zahtijeva puno veću dubinu.

Bibliografija

[1] K.Burazin, U. Radojičić, *Uvod u varijacijski račun i njegova povijest*, Osječki matematički list 16 (2016), 111-133

[2] H. H. Goldstine, *A History of the calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, IBM Research, Yorktown Heights, New York J0598/USA, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540/USA

[3] R. Padyala, *Brachistochrone – The Path of Quickest Descent*, Reson 24, 201–216 (2019)

[4] R. Coleman, *A Detailed Analysis of the Brachistochrone Problem*, Laboratoire Jean Kuntzmann, Domaine Universitaire de Saint-Martin-d'H'eres, France, 2012., https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446767v2 (pristupljeno 16.01.2020.)

[5] M. Grasmair, *Basics of calculus of variations*, April 2015.

[6] G. Brookfield, *Yet Another Elementary Solution of the Brachistochrone Problem*, Mathematics Magazine, February, 2010., https://doi.org/10.4169/002557010X480017 (pristupljeno 13.02.2020.)

[7] E. Balder, *The brachistochrone problem made elementary*, Mathematical Institute, University of Utrecht, the Netherlands February 27, 2002, http://www.staff.science.uu.nl/ balde101/talks/vanbeek.pdf (pristupljeno 29.02.2020.)

[8] H. J. Sussmann, J. C. Willems, *Contemporary Trends in Nonlinear Geometric Control Theory and Its Applications, pp. 113-166: The Brachistochrone problem and modern control theory* , 2002.

[9] H. J. Sussmann, J. C. Willems, *300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems Magazine, vol. 17, no. 3, pp. 32-44, June 1997.

[10] L. Haws, T. Kiser, *Exploring the Brachistochrone Problem*, ISSN:0002-9890, MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, https://www.jstor.org/stable/2974953 (pristupljeno 15.02.2020.)

[11] A. Maxham, *Brachistochrone inside the Earth: The Gravity Train*, UNLV Department of Physics and Astronomy, September 26, 2008., http://www.physics.unlv.edu/ maxham/gravitytrain.pdf (pristupljeno 29.02.2020.)

[12] P. W. Cooper, *Through the Earth in Forty Minutes*, American Journal of Physics 34, 68 (1966), https://doi.org/10.1119/1.1972773 (pristupljeno 29.02.2020.)

[13] Delfim F. M. Torres, *Quasi-Invariant Optimal Control Problems*, https://arxiv.org/pdf/math/0302264.pdf (pristupljeno 28.02.2020.)

[14] A. V. Arutyunov, R. B. Vinter, *A Simple 'Finite Approximations' Proof of the Pontryagin Maximum Principle under Reduced Differentiability Hypotheses*, http://www.imperial.ac.uk/pls/portallive/docs/1/27603700.PDF (pristupljeno 15.05.2020.)

[15] B. K. Driver, *Analysis Tools with Examples*, March 10, 2004

[16] https://www.pexels.com/

Sažetak

Problem koji se obrađuje u ovom radu je pronalazak puta kojim bi najbrže stigli iz jedne u drugu točku uz utjecaj jedino sile teže. Poznatiji je pod imenom Brahistokrona krivulja te ga je popularizirao švicarski matematičar Johann Bernoulli 1696 godine, koji je godinu kasnije i arugmentirao da je rješenje cikloida.

U radu smo problemu pristupili na tri načina: varijacijskim računom, optimalnim upravljanjem i analitčkim rješavanjem baziranim na Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti. Cilj je za opću krivulju doći do izraza za ukupno vrijeme kretanja, a potom ga minimizirati, odnosno pronaći krivulju za koju se minimum postiže. Prvi korak je odrediti sve moguće kandidate za minimum koje dobivamo evaluiranjem nužnih uvjeta optimalnosti. Preciznije, u teoriji varijacijskog računa riječ je o Euler-Lagrangeovim jednadžbama, a u optimalnom upravljanju koristimo Pontrjaginov princip maksimuma. U oba slučaja dobivamo da je cikloida jedini kandidat za rješenje. Koristeći konveksnost teorijom varijacijskog računa dobivamo da je cikloida zaista jedinstvena Brahistokrona. Istaknimo još i da singularitet i nekonveksnost podintegralne funkcije znatno otežavaju ovu analizu, što je u ovom radu detaljno i raspisano.

Summary

In this thesis, we present the problem of finding the path along which an object would slide in the shortest possible time from point A to point B if it is only accelerated by gravity. This problem, known as the Brachistochrone curve problem, was first published by Johann Bernoulli in 1696, who showed that its solution is cycloid.

This work contains different methods to get the equation of the Brachistochrone curve, precisely calculus of variations approach, optimal control, and the one that uses only Cauchy-Schwarz inequality. Considering the goal is to find the shortest time, the basic idea is to minimize the functional that describes the total travel time from one point to another to get a time-optimal solution. The first step is to find all the candidates for a minimum by finding sufficient and necessary conditions for the extrema of the functional. In the calculus of variations method, we do it by using Euler Lagrange equations, and for the optimal control method, we use Pontrjagin maximum principle. In both cases, we get that the cycloid is a unique solution candidate. In the first method, we use convexity to prove that it is the unique solution. Also, singularity and nonconvexity of an integrand make this analysis harder.

Životopis

Rođena sam 1. siječnja 1995. godine u Splitu. Osnovnu školu Bijaći u Kaštel Novom završavam 2009. godine nakon koje upisujem III. gimnaziju Split prirodoslovnomatematičkog usmjerenja koju završavam 2013. godine. Iste godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija upisujem diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika na istom odsjeku.