

# Geometrijska interpretacija kompleksnih funkcija

---

**Bilaver, Antonia**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:168622>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Geometrijska interpretacija kompleksnih funkcija

---

**Bilaver, Antonia**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:168622>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Antonia Bilaver

**GEOMETRIJSKA**  
**INTERPRETACIJA KOMPLEKSNIH**  
**FUNKCIJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Ljiljana  
Arambašić

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 O povijesti kompleksnih brojeva</b>	<b>2</b>
<b>2 Kompleksne funkcije kompleksne varijable</b>	<b>6</b>
2.1 Linearno preslikavanje . . . . .	7
2.2 Recipročno preslikavanje . . . . .	11
2.3 Möbiusovo preslikavanje . . . . .	19
2.4 Potenciranje i $n$ -ti korijen . . . . .	23
2.5 Eksponencijalno i logaritamsko preslikavanje . . . . .	26
2.6 Trigonometrijska i hiperbolna preslikavanja . . . . .	30
<b>3 Prikaz kompleksnih funkcija pomoću boja</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>42</b>

# Uvod

Kompleksna analiza je grana matematike koja se bavi proučavanjem kompleksnih funkcija kompleksne varijable. Ima široku primjenu u ostalim granama matematike, poput teorije brojeva i primijenjene matematike, ali i u granama fizike, primjerice u hidrodinamici, termodinamici i kvantnoj mehanici. Razvoj kompleksne analize, kao teorije kompleksnih funkcija kompleksnih varijabli, započinje u 18. stoljeću. Kompleksni brojevi nastali su kako bi se olakšalo rješavanje jednadžbi. Godinama su brojni matematičari na njih gledali sa sumnjom, te nisu priznavali njihovo postojanje. Postali su šire prihvaćeni kada su pojedini matematičari opisali njihov grafički prikaz. Razvojem digitalne tehnologije pokazalo se da su kompleksni brojevi važni za proučavanje pojava poput elektromagnetskih valova i valova zvuka. Ključni su za razumijevanje kako funkcionira brojna tehnologija koja nam je danas dostupna. Stoga možemo zahvaliti tim pojedinim matematičarima koji su smatrali da su kompleksni brojevi i kompleksne funkcije vrijedni proučavanja i ustrajali na tome.

Svojstva realnih funkcija realne varijable često iščitavamo iz grafa funkcije, to jest skupa  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ , pri čemu je  $D_f$  domena funkcije  $f$ . S obzirom da je  $\Gamma_f$  podskup od  $\mathbb{R}^2$ , lako ga predočavamo i proučavamo. U slučaju kompleksnih funkcija kompleksne varijable ne možemo primijeniti ovu strategiju jer je tada  $\Gamma_f = \{(z, f(z)) : z \in D_f\}$  podskup od  $\mathbb{C}^2$ , odnosno, uz identifikaciju  $\mathbb{C}$  s  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma_f$  možemo smatrati podskupom od  $\mathbb{R}^4$ , što ne možemo predočiti skicom na papiru. Stoga se postavlja pitanje kako prikazati sliku kompleksnih funkcija kompleksne varijable. Mi ćemo opisati dva načina. Prvi je promatranjem kako zadana funkcija preslikava neke karakteristične podskupove domene (najčešće ćemo promatrati pravce, dužine, kružnice, pravokutnike i poluravnine). Pritom ćemo koristiti dva dvodimenzionalna koordinatna sustava, jedan za domenu, drugi za kodomenu. Drugi način je pridruživanjem jedinstvene boje svakom kompleksnom broju. Navedenim načinima prikazat ćemo linearno preslikavanje, recipročno preslikavanje, Möbiusovo preslikavanje, potenciranje, eksponencijalno preslikavanje, te trigonometrijska i hiperbolna preslikavanja.

# Poglavlje 1

## O povijesti kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi nastali su iz problema pred kojim su se našli matematičari prilikom rješavanja kubne jednadžbe, iako mnogi vjeruju da su se pojavili pri rješavanju kvadratne jednadžbe. Matematičari 14. stoljeća rješavali su kubne jednadžbe na sljedeći način. Opća kubna jednadžba

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

supstitucijom

$$x = y - \frac{a}{3},$$

svodi se na reduciranu kubnu jednažbu bez kvadratnog člana

$$x^3 + px + q = 0.$$

Promatrajući samo pozitivne koeficijente  $p, q$  i pozitivnu varijablu  $x$ , postojala su tri tipa reducirane kubne jednadžbe

$$x^3 + px = q,$$

$$x^3 = px + q,$$

$$x^3 + q = px.$$

Prvi koji je riješio prvi tip reducirane kubne jednadžbe (možda i ostala dva), bio je talijanski matematičar Scipione del Ferro (1465.-1526.). Formulu za rješenje poznavao je i talijanski matematičar Niccolo Tartaglia (1499.-1557.), koju je objavio njegov suvremenik Girolamo Cardano (1501.-1576.) u svom djelu *Ars Magna* iz 1545. godine. Formula je i danas poznata pod nazivom Cardanova formula.

Opišimo kako su navedeni talijanski matematičari rješavali drugi tip reducirane kvadratne jednadžbe. Uvodi se supstitucija  $x = u + v$  u jednadžbu  $x^3 = px + q$  i tako dobivamo

$$x^3 - px = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - p(u + v) = qc.$$

Stavimo da je

$$3uv = p, \quad u^3 + v^3 = q.$$

Sada umjesto polazne jednadžbe rješavamo sustav

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

i dobivamo

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \quad (1.1)$$

Formulu (1.1) zovemo Cardanova formula. Na primjer, riješimo jednadžbu  $x^3 = -6x + 20$  Cardanovom formulom. U zadanoj jednadžbi je  $p = -6, q = 20$ . Koristimo Cardanovu formulu i dobivamo

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = 2.$$

Zaista, za  $x = 2$  dobivamo  $8 = -12 + 20$ .

Pri rješavanju nekih jednadžbi drugog tipa reducirane kubne jednadžbe Cardanovom formulom, pojavio bi se korijen negativnog broja tzv. *casus irreducibilis*. Cardano o tom slučaju nije raspravljao u svom djelu. Tridesetak godina nakon otkrića Cardanove formule, talijanski matematičar Rafael Bombelli (1526.-1572.) rješava jednadžbu

$$x^3 = 15x + 4$$

koristeći Cardanovu formulu, pri čemu dobiva

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Uočio je da je jedno rješenje jednadžbe  $x = 4$ , te je pokušao objasniti da je dobiveni izraz samo drugačiji zapis za  $x = 4$ . Pretpostavio je sljedeće

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{i} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Zaista

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{-1})^3 &= 2^3 \pm 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 \pm (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \mp \sqrt{-1} \\ &= 2 \pm 11\sqrt{-1} \\ &= 2 \pm \sqrt{-121}. \end{aligned}$$



Stoga dobiva

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

što je i tražio. Nakon svog razmatranja, Bombelli je izjavio: *"Isprva mi se činilo da se stvar temelji više na sofizmu<sup>1</sup> nego na istini, ali tražio sam dok nisam pronašao dokaz."* [6] Ova rješenja objavio je u svom djelu *L'Algebra* (1572.), te je uveo oznaku za  $\sqrt{-1}$  nazivajući ga *piú di meno*. Opisao je svojstva zbrajanja i oduzimanja kompleksnih brojeva i smatrao je da su kompleksni brojevi potrebni za rješavanje kvadratnih i kubnih jednadžbi. Njegovim djelom započinje razvoj kompleksne analize.

Kompleksni brojevi nisu bili prihvaćeni od strane većine matematičara, uključujući poznatog francuskog matematičara Renea Descartesa (1596.-1650.) koji ih naziva *imaginarnima*. Iako je on uveo opći prikaz kompleksnog broja  $a + ib$ , smatrao je da se problem koji sadrži kompleksne brojeve, ne može riješiti. Kako bi kompleksni brojevi bili bolje prihvaćeni među matematičarima, John Wallis (1616.-1703.), engleski matematičar, opisuje grafički prikaz kompleksnih brojeva. Na  $x$  osi nalaze se realni brojevi, a na  $y$  osi imaginarni. U to vrijeme otkrivena je i de Moivreova formula  $(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Izvori kažu da formula samo nosi ime matematičara Abrahama de Moivrea (1667.-1754.) koju ju je koristio, ali da ju on nije otkrio ni dokazao.

Veliki švicarski matematičar Leonhard Euler (1707.-1783.), jedan je od važnijih matematičara u kompleksnoj analizi. Uveo je oznaku  $i = \sqrt{-1}$ , definirao kompleksno eksponencijalno preslikavanje te dokazao identitet  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Iz te formule proizlazi poznati Eulerov identitet koji povezuje pet važnih matematičkih konstanti  $e, 1, i, \pi, 0$  i koji se smatra najljepšom jednakošću u matematici

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Najvažniji matematičar za razvoj kompleksne analize je francuski matematičar Augustin-Louis Cauchy (1789.-1857.). Njegov veliki doprinos kompleksnoj analizi su Cauchy-Reimannovi uvjeti derivabilnosti kompleksnih funkcija, Cauchyjev integralni teorem i Cauchyjeva integralna formula vezani za integriranje kompleksnih funkcija. Time je postavio temelje za razvoj opće teorije funkcija kompleksnih varijabli. Njemački matematičar Bernhard Riemann (1826.-1866.) važan je po doprinosu geometrijskoj interpretaciji kompleksnih funkcija. Proučavao je Riemannove plohe na kojima razne kompleksne funkcije postaju bijekcije, te je poznat njegov teorem koji kaže da postoji bijektivno holomorfno preslikavanje, čiji je inverz također holomorfan, koje neprazan, povezan i otvoren podskup od  $\mathbb{C}$  preslikava u cijeli skup  $\mathbb{C}$  ili u unutrašnjost jedinične

<sup>1</sup>Sofizam je pogrešan zaključak izveden tako da se doima kao ispravan.

kružnice. Spomenimo još jednog matematičara koji je važan u kompleksnoj analizi, a to je njemački matematičar Karl Weierstrass (1815.-1897.). Poznat je njegov M-test kojim se određuje konvergencija realnih i kompleksnih funkcija, te Weierstrassov pripremni teorem o nultočkama kompleksnih funkcija.

Razvojem digitalne tehnologije, olakšano je proučavanje i razumijevanje kompleksnih funkcija i njihovih svojstava. Postoje razni programi koji olakšavaju predočavanje slika različitih kompleksnih funkcija.

## Poglavlje 2

# Kompleksne funkcije kompleksne varijable

Kompleksne funkcije kompleksne varijable su funkcije čija je domena podskup skupa  $\mathbb{C}$ , a kodomena skup  $\mathbb{C}$ . Obično za domenu uzimamo otvoreni skup. Neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Koristimo zapis  $z = x + iy = (x, y)$  te uvodimo oznake

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Na ovaj način dobijemo funkcije

$$u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

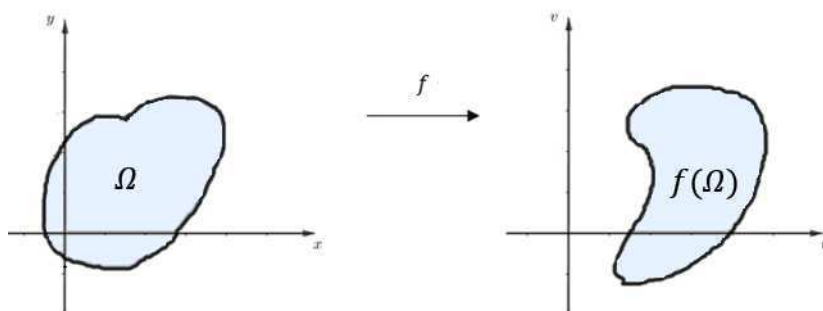
koje nazivamo *realni* i *imaginarni dio od  $f$* . Pišemo

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f, \quad f = u + iv.$$

Funkciju  $f$  možemo shvaćati i kao funkciju  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadanu s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Graf funkcije izrazito je važan za proučavanje funkcija. Kod realnih funkcija realne varijable graf funkcije, odnosno skup  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f \subseteq \mathbb{R}\}$ , prikazuje se u dvodimenzionalnoj ravnini, pri čemu je  $D_f$  domena funkcije  $f$ . Postavlja se pitanje kako kod kompleksnih funkcija kompleksne varijable predočiti graf funkcije, to jest skup  $\Gamma_f = \{(z, f(z)) : z \in D_f \subseteq \mathbb{C}\}$ . Uz identifikaciju  $\mathbb{C}$  s  $\mathbb{R}^2$ , skup  $\Gamma_f$  sada postaje podskup od  $\mathbb{R}^4$  što ne možemo predočiti kao u realnom slučaju. Stoga za prikaz slike ovih funkcija koristimo dva dvodimenzionalna koordinatna sustava. Prvi sustav nam predstavlja  $z$  ravninu u kojoj je domena funkcije, a drugi nam predstavlja  $w$  ravninu u kojoj je kodomena funkcije.



Slika 2.1: Funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

U nastavku ovog poglavlja posvetimo pažnju proučavanju slika nekih elementarnih funkcija.

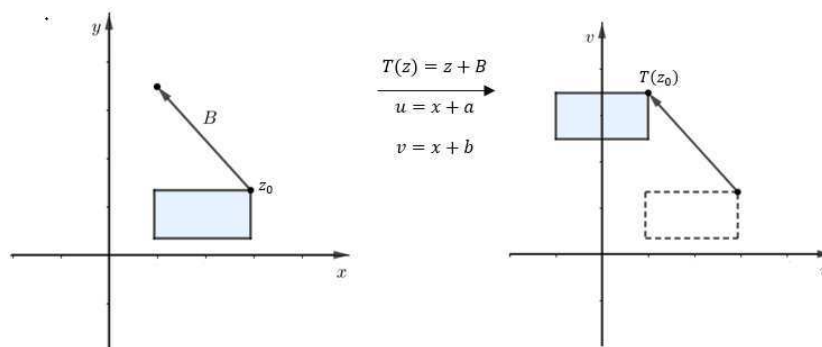
## 2.1 Linearno preslikavanje

**Definicija 2.1.1.** *Neka je  $B$  fiksiran kompleksan broj. Preslikavanje*

$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad T(z) = z + B$$

*zovemo translacija.*

Ovo preslikavanje translacija točku  $z_0 = x + iy$  za vektor  $B = a + ib$ , (preciznije za vektor  $\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ) u točku  $T(z_0) = x + a + i(y + b)$ . Očito je translacija bijektivno preslikavanje, a njen inverz je translacija za vektor  $-B$ . Grafička interpretacija ovog preslikavanja prikazana je na slici 2.2.



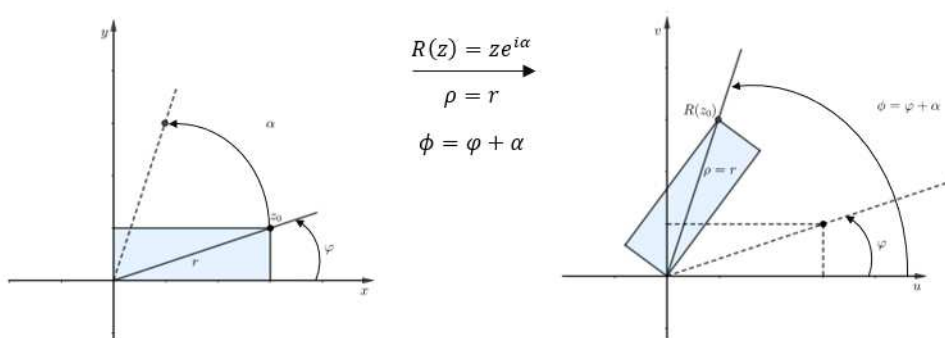
Slika 2.2: Translacija  $T(z) = z + B$

**Definicija 2.1.2.** Neka je  $\alpha$  fiksni realan broj. Preslikavanje

$$R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad R(z) = ze^{i\alpha}$$

zovemo rotacija (za kut  $\alpha$  u pozitivnom smjeru).

Ovo preslikavanje rotira točku  $z_0 = re^{i\varphi}$  oko ishodišta za kut  $\alpha$  u točku  $R(z_0) = \rho e^{i(\varphi+\alpha)}$ . Očito je rotacija bijektivno preslikavanje, a njen inverz je rotacija za kut  $-\alpha$ . Na slici 2.3 prikazana je grafička interpretacija ovog preslikavanja.



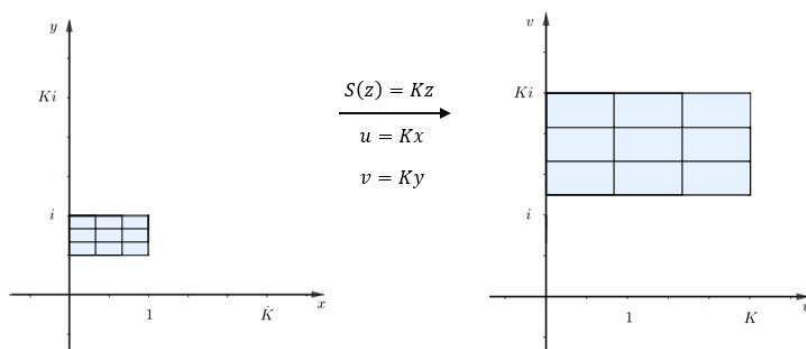
Slika 2.3: Rotacija  $R(z) = ze^{i\alpha}$

**Definicija 2.1.3.** Neka je  $K > 0$  fiksni pozitivan realan broj. Preslikavanje

$$S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad S(z) = Kz$$

zovemo homotetija.

Ovo preslikavanje točku  $z_0 = x + iy$  preslikava u točku  $S(z_0) = Kx + iKy$ . Ako je  $K > 1$ , preslikavanje predstavlja rastezanje za faktor  $K$ . Ako je  $K < 1$ , preslikavanje predstavlja stezanje za faktor  $K$ . Očito je homotetija bijektivno preslikavanje i inverz homotetije s faktorom  $K$  je homotetija s faktorom  $\frac{1}{K}$ . Jasno je da je inverz stezanja rastezanje i obratno. Grafička interpretacija ovog preslikavanja prikazana je na slici 2.4.


 Slika 2.4: Rastezanje  $S(z) = Kz$ 

**Definicija 2.1.4.** Neka su  $A, B \in \mathbb{C}$ . Preslikavanje

$$W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad W(z) = Az + B$$

zovemo *linearno preslikavanje*.

Ako je  $A = Ke^{i\alpha}$ , pri čemu su  $\alpha, K \in \mathbb{R}, K > 0$ , tada je

$$W(z) = Ke^{i\alpha}z + B.$$

Dakle, linearno preslikavanje je kompozicija homotetije, rotacije i translacije. Linearno preslikavanje je bijektivno preslikavanje kao kompozicija bijektivnih preslikavanja. Inverz ovog preslikavanja je također linearno preslikavanje

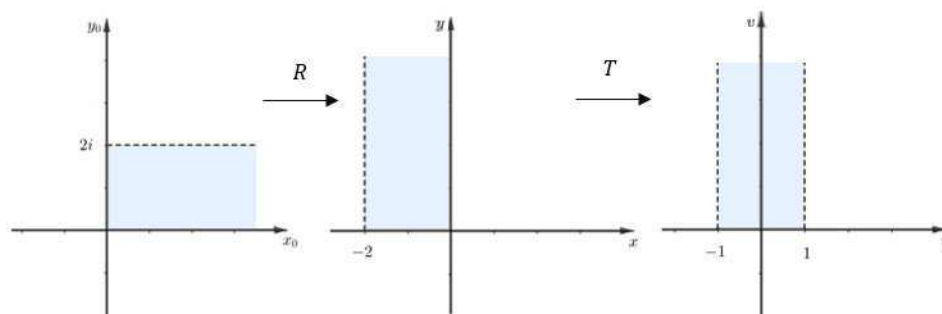
$$W^{-1}(w) = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}.$$

U sljedećim primjerima promotrimo kako linearno preslikavanje preslikava zadane podskupove domene.

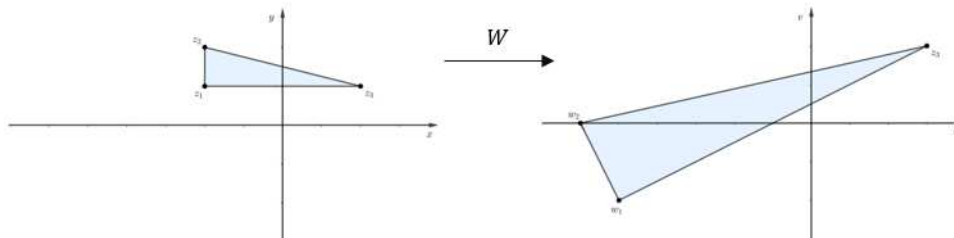
**Primjer 1.** Odredimo sliku skupa  $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$  pri preslikavanju  $W(z) = iz + 1$ . Iz

$$W(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z + 1$$

zaključujemo da je  $W$  kompozicija rotacije za kut  $\frac{\pi}{2}$  i translacije za vektor 1. Slika danog skupa prikazana je na slici 2.5. iz koje se vidi da je rješenje skup  $R = \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ .


 Slika 2.5: Slika skupa  $S$  pri linearnom preslikavanju  $W(z) = iz + 1$ 

Iz definicije linearnog preslikavanja jasno je da će se segment preslikati u segment. Pri tome se krajnje točke početnog segmenta preslikaju u krajnje točke dobivenog segmenta. Stoga zaključujemo da linearno preslikavanje poligon preslikava u poligon. Na primjer, ako je zadano preslikavanje  $W(z) = (2+i)z - 2i$  i trokut određen vrhovima  $z_1 = -2 + i$ ,  $z_2 = -2 + 2i$ ,  $z_3 = 2 + i$ , slika tog trokuta bit će trokut određen vrhovima  $W(z_1) = -5 - 2i$ ,  $W(z_2) = -6$ ,  $W(z_3) = 3 + 2i$ .



Slika 2.6: Slika trokuta pri linearnom preslikavanju

Slika kružnice pri linearnom preslikavanju je također kružnica. Naime, ako je zadana kružnica  $|z - z_0| = r$ , pri čemu je  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , tada je njena slika jednaka

$$|f(z) - f(z_0)| = |Az + B - Az_0 - B| = |A||z - z_0| = |A|r,$$

što je kružnica sa središtem u  $f(z_0)$  radijusa  $|A|r$ .

**Primjer 2.** Odredimo linearno preslikavanje  $W$  koje kružnicu  $|z| = 1$  preslikava u kružnicu  $|w - 3 + 2i| = 5$  i za koje vrijedi  $W(-i) = 3 + 3i$ . Tražimo preslikavanje oblika  $W(z) = Az + B$ . Središte  $z_0 = 0$  prve kružnice preslikalo se u središte  $w_0 = 3 - 2i$

druge kružnice. Dakle, zadatak se svodi na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{cases} W(0) = 3 - 2i \\ W(-i) = 3 + 3i. \end{cases}$$

Kako je  $W(z) = Az + B$ , pri čemu su  $A, B \in \mathbb{C}$ , dobivamo

$$\begin{cases} B = 3 - 2i \\ A \cdot (-i) + B = 3 + 3i, \end{cases}$$

odakle slijedi  $W(z) = -5z + 3 - 2i$ .

## 2.2 Recipročno preslikavanje

**Definicija 2.2.1.** *Preslikavanje*

$$I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad I(z) = \frac{z}{|z|^2}$$

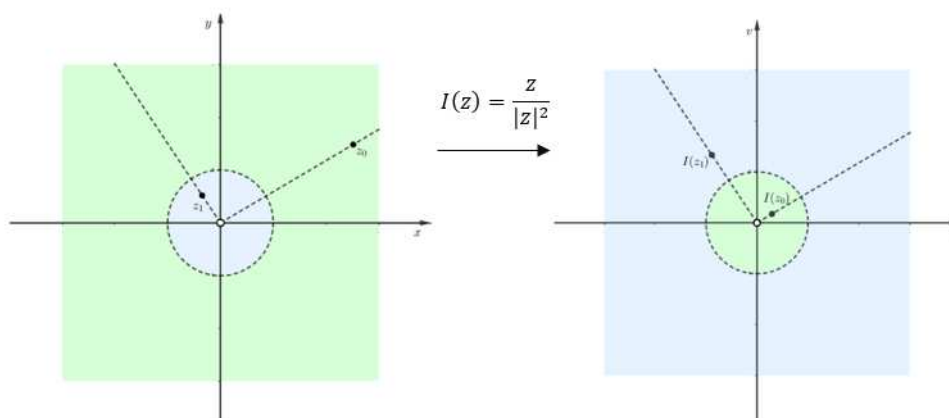
zovemo *inverzija s obzirom na kružnicu*  $|z| = 1$ .

Ovo preslikavanje točku  $z_0 \neq 0$  preslikava u točku  $I(z_0)$  tako da je

$$|I(z_0)| = \frac{1}{|z_0|} \quad \text{i} \quad \arg I(z_0) = \arg z_0.$$

Stoga se točke unutar jedinične kružnice preslikavaju u točke izvan jedinične kružnice i obratno. Točke na jediničnoj kružnici su fiksne točke, to jest preslikavaju se u same sebe. Točke na osima  $z$  ravnine preslikavaju se u točke na osima  $w$  ravnine, te vrijedi  $\lim_{z \rightarrow 0} |I(z)| = \infty$ . Grafička interpretacija ovog preslikavanja prikazana je na slici 2.7.





Slika 2.7: Inverzija  $I(z) = \frac{z}{|z|^2}$

Određivanje slike pravca i kružnice pri inverziji nešto je kompliciranije. Kako bi pojednostavnili problem, koristimo izraz

$$az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + c = 0, \quad (2.1)$$

pri čemu su  $a, c \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{C}$ . Za  $z = x + iy$  i  $B = b_1 + ib_2$ , izraz (2.1) možemo zapisati u obliku

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c = 0,$$

koji svođenjem na potpuni kvadrat postaje

$$\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - ac}{a^2}.$$

Sada se lako vidi da za  $a \neq 0$  i  $|B|^2 > ac$ , gornja jednačba predstavlja jednačbu kružnice sa središtem u točki  $z_0 = -\frac{\operatorname{Re} B}{a} + i\frac{\operatorname{Im} B}{a}$  i radijusom  $r = \sqrt{\frac{|B|^2 - ac}{a^2}}$ . Za  $a = 0$  jednačba predstavlja jednačbu pravca. Koristeći ove zaključke, dokažimo sljedeći teorem koji opisuje kako inverzija preslikava pravce i kružnice.

**Teorem 2.2.2.** *Inverzija pravce i kružnice preslikava u pravce i kružnice. Preciznije, inverzija*

- (i) *kružnicu koja ne prolazi ishodištem u  $z$  ravnini preslikava u kružnicu koja ne prolazi ishodištem u  $w$  ravnini;*
- (ii) *kružnicu koja prolazi ishodištem u  $z$  ravnini preslikava u pravac koji ne prolazi ishodištem u  $w$  ravnini;*
- (iii) *pravac koji ne prolazi ishodištem u  $z$  ravnini preslikava u kružnicu koja prolazi ishodištem u  $w$  ravnini;*
- (iv) *pravac kroz ishodište u  $z$  ravnini preslikava u pravac kroz ishodište u  $w$  ravnini.*

*Dokaz.* Neka su  $a, c \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}$  takvi da je  $|B|^2 > ac$ . Tada izraz (2.1) predstavlja jednadžbu kružnice (za  $a \neq 0$ ) ili jednadžbu pravca (za  $a = 0$ ).

Neka su  $z \neq 0, w = I(z) \neq 0$ . Zapišimo preslikavanje  $I$  u obliku  $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ . Pomnožimo izraz (2.1) s  $\frac{1}{z\bar{z}}$  i dobivamo

$$a + B \cdot \frac{1}{\bar{z}} + \bar{B} \cdot \frac{1}{z} + d \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} = 0.$$

Kako je  $w = \frac{1}{\bar{z}}$  i  $\bar{w} = \frac{1}{z}$ , dobiveni izraz svedemo na

$$a + Bw + \overline{Bw} + cw\bar{w} = 0. \quad (2.2)$$

Zaista,  $w = I(z)$  zadovoljava jednadžbu kružnice ili pravca.

Ako je  $a \neq 0$  i  $c \neq 0$ , tada izraz (2.1) predstavlja jednadžbu kružnice koja ne prolazi ishodištem  $z$  ravnine. Uočimo da tada i izraz (2.2) predstavlja jednadžbu kružnice (zbog  $c \neq 0$ ) koja ne prolazi ishodištem  $w$  ravnine (zbog  $a \neq 0$ ).

Ako je  $a \neq 0$  i  $c = 0$ , tada izraz (2.1) predstavlja jednadžbu kružnice koja prolazi ishodištem  $z$  ravnine. Tada izraz (2.2) ima oblik  $a + Bw + \overline{Bw} = 0$ , što je jednadžba pravca koji ne prolazi ishodištem  $w$  ravnine zbog  $a \neq 0$ .

Ako je  $a = 0$  i  $c \neq 0$ , tada izraz (2.1) predstavlja jednadžbu pravca koji ne prolazi ishodištem  $z$  ravnine. U ovom slučaju izraz (2.2) predstavlja jednadžbu kružnice (zbog  $c \neq 0$ ) koja prolazi ishodištem  $w$  ravnine (zbog  $a = 0$ ).

Ako je  $a = 0$  i  $c = 0$ , tada izraz (2.1) predstavlja jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem  $z$  ravnine. Tada izraz (2.2) ima oblik  $Bw + \overline{Bw} = 0$ , što je jednadžba pravca koji prolazi ishodištem  $w$  ravnine.

□

Napomenimo da, kada kažemo da pravac ili kružnica prolaze ishodištem, moramo istaknuti da u toj točki imaju "rupu" jer ishodište nije u domeni ni u kodomeni recipročnog preslikavanja.

**Definicija 2.2.3.** *Preslikavanje*

$$W : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad W(z) = \frac{1}{z}$$

zovemo *recipročno preslikavanje*.

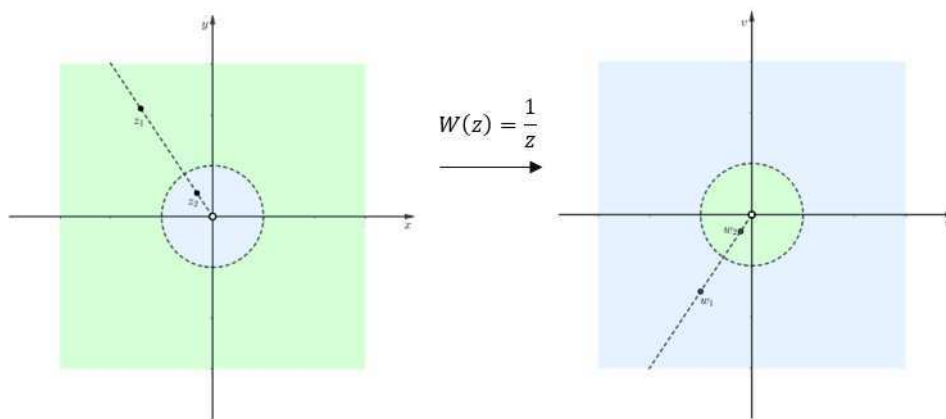
Kako je  $z\bar{z} = |z|^2$ , funkciju  $W$  možemo izraziti kao

$$W(z) = \overline{I(z)}, \quad I(z) = \frac{z}{|z|^2}.$$

Dakle, recipročno preslikavanje je kompozicija inverzije i zrcaljenja s obzirom na realnu os. Očito je recipročno preslikavanje  $W$  bijektivno preslikavanje koje je samo sebi inverz tj.,

$$W^{-1}(z) = \frac{1}{z}.$$

Grafička interpretacija ovog preslikavanja prikazana je na slici 2.8.



Slika 2.8: Recipročno preslikavanje  $W(z) = \frac{1}{z}$

Promotrimo slike različitih podskupova domene pri recipročnom preslikavanju. Kako je recipročno preslikavanje kompozicija inverzije i zrcaljenja s obzirom na realnu os, pravce i kružnice preslikava u pravce i kružnice, odnosno vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.4.** *Recipročno preslikavanje preslikava pravce i kružnice u pravce i kružnice. Preciznije, vrijede tvrdnje (i) – (iv) iz teorema 2.2.2.*

*Dokaz.* Analogan dokazu teorema 2.2.2. Potrebno je još odrediti sliku pravaca i kružnica pri zrcaljenju s obzirom na realnu os koje neće utjecati na položaj tih pravaca i kružnica.  $\square$

**Primjer 3.** Promotrimo slike vertikalnih i horizontalnih pravaca pri recipročnom preslikavanju. Vertikalne pravce možemo izraziti jednadžbom  $\operatorname{Re} z = a$ , a horizontalne pravce jednadžbom  $\operatorname{Im} z = b$ . Prema teoremu 2.2.4, pravci kroz ishodište preslikat će se u pravce kroz ishodište, dok će se pravci koji ne prolaze ishodištem preslikati u kružnice koje prolaze ishodištem.

Nadalje, da bismo precizno odredili u koji se točno pravac i kružnicu preslikavaju zadani vertikalni i horizontalni pravci, koristimo sljedeće relacije. Neka su  $z = x + iy \neq 0$ ,  $W(z) = u + iv \neq 0$ . Tada iz

$$W(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

slijedi

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (2.3)$$

Slično dobijemo

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \quad (2.4)$$

Ako su  $a, b = 0$ , koristeći relacije (2.3), zaključujemo da se pravac  $\operatorname{Re} z = 0$  preslikava se u pravac  $\operatorname{Re} w = 0$ , a pravac  $\operatorname{Im} z = 0$  se preslikava u pravac  $\operatorname{Im} w = 0$ .

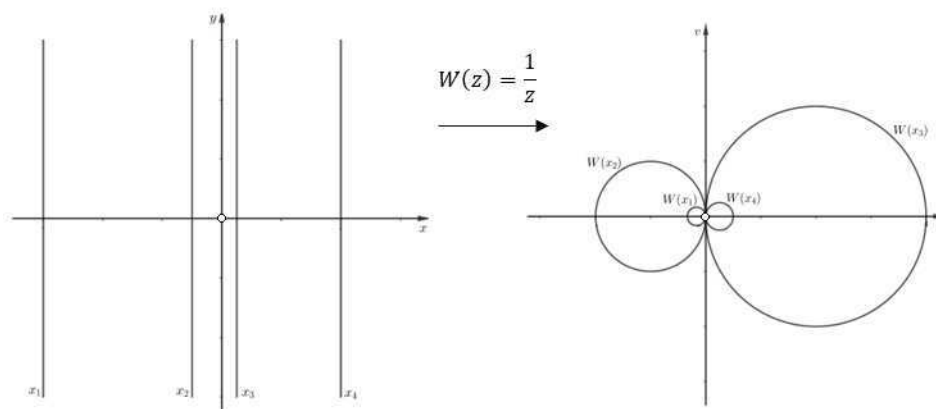
Ako je  $a \neq 0$ , iz relacija (2.4) slijedi da se pravac  $\operatorname{Re} z = a$  preslikava u

$$\frac{u}{u^2 + v^2} = a,$$

što možemo zapisati u obliku

$$\left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2,$$

koji predstavlja jednadžbu kružnice sa središtem u  $w_0 = \frac{1}{2a}$  i radijusom  $\left|\frac{1}{2a}\right|$ . Primijetimo, ako je  $a > 0$ , kružnica se nalazi s desne strane  $v$  osi. Ako je  $a < 0$ , kružnica se nalazi s lijeve strane  $v$  osi.

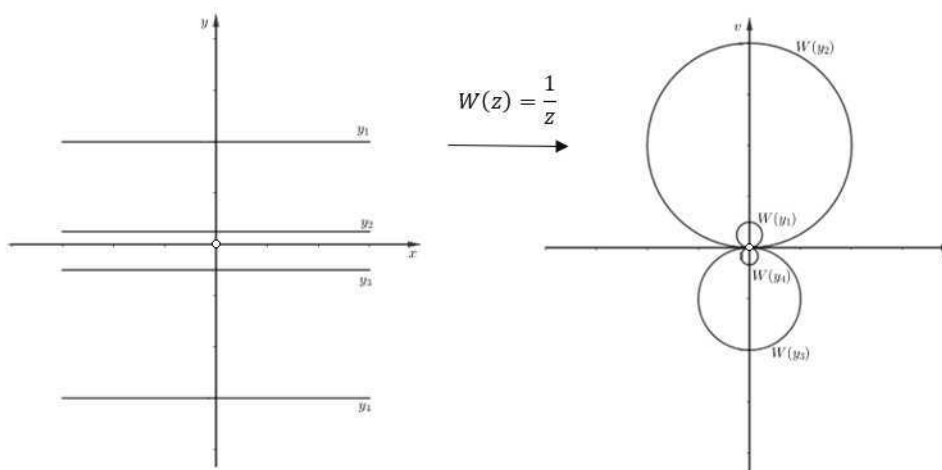


Slika 2.9: Slike vertikalnih pravaca pri recipročnom preslikavanju

Slično, za  $b \neq 0$ , pravac  $\text{Im } z = b$  se preslikava u kružnicu

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2$$

sa središtem u  $w_0 = -\frac{i}{2b}$  i radijusom  $\left|\frac{1}{2b}\right|$ . Primijetimo, ako je  $b > 0$ , kružnica se nalazi ispod  $u$  osi, a ako je  $b < 0$ , kružnica se nalazi iznad  $u$  osi.



Slika 2.10: Slike horizontalnih pravaca pri recipročnom preslikavanju

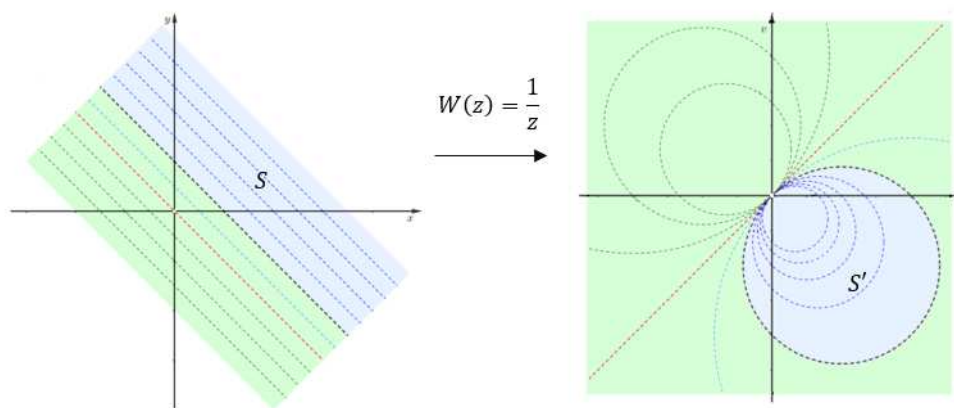
Nakon što smo objasnili na koji način se preslikavaju pravci i kružnice pri recipročnom preslikavanju, promotrimo i slike ostalih podskupova domene.

**Primjer 5.** Odredimo sliku skupa  $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \frac{1}{2} - \operatorname{Re} z \right\}$  pri recipročnom preslikavanju. Skup  $S$  je zapravo gornja poluravnina određena pravcem  $y = \frac{1}{2} - x$ . Koristeći relacije (2.4), dobijemo da je slika pravca  $y = \frac{1}{2} - x$  kružnica određena s

$$(u - 1)^2 + (v + 1)^2 = 2.$$

Danu poluravninu možemo prekriti pravcima paralelnim s pravcem  $y = \frac{1}{2} - x$ . Prema teoremu 2.2.4, znamo da su slike pravaca koji ne prolaze ishodištem, pri recipročnom preslikavanju, kružnice koje prolaze ishodištem. Te kružnice će ispuniti unutrašnjost kružnice sa središtem u točki  $1 - i$  i radijusom  $\sqrt{2}$ , što je upravo slika skupa  $S$ .

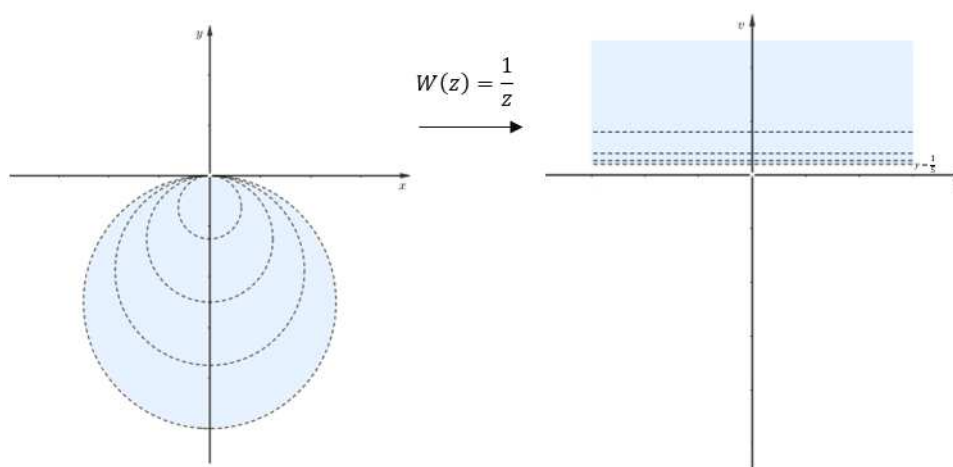
Nešto zanimljivije je odrediti sliku skupa  $\mathbb{C} \setminus S$ . Postupamo na isti način tako da prekrijemo taj skup pravcima paralelnima s pravcem  $y = \frac{1}{2} - x$ . Naime, među tim pravcima nalazi se pravac koji prolazi kroz ishodište. Njegova slika bit će pravac kroz ishodište, a ostali pravci preslikavaju se u kružnice kroz ishodište. Slike skupova  $S$  i  $\mathbb{C} \setminus S$  prikazane su na slici 2.12.



Slika 2.11: Slika poluravnine pri recipročnom preslikavanju

Slično možemo odrediti i sliku kruga pri recipročnom preslikavanju. Primjerice, ako želimo odrediti sliku kruga  $\left| z + \frac{5i}{2} \right| < \frac{5}{2}$ , najprije, koristeći relacije (2.4), odre-

dimo da se rub kruga, odnosno kružnica  $\left|z + \frac{5i}{2}\right| = \frac{5}{2}$ , preslika u horizontalni pravac  $\text{Im } w = \frac{1}{5}$ . Zatim ispunimo unutrašnjost kruga kružnicama kroz ishodište i koristeći teorem 2.2.4 zaključujemo da će slike tih kružnica biti pravci koji će ispuniti poluravninu  $\left\{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > \frac{1}{5}\right\}$ .



Slika 2.12: Slika kruga pri recipročnom preslikavanju

Pogledajmo sada nešto općenitiju verziju recipročnog preslikavanja. Neka su  $a, b \in \mathbb{C}$ . Promotrimo preslikavanje

$$W : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad W(z) = \frac{1}{az + b}.$$

Ovo preslikavanje je kompozicija linearnog i recipročnog preslikavanja. Sada iz domene preslikavanja  $W$ , umjesto ishodišta, izbacujemo točku  $-\frac{b}{a}$ . Po definiciji linearnog preslikavanja i po teoremu 2.2.4, znamo da linearno i recipročno preslikavanje preslikavaju kružnice i pravce u kružnice i pravce. Stoga će preslikavanje  $W$ , kao njihova kompozicija, preslikati kružnice i pravce u kružnice i pravce, odnosno vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.5.** Preslikavanje  $W(z) = \frac{1}{az + b}$  pravce i kružnice preslikava u pravce i kružnice. Preciznije, preslikavanje  $W$

- (i) kružnicu koja ne prolazi točkom  $-\frac{b}{a}$  u  $z$  ravnini preslikava u kružnicu koja ne prolazi ishodištem u  $w$  ravnini;
- (ii) kružnicu koja prolazi točkom  $-\frac{b}{a}$  u  $z$  ravnini preslikava u pravac koji ne prolazi ishodištem u  $w$  ravnini;
- (iii) pravac koji ne prolazi točkom  $-\frac{b}{a}$  u  $z$  ravnini preslikava u kružnicu koja prolazi ishodištem u  $w$  ravnini;
- (iv) pravac kroz točku  $-\frac{b}{a}$  u  $z$  ravnini preslikava u pravac kroz ishodište u  $w$  ravnini.

## 2.3 Möbiusovo preslikavanje

**Definicija 2.3.1.** Neka su  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  i neka je  $ad - bc \neq 0$ . Preslikavanje

$$W : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad W(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

zovemo Möbiusovo preslikavanje.

Ovo preslikavanje proučavao je njemački matematičar August Ferdinand Möbius (1790.-1869.), pa je zbog toga i dobilo taj naziv. Primijetimo da je Möbiusovo preslikavanje kvocijent dva linearna preslikavanja. Uvjet  $ad - bc \neq 0$  nam osigurava da  $W$  ne bude konstantna funkcija. Ako je  $c = 0$ , preslikavanje  $W$  je linearno preslikavanje uz uvjet  $ad \neq 0$ . Ako je  $c \neq 0$ , Möbiusovo preslikavanje možemo zapisati u obliku

$$W(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} = a' + b' \cdot \frac{1}{cz + d}$$

Stoga možemo zaključiti da je Möbiusovo preslikavanje kompozicija preslikavanja

$$S(z) = \frac{1}{cz + d}, \quad T(z) = a' + b'z$$

pri čemu mora vrijediti  $ad - bc \neq 0$ . Iz definicije linearnog preslikavanja i definicije preslikavanja  $S$ , možemo zaključiti da Möbiusovo preslikavanje preslikava kružnice i pravce u kružnice i pravce. Na koji način ih preslikava, opisuje nam sljedeći teorem.



**Teorem 2.3.2.** *Möbiusovo preslikavanje pravce i kružnice preslikava u pravce i kružnice. Preciznije, Möbiusovo preslikavanje*

- (i) *kružnicu koja ne prolazi točkom  $-\frac{d}{c}$  u  $z$  ravnini preslikava u kružnicu koja ne prolazi točkom  $\frac{a}{c}$  u  $w$  ravnini;*
- (ii) *kružnicu koja prolazi točkom  $-\frac{d}{c}$  u  $z$  ravnini preslikava u pravac koji ne prolazi točkom  $\frac{a}{c}$  u  $w$  ravnini;*
- (iii) *pravac koji ne prolazi točkom  $-\frac{d}{c}$  u  $z$  ravnini preslikava u kružnicu koja prolazi točkom  $\frac{a}{c}$  u  $w$  ravnini;*
- (iv) *pravac kroz točku  $-\frac{d}{c}$  u  $z$  ravnini preslikava u pravac kroz točku  $\frac{a}{c}$  u  $w$  ravnini.*

Preslikavanje  $W : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$  je bijektivno preslikavanje i inverz  $W^{-1}$  je također Möbiusovo preslikavanje dano s

$$W^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Za određivanje Möbiusovog preslikavanja  $W$  pri čemu su nam zadane tri različite točke  $z_1, z_2, z_3$  i njihove slike  $W(z_1) = w_1, W(z_2) = w_2, W(z_3) = w_3$ , obično koristimo implicitnu jednadžbu Möbiusovog preslikavanja.

**Teorem 2.3.3** (Implicitna jednadžba). *Postoji jedinstveno Möbiusovo preslikavanje koje tri različite točke  $z_1, z_2, z_3$  preslikava u različite točke  $w_1, w_2, w_3$ , redom. Implicitna jednadžba takvog preslikavanja dana je s*

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}. \quad (2.5)$$

*Dokaz.* Najprije pokažimo da je preslikavanje dano implicitnom jednadžbom (2.5) zaista Möbiusovo preslikavanje. Sređivanjem te jednadžbe dobivamo jednadžbu oblika

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

pri čemu su  $a, b, c, d$  izrazi koji ovise o  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ . Potreban uvjet  $ad - bc \neq 0$  je zadovoljen jer su točke  $w_1, w_2, w_3$  različite.

Nadalje pokažimo da se različite točke  $z_1, z_2, z_3$  preslikavaju u različite točke  $w_1, w_2, w_3$ , redom. Ako stavimo  $z = z_1$  i  $w = w_1$ , tada su obje strane jednadžbe (2.5) jednake 0 što nam pokazuje da je  $w_1$  slika točke  $z_1$ . Ako stavimo  $z = z_2$  i  $w = w_2$ , tada su obje strane jednadžbe (2.5) jednake 1, pa je  $w_2$  slika točke  $z_2$ . Zapišimo jednadžbu (2.5) u obliku

$$\frac{z - z_3}{z - z_1} \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{w - w_3}{w - w_1} \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}. \quad (2.6)$$

Ako stavimo  $z = z_3$  i  $w = w_3$ , tada su obje strane jednadžbe (2.6) jednake 0, pa je  $w_3$  slika točke  $z_3$ .  $\square$

**Primjer 6.** Želimo li odrediti Möbiusovo preslikavanje koje točke  $z_1 = -i, z_2 = 0, z_3 = i$  preslikava u točke  $w_1 = -1, w_2 = i, w_3 = 1$ , redom, koristimo implicitnu jednadžbu (2.5) i dobivamo

$$\frac{z + i}{z - i} \cdot \frac{-i}{i} = \frac{w + 1}{w - 1} \cdot \frac{i - 1}{i + 1}.$$

Nakon sređivanja, traženo preslikavanje je

$$W(z) = \frac{i(1 - z)}{z + 1}.$$

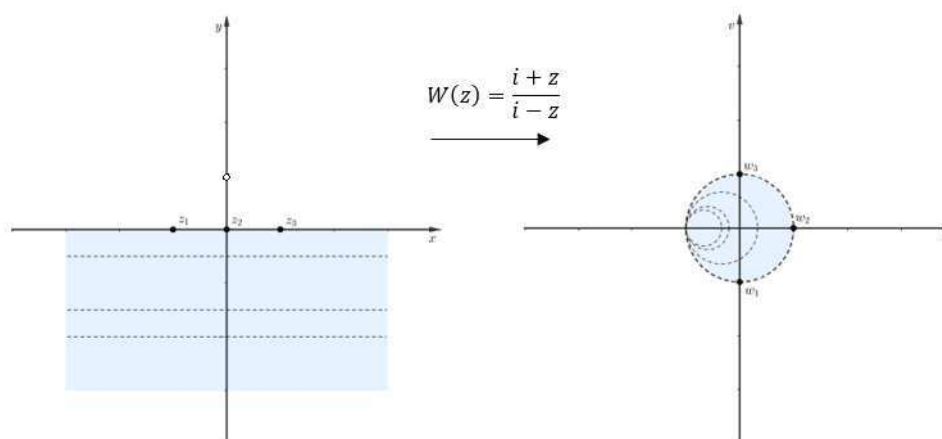
Teorem 2.3.3 koristimo za određivanje slike danog podskupa domene pri Möbiusovom preslikavanju. Obično uzimamo tri točke koje pripadaju tom podskupu i odredimo sliku tih točaka pri danom Möbiusovom preslikavanju. Slike tih točaka određuju sliku danog podskupa.

**Primjer 7.** Odredimo sliku skupa  $S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$  pri preslikavanju  $W(z) = \frac{i + z}{i - z}$ . Preslikavanje  $W$  zapišimo u obliku

$$W(z) = -1 + 2i \cdot \frac{1}{i - z}.$$

Zadani skup  $S$  je područje ispod  $x$  osi, pa prvo odredimo gdje će se preslikati  $x$  os. Prema teoremu 2.3.2, slika  $x$  osi je kružnica koja prolazi točkom  $-1$ . Kako bismo odredili u koju se točno kružnicu preslikava  $x$  os, koristimo zaključke teorema 2.3.3. Uzmimo tri proizvoljne različite točke koje pripadaju  $x$  osi, na primjer  $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ . Slike odabranih točaka pri danom preslikavanju  $W$  su točke  $w_1 = W(z_1) = -i, w_2 = W(z_2) = 1, w_3 = W(z_3) = i$  koje određuju kružnicu  $|w| = 1$ . Dakle,  $x$  os se preslikava u kružnicu  $|w| = 1$ . Nadalje, zadani skup  $S$  možemo ispuniti pravcima paralelnim s  $x$  osi. Kako nijedan od pravaca ne prolazi točkom  $i$ , prema

teoremu 2.3.2, slike tih pravaca su kružnice koje prolaze točkom  $-1$ . Te kružnice će ispuniti unutrašnjost kruga  $|w| < 1$ . Dakle, slika skupa  $S$  je unutrašnjost kruga  $|w| < 1$ .



Slika 2.13: Slika poluravnine pri preslikavanju  $W$

Implicitnu jednadžbu (2.5) možemo koristiti i u proširenom skupu kompleksnih brojeva. Pretpostavimo da  $|z_1| \rightarrow \infty$ . Na lijevoj strani jednadžbe dobivamo

$$\lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{z}{z_1} - 1\right)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)\left(\frac{z_2}{z_1} - 1\right)} = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Uočimo da je  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} W(z) = \frac{a}{c}$ , pa je stoga  $w_1 \in \mathbb{C}$ . Jednadžba (2.5) sada postaje

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

Ovu jednadžbu često koristimo za preslikavanje područja u obliku polumjeseca, između kružnica koje se dodiruju, u beskonačnu prugu.

**Primjer 8.** Odredimo jedno Möbiusovo preslikavanje koje otvoreni polumjesec između kružnica  $|z+3| = 3$  i  $|z+1| = 1$  preslikava u horizontalnu prugu. Pretpostavimo da se kružnica  $|z+3| = 3$  preslikala u  $u$  os. Odaberimo točke  $z_1 = -6$ ,  $z_2 = -3 - 3i$ ,  $z_3 = 0$  koje određuju kružnicu  $|z+3| = 3$  i njihove slike pri traženom preslikavanju su

$w_1 = 0, w_2 = 1, |w_3| \rightarrow \infty$  koje određuju  $u$  os. Koristimo implicitnu jednadžbu

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1},$$

iz koje dobivamo da je traženo preslikavanje

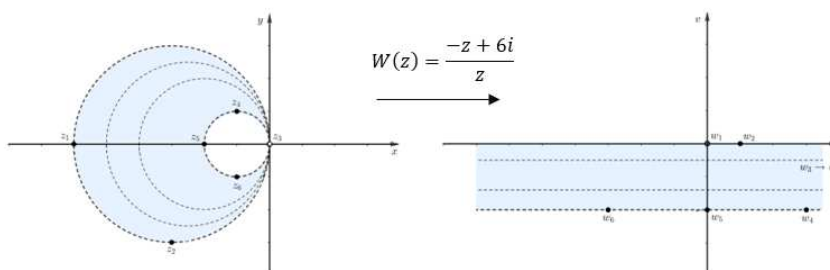
$$W(z) = \frac{iz + 6i}{z}.$$

Preostaje nam odrediti sliku kružnice  $|z + 1| = 1$  pri preslikavanju  $W$ . Odaberimo točke  $z_4 = -1 + i, z_5 = -2, z_6 = -1 - i$  koje određuju kružnicu i odredimo slike tih točaka. Dobivamo  $w_4 = 3 - 2i, w_5 = -2i, w_6 = -3 - 2i$ , iz čega zaključujemo da se kružnica  $|z + 1| = 1$  preslikava u pravac  $\text{Im } w = -2$ .

Preslikavanje  $W$  zapišimo u obliku

$$W(z) = i + 6i \cdot \frac{1}{z}.$$

Otvoreni polumjesec ispunimo kružnicama koje prolaze kroz ishodište  $z$  ravnine s radijusom  $1 < r < 3$ . Prema teoremu 2.3.2, slike tih kružnica su pravci koji ne prolaze točkom  $i$ . Ti pravci će ispuniti horizontalnu prugu  $-2 < \text{Im } w < 0$ . Zaista, dobiveno preslikavanje  $W$  otvoreni polumjesec preslikava u horizontalnu prugu.



Slika 2.14: Slika otvorenog polumjeseca pri Möbiusovom preslikavanju

## 2.4 Potenciranje i $n$ -ti korijen

**Definicija 2.4.1.** Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Preslikavanje

$$W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad W(z) = z^n$$

zovemo *potenciranje*.

Kako bi lakše opisali ovo preslikavanje, koristimo zapis preko polarnih koordinata. Neka je  $z = re^{i\varphi}$  pri čemu je  $r > 0$  i  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Tada je

$$W(z) = r^n e^{in\varphi}.$$

Sada možemo lako zaključiti da preslikavanje  $W$  točke modula  $r$  i argumenta  $\varphi$  preslikava u točke s modulom  $r^n$  i argumentom  $n\varphi$ .

Preslikavanje  $W$  očito nije bijektivno preslikavanje (osim za  $n = 1$ ). Njegova restrikcija

$$W|_D : D \rightarrow \mathbb{C},$$

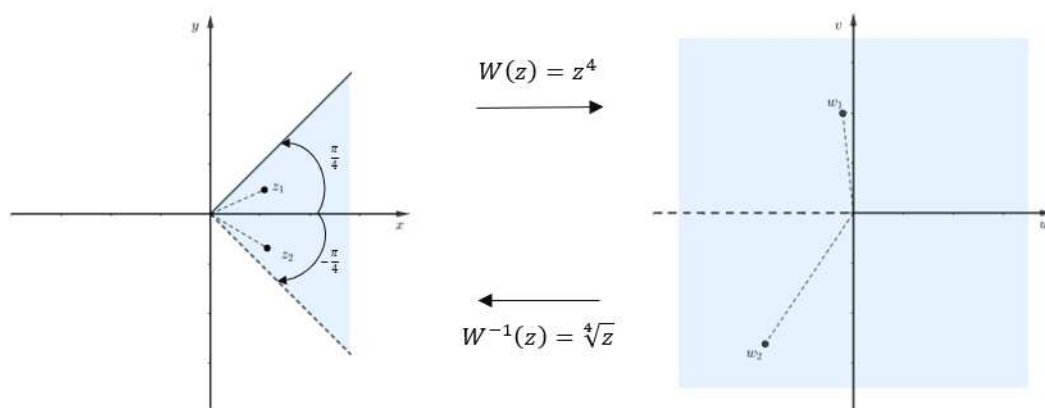
pri čemu je

$$D = \left\{ re^{i\varphi} : r > 0, \frac{-\pi}{n} < \varphi \leq \frac{\pi}{n} \right\},$$

je bijektivno preslikavanje i njen inverz je dan s

$$W^{-1}(z) = W^{-1}(re^{i\varphi}) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}.$$

Preslikavanje  $W^{-1}$  zovemo *n-ti korijen*. Interpretacija preslikavanja  $W$  i  $W^{-1}$  dana je na slici 2.15.



Slika 2.15: Potenciranje i korjenovanje

Promotrimo slike različitih podskupova domene pri preslikavanjima  $W(z) = z^2$  i  $W^{-1}(z) = \sqrt{z}$ . Pri tome koristimo sljedeće relacije. Neka je  $z = x+iy$  i  $W(z) = u+iv$ . Vrijedi

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (2.7)$$

Slično se dobije

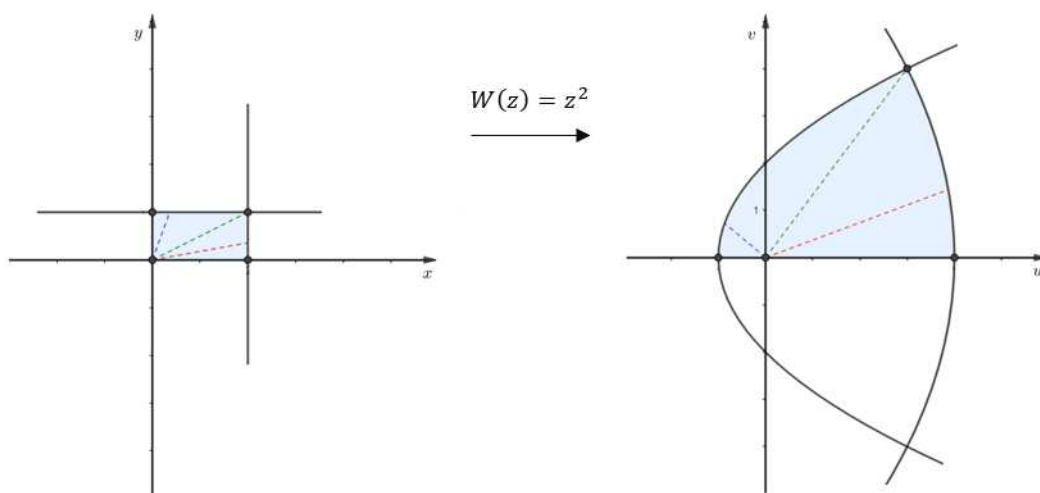
$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv. \quad (2.8)$$

**Primjer 9.** Odredimo sliku pravokutnika  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$  pri preslikavanju  $W(z) = z^2$ . Rubovi pravokutnika  $S$  su pravci  $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$ . Najprije pronađimo slike tih pravaca pri preslikavanju  $W$ . Koristeći relacije (2.7), dobivamo da je slika pravaca  $x = 0$  i  $y = 0$  pravac  $v = 0$ , a slike pravaca  $x = 2$  i  $y = 1$  parabole

$$u = 4 - \frac{v^2}{16}, \quad (2.9)$$

$$u = \frac{v^2}{4} - 1. \quad (2.10)$$

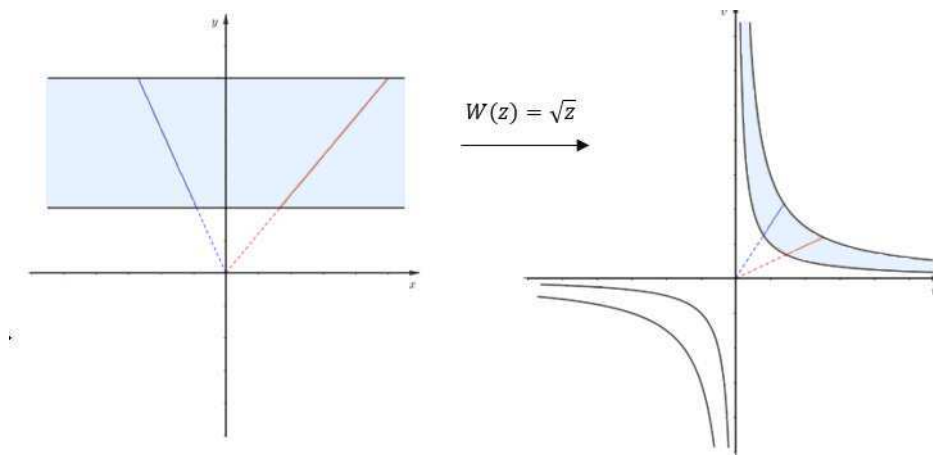
Kako se prvi kvadrant  $z$  ravnine pri preslikavanju  $W$  preslikava u prvi i drugi kvadrat  $w$  ravnine, skup  $S$  se preslikava u područje omeđeno parabolama (2.9) i (2.10) i  $u$  osi. Vrhovi pravokutnika  $0, 2, 2 + i, i$  preslikavaju se u točke  $0, 4, 3 + 4i, -1$ , redom.



Slika 2.16: Slika pravokutnika pri preslikavanju  $W(z) = z^2$

**Primjer 10.** Odredimo sliku horizontalne pruge  $S = \{z \in \mathbb{C} : 2 < \operatorname{Im} z < 6\}$  pri preslikavanju  $W(z) = z^{\frac{1}{2}}$ . Najprije odredimo slike pravaca  $y = 2$  i  $y = 6$  pri danom preslikavanju  $W$ . Koristeći relacije (2.8), dobivamo da su slike pravaca hiperbole  $uv = 1$  i  $uv = 3$ .

Kako se prvi i drugi kvadrant  $z$  ravnine pri preslikavanju  $W$  preslikavaju u prvi kvadrant  $w$  ravnine, skup  $S$  se preslikava u područje između hiperbola  $uv = 1$  i  $uv = 3$  koje pripada prvom kvadrantu.



Slika 2.17: Slika horizontalne pruge pri preslikavanju  $W(z) = \sqrt{z}$

## 2.5 Eksponencijalno i logaritamsko preslikavanje

**Definicija 2.5.1.** *Preslikavanje*

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

zovemo *eksponencijalno preslikavanje*.

Iz definicije eksponencijalnog preslikavanja, proizlaze sljedeća svojstva

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2),$$

$$\exp(z_1 - z_2) = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)},$$

pri čemu su  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Neka je  $z = x + iy$ . Tada vrijedi

$$|\exp(z)| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^x > 0.$$

Stoga zaključujemo da je

$$\exp(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dakle, 0 nije u slici eksponencijalnog preslikavanja, dok svi ostali kompleksni brojevi jesu. Prema tome, eksponencijalno preslikavanje je surjektivno na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Primijetimo da je eksponencijalno preslikavanje periodično s periodom  $2\pi i$  jer za svaki  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  vrijedi

$$\begin{aligned}\exp(z + 2\pi i) &= \exp(x + i(y + 2\pi)) \\ &= e^x(\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = \exp(z).\end{aligned}$$

Prema tome, eksponencijalno preslikavanje nije injektivno, pa ni bijektivno preslikavanje.

Promotrimo kako eksponencijalno preslikavanje preslikava različite podskupove domene.

**Primjer 11.** Neka je  $x_0 \in \mathbb{R}$ , proizvoljan i fiksna. Skup  $\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$  je vertikalni pravac koji siječe  $x$  os u  $x_0$ . Kako je

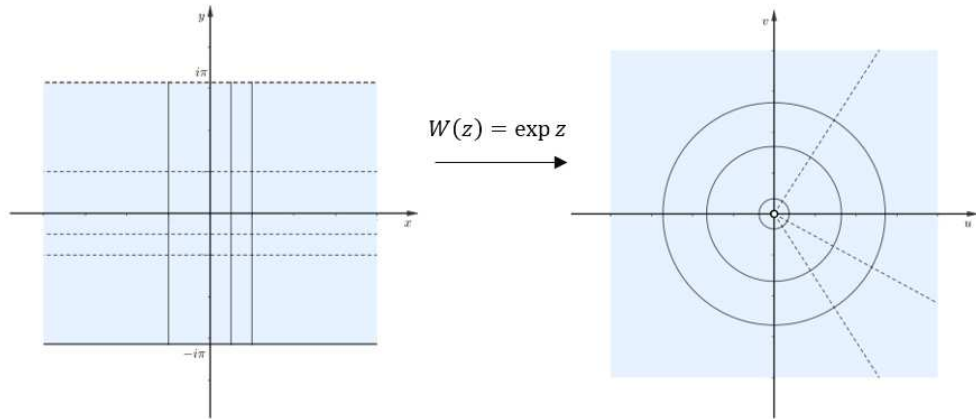
$$\exp(x_0 + iy) = e^{x_0}(\cos y + i \sin y),$$

slika vertikalnog pravca je kružnica sa središtem u ishodištu radijusa  $e^{x_0}$ . Zaključujemo da se vertikalni pravci preslikavaju u kružnice sa središtem u ishodištu. Nadalje, neka je  $y_0 \in \mathbb{R}$  proizvoljan i fiksna. Skup  $\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$  je horizontalni pravac koji siječe  $y$  os u  $iy_0$ . Kako je

$$\exp(x + iy_0) = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0),$$

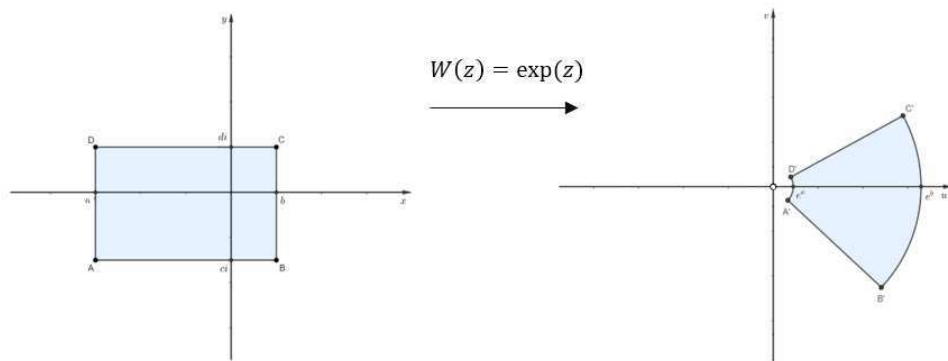
slika horizontalnog pravca je polupravac (zraka) iz ishodišta koja s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut  $y_0$ . Zaključujemo da se horizontalni pravci preslikavaju u zrake iz ishodišta (bez ishodišta).





Slika 2.18: Slika vertikalnih i horizontalnih pravaca pri eksponencijalnom preslikavanju

**Primjer 12.** Odredimo sliku pravokutnika  $P = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$ ,  $d - c < 2\pi$  pri eksponencijalnom preslikavanju. Pravokutnik je omeđen vertikalnim pravcima  $x_{AD} = a$  i  $x_{BC} = b$  te horizontalnim pravcima  $y_{AB} = ci$ ,  $y_{DC} = di$ . Slike vertikalnih pravaca  $x_{AD}$  i  $x_{BC}$  su kružnice sa središtem u ishodištu radijusa  $e^a$  i  $e^b$  redom. Slike horizontalnih pravaca  $y_{AB}$  i  $y_{DC}$  su zrake iz ishodišta koje sa pozitivnim dijelom realne osi zatvaraju kutove  $c$  i  $d$ , redom. Stoga je slika pravokutnika pri eksponencijalnom preslikavanju skup  $R = \{re^{i\varphi} : e^a \leq r \leq e^b, c \leq \varphi \leq d\}$ .



Slika 2.19: Slika pravokutnika pri eksponencijalnom preslikavanju

Polupravcima i kružnicama može se popuniti cijeli skup  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  odnosno slika eksponencijalnog preslikavanja. Stoga je restrikcija eksponencijalnog preslikavanja

$$\exp|_{\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle} : \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

pri čemu je

$$\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \langle -\pi, \pi \rangle\},$$

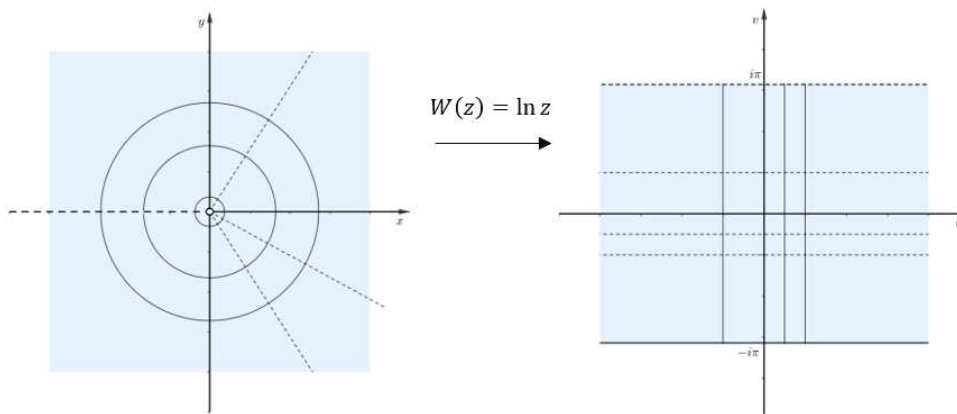
surjekcija jer su horizontalni pravci iz domene dovoljni da se točno jednom prekrije cijela kodomena. Ovo preslikavanje je i bijektivno preslikavanje, ali inverz neće biti neprekidno preslikavanje. Zato se iz domene izbacuje i rubni horizontalni pravac kroz  $i\pi$ . Sada možemo definirati inverz eksponencijalnog preslikavanja.

**Definicija 2.5.2.** *Preslikavanje*

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \ln(z) = \ln |z| + i \arg z$$

zovemo (*glavna grana*) *prirodnog logaritma*.

Domena ovog preslikavanja je kompleksna ravnina iz koje je izbačena jedna zraka kroz ishodište - negativni dio realne osi zajedno s ishodištem. Mogli smo izbaciti i neku drugu zraku iz ishodišta i analogno dobiti logaritamsko preslikavanje te redefinirati argument na neki drugi interval širine  $2\pi$ .



Slika 2.20: Glavna grana prirodnog logaritma

## 2.6 Trigonometrijska i hiperbolna preslikavanja

Koristeći eksponencijalno preslikavanje, definiramo trigonometrijska i hiperbolna preslikavanja. Iz  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , gdje je  $x \in \mathbb{R}$ , slijedi da je

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Dobivene relacije koristimo kao motivaciju za definiranje kompleksnih trigonometrijskih funkcija.

**Definicija 2.6.1.** *Preslikavanja*

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \\ \cos : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{tg} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \\ \operatorname{ctg} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{aligned}$$

zovemo *trigonometrijska preslikavanja*.

Iz definicije se direktno pokaže da za svaki  $z \in \mathbb{C}$  vrijedi

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

te da vrijede adicijske formule

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

za svaki  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Također se pokaže da vrijedi

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

za svaki  $z \in \mathbb{C}$ , te da su trigonometrijska preslikavanja periodična preslikavanja odnosno da vrijedi

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ctg}(z + \pi) = \operatorname{ctg} z,$$

za svaki  $z \in \mathbb{C}$ .

**Definicija 2.6.2.** *Preslikavanja*

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{ch} z &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \\ \operatorname{cth} z &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, \end{aligned}$$

zovemo hiperbolna preslikavanja.

Za hiperbolna preslikavanja vrijede identiteti

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z,$$

za sve  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Svi identiteti slijede iz definicije hiperbolnih preslikavanja.

Lako se pokaže da vrijedi

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad (2.11)$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad (2.12)$$

za svaki  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Ove relacije korisne su za određivanje slike različitih podskupova domene pri trigonometrijskim preslikavanjima te za dokaz neograničenosti trigonometrijskih preslikavanja. Koristeći ove relacije i identitet  $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ , dobivamo da je

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad (2.13)$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \quad (2.14)$$

Za razliku od realnih trigonometrijskih preslikavanja, kompleksna trigonometrijska preslikavanja nisu ograničena. Naime, ako fiksiramo  $z_0 = x_0 + iy$  i pustimo  $y \rightarrow \infty$  u relacijama (2.13) i (2.14) dobivamo da je

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |\sin(x_0 + iy)|^2 = \sin^2 x_0 + \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{sh}^2 y = \infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |\cos(x_0 + iy)|^2 = \cos^2 x_0 + \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{sh}^2 y = \infty.$$

U sljedećem primjeru promotrimo kako trigonometrijska preslikavanja preslikavaju vertikalne pravce i horizontalne segmente.

**Primjer 13.** Promotrimo slike vertikalnih pravaca pri preslikavanju  $W(z) = \sin z$ . Vertikalne pravce izrazimo jednadžbom  $\operatorname{Re} z = a$ . Neka su  $z = x + iy$ ,  $W(z) = u + iv$ . Tada, koristeći relaciju (2.11), imamo

$$u + iv = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Neka je  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ . Tada je slika vertikalnog pravca  $\operatorname{Re} z = a$  zadana s

$$u = \sin a \operatorname{ch} y, \quad v = \cos a \operatorname{sh} y,$$

za  $y \in \mathbb{C}$ , što možemo zapisati u obliku

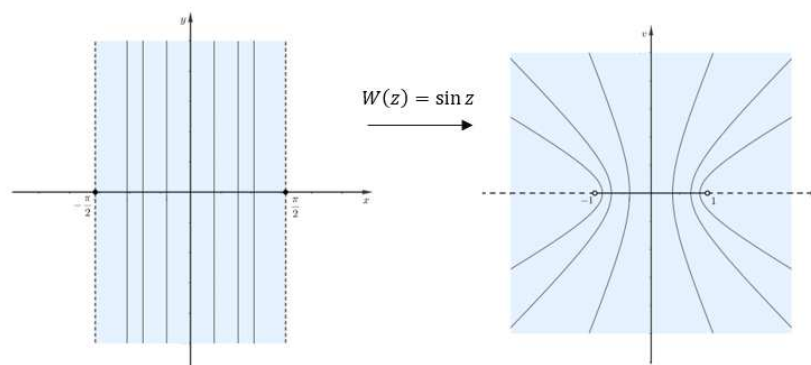
$$\operatorname{ch} y = \frac{u}{\sin a}, \quad \operatorname{sh} y = \frac{v}{\cos a}.$$

Koristeći identitet  $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ , dobivamo da je slika vertikalnog pravca zadana s

$$\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1, \tag{2.15}$$

što predstavlja jednadžbu hiperbole sa fokusima u točkama  $z_1 = -1, z_2 = 1$ . Primijetimo, ako je  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ , tada je slika vertikalnog pravca desna grana hiperbole (2.15), a ako je  $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ , slika vertikalnog pravca je lijeva strana hiperbole (2.15). Za  $a = 0$ , pravac  $\operatorname{Re} z = 0$  se preslikava u pravac  $\operatorname{Re} w = 0$ , to jest  $y$  os se preslikava u  $v$  os.

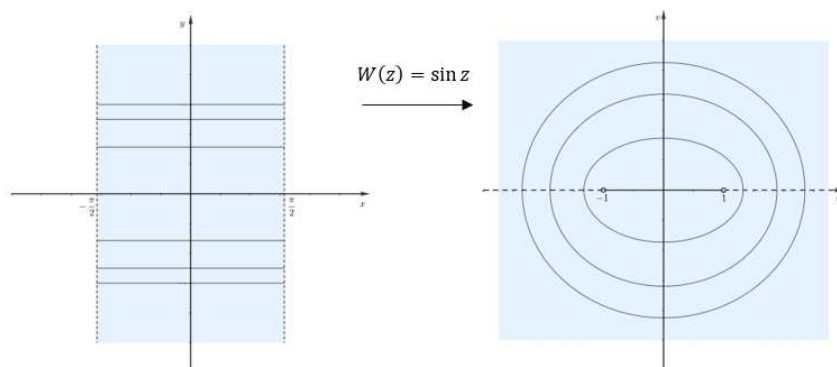
Možemo zaključiti da se vertikalna pruga  $\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}$ , pri preslikavanju  $W(z) = \sin z$ , preslikava u cijelu  $w$  ravninu bez dijela realne osi za koju je  $\operatorname{Re} w \leq -1$  i  $\operatorname{Re} w \geq 1$ .


 Slika 2.21: Slika vertikalnih pravaca pri preslikavanju  $W(z) = \sin z$ 

Odredimo sliku horizontalnih segmenata  $\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z = b \right\}$  pri preslikavanju  $W(z) = \sin z$ . Koristeći identitet  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , na sličan način dobivamo da je slika horizontalnog segmenta, pri čemu je  $b \in \mathbb{C}$ , zadana s

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1, \quad (2.16)$$

što predstavlja jednadžbu elipse sa fokusima u točkama  $z_1 = -1, z_2 = 1$ . Primijetimo, ako je  $b > 0$ , tada je slika horizontalnog segmenta dio elipse (2.16) koji pripada gornjoj poluravnini  $\operatorname{Im} w > 0$ , a ako je  $b < 0$ , slika horizontalnog segmenta je dio elipse (2.16) koji pripada donjoj poluravnini  $\operatorname{Im} w < 0$ .


 Slika 2.22: Slika horizontalnih segmenata pri preslikavanju  $W(z) = \sin z$

Iz definicije trigonometrijskih preslikavanja, pokaže se da vrijedi

$$\cos z = \sin \left( z + \frac{\pi}{2} \right),$$

za svaki  $z \in \mathbb{C}$ , pa je preslikavanje  $W(z) = \cos z$  kompozicija preslikavanja

$$T(z) = z + \frac{\pi}{2}, \quad W(z) = \sin z.$$

Stoga će slika različitih podskupova domene pri preslikavanju  $W(z) = \cos z$  biti ista kao i kod preslikavanja  $W(z) = \sin z$  uz translaciju za  $\frac{\pi}{2}$ . Također, pokaže se da je  $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$ , za svaki  $z \in \mathbb{C}$ , pa je preslikavanje  $W(z) = \operatorname{sh} z$  kompozicija dviju rotacija i sinusa

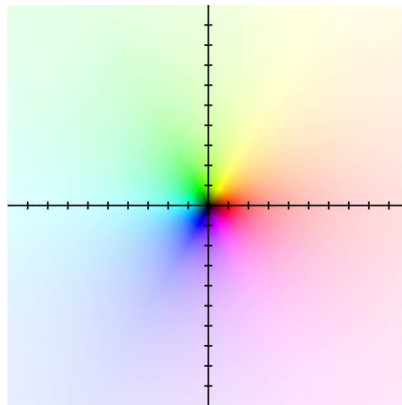
$$R_1(z) = iz, \quad W(z) = \sin z, \quad R_2(z) = -iz.$$

Vrijedi i  $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$ , za svaki  $z \in \mathbb{C}$ , pa je sada lako odrediti slike podskupova domene pri hiperbolnim preslikavanjima.

## Poglavlje 3

# Prikaz kompleksnih funkcija pomoću boja

Kao što već znamo, prikaz kompleksnih funkcija kompleksnih varijabli je kompliciran jer su grafovi tih funkcija podskupovi četverodimenzionalnog skupa kojeg je teško predočiti. U ovom poglavlju opisat ćemo još jedan način za prikaz kompleksnih funkcija korištenjem boja. Prolazeći kroz cijeli spektar boja, različitim točkama ravnine pridružujemo različitu boju. Dakle, svakom broju kompleksne ravnine pridružujemo boju koja ga jednoznačno određuje. Na slici 3.1 prikazana je kompleksna ravnina u kojoj su točkama pridružene različite boje.



Slika 3.1: Kompleksna ravnina

Opišimo na koji smo način svakoj točki kompleksne ravnine pridružili određenu boju. Svaki kompleksan broj, zapisan u obliku  $z = re^{i\varphi}$ , određen je modulom  $r > 0$  i argumentom  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Te vrijednosti koristimo za pridruživanje boja točkama.



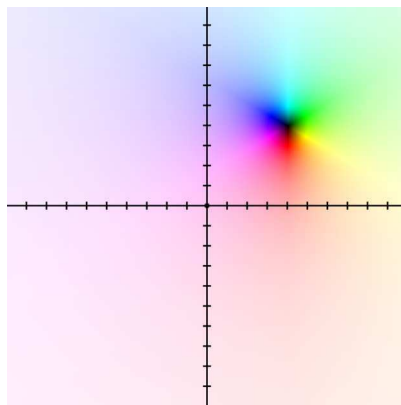
Prema HSL modelu<sup>1</sup>, svaka boja definirana je nijansom, zasićenjem i osvjetlenošću. Nijansa predstavlja stupanj na krugu boja čiji je početak crvena boja na  $0^\circ$  odnosno  $360^\circ$ , na  $120^\circ$  je zelena, a na  $240^\circ$  plava. Zasićenje boje iskazano je postotkom i uvijek želimo da boje budu potpuno zasićene. Osvjetljenost predstavlja intenzitet svjetlosti i iskazuje se postotkom. Stoga, svakoj točki kompleksne ravnine pridružujemo boju na način da je nijansa pridružene boje argument  $\varphi$ , zasićenost 100%, a intenzitet ovisi o modulu  $r$  kompleksnog broja na način da što je točka udaljenija od ishodišta, to je pridružena boja svjetlija.

Kako je ishodište zadano s  $r = 0$  i  $\varphi = 0$ , bit će obojano crnom bojom. Kada se kompleksan broj  $z$  približava nuli, boja pridružena tom broju postaje sve tamnija i približava se crnoj. Boja pridružena kompleksnom broju  $z$  kada  $|z|$  teži u beskonačnost postaje sve svjetlija i približava se bijeloj. Kako nijansa boje ovisi o argumentu  $\varphi$ , obilazeći oko ishodišta u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, prolazimo bojama spektra: crvenom, narančastom, žutom, zelenom, plavom, modrom i ljubičastom.

Promotrimo prikaz kompleksnih funkcija koje smo opisali u prethodnim poglavljima. Na slici 3.2 prikazano je linearno preslikavanje  $W(z) = -iz + 4 + 4i$ . Kako je

$$W(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + 4 + 4i,$$

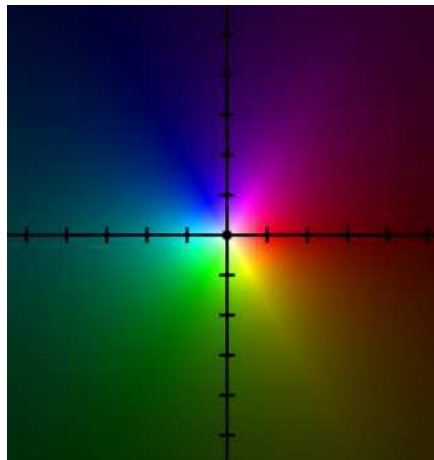
spektar boja se zarotirao za kut  $-\frac{\pi}{2}$  i translahirao za vektor  $4 + 4i$ .



Slika 3.2: Linearno preslikavanje  $W(z) = -iz + 4 + 4i$

<sup>1</sup>HSL (hue, saturation and lightness) model jedan je od modela predstavljanja boja. Uveden je kao dopuna modelu RGB (red, green, blue) koji boje definira zadavanjem intenziteta svjetlosti za crvenu, zelenu i plavu boju.

Na sljedećoj slici prikazano je recipročno preslikavanje  $W(z) = \frac{1}{z}$ . Prisjetimo se da je recipročno preslikavanje kompozicija inverzije i zrcaljenja s obzirom na realnu os. Točke unutar jedinične kružnice preslikava u točke izvan jedinične kružnice i obratno, te vrijedi  $\lim_{z \rightarrow 0} |W(z)| = \infty$ . Stoga su kompleksni brojevi  $z$  unutar jedinične kružnice, koji se približavaju nuli, sve svjetlije boje, a kompleksni brojevi  $z$  izvan jedinične kružnice, kada  $|z| \rightarrow \infty$ , sve tamnije boje, te se spektar boja zrcali s obzirom na realnu os.



Slika 3.3: Recipročno preslikavanje  $W(z) = \frac{1}{z}$

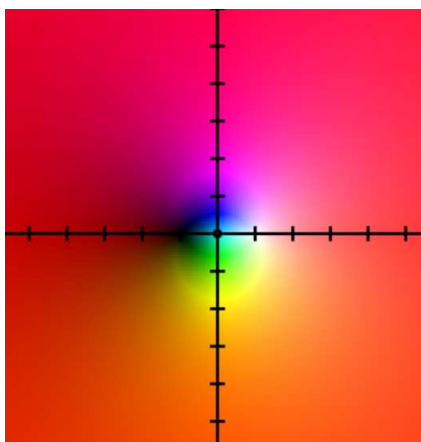
Na slici 3.4 prikazano je Möbiusovo preslikavanje  $W(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Kako je

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z+1} = 1,$$

na slici prevladava crvena boja koja je pridružena broju  $z = 1$ . Zbog istog razloga, kompleksni brojevi koji se približavaju broju  $z = 1$  postaju sve svjetliji. Kako je

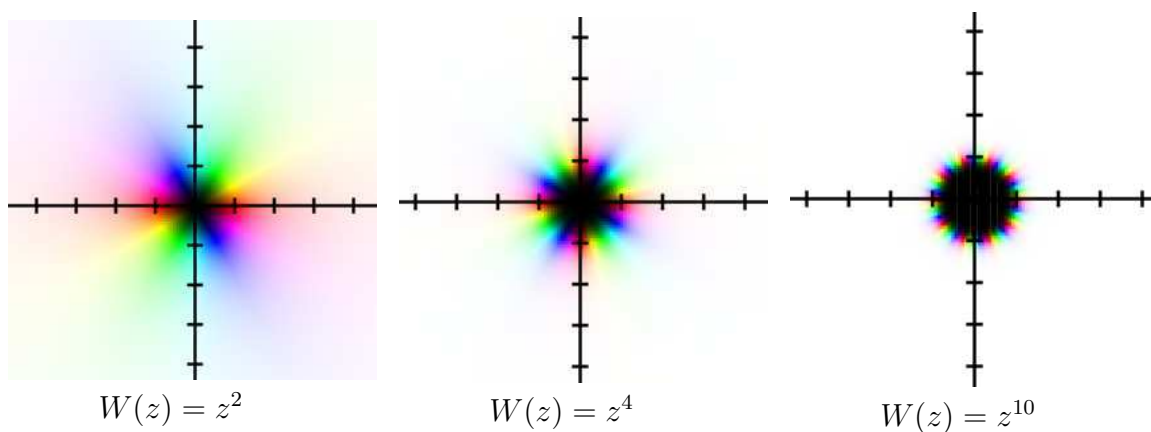
$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-1}{z+1} = -1,$$

kompleksni brojevi koji se približavaju broju  $z = -1$ , postaju sve tamniji.



Slika 3.4: Möbiusovo preslikavanje  $W(z) = \frac{z-1}{z+1}$

Promotrimo prikaz preslikavanja  $W(z) = z^2$  na sljedećoj slici. Kompleksan broj  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  kvadriranjem se preslikava u kompleksan broj  $z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ . Stoga će se spektar boja dvaput namotati oko ishodišta. Kako je  $|z|^2 < |z|$  za  $|z| < 1$ , boje unutar jediničnog kruga će, krenuvši od kružnice prema ishodištu, brže tamniti u odnosu na sliku 3.1. Slično, kako je  $|z|^2 > |z|$  za  $|z| > 1$ , boje izvan jediničnog kruga će, krenuvši od kružnice prema beskonačnosti, brže gubiti intenzitet u odnosu na sliku 3.1. Analogno vrijedi za preslikavanja  $W(z) = z^4$  i  $W(z) = z^{10}$ .



Slika 3.5: Potenciranje

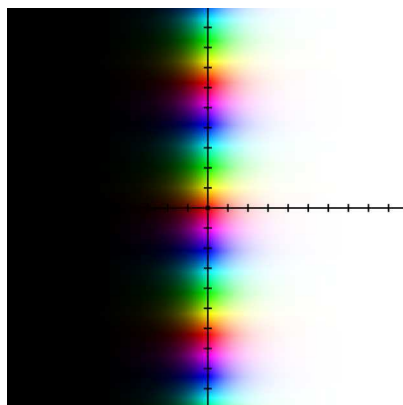
Na sljedećoj slici prikazano je eksponencijalno preslikavanje  $W(z) = \exp(z)$ . Primjećujemo da se spektar boja ponavlja jer je eksponencijalno preslikavanje periodično. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\exp(z)| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty,$$

pri čemu je  $z = x + iy$ , točke zdesna postaju sve svjetlije. Točke slijeva postaju sve tamnije zato što vrijedi

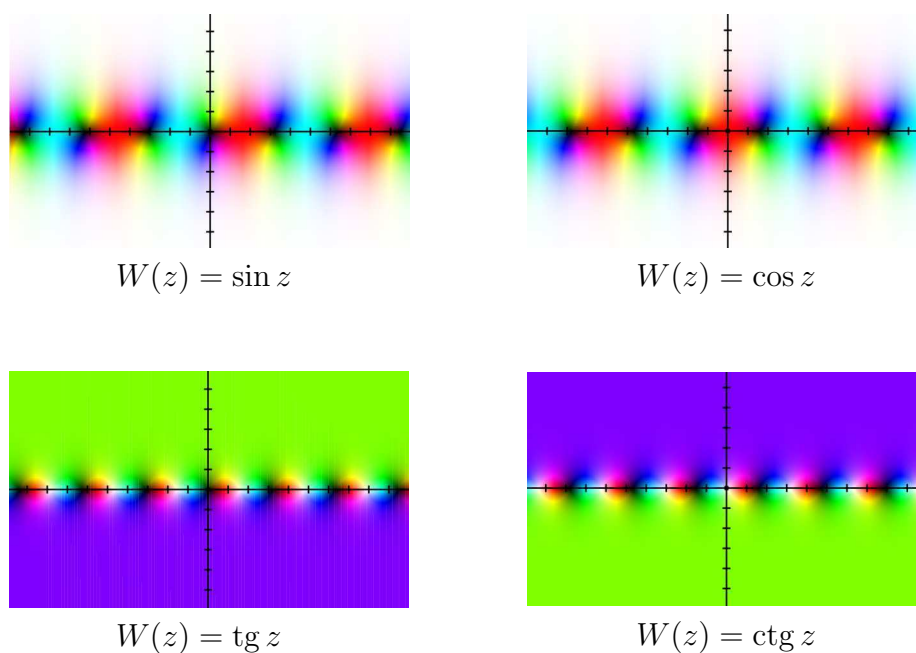
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\exp(z)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

pri čemu je  $z = x + iy$ . Intenzitet boja pri ovom preslikavanju pada eksponencijalno s obzirom na sliku 3.1.



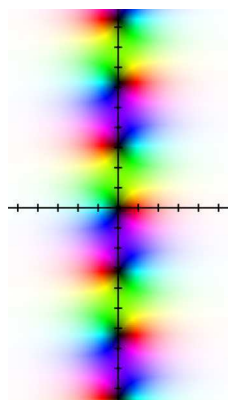
Slika 3.6: Eksponencijalno preslikavanje  $W(z) = \exp(z)$

Iz prikaza trigonometrijskih preslikavanja, spektar boja se ponavlja zbog njihove periodičnosti. Također se iz prikaza uočava kako kompleksna trigonometrijska preslikavanja nisu ograničena kao realna trigonometrijska preslikavanja. Iz prikaza lako se mogu iščitati nultočke ovih preslikavanja.

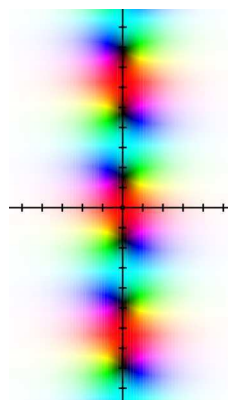


Slika 3.7: Trigonometrijska preslikavanja

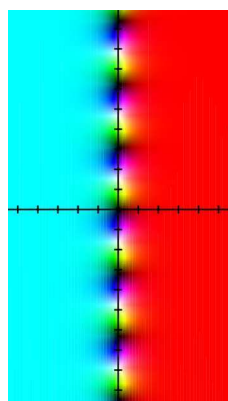
Na sljedećim slikama prikazana su hiperbolna preslikavanja. Zbog ponavljanja spektra boja, možemo uočiti da su i ova preslikavanja periodična. Lako se uočava da vrijede relacije  $\operatorname{sh} z = -\sin(iz)$ ,  $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$ , to jest da su sinus hiperbolni i kosinus hiperbolni kompozicije rotacije i sinusa odnosno kosinusa.



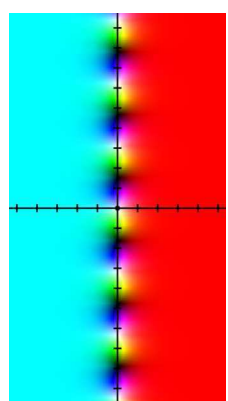
$$W(z) = \operatorname{sh} z$$



$$W(z) = \operatorname{ch} z$$



$$W(z) = \operatorname{th} z$$



$$W(z) = \operatorname{cth} z$$

Slika 3.8: Hiperbolna preslikavanja

Prikazivanje kompleksnih funkcija pomoću boja omogućava nam bolje razumijevanje kako djeluju pojedina kompleksna preslikavanja. Ovim prikazom mogu se lako uočiti svojstva kompleksnih funkcija kao što su periodičnost i ograničenost odnosno neograničenost. Može se uočiti na koji su način povezana različita kompleksna preslikavanja i po čemu se razlikuju. Stoga možemo zaključiti da digitalna tehnologija uvelike olakšava geometrijsku interpretaciju kompleksnih funkcija i predočavanje četverodimenzionalog skupa. Sve slike koje smo koristili u poglavlju preuzete su iz [4].

# Bibliografija

- [1] M.D. Alder, *An introduction to complex analysis for engineers*, 1997.
- [2] Lj. Arambašić, M. Horvat, *Malo kompleksne analize i osnovni teorem algebre*, Acta Mathematica Spalatensia, Vol.2 (2019), 57-66
- [3] J.W. Brown, R.V. Churchill, *Complex variables and applications*, McGraw-Hill, New York, 2009.
- [4] D. Jutan, *Complex Function Grapher*, dostupno na <http://jutanium.github.io/ComplexNumberGrapher> (rujan,2020.)
- [5] J.H. Mathews, R.W. Howell, *Complex analysis for mathematics and engineering*, Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, 1997.
- [6] O. Merino, *A short history of complex numbers*, dostupno na <https://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf> (rujan, 2020.)
- [7] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/kompleksna.pdf> (rujan, 2020.)

# Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo kompleksne funkcije kompleksne varijable i njihovu geometrijsku interpretaciju. Na početku smo rekli nešto o tome kako je došlo do razvoja kompleksne analize. Zatim smo definirali kompleksne funkcije kompleksne varijable i objasnili problem koji se javlja kod prikazivanja slika tih funkcija. Obično za prikaz slike kompleksnih funkcija koristimo dva dvodimenzionalna koordinatna sustava - jedan za domenu, drugi za kodomenu. Na taj način prikazali smo kako elementarne kompleksne funkcije preslikavaju različite podskupove domene. Na kraju smo opisali način prikazivanja kompleksnih funkcija pomoću boja koji nam omogućava uočavanje svojstava kompleksnih funkcija poput periodičnosti, ograničenosti, postojanje nultočaka, singulariteta, te kako se funkcija ponaša u beskonačnosti.



# Summary

In this thesis we study complex functions of complex variable and their geometric interpretation. We begin with a very short historical development of complex analysis. Then, we give definition of complex functions of complex variable and explain the problem of presenting their images. Usually we use two two-dimensional coordinate systems - one for domain, the other for codomain, for presenting images of complex functions. In this manner, we show how elementary complex functions map different subsets of domain. Finally, we describe another way of representing complex functions using colors which can be helpful since it can show properties like periodicity, boundedness, zero points of a function, singularities of a function, and also behaviour of a function at infinity.

# Životopis

Rođena sam 14. lipnja 1996. godine u Zadru. U mjestu Škabrnja kraj Zadra završila sam Osnovnu školu Vladimira Nazora. Nakon osnovne škole, 2011. godine upisala sam opći smjer Gimnazije Jurja Barakovića u Zadru. Godine 2015. upisala sam preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Završila sam preddiplomski studij 2018. godine te sam iste godine upisala diplomski studij matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu.