

# Vjerojatnost propasti

---

**Brnić, Iva**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:014126>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-11**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Vjerojatnost propasti

---

**Brnić, Iva**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:014126>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Iva Brnić

**VJEROJATNOST PROPASTI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojim roditeljima.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Osnovni pojmovi i rezultati</b>	<b>2</b>
<b>2 Poissonovi procesi</b>	<b>5</b>
2.1 Osnovni pojmovi i primjena u aktuarstvu . . . . .	5
2.2 Lundbergova nejednakost . . . . .	7
2.3 Pollaczek-Khinchinova formula . . . . .	10
2.4 Cramér-Lundbergova aproksimacija . . . . .	12
2.5 Eksponencijalno distribuirane isplate . . . . .	14
<b>3 Miješani Poissonovi procesi</b>	<b>19</b>
3.1 Pojmovi i definicije . . . . .	19
3.2 Poopćeni rezultati . . . . .	20
<b>4 Vjerojatnost propasti</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>41</b>

# Uvod

U ovome diplomskom radu bavit ćemo se analizom vjerojatnosti propasti osiguravajućeg društva. Jedan od glavnih problema u aktuarstvu izračun je navedene vjerojatnosti te ona služi kao mjera stabilnosti osiguravajućeg društva. Kapital osiguravajućeg društva u trenutku  $t$  opisan je Cramér-Lundbergovim modelom koji pretpostavlja da osiguravajuće društvo raspolaže inicijalnim kapitalom  $u$ , da je prihod linearna funkcija vremena, čiji je koeficijent konstantna stopa premije  $c$ , te da se rashodi sastoje od isplata osiguranicima. Te su isplate nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable, a Poissonov proces  $N_t$  predstavlja broj isplata do trenutka  $t$ .

U prvome poglavlju uvodimo neke osnovne pojmove i rezultate potrebne u preostalim poglavljima.

U drugome ćemo poglavlju dokazati neke značajne rezultate vezane uz vjerojatnost propasti. Izvest ćemo Pollaczek-Khinchinovu formulu koja daje izraz za vjerojatnost propasti u općenitom slučaju, no taj je rezultat više teorijske nego praktične prirode. Naime, vjerojatnost propasti samo je u rijetkim slučajevima moguće egzaktno izračunati. Jedan od tih slučajeva je kada isplate dolaze iz eksponencijalne distribucije. U tom ćemo slučaju i doći do jednostavnog izraza za vjerojatnost propasti. U slučajevima kada vjerojatnost propasti nije moguće egzaktno izračunati moguće je promotriti njeno asimptotsko ponašanje dano Cramér-Lundbergovom aproksimacijom ili pak pronaći njenu gornju ogradu, poznatu i pod nazivom Lundbergova ograda. Te ćemo rezultate također izvesti, prema [2].

U trećem poglavlju promatramo nešto složeniji slučaj. Poissonov proces  $N_t$ , koji opisuje broj isplata, zamijenit ćemo miješanim Poissonovim procesom. Intenzitet Poissonovog procesa tada više nije konstantan, nego je slučajan. Navodimo i neka moguća poopćenja rezultata iz drugog poglavlja, koja su predložena u [6], te primjere koji opisuju ponašanje vjerojatnosti propasti kada isplate dolaze iz gama distribucije ili im razdioba odgovara kombinaciji eksponencijalnih distribucija.

Četvrto poglavlje, koje je ujedno i posljednje, donosi nekoliko primjera koji ilustriraju jedan način procjene vjerojatnosti propasti, analiziraju preciznost dobivenih procjena, promatraju promjene iznosa vjerojatnosti propasti ovisno o promjenama pojedinih parametara te uspoređuju vjerojatnost propasti, odnosno njene procjene, za različite distribucije isplata i intenziteta miješanog Poissonovog procesa.

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi i rezultati

U ovome poglavlju navest ćemo definicije nekih pojmova koje ćemo koristiti u preostalim poglavljima te rezultate koji će nam biti potrebni u nastavku.

**Definicija 1.0.1.** Za diskretnu slučajnu varijablu  $N$  kažemo da ima **Poissonovu distribuciju**, u oznaci  $P(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , ako vrijedi  $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Definicija 1.0.2.** Za diskretnu slučajnu varijablu  $N$  kažemo da ima **složenu Poissonovu distribuciju** ako  $N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\tilde{N}}$ , ( $N = 0$  za  $\tilde{N} = 0$ ), pri čemu su  $\xi_1, \xi_2, \dots$  nezavisne jednako distribuirane diskretne slučajne varijable te  $\tilde{N} \sim P(\tilde{\lambda})$  nezavisna od njih.

**Definicija 1.0.3.** Neka je  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Z}$  funkcija koja zadovoljava sljedeće uvjete:

- i.  $v(0) = 0$ ;
- ii.  $v(t) \in \mathbb{Z}$ , za sve  $t < \infty$ ;
- iii.  $v(\cdot)$  je neopadajuća i neprekidna zdesna.

Tada  $v$  zovemo **brojećom funkcijom**.

Skup svih brojećih funkcija označavamo s  $\mathcal{N}$ .

Neka je  $\mathcal{B}(\mathcal{N})$   $\sigma$ -algebra generirana projekcijama, tj.

$$\mathcal{B}(\mathcal{N}) = \sigma(v(t) \leq y : v \in \mathcal{N}, t \geq 0, y < \infty).$$

**Definicija 1.0.4.** **Točkovni proces** (engl. point process)  $N$  izmjerivo je preslikavanje s vjerojatnosnog prostora  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  u  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$ .

Distribucija od  $N$  vjerojatnosna je mjera  $\Pi$  na  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$ .



**Definicija 1.0.5.** Neka je  $f$  realna funkcija na  $[0, \infty)$ . **Laplaceova transformacija** funkcije  $f$  funkcija je  $\mathcal{L}(f)$  definirana s

$$\mathcal{L}(f)(v) = \int_0^{\infty} e^{-vx} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-vx} f(x) dx,$$

za  $v$  za koje je nepravilni integral dobro definiran.

Ukoliko je  $\mu$  konačna mjera, njena se Laplaceova transformacija definira kao Lebesgueov integral  $\mathcal{L}(\mu)(v) := \int_{[0, \infty)} e^{-vx} d\mu(x)$ .

Specijalno, kada je  $\mu$  vjerojatnosna mjera te  $f$  pripadna vjerojatnosna funkcija gustoće,

$$\mathcal{L}(f)(v) = \int_{0-}^{\infty} e^{-vx} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\epsilon}^{\infty} e^{-vx} f(x) dx.$$

Konvolucija funkcija  $f, g : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , u oznaci  $f * g$ , definirana je s

$$f * g(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Heavisideova step funkcija  $H$  definirana je s

$$H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Derivacija Heavisideove step funkcije je Diracova delta funkcija,  $\delta_0$ .

Laplaceova transformacija Heavisideove step funkcije je  $\mathcal{L}(H)(v) = \frac{1}{v}$ .

Kasnije će nam biti potrebna i Laplaceova transformacija konstantne funkcije  $f \equiv 1$  koja je jednaka  $\mathcal{L}(1)(v) = \frac{1}{v}$ .

Navedimo i neka korisna svojstva Laplaceove transformacije:

- i.  $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha \mathcal{L}(f)(v) + \beta \mathcal{L}(g)(v)$ ;
- ii.  $\mathcal{L}(f * g)(v) = \mathcal{L}(f)(v) \mathcal{L}(g)(v)$ .

Primijetimo,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) H(t - \tau) d\tau = f * H(t)$$

pa primjenom Laplaceove transformacije dobivamo

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right)(v) = \mathcal{L}(f)(v) \mathcal{L}(H)(v) = \frac{1}{v} \mathcal{L}(f)(v).$$

Više detalja o Laplaceovoj transformaciji i njenim svojstvima nalazi se u [4].

**Definicija 1.0.6.** *Pozitivnu izmjerivu funkciju  $L$  za koju, za svaki  $x > 0$ , vrijedi*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{L(xl)}{L(l)} = 1$$

*nazivamo sporo promjenjivom funkcijom.*

**Propozicija 1.0.7.** *Neka je  $c$  monotona funkcija te  $L$  sporo promjenjiva funkcija. Tada je, za  $0 < \rho < \infty$ ,*

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-vl} c(l) dl = \frac{1}{v^\rho} L\left(\frac{1}{v}\right)$$

*ako i samo ako*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} c(l) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} l^{\rho-1} L(l).$$

**Jednadžba obnavljanja** (engl. renewal equation) dana je izrazom

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)f(y)dy, \quad x > 0.$$

**Teorem 1.0.8.** *Ako je  $z$  Riemann integrabilna funkcija, onda za rješenje jednadžbe obnavljanja  $Z$  vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} z(y)dy,$$

*pri čemu je  $\mu = \int_0^{\infty} yf(y)dy$ .*

Detalje o jednadžbi obnavljanja te dokaz prethodnog teorema moguće je pronaći u [5].

**Teorem 1.0.9.** *Neka je  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rastući niz neprekidnih funkcija na segmentu  $[a, b]$ ,  $f$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  te neka  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira k funkciji  $f$  po točkama. Tada  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira uniformno k  $f$  na  $[a, b]$ .*

Dokaz teorema moguće je pronaći u [1].

## Poglavlje 2

# Poissonovi procesi

### 2.1 Osnovni pojmovi i primjena u aktuarstvu

U ovome ćemo poglavlju razmatrati primjenu Poissonovih procesa u okviru teorije rizika. Glavni je cilj analizirati vjerojatnost propasti osiguravajućeg društva, tj. vjerojatnost da će ono postati insolventno.

**Definicija 2.1.1.** *Točkovni proces  $N$  zovemo **Poissonovim procesom s intenzitetom  $\lambda$**  ako*

- i.  $N_t$  ima nezavisne priraste;*
- ii.  $N_t - N_s$  je  $P(\lambda(t-s))$ -distribuiran.*

*Njegovu funkciju distribucije označavamo s  $\Pi_\lambda$ .*

Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $0 = k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n$  i

$$B = \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, \dots, \nu(t_n) = k_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{N}). \quad (2.1)$$

Tada je

$$\Pi_\lambda(B) = \prod_{j=1}^n \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}.$$

Svaka vjerojatnosna mjera  $\Pi$  na  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$  u potpunosti je određena vrijednostima koje poprima u skupovima  $B$  koji su oblika (2.1). Stoga je vrijednost  $\Pi_\lambda(B)$  određena za sve  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$ , to jest  $\Pi_\lambda$  je dobro definirana.

Neka je  $N$  točkovni proces te neka  $T_k$  označava poziciju  $k$ -te točke.

Kasnije će nam  $N_t$  predstavljati broj isplata do trenutka  $t$ , dok ćemo  $T_k$  interpretirati kao

vrijeme  $k$ -te isplate. Kada je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ , tj.  $N_t \sim P(\lambda t)$ , onda vrijedi  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T_1 > t) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.2)$$

Uobičajeno je da se model rashoda osiguravajućeg društva bazira na

- nizu nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli  $(Z_k)_{k=1}^{\infty}$  s funkcijom distribucije  $F$ , očekivanjem  $\mu$  i varijancom  $\sigma^2$ , pri čemu  $Z_k$  predstavlja iznos  $k$ -te isplate
- te na točkovnom procesu  $N = (N_t : t \geq 0)$ ,  $N_0 = 0$ , nezavisnom od niza  $(Z_k)_{k=1}^{\infty}$ , pri čemu  $N_t$  označava broj isplata u periodu  $\langle 0, t \rangle$ .

**Definicija 2.1.2.** Neka je  $N$  točkovni proces i  $(Z_k)_{k=1}^{\infty}$  niz nenegativnih nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada proces  $Y = (Y_t : t \geq 0)$  definiran s

$$Y_t := \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \text{ uz } \sum_{k=1}^0 Z_k = 0,$$

zovemo **procesom isplata** (engl. *claim process*).

Pretpostavljamo da je  $Y$  nenegativan proces, tj. da vrijedi  $F(0-) = 0$ .

$Y_t$  predstavlja ukupan iznos isplata od strane osiguravajućeg društva do trenutka  $t$ .

**Definicija 2.1.3.** **Proces rizika** (engl. *risk process*)  $X = (X_t : t \geq 0)$  definiran je s

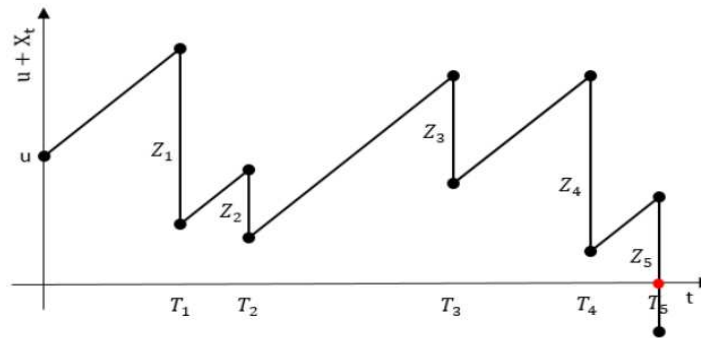
$$X_t := ct - Y_t, \quad c > 0.$$

$X_t$  predstavlja očekivani profit osiguravajućeg društva do trenutka  $t$  te, ako je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ , vrijedi

$$\mathbb{E}[X_t] = ct - \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Z_k] = (c - \lambda\mu)t.$$

$c$  je stopa premije osiguravajućeg društva te je smisleno pretpostaviti da vrijedi  $c > \lambda\mu$ , tj. da društvo određuje stopu premije tako da su očekivani prihodi veći od očekivanih rashoda, odnosno tako da profit osiguravajućeg društva bude pozitivan.

**Definicija 2.1.4.** **Vjerojatnost propasti** osiguravajućeg društva s procesom rizika  $X$  i početnim kapitalom  $u$  definirana je s  $\psi(u) := \mathbb{P}(u + X_t < 0 \text{ za neki } t > 0)$ .

Slika 2.1: proces  $u + X_t$ 

Neke korisne rezultate koji slijede razmatrat ćemo za slučaj kada je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ , tj. kada za određeni  $t$   $N_t$  ima Poissonovu distribuciju (s parametrom  $\lambda$ ), a  $Y_t$  složenu Poissonovu distribuciju.

## 2.2 Lundbergova nejednakost

U ovome ćemo dijelu pokazati da je vjerojatnost propasti odozgo ograničena tzv. Lundbergovom ogradom.

Neka je

$$h(r) := \int_{0-}^{\infty} (e^{rz} - 1) dF(z) = M_Z(r) - 1,$$

pri čemu je  $M_Z(r) = \mathbb{E}[e^{rZ}]$  funkcija izvodnica momenata slučajnih varijabli  $(Z_k)_{k=1}^{\infty}$ .

**Definicija 2.2.1.** Kažemo da distribucija  $F$  ima **laki rep** ako postoji  $r_{\infty} \in \langle 0, \infty \rangle$  takav da

$$\lim_{r \rightarrow r_{\infty}^-} h(r) = +\infty.$$

**Definicija 2.2.2.** Neka je  $c$  stopa premije,  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$  te  $M_Z(r)$  funkcija izvodnica momenata isplata. Definiramo **funkciju prilagodbe**

$$A(r) := \lambda M_Z(r) - \lambda - cr.$$

Jednadžba prilagodbe je  $A(r) = 0$ .

Primijetimo,

- i.  $A(0) = \lambda M_Z(0) - \lambda - c \cdot 0 = 0$ , tj. 0 je uvijek korijen jednadžbe prilagodbe.
- ii.  $A'(r) = \lambda M_Z'(r) - c$ , specijalno  $A'(0) = \lambda \mathbb{E}[Z] - c < 0$ .
- iii.  $A''(r) = \lambda M_Z''(r) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{rx} f_Z(x) dx > 0$  pa je  $A$  konveksna funkcija.
- iv.  $\lim_{r \rightarrow r_\infty^-} (\lambda M_Z(r) - \lambda - cr) = +\infty$

Stoga je  $A$  funkcija koja u 0 poprima vrijednost 0 te je u okolini 0 padajuća, a zatim raste prema  $+\infty$  te je konveksna na  $[0, r_\infty)$ . Slijedi da  $A$  ima na  $\langle 0, +\infty \rangle$  jedinstven korijen  $R$  koji nazivamo **koeficijentom prilagodbe**.

Također, jer  $A(r) = \lambda h(r) - cr$ ,  $A(r) = 0 \Leftrightarrow h(r) = \frac{cr}{\lambda}$  pa postoji jedinstven  $R \in \langle 0, +\infty \rangle$  takav da  $h(R) = \frac{cR}{\lambda}$ .

**Teorem 2.2.3.** *Neka je  $R$  koeficijent prilagodbe Poissonovog procesa s početnim kapitalom  $u$ . Tada je gornja ograda za vjerojatnost propasti dana s  $e^{-Ru}$ , odnosno vrijedi  $\psi(u) \leq e^{-Ru}$ .*

*Dokaz.* Označimo s  $\psi_n(u)$  vjerojatnost propasti prije  $n$ -te isplate (uključujući i  $n$ -tu),  $n \in \mathbb{N}$ . Vrijedi:  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ .

Koristeći princip matematičke indukcije pokazujemo da je  $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ , za sve  $u > 0$  i sve  $n \in \mathbb{N}$ .

S  $T_1$  označavamo vrijeme prve isplate te iz (2.2) slijedi  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ .

Baza:  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \psi_1(u) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_1 > u + ct | T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &\quad [ x > u + ct \Rightarrow e^{-R(u+ct-x)} > 1 ] \\
 &\leq \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-R(ct-x)} f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= e^{-Ru} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty e^{Rx} f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-(\lambda+cR)t} dt \\
 &\quad [ \lambda + cR = \lambda M_Z(R) ] \\
 &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda M_Z(R) e^{-\lambda M_Z(R)t} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-Ru} \left( -e^{-\lambda M_Z(R)t} \right) \Big|_0^\infty \\
&= e^{-Ru}
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki  $n \in \mathbb{N}$  te pokažimo da je  $\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$ , za svaki  $u > 0$ .  $\psi_{n+1}(u)$  je vjerojatnost propasti do  $(n+1)$ -ve isplate te ju možemo zapisati kao sumu vjerojatnosti propasti do prve isplate i vjerojatnosti propasti do  $(n+1)$ -ve isplate, ali nakon prve. Stoga,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_1 > u + ct \mid T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&\quad + \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_1 < u + ct, \text{ propast do } (n+1)\text{-ve isplate} \mid T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&\quad [ Z_1 < u + ct ] \\
&= \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&\quad + \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(u + ct - x - \sum_{k=2}^{n+1} Z_k < 0 \mid Z_1 = x) f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&\quad [ (Z_k)_k^\infty \text{ međusobno nezavisne} ] \\
&= \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x) f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&\quad [ \text{prema pretpostavci indukcije, } \psi_n(u + ct - x) \leq e^{-R(u+ct-x)} ] \\
&\leq \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_Z(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \left[ \int_0^\infty e^{Rx} f_Z(x) dx \right] dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda M_Z(R) e^{-\lambda M_Z(R)t} dt \\
&= e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Kako je niz  $(\psi_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$  rastući za svaki  $u > 0$  i ograničen odozgo s  $e^{-Ru}$ , tvrdnja teorema slijedi.  $\square$

Nejednakost iz teorema 2.2.3 zovemo **Lundbergovom nejednakosti**, a pripadnu gornju ogradu  $e^{-Ru}$  **Lundbergovom ogradom**.

### 2.3 Pollaczek-Khinchinova formula

Sada ćemo izvesti općeniti izraz za vjerojatnost propasti, tj. za slučaj kada distribucija od  $Z_k$  nije poznata.

Koristimo oznaku  $\bar{\psi}(u) := 1 - \psi(u)$  za vjerojatnost solventnosti, odnosno vjerojatnost da neće doći do propasti, te  $T_1$  za vrijeme prve isplate. Ponovno koristimo  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ . Pretpostavljamo da prva isplata  $Z_1$  ne izaziva propast. Tada

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k > 0 \mid T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_{0-}^{u+ct} \bar{\psi}(u + ct - x) dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\quad [w = u + ct] \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty \left[ \int_{0-}^w \bar{\psi}(w - x) dF(x) \right] e^{-\lambda w/c} dw. \end{aligned}$$

Deriviramo li prethodni izraz, dobivamo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(u) &= \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{\lambda u/c} \int_u^\infty \left[ \int_{0-}^w \bar{\psi}(w - x) dF(x) \right] e^{-\lambda w/c} dw \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \left(-e^{-\lambda u/c}\right) \int_{0-}^u \bar{\psi}(u - x) dF(x) \\ &= \frac{\lambda}{c} \bar{\psi}(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{0-}^u \bar{\psi}(u - x) dF(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Primjenom Laplaceove transformacije slijedi

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}')(v) = \frac{\lambda}{c} \mathcal{L}(\bar{\psi})(v) - \frac{\lambda}{c} \mathcal{L}(\bar{\psi})(v) \mathcal{L}(f)(v),$$

pri čemu je  $f$  funkcija gustoće slučajnih varijabli  $(Z_k)_{k=1}^\infty$ . Pretpostavljamo da je  $v > 0$ .

Označimo s  $\hat{f}(v) = \mathcal{L}(f)(v) = \int_{0-}^\infty e^{-vx} dF(x)$ , s  $\hat{\Phi}(v) = \int_{0-}^\infty e^{-vx} d\bar{\psi}(x)$  te s  $\bar{\Phi}(v) = \mathcal{L}(\bar{\psi})(v) = \int_0^\infty e^{-vx} \bar{\psi}(x) dx$ .

Tada je

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}')(v) = \frac{\lambda}{c} \bar{\Phi}(v)(1 - \hat{f}(v)).$$



Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(v) &= \frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-vx} \bar{\psi}'(x) dx + \frac{1}{v} \bar{\psi}(0) \\ &= \frac{1}{v} \mathcal{L}(\bar{\psi}')(v) + \frac{1}{v} \bar{\psi}(0),\end{aligned}$$

pa slijedi

$$v \left( \bar{\Phi}(v) - \frac{1}{v} \bar{\psi}(0) \right) = \frac{\lambda}{c} \bar{\Phi}(v) (1 - \hat{f}(v)),$$

odnosno

$$\bar{\Phi}(v) = \frac{\bar{\psi}(0)}{1 - \frac{\lambda}{c} \frac{1 - \hat{f}(v)}{v}} \cdot \frac{1}{v}. \quad (2.4)$$

Označimo s  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - \int_0^x f(z) dz$  pa primjenom Laplaceove transformacije slijedi  $\bar{f}(v) = \mathcal{L}(\bar{F})(v) = \frac{1}{v} (1 - \hat{f}(v))$ .

Sada (2.4) možemo zapisati u obliku

$$\bar{\Phi}(v) = \frac{\bar{\psi}(0)}{1 - \frac{\lambda}{c} \bar{f}(v)} \cdot \frac{1}{v}. \quad (2.5)$$

Iz Lundbergove nejednakosti slijedi  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ , a potom iz propozicije 1.0.7, za  $L(l) = 1, \rho = 1$ , jer je  $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u) = 1$ , slijedi  $\lim_{v \rightarrow 0} v \bar{\Phi}(v) = 1$ .

Također,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \bar{f}(v) = \lim_{v \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-vx} \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \mathbb{E}[Z] = \mu,$$

pri čemu druga jednakost vrijedi zbog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Stoga, puštanjem  $v \rightarrow 0$  u (2.5), dobivamo

$$1 = \frac{\bar{\psi}(0)}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}, \quad \text{tj.} \quad \bar{\psi}(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}. \quad (2.6)$$

Nadalje, jer je

$$\hat{\Phi}(v) = \int_0^{\infty} e^{-vx} \bar{\psi}'(x) dx + \bar{\psi}(0) = v \bar{\Phi}(v)$$

iz (2.5) i (2.6) slijedi

$$\hat{\Phi}(v) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{1 - \frac{\lambda}{c} \bar{f}(v)}. \quad (2.7)$$

Definiramo

$$F_I(z) := \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \quad \text{i} \quad \hat{f}_I(v) := \int_0^{\infty} e^{-vx} dF_I(x) = \frac{\bar{f}(v)}{\mu}.$$

Jednadžba (2.7) povlači

$$\hat{\Phi}(v) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} \hat{f}_I(v)} = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \hat{f}_I^n(v).$$

Konačno, primjenom inverzne Laplaceove transformacije, dobivamo

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \bar{F}_I^{n*}(u), \quad (2.8)$$

pri čemu je  $\bar{F}_I^{n*}$   $n$ -ta konvolucija funkcije  $\bar{F}_I$ ,  $\bar{F}_I = 1 - F_I$ . Za  $n = 0$ ,  $\bar{F}_I^{0*} = \delta_0$ , gdje  $\delta_0$  označava Diracovu delta funkciju.

Jednadžba (2.8) poznata je i kao **Pollaczek-Khinchinova formula**.

## 2.4 Cramér-Lundbergova aproksimacija

Cramér i Lundberg također su promatrali i asimptotsko ponašanje vjerojatnosti propasti.

Integracija izraza (2.3) od 0 do  $t$ , uz  $dF(z) = -d\bar{F}(z)$ , daje

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{\psi}(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_u^0 \bar{\psi}(u-z) d\bar{F}(z) du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{\psi}(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[ \bar{\psi}(0) \bar{F}(u) - \bar{\psi}(u) + \int_0^u \bar{\psi}'(u) \bar{F}(z) dz \right] du \\ &= \frac{\lambda}{c} \bar{\psi}(0) \int_0^t \bar{F}(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{F}(z) \int_z^t \bar{\psi}'(u) du dz \\ &= \frac{\lambda}{c} \bar{\psi}(0) \int_0^t \bar{F}(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{F}(z) (\bar{\psi}(t-z) - \bar{\psi}(0)) dz. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(u-z) \bar{F}(z) dz.$$

Uvrštavanjem (2.6) u prethodni izraz slijedi

$$1 - \psi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1 - \psi(u-z)) \bar{F}(z) dz$$

pa, zbog  $\mu = \mathbb{E}[Z_k] = \int_0^\infty \bar{F}(z)dz$ ,

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(z)dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-z)\bar{F}(z)dz. \quad (2.9)$$

Neka je  $R > 0$  koeficijent prilagodbe, tj. neka je rješenje jednadžbe  $h(r) = \frac{cr}{\lambda}$ . Tada je

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{h(R)}{R} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \int_0^\infty e^{Rz} dF(z) = \int_0^\infty e^{Rz} (1 - F(z)) dz,$$

stoga je  $\frac{\lambda}{c} e^{Rz} \bar{F}(z)$  vjerojatnosna funkcija gustoće.

Množenjem izraza (2.9) s  $e^{Ru}$  dobivamo jednadžbu obnavljanja:

$$e^{Ru} \psi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty \bar{F}(z)dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^u e^{R(u-z)} \psi(u-z) e^{Rz} \bar{F}(z) dz$$

pa, prema teoremu 1.0.8, za

$$z(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty \bar{F}(z)dz, \quad Z(u) = e^{Ru} \psi(u) \quad \text{i} \quad f(z) = \frac{\lambda}{c} e^{Rz} \bar{F}(z),$$

slijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{C_1}{C_2}, \quad (2.10)$$

gdje su

$$C_1 = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{Ru} \int_u^\infty \bar{F}(z) dz du$$

$$C_2 = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty z e^{Rz} \bar{F}(z) dz.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}(z) \int_0^z e^{Ru} du dz \\ &= -\frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty \bar{F}(z) dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{1}{R} e^{Rz} \bar{F}(z) dz \\ &= -\frac{\lambda\mu}{cR} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \frac{\rho}{1+\rho}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}$  označava sigurnosnu premiju (engl. safety loading).

Kako je  $h'(R) = \int_0^\infty ze^{Rz} dF(z)$  i  $\int ze^{Rz} dz = \left(\frac{z}{R} - \frac{1}{R^2}\right) e^{Rz}$ ,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty ze^{Rz} (1 - F(z)) dz = \frac{\lambda}{c} \left( \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{R^2} \right) e^{Rz} dF(z) \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{h'(R)}{R} - \frac{h(R) + 1}{R^2} \right) = \frac{\lambda}{c} \left( \frac{h'(R)}{R} - \frac{c}{\lambda R} \right) \\ &= \frac{\lambda \mu}{c} \frac{1}{R} \frac{1}{\mu} \left( h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right) = \frac{1}{1 + \rho} \frac{1}{R} \frac{1}{\mu} \left( h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Uvrstimo li (2.11) i (2.12) u (2.10), dobivamo **Cramér-Lundbergovu aproksimaciju**

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{\rho \mu}{h'(R) - c/\lambda}.$$

## 2.5 Eksponencijalno distribuirane isplate

U slučaju kada su isplate  $(Z_k)_{k=1}^{+\infty}$  eksponencijalno distribuirane vjerojatnost propasti  $\psi(u)$  možemo eksplicitno izraziti.

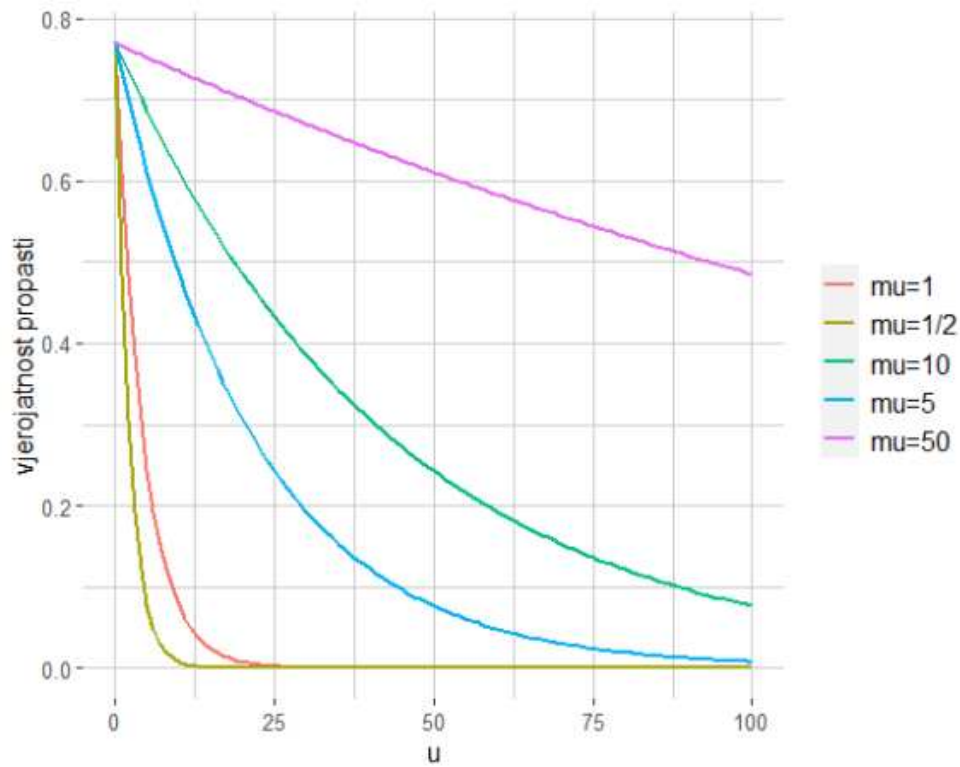
Pokazat ćemo da tada vrijedi

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-\rho u / \mu(1 + \rho)}, \quad (2.13)$$

pri čemu je  $\mu$  matematičko očekivanje eksponencijalno distribuiranih isplata.

Primijetimo da iz izraza (2.13) slijedi:

- i. Vjerojatnost propasti ne ovisi o parametru  $\lambda$ , tj. o stopi po kojoj dolaze zahtjevi za isplate.
- ii. Kada je  $\rho = 0$ , tada je  $\psi(u) = 1$ , odnosno propast osiguranja je siguran događaj.
- iii.  $\psi(u)$  je rastuća funkcija od  $\mu$ . Kako očekivani iznos isplata  $\mu$  raste, raste i vjerojatnost propasti (uz ostale parametre fiksne).

Slika 2.2: ovisnost  $\psi(u)$  o  $\mu$ 

Slika 2.2 prikazuje kako se vjerojatnost propasti mijenja s promjenom matematičkog očekivanja eksponencijalno distribuiranih isplata  $\mu$  kada je sigurnosna premija jednaka  $\rho = 0.3$  te kada je intenzitet Poissonovog procesa  $N \lambda = 1$ .

iv. U ovom je slučaju koeficijent prilagodbe  $R = \rho/\mu(1 + \rho)$  pa

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-Ru},$$

tj. Lundbergova nejednakost je zadovoljena te je vjerojatnost propasti proporcionalna Lundbergovoj gornjoj ogradi.

v.

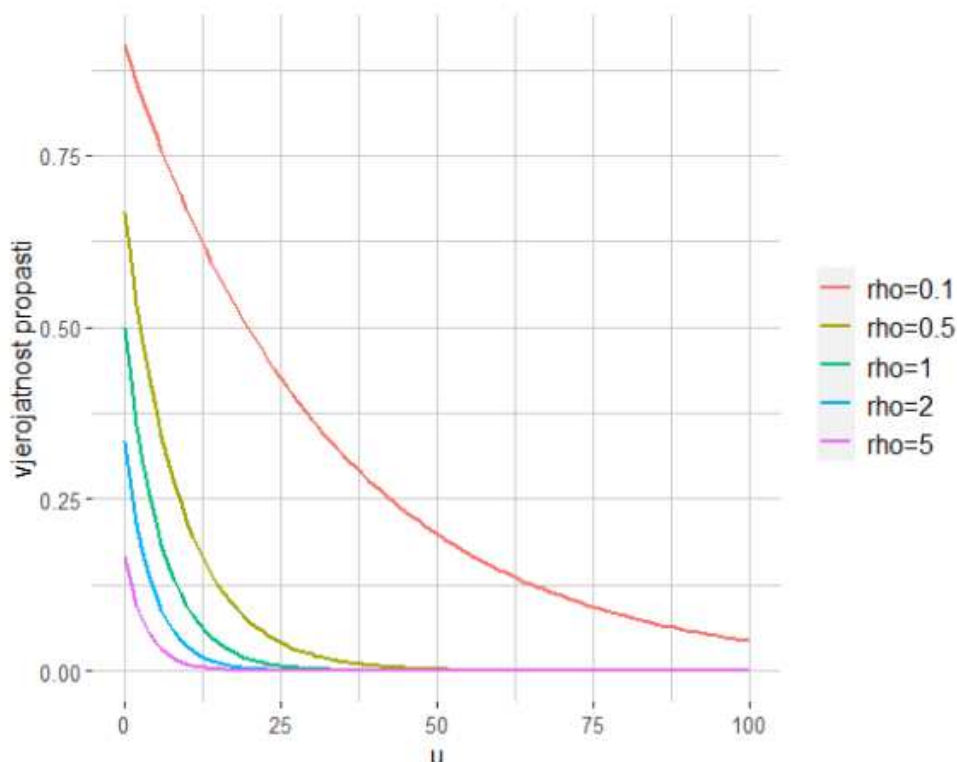
$$\frac{\partial}{\partial u} \psi(u) = -\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)} \psi(u) < 0,$$

pa je vjerojatnost propasti padajuća funkcija od  $u$ , što znači da što je veći početni kapital, to je vjerojatnost propasti, uz ostale parametre fiksne, manja.

vi.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(u) = - \left( \frac{1}{1+\rho} + \frac{u}{\mu(1+\rho)^2} \right) \psi(u) < 0,$$

pa s porastom sigurnosne premije vjerojatnost propasti pada (uz ostale parametre nepromijenjene).



Slika 2.3: ovisnost  $\psi(u)$  o  $\rho$

Vjerojatnost propasti prikazana na slici 2.3 odgovara isplatama koje dolaze iz  $\exp\left(\frac{1}{3}\right)$  distribucije i Poissonovom procesu  $N$  s intenzitetom  $\lambda = 1$ .

Sada ćemo izvesti formulu (2.13).

Koristimo oznaku  $\bar{\psi}(u) := 1 - \psi(u)$  za vjerojatnost opstanka osiguranja, odnosno vjerojatnost da neće doći do propasti.  $T_1 \sim \exp(\lambda)$  te pretpostavljamo da prva isplata  $Z_1$  ne izaziva propast, tj.  $x < ct + u$ , za  $x$  iznos prve isplate.

Tada je

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(u) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(u + ct - \sum_{k=0}^{N_t} Z_k > 0 \mid T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} f_Z(x) \bar{\psi}(u + ct - x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &\quad [ w = u + ct ] \\
 &= \int_u^\infty \left[ \int_0^w f_Z(x) \bar{\psi}(w - x) dx \right] \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda(w-u)/c} dw \\
 &= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty \left[ \int_0^w f_Z(x) \bar{\psi}(w - x) dx \right] e^{-\lambda w/c} dw.
 \end{aligned}$$

Deriviramo li prethodni izraz, dobivamo

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}'(u) &= \left( \frac{\lambda}{c} \right)^2 e^{\lambda u/c} \int_u^\infty \left[ \int_0^w f_Z(x) \bar{\psi}(w - x) dx \right] e^{-\lambda w/c} dw \\
 &\quad + \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \left( -e^{-\lambda u/c} \right) \int_0^u f_Z(x) \bar{\psi}(u - x) dx \\
 &= \frac{\lambda}{c} \bar{\psi}(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f_Z(x) \bar{\psi}(u - x) dx \\
 &\quad [ \bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u) ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi'(u) &= - \left[ \frac{\lambda}{c} (1 - \psi(u)) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f_Z(x) [1 - \psi(u - x)] dx \right] \\
 &= \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f_Z(x) \psi(u - x) dx - \frac{\lambda}{c} \bar{F}_Z(u).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Integriranjem prethodnog izraza slijedi

$$\int_0^\infty \psi'(u) du = \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^\infty \psi(u) - \int_0^\infty \int_0^u f_Z(x) \psi(u - x) dx \right] du - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}_Z(u) du.$$

Mijenjanjem poretka integracije dobivamo

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left[ \int_0^u f_Z(x) \psi(u - x) dx \right] du &= \int_0^\infty \left[ \int_x^\infty \psi(u - x) du \right] f_Z(x) dx \\
 &= \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \psi(u) du \right] f_Z(x) dx \\
 &= \int_0^\infty \psi(u) du.
 \end{aligned}$$

Stoga je

$$\int_0^{\infty} \psi'(u) du = -\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \bar{F}_Z(u) du.$$

Iz Lundbergove nejednakosti sledi da je  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$  pa možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned} \psi(0) &= -\int_0^{\infty} \psi'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \bar{F}_Z(x) dx \\ &= \frac{\lambda \mathbb{E}[Z]}{c} \\ &\quad [c = (1 + \rho)\lambda \mathbb{E}[Z]] \\ &= \frac{1}{1 + \rho}. \end{aligned}$$

Jer je  $Z$  eksponencijalno distribuirana s očekivanjem  $\mu$ , iz (2.14) sledi

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{\mu c} \int_0^u e^{-x/\mu} \psi(u-x) dx - \frac{\lambda}{c} e^{-u/\mu} \\ &= \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{\mu c} e^{-u/\mu} \int_0^u e^{x/\mu} \psi(x) dx - \frac{\lambda}{c} e^{-u/\mu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

te je stoga

$$\psi''(u) = \frac{\lambda}{c} \psi'(u) + \frac{\lambda}{\mu^2 c} e^{-u/\mu} \int_0^u e^{x/\mu} \psi(x) dx - \frac{\lambda}{\mu c} \psi(u) + \frac{\lambda}{\mu c} e^{-u/\mu}. \quad (2.16)$$

Pomnožimo li (2.15) s  $1/\mu$  i pribrojimo (2.16), sledi

$$\psi''(u) + \frac{1}{\mu} \psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \psi'(u),$$

tj.  $\psi(u)$  je rješenje homogene diferencijalne jednažbe drugog reda

$$\psi''(u) + \left( \frac{c - \lambda\mu}{\mu c} \right) \psi'(u) = 0.$$

Stoga je  $\psi(u)$  oblika

$$\psi(u) = k_0 + k_1 e^{-(c-\lambda\mu)u/\mu c},$$

za neke  $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$ . Kako je, zbog Lundbergove nejednakosti,  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ ,  $k_0 = 0$ . Nadalje, jer je  $\psi(0) = \frac{1}{1+\rho} = k_1$ , sledi

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}.$$



## Poglavlje 3

# Miješani Poissonovi procesi

### 3.1 Pojmovi i definicije

Neke od prethodno navedenih rezultata moguće je izvesti i u nešto složenijem slučaju - kada  $N$  nije "običan", nego miješani Poissonov proces. Tada je proces isplata  $Y$  složeni miješani Poissonov proces. Ideja je da do vjerojatnosti propasti  $\psi(u)$  dođemo preko uvjetne vjerojatnosti propasti  $\psi(u, \lambda)$ , uvjetno na ishod  $\lambda$  slučajne varijable intenziteta  $\Lambda$ . Dakle,  $\psi(u, \lambda)$  je vjerojatnost propasti u slučaju kada je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ .

Označimo s  $U$  funkciju distribucije nenegativne slučajne varijable intenziteta  $\Lambda$ .

**Definicija 3.1.1.** Za diskretnu slučajnu varijablu  $N$  kažemo da ima **miješanu Poissonovu distribuciju**, u oznaci  $MP(t, U)$ , sa **strukturnom distribucijom**  $U$  ako vrijedi

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E} \left[ \frac{(\Lambda t)^k}{k!} e^{-\Lambda t} \right] = \int_{0-}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dU(\lambda), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ako s  $U_t$  označimo funkciju distribucije slučajne varijable  $\Lambda t$ , tj.  $U_t(\lambda) = U(\lambda/t)$ , onda je  $MP(t, U) = MP(1, U_t) = MP(U_t)$ . Često je slučajne varijable  $\Lambda$  i  $N$  praktično razmatrati zajedno, odnosno kao slučajni vektor  $(\Lambda, N)$  za koji vrijedi

$$\mathbb{P}(\Lambda \leq x, N = n) = \int_{0-}^x \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dU(\lambda), \quad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

**Definicija 3.1.2.** Točkovni proces  $N$  nazivamo **miješanim Poissonovim procesom**, u oznaci  $MPP(U)$ , ako je njegova distribucija  $\Pi_U$  dana s

$$\Pi_U(B) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\lambda(B) dU(\lambda), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}).$$

Intuitivno, iz prethodne definicije slijedi da je  $N$  miješani Poissonov proces ako je  $N$  uvjetno na realizaciju  $\lambda$  nenegativne slučajne varijable  $\Lambda$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ . Preciznije,  $(\Lambda, N)$  promatramo kao izmjerivo preslikavanje iz vjerojatnosnog prostora  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  u  $(\mathbb{R} \times \mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathcal{N}))$  s distribucijom

$$\mathbb{P}(\Lambda \leq x, N \in B) = \int_{0-}^x \Pi_\lambda(B) dU(\lambda), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}),$$

pri čemu je

$$\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathcal{N}) = \sigma((\lambda, \nu(t)) \leq y : \lambda \leq x, \nu \in \mathcal{N}, t \geq 0, x, y < \infty).$$

## 3.2 Poopćeni rezultati

Podsjetimo se, za  $c - \lambda\mu \leq 0$ , tj.  $\lambda \geq c/\mu$ ,  $\psi(u, l) = 1$ .  
Stoga je

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_{0-}^{\infty} \psi(u, \lambda) dU(\lambda) \\ &= \int_{0-}^{c/\mu} \psi(u, \lambda) dU(\lambda) + 1 - U(c/\mu). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sada ponovno možemo razmatrati slučaj kada su isplate eksponencijalno distribuirane. Ovaj put pretpostavimo dodatno da je i  $\Lambda$  eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla, odnosno  $F(z) = 1 - e^{-z/\mu}$ ,  $z \geq 0$  i  $U(\lambda) = 1 - e^{-\lambda/\mu_\Lambda}$ ,  $\lambda \geq 0$ .

Uvrstimo li u (3.1) izraz za vjerojatnost propasti kada je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$  te kada su isplate eksponencijalno distribuirane s očekivanjem  $\mu$ , slijedi

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_{0-}^{\infty} \frac{\lambda\mu}{c} e^{-(c-\lambda\mu)u/c\mu} \frac{\lambda}{\mu_\Lambda} e^{-\lambda/\mu_\Lambda} d\lambda + e^{-c/\mu\mu_\Lambda} \\ &= \frac{\mu_\Lambda}{(u\mu_\Lambda - c)^2} \left( (u^2\mu_\Lambda - uc - c\mu)e^{-c/\mu\mu_\Lambda} + \mu ce^{-u/\mu} \right). \end{aligned}$$

Kao i prije, s  $\rho$  označavamo sigurnosnu premiju, pri čemu u miješanom Poissonovom slučaju intenzitet Poissonovog procesa zamjenjujemo očekivanjem slučajne varijable  $\Lambda$  pa je  $\rho = \frac{c - \mu\mu_\Lambda}{\mu\mu_\Lambda}$ . Zato izraz za vjerojatnost propasti možemo zapisati i u obliku

$$\psi(u) = \frac{(u^2 - (u + \mu)\mu(1 + \rho))e^{-(1+\rho)} + \mu^2(1 + \rho)e^{-u/\mu}}{(u - \mu(1 + \rho))^2}. \quad (3.2)$$

Za ovaj slučaj također postoji inačica Lundbergove nejednakosti.

Pretpostavimo da postoji  $\lambda$  takav da  $U(\lambda) = 1$ , što možemo interpretirati kao da je osiguravajuće društvo gotovo sigurno profitabilno. Označimo s  $\lambda_1 = \inf\{\lambda : U(\lambda) = 1\}$ .

Tada je

$$\psi(u) = \int_{0-}^{\lambda_1} \psi(u, \lambda) dU(\lambda) \leq \psi(u, \lambda_1) \leq e^{-R_1 u}, \quad (3.3)$$

gdje je  $R_1$  pozitivno rješenje jednadžbe  $h(r) = cr/\lambda_1$ , pri čemu je funkcija  $h$  definirana s  $h(r) := \int_{0-}^{\infty} (e^{rz} - 1) dF(z)$ .

Sljedeći teorem, koji navodimo bez dokaza, daje precizniju gornju ogradu za vjerojatnost propasti.

**Teorem 3.2.1.** *Neka je  $\lambda_1 = \inf\{\lambda : U(\lambda) = 1\}$ . Pretpostavimo da vrijedi  $\lambda_1 < c/\mu$  te da  $F$  ima laki rep. Tada vrijedi*

$$\psi(u) \leq \frac{\mu \Lambda}{\lambda_1} e^{-R_1 u},$$

gdje je  $R_1$  pozitivno rješenje jednadžbe  $h(r) = cr/\lambda_1$ .

Idući je teorem jedan mogući analogon Cramér-Lundbergove aproksimacije, odnosno njeno poopćenje za miješane Poissonove procese. Kako bismo ga dokazali potrebno je pretpostaviti da vrijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R(\lambda_1 - \frac{d}{u})u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{d}{u}\right) = C(\lambda_1), \quad (3.4)$$

pri čemu je  $R(\lambda)$  pozitivno rješenje jednadžbe  $h(r) = cr/\lambda$ ,  $d$  pozitivna konstanta,  $\lambda_1$  definiran kao prije te  $C(\lambda) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R(\lambda)) - c}$ .

**Teorem 3.2.2.** *Neka je  $\lambda_1 = \inf\{\lambda : U(\lambda) = 1\}$  te  $\lambda_1 < c/\mu$ . Pretpostavimo da  $U$  ima gustoću za koju vrijedi*

$$q(\lambda) \sim B \cdot (\lambda_1 - \lambda)^{b-1}, \quad \lambda \nearrow \lambda_1, \quad (3.5)$$

za neke  $b > 0$ ,  $B > 0$ . Pretpostavimo još da  $F$  ima laki rep te da vrijedi (3.4). Tada

$$\psi(u) \sim \frac{BC_1 \Gamma(b)}{(D_1 u)^b} e^{-R_1 u}, \quad u \rightarrow \infty,$$

gdje je  $R_1$  pozitivno rješenje jednadžbe  $h(r) = cr/\lambda_1$ ,

$$C_1 = \frac{c - \lambda_1 \mu}{\lambda_1 h'(R_1) - c} \quad i \quad D_1 = \frac{c R_1 C_1}{\lambda_1 (c - \lambda_1 \mu)}.$$

*Dokaz.* Jer je  $R(\lambda)$  rješenje jednadžbe  $h(r) = cr/\lambda$ ,  $h(R(\lambda)) = cR(\lambda)/\lambda$  i  $R(\lambda_1) = R_1$  pa je  $R(\lambda) = \lambda h(R(\lambda))/c$ . Deriviranjem tog izraza dobivamo

$$R'(\lambda) = \frac{h(R(\lambda))}{c - \lambda h'(R(\lambda))}.$$

Za  $\lambda = \lambda_1$ , uz  $h(R_1) = cR_1/\lambda_1$ ,

$$R'(\lambda_1) = -\frac{cR_1}{\lambda_1(\lambda_1 h'(R_1) - c)}. \quad (3.6)$$

Uvrstimo li  $C_1$  u  $D_1$ , slijedi

$$D_1 = \frac{cR_1}{\lambda_1(\lambda_1 h'(R_1) - c)} = -R'(\lambda_1).$$

Zbog pretpostavke  $\lambda_1 < c/\mu$ ,  $D_1 > 0$  te  $R'(\lambda_1) < 0$  pa je funkcija  $R(\lambda)$  padajuća u okolini od  $\lambda_1$ . Stoga, kada  $\lambda \nearrow \lambda_1$ , tada  $R(\lambda) \searrow R_1$ . Koristeći Taylorov teorem dobivamo

$$R_1 - R(\lambda) \sim -D_1(\lambda_1 - \lambda), \quad \lambda \nearrow \lambda_1. \quad (3.7)$$

Iz (3.5) i (3.7) slijedi da za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta \in \langle 0, \lambda_1 \rangle$  takav da

$$\begin{aligned} \frac{q(\lambda_1 - \lambda)}{B\lambda^{b-1}} - 1 &\leq \epsilon, \quad \forall \lambda \in \langle 0, \delta \rangle \\ \frac{-D_1\lambda}{R_1 - R(\lambda_1 - \lambda)} - 1 &\leq \epsilon, \quad \forall \lambda \in \langle 0, \delta \rangle \end{aligned}$$

pa, označimo li s  $A := 1 + \epsilon$ , dobivamo da za svaki  $A > 1$  postoji  $\delta \in \langle 0, \lambda_1 \rangle$  takav da

$$\begin{aligned} q(\lambda_1 - \lambda) &\leq AB\lambda^{b-1}, \quad \forall \lambda \in \langle 0, \delta \rangle \\ R_1 - R(\lambda_1 - \lambda) &\leq -A^{-1}D_1\lambda, \quad \forall \lambda \in \langle 0, \delta \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Koristeći (3.3) slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} u^b e^{R_1 u} \psi(u) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda_1} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda) q(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda_1} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \lambda) q(\lambda_1 - \lambda) d\lambda \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \lambda) q(\lambda_1 - \lambda) d\lambda \\ &\quad + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\lambda_1} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \lambda) q(\lambda_1 - \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Nadalje, koristeći Lundbergovu nejednakost, dobivamo

$$\begin{aligned}
 & \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\lambda_1} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \lambda) q(\lambda_1 - \lambda) d\lambda \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda_1 - \delta} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda) q(\lambda) d\lambda \\
 &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \delta) \\
 &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} u^b e^{R_1 u} e^{-R(\lambda_1 - \delta)u} \\
 &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} u^b e^{-u D_1 \delta / A} = 0.
 \end{aligned}$$

Primjenom supstitucije  $v = D_1 u \lambda$ , slijedi

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\delta} u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \lambda) q(\lambda_1 - \lambda) d\lambda \\
 &= \frac{1}{D_1} \int_0^{D_1 u \delta} u^{b-1} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) q\left(\lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) dv \\
 &= \frac{1}{D_1} \int_0^{\infty} I_{D_1 u \delta}(v) u^{b-1} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) q\left(\lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) dv,
 \end{aligned}$$

gdje je

$$I_{D_1 u \delta}(v) = \begin{cases} 1, & v \leq D_1 u \delta, \\ 0, & v > D_1 u \delta. \end{cases}$$

Zbog (3.3) i (3.8) vrijedi

$$\begin{aligned}
 & I_{D_1 u \delta}(v) u^{b-1} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) q\left(\lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) \\
 &\leq I_{D_1 u \delta}(v) u^{b-1} e^{R_1 u} e^{-R(\lambda_1 - v/D_1 u)u} AB \left(\frac{v}{D_1 u}\right)^{b-1} \\
 &= k I_{D_1 u \delta}(v) e^{(R_1 - R(\lambda_1 - v/D_1 u))u} v^{b-1} \\
 &\leq k I_{D_1 u \delta}(v) e^{-v/A} v^{b-1} \\
 &\leq k e^{-v/A} v^{b-1},
 \end{aligned}$$

$k = ABD_1^{-(b-1)}$  konstanta.

Funkcija  $ke^{-v/A}v^{b-1}$  je integrabilna pa po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} u^b e^{R_1 u} \psi(u) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^\delta u^b e^{R_1 u} \psi(u, \lambda_1 - \lambda) q(\lambda_1 - \lambda) d\lambda \\
 &= \frac{1}{D_1} \int_0^\infty \lim_{u \rightarrow \infty} I_{D_1 u \delta}(v) u^{b-1} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) q\left(\lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) dv \\
 &\stackrel{(3.5)}{=} \frac{B}{D_1} \int_0^\infty \lim_{u \rightarrow \infty} u^{b-1} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) \left(\frac{v}{D_1 u}\right)^{b-1} dv \\
 &= \frac{B}{D_1^b} \int_0^\infty \lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) v^{b-1} dv.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Raspišimo još posljednji limes:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_1 u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} e^{(R_1 - R(\lambda_1 - v/D_1 u))u} e^{R(\lambda_1 - v/D_1 u)u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{v}{D_1 u}\right) \\
 &= e^{-v} C_1.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Posljednja jednakost slijedi iz (3.4) za  $d = v/D_1$  i

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} e^{(R_1 - R(\lambda_1 - v/D_1 u))u} &= e^{\lim_{u \rightarrow \infty} (e^{R_1 - R(\lambda_1 - v/D_1 u)} - 1)u}, \\
 \lim_{u \rightarrow \infty} (e^{R_1 - R(\lambda_1 - v/D_1 u)} - 1)u &\stackrel{(3.7)}{=} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-v/u} - 1}{-\frac{v}{u}} \cdot (-v) = -v.
 \end{aligned}$$

Konačno, uvrstimo li (3.10) u (3.9), slijedi tvrdnja teorema

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^b e^{R_1 u} \psi(u) = \frac{BC_1}{D_1^b} \int_0^\infty v^{b-1} e^{-v} dv = \frac{BC_1 \Gamma(b)}{D_1^b}.$$

□

U idućim ćemo primjerima pokazati da je pretpostavka (3.4) opravdana u slučajevima kada je distribucija isplata  $F$  eksponencijalna, gama ili konveksna kombinacija eksponencijalnih distribucija, a to su slučajevi za koje ćemo u sljedećem poglavlju vjerojatnost propasti pokušati i izračunati.

**Primjer 3.2.3.** Neka su isplate eksponencijalno distribuirane.

Podsjetimo se, tada vrijedi

$$R(\lambda) = \frac{c - \lambda\mu}{c\mu} \quad \text{i} \quad \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{d}{u}\right) = \frac{(\lambda_1 u - d)\mu}{uc} e^{-\frac{u(c - \lambda_1\mu) + d\mu}{c\mu}}$$

pa je stoga

$$R\left(\lambda_1 - \frac{d}{u}\right) = \frac{u(c - \lambda_1\mu) + d\mu}{c\mu u}$$

te slijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R(\lambda_1 - \frac{d}{u})u} \psi\left(u, \lambda_1 - \frac{d}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_1 u - d)\mu}{uc} = \frac{\lambda_1\mu}{c}.$$

$$C_1 = C(\lambda_1) = \frac{c - \lambda_1\mu}{\lambda_1 h'(R(\lambda_1)) - c}$$

Iz (3.6) slijedi

$$\lambda_1 h'(R_1) - c = -\frac{cR_1}{\lambda_1 R'(\lambda_1)}$$

pa je, uz  $R'(\lambda_1) = -1/c$ ,

$$C_1 = \frac{\lambda_1(c - \lambda_1\mu)}{c^2 R_1} = \frac{\lambda_1\mu}{c}.$$

Stoga je pretpostavka (3.4) zadovoljena pa korištenjem teorema 3.2.2 dobivamo

$$\psi(u) \sim \frac{B\lambda_1\mu c^{b-1}\Gamma(b)}{u^b} e^{-\frac{(c-\lambda_1\mu)u}{c\mu}}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Ponekad nije jednostavno pokazati da vrijedi pretpostavka (3.4), ali ona slijedi ukoliko pokažemo da  $e^{R(\lambda)u}\psi(u, \lambda)$  uniformno konvergira prema  $C(\lambda)$  na  $[\lambda_1 - \delta, \lambda_1]$  kada  $u \rightarrow \infty$ , za neki  $\delta \in \langle 0, \lambda_1 \rangle$ . Još jedna mogućnost je pokazati da  $e^{R(\lambda)u}\psi(u, \lambda)$  konvergira k  $C(\lambda)$  po točkama na  $[\lambda_1 - \delta, \lambda_1]$  iz čega, prema teoremu 1.0.9, slijedi da konvergira i uniformno pa je pretpostavka (3.4) ponovno zadovoljena.

Podsjetimo se,  $h(r) = \int_{0-}^{\infty} (e^{rz} - 1)dF(z)$  i  $\lim_{r \rightarrow r_{\infty}-} h(r) = +\infty$ ,  $r_{\infty} \in \langle 0, \infty \rangle$ .

Za  $r < r_{\infty}$  definiramo  $\pi(r) := h(r) - cr/\lambda$ . Primijetimo, ako je  $r$  korijen jednadžbe  $h(r) = cr/\lambda$ , onda je i korijen jednadžbe  $\pi(r) = 0$ . S  $R$  ćemo označavati pozitivno rješenje te jednadžbe. Kod primjera koje ćemo razmatrati  $r_{\infty} < \infty$  te kao domenu funkcije  $\pi$  možemo promatrati  $\mathbb{C}$  (naravno, neke osi mogu biti isključene iz domene, ovisno o primjeru). U idućim primjerima radi jednostavnijeg zapisa izostavljamo ovisnost o  $\lambda$ .

**Primjer 3.2.4.** Promotrimo sada slučaj kada je distribucija isplata kombinacija  $m$  eksponencijalnih distribucija s očekivanjima  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , tj.

$$F(z) = \sum_{k=1}^m p_k(1 - e^{-z/\mu_k}), \quad f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{p_k}{\mu_k} e^{-z/\mu_k}, \quad z \geq 0,$$

pri čemu su  $p_k > 0$ ,  $\sum_{k=1}^m p_k = 1$  te  $\mu_1 > \dots > \mu_m > 0$ .

Stoga je

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \sum_{k=1}^m \frac{p_k}{\mu_k} \int_0^{\infty} (e^{sz} - 1) e^{-z/\mu_k} dz - \frac{cs}{\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{p_k}{\mu_k} \left( -\frac{\mu_k}{s\mu_k - 1} - \mu_k \right) - \frac{cs}{\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{p_k \mu_k s}{1 - \mu_k s} - \frac{cs}{\lambda}, \end{aligned}$$

za  $s \in \mathbb{C} \setminus \{1/\mu_1, \dots, 1/\mu_m\}$ .

Jednadžba  $\pi(s) = 0$  algebarska je jednadžba stupnja  $m + 1$  pa u  $\mathbb{C}$  ima  $m + 1$  korijen. Označimo ih s  $0, R_1, \dots, R_m$ . Neka je  $R_1 = R < 1/\mu_1 = r_\infty$ . Promatramo li funkciju  $\pi(r + 0i)$ , vidimo da je ona neprekidna na  $\langle \mu_k, \mu_{k+1} \rangle$ , za svaki  $k \in \{1, \dots, m - 1\}$  te vrijedi  $\lim_{r \rightarrow \mu_k^+} \pi(r + 0i) = -\infty$  i  $\lim_{r \rightarrow \mu_{k+1}^-} \pi(r + 0i) = +\infty$  pa jednadžba  $\pi(r + 0i) = 0$  ima korijen u  $\langle \mu_k, \mu_{k+1} \rangle$ , za svaki  $k \in \{1, \dots, m - 1\}$ . Stoga su svi korijeni realni i  $R_k > R$ ,  $k > 1$ .

Ovaj je slučaj razmatrao Cramér[3] i došao do izraza za vjerojatnost propasti oblika

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^m \frac{c - \lambda \mu}{\lambda \pi'(R_k)} e^{-R_k u}. \quad (3.11)$$

Dodatno vrijedi i  $\frac{c - \lambda \mu}{\lambda \pi'(R_k)} > 0$ , za svaki  $k$ . Sada, jer  $e^{(R - R_k)u} \downarrow 0$  za  $k > 1$  kada  $u \rightarrow \infty$ , slijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{c - \lambda \mu}{\lambda \pi'(R)} = C(\lambda)$$

pa je pretpostavka (3.4) zadovoljena te možemo iskoristiti teorem 3.2.2.



**Primjer 3.2.5.** Naposljetku promatramo slučaj kada isplate imaju  $\Gamma(\alpha, \beta)$  distribuciju, tj. kada je

$$f(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\beta z}, \quad z \geq 0.$$

Definiramo funkciju  $g$  s

$$g(s) := \frac{(c - \lambda\alpha/\beta)(1 - s/\beta)}{(\alpha + 1)c s/\beta - (c - \alpha\lambda/\beta)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

U ovome je slučaju

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \int_0^\infty (e^{sz} - 1) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\beta z} dz - \frac{cs}{\lambda} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{(\beta - s)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(\beta - s)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-(\beta-s)z} dz - 1 - \frac{cs}{\lambda} \\ &= \left(1 - \frac{s}{\beta}\right)^{-\alpha} - 1 - \frac{cs}{\lambda}, \quad s \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Neka su  $R_1, \dots, R_m$  korijeni jednažbe  $\pi(s) = 0$  s pozitivnim realnim dijelovima. Thorin [8] je došao do izraza za vjerojatnost propasti oblika

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^m g(R_k) e^{-R_k u} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_\beta^\infty \frac{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta} - 1\right)^\alpha e^{-xu}}{\left[\left(1 + \frac{cx}{\lambda}\right) \left(\frac{x}{\beta} - 1\right)^\alpha - \cos(\pi\alpha)\right]^2 + \sin^2(\pi\alpha)} dx, \quad (3.12)$$

gdje je  $R_1 = R < \beta = r_\infty$  i

$$m = \begin{cases} \alpha, & \text{za } \alpha = 2k, k = 1, 2, \dots \\ 2k + 1, & \text{za } 2k < \alpha < 2k + 2, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Kada  $\alpha$  nije paran broj,  $R$  je jedini realni korijen jednažbe  $\pi(s) = 0$ , dok su preostali korijeni u kompleksno konjugiranim parovima. Kada je  $\alpha$  paran broj,  $R_\alpha$  je realan, a ostali korijeni su u kompleksno konjugiranim parovima. Također, svi su korijeni jednostruki te za sve vrijedi  $\operatorname{Re} R_k > R$ ,  $k > 1$  i različiti kompleksno konjugirani parovi imaju različite realne dijelove.

Deriviramo li funkciju  $\pi$  dobivamo

$$\pi'(s) = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{s}{\beta}\right)^{-\alpha-1} - \frac{c}{\lambda}.$$

Budući da je  $\pi(R) = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{R}{\beta}\right)^{-\alpha} - 1 - \frac{cR}{\lambda} = 0 \\ \Rightarrow & \left(1 - \frac{R}{\beta}\right)^{-\alpha-1} = \frac{\lambda + cR}{\lambda} \cdot \frac{\beta}{\beta - R} = \frac{\beta(\lambda + cR)}{\lambda(\beta - R)} \end{aligned}$$

pa  $\pi'(R)$  možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \pi'(R) &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta(\lambda + cR)}{\lambda(\beta - R)} - \frac{c}{\lambda} = \frac{\alpha(\lambda + cR) - c(\beta - R)}{\lambda(\beta - R)} \\ &= \frac{(\alpha + 1)cR/\beta - (c - \alpha\lambda/\beta)}{\lambda(1 - R/\beta)}. \end{aligned}$$

Primijetimo da zato vrijedi  $g(R) = \frac{c - \lambda\alpha/\beta}{\lambda\pi'(R)}$  te da je  $\sin(\pi\alpha) = 0$  kada je  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Tada možemo uočiti sličnost među izrazima (3.12) i (3.11).

Promotrimo sada izraz  $e^{Ru}\psi(u)$ :

$$e^{Ru}\psi(u) = \sum_{k=1}^m g(R_k)e^{(R-R_k)u} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta} - 1\right)^{\alpha} e^{(R-x)u}}{\left[\left(1 + \frac{cx}{\lambda}\right)\left(\frac{x}{\beta} - 1\right)^{\alpha} - \cos(\pi\alpha)\right]^2 + \sin^2(\pi\alpha)} dx.$$

Kako je  $R < \beta$ , kada  $e^{R-x}u \downarrow 0$ , za svaki  $x \geq \beta$  kada  $u \rightarrow \infty$ , drugi dio prethodnog izraza konvergira u 0. Za  $R_k$ ,  $k > 1$ , kompleksan korijen, zbog  $ReR_k > R$ ,  $k > 1$ , vrijedi  $|g(R_k)e^{-R_k u}| = |g(R_k)|e^{-ReR_k u}$  pa  $e^{Ru}|g(R_k)e^{-R_k u}| \downarrow 0$  kada  $u \rightarrow \infty$ . Također, kada je  $\alpha$  paran,  $R_{\alpha} = ReR_{\alpha} > 1$  pa  $e^{(R-R_{\alpha})u} \downarrow 0$ . Stoga je

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru}\psi(u) = g(R) = \frac{c - \lambda\alpha/\beta}{\lambda\pi'(R)}.$$

Obzirom da je očekivanje  $\Gamma(\alpha, \beta)$ -distribucije jednako  $\alpha/\beta$ ,  $e^{Ru}\psi(u)$  konvergira u  $C(\lambda)$ , iz čega slijedi da je pretpostavka (3.4) ponovno zadovoljena te da i na ovaj slučaj možemo primijeniti teorem 3.2.2.

## Poglavlje 4

# Vjerojatnost propasti

Kao što smo u prethodnim poglavljima imali priliku uočiti, vjerojatnost propasti rijetko je kad moguće jednostavno izračunati. Stoga ćemo se u ovome poglavlju posvetiti procjenama iste. Za početak ćemo promotriti slučaj kada je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ , a isplate su eksponencijalno distribuirane - slučaj za koji vjerojatnost propasti ipak možemo egzaktno izračunati. Zatim ćemo promatrati još jedan specijalan slučaj u kojem za vjerojatnost propasti možemo dobiti jednostavan izraz. To je slučaj kada je distribucija isplata kombinacija eksponencijalnih distribucija, to jest kada je njihova funkcija gustoće oblika  $f(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1-p)\beta e^{-\beta x}$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ . Ti će nam primjeri omogućiti da usporedimo dobivene procjene i stvarne vrijednosti vjerojatnosti propasti te ukazati na to koliko su procjene zapravo precizne.

U trećem ćemo se primjeru zadržati na eksponencijalno distribuiranim isplatama, ali ovaj put za slučaj kada je  $N$  miješani Poissonov proces. Ukoliko je i parametar  $\Lambda$  eksponencijalno distribuiran, ponovno možemo dobivenu procjenu usporediti s egzaktnom vrijednosti.

Zadnji će primjer prikazati kako se procjena vjerojatnosti propasti mijenja variramo li distribuciju isplata. Usporedit ćemo ponašanje vjerojatnosti propasti za već promatrane distribucije s distribucijama poznatim po svojim teškim repovima, kao što su Pareto i lognormalna distribucija. Pri tome ćemo promjene analizirati za Poissonov proces  $N$  s intenzitetom  $\lambda$ .

Osnovna je ideja vjerojatnost propasti  $\psi(u)$  procijeniti koristeći vjerojatnost propasti do  $n$ -te isplate  $\psi_n(u)$ , za dovoljno velik  $n \in \mathbb{N}$ , obzirom da vrijedi  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ . Procjenu  $\psi_n(u)$  temeljimo na simulaciji  $m$   $n$ -članih nizova nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, koje predstavljaju isplate osiguravajućeg društva, iz teoretske distribucije za koju vjerojatnost propasti želimo procijeniti. Procjena vrijednosti  $\psi_n(u)$  tada je relativna frekvencija propasti, odnosno broj slučajeva u kojima je kapital pao ispod 0.

**Primjer 4.0.1.** Neka su isplate nezavisne i eksponencijalno distribuirane s očekivanjem pojedine isplate  $\mu = 3$ . Neka je  $N$  Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda = 1$ . Neka početni kapital iznosi  $u = 10$ , a sigurnosna premija  $\rho = 0.3$ .

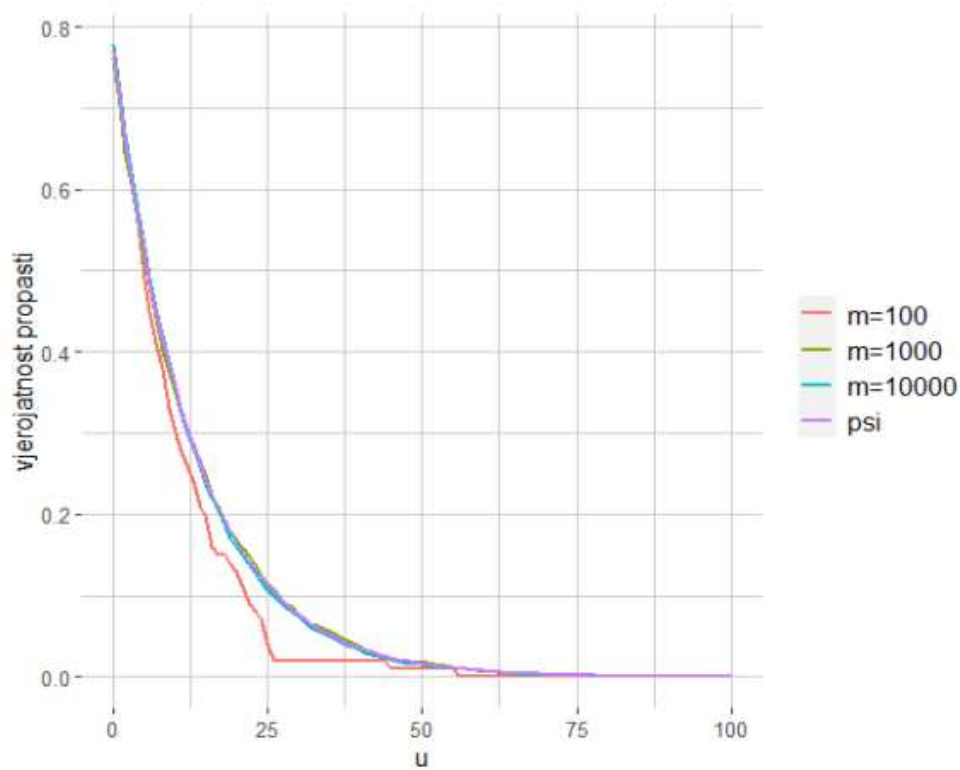
Podsjetimo se, sigurnosna je premija jednaka  $\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}$ , pri čemu je  $c$  stopa premije. Slijedi da je  $c = 2.6$ . Uvrštavanjem u izraz za vjerojatnost propasti dan formulom (2.13) dobivamo da je  $\psi(10) = 0.356438$ .

Vjerojatnost propasti  $\psi(u)$  procijenit ćemo pomoću  $\psi_n(u)$  za  $n = 1000$ . Preciznije, pri svakoj simulaciji procesa rizika  $X_t$  simuliramo  $n$  nezavisnih jednako distribuiranih isplata  $Z_1, \dots, Z_n$ , koje su u ovom primjeru eksponencijalno distribuirane te čije očekivanje iznosi  $\mu$ , i  $n$  vremena između uzastopnih isplata. Za vrijeme prve isplate vrijedi  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ , kao što je i pokazano u (2.2), a isti rezultat vrijedi i za vrijeme između dvije uzastopne isplate, odnosno  $T_{k+1} - T_k \sim \exp(\lambda)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Tada je vrijeme  $k$ -te isplate jednako  $T_k = \sum_{i=1}^{k-1} (T_{i+1} - T_i)$ . Na taj način dolazimo do iznosa kapitala osiguravajućeg društva u svakom od trenutaka  $T_1, \dots, T_n$ . Ukoliko je kapital u bilo kojem od tih trenutaka negativan, došlo je do propasti. Kao što je već spomenuto,  $\psi_n(u)$  je tada omjer broja simulacija u kojima je došlo do propasti i ukupnog broja simulacija  $m$ .

Osim same vrijednosti procjene vjerojatnosti propasti jednostavno možemo izračunati i pouzdane intervale. Označimo s  $X_1, \dots, X_m$  slučajni uzorak iz Bernoullijevog modela s parametrom  $p$ , pri čemu  $X_i = 1$  interpretiramo kao propast osiguravajućeg društva u  $i$ -toj simulaciji. Tada vjerojatnost propasti  $\psi$  odgovara  $\mathbb{E}X_1 = p$ , a njena procjena  $\psi_n$  odgovara procjenitelju očekivanja  $\bar{X}_m$ . Varijanca je jednaka  $p(1-p)$ , a time i konačna, pa iz centralnog graničnog teorema slijedi

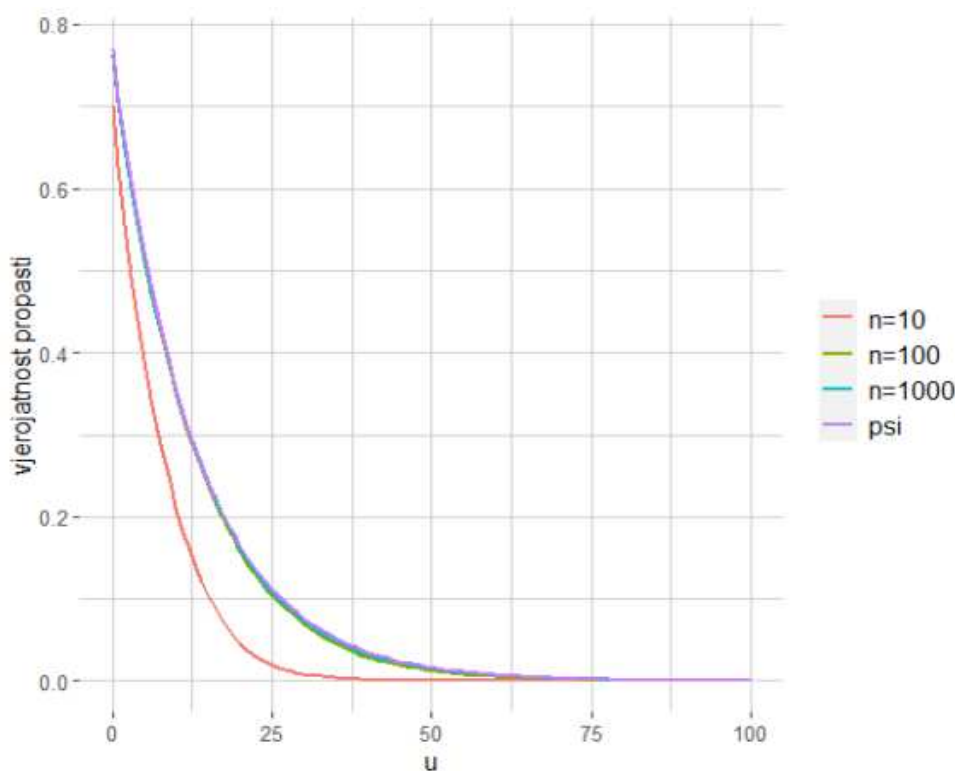
$$\frac{\bar{X}_m - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{m} \sim AN(0, 1). \quad (4.1)$$

Slika 4.1 prikazuje ovisnost vjerojatnosti propasti  $\psi(u)$  i njenih procjena  $\psi_n(u)$  o inicijalnom kapitalu  $u$  za  $n = 1000$  i različite  $m$ . Dobivene su vrijednosti u skladu s očekivanjima. Što je inicijalni kapital veći, to je vjerojatnost propasti manja te povećanjem broja simulacija na kojima se procjene temelje dobivamo procjene bliže egzaktnoj vrijednosti vjerojatnosti propasti. Možemo primijetiti da se krivulja funkcije  $\psi_n(u)$  već za  $m = 1000$  približno poklapa s krivuljom funkcije  $\psi(u)$ . Slika nam ipak ne može predočiti koliko su procjene zapravo precizne pa navodimo i dobivene vrijednosti procjena za početni kapital  $u = 10$ . Korištenjem  $m = 100$  simulacija dobivena procijenjena vrijednost iznosi  $\psi_n(10) = 0.3$ , za  $m = 1000$   $\psi_n(10) = 0.349$ , dok za  $m = 10000$   $\psi_n(10) = 0.3569$ . Aproximativni 95% pouzdani interval je  $[0.3475667, 0.3663432]$ .

Slika 4.1: procjena  $\psi(u)$  za različite  $m$ 

Veći  $m$  omogućuje bolju procjenu, ali koliko velik  $m$  treba biti kako bismo bili sigurni da će procjena biti dovoljno precizna? Mjerimo li preciznost širinom 95% pouzdanog intervala, izraz (4.1) dovest će nas i do potrebnog broja simulacija za unaprijed određenu maksimalnu širinu pouzdanog intervala. Uzmemo li da je navedena širina jednaka  $d = 0.01$ , minimalan broj simulacija bit će  $m = 35265$ , a za  $d = 0.001$  nužno je provesti barem  $m = 3526800$  simulacija.

Također možemo promotriti ovisnost procjene o broju isplata koje uzimamo u obzir, to jest koliko se procjene  $\psi_n(u)$  razlikuju od  $\psi(u)$ , ali i jedna od druge, kada variramo  $n$ . Te su promjene prikazane na slici 4.2. Na temelju podudaranja krivulja funkcija  $\psi(u)$  i  $\psi_{100}(u)$  mogli bismo zaključiti da, ukoliko do propasti dolazi, možemo očekivati da će se ona dogoditi do 100. isplate. Navedimo ponovno dobivene vrijednosti za  $m = 10000$ :  $\psi_{10}(10) = 0.211$ ,  $\psi_{100}(10) = 0.3531$ , dok je  $\psi_{1000}(10) = 0.3568$ .

Slika 4.2: procjena  $\psi(u)$  za različite  $n$ 

**Primjer 4.0.2.** Kao što smo ranije spomenuli, ukoliko je distribucija slučajnih varijabli isplata  $(Z_k)_{k=1}^{\infty}$  kombinacija eksponencijalnih distribucija, vjerojatnost propasti ponovno možemo egzaktno izračunati. Kada kažemo da je distribucija isplata kombinacija eksponencijalnih distribucija zapravo želimo reći da isplate dolaze iz eksponencijalne distribucije s parametrom  $\alpha$  s vjerojatnošću  $p$ , odnosno iz eksponencijalne distribucije s parametrom  $\beta$  s vjerojatnošću  $1 - p$ . Vjerojatnost propasti tada ima oblik  $\psi(u) = \delta e^{-\gamma u} + \eta e^{-\zeta u}$ , za neke koeficijente  $\gamma, \delta, \eta, \zeta$ . Ti su koeficijenti rješenja sustava jednadžbi te za njih, u općenitom slučaju, ne možemo izvesti jednostavne i praktične izraze. Stoga navodimo ideju postupka traženja koeficijenata, dok tehničku stranu samog računanja izostavljamo. Pri traženju koeficijenata koristit ćemo sljedeći izraz, koji je izveden u [7],

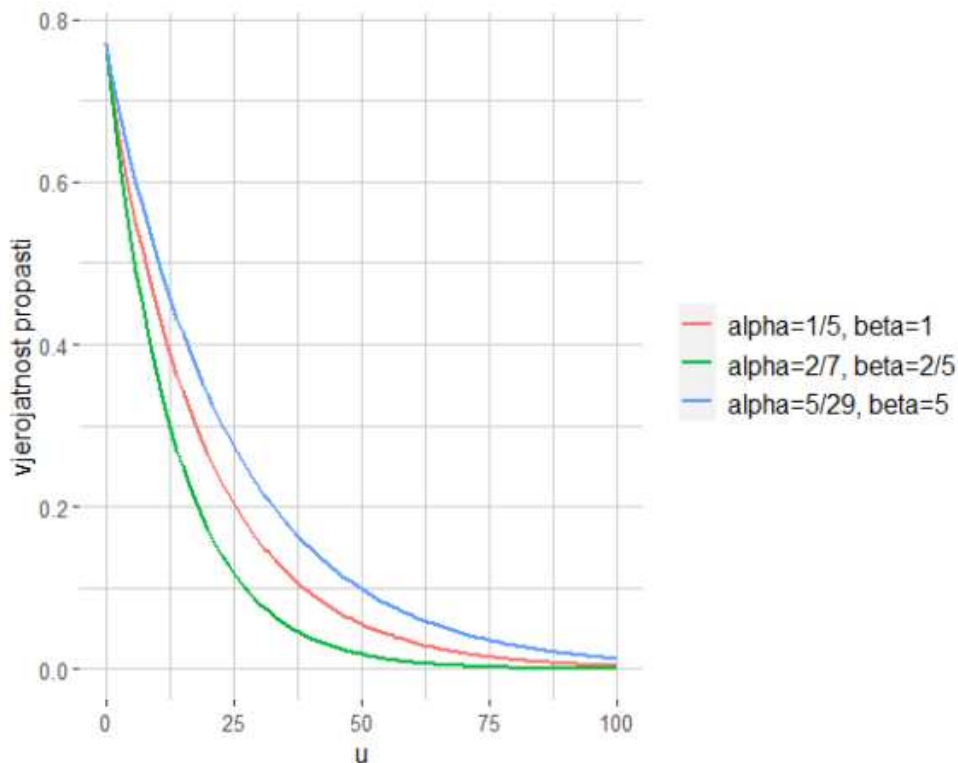
$$\int_0^{\infty} e^{ru} (-\psi'(u)) du = \frac{\rho}{1 + \rho} \frac{M_Z(r) - 1}{1 + (1 + \rho)\mu r - M_Z(r)}. \quad (4.2)$$

Uvrstimo li u desnu stranu izraza (4.2)  $\mu = \frac{p}{\alpha} + \frac{1-p}{\beta}$ ,  $M_Z(r) = \frac{p\alpha}{\alpha-r} + \frac{(1-p)\beta}{\beta-r}$ , za  $r < \min\{\alpha, \beta\}$ , s odgovarajućim koeficijentima i odabranu sigurnosnu premiju  $\rho$  te dobiveni izraz sredimo, nazivnik će biti oblika polinoma drugog stupnja u  $r$ . Stoga taj izraz možemo rastaviti na parcijalne razlomke pa slijedi jednakost

$$\int_0^{\infty} e^{ru} (-\psi'(u)) du = \frac{\delta\gamma}{\gamma - r} + \frac{\eta\zeta}{\zeta - r}, \quad (4.3)$$

za neke koeficijente  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\eta$  i  $\zeta$ . Prvi član desne strane u (4.3), do na množenje konstantom  $\delta$ , odgovara funkciji izvodnici momenata slučajne varijable koja je eksponencijalno distribuirana s parametrom  $\gamma$ , dok drugi član, do na množenje konstantom  $\eta$ , odgovara funkciji izvodnici momenata slučajne varijable koja je eksponencijalno distribuirana s parametrom  $\zeta$ . Zapišemo li  $\psi'(u)$  u obliku  $\psi'_1(u) + \psi'_2(u)$ , slijedi jednakost funkcije  $-\psi'_1(u)/\delta$  i funkcije gustoće eksponencijalne distribucije s parametrom  $\gamma$  te jednakost funkcije  $-\psi'_2(u)/\eta$  i funkcije gustoće eksponencijalne distribucije s parametrom  $\zeta$  pa je  $\psi'_1(u) = -\delta\gamma e^{-\gamma u}$ , odnosno  $\psi'_2(u) = -\eta\zeta e^{-\zeta u}$ . Integriranjem i korištenjem rubnog uvjeta  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$  dobivamo da je  $\psi(u) = \delta e^{-\gamma u} + \eta e^{-\zeta u}$ .

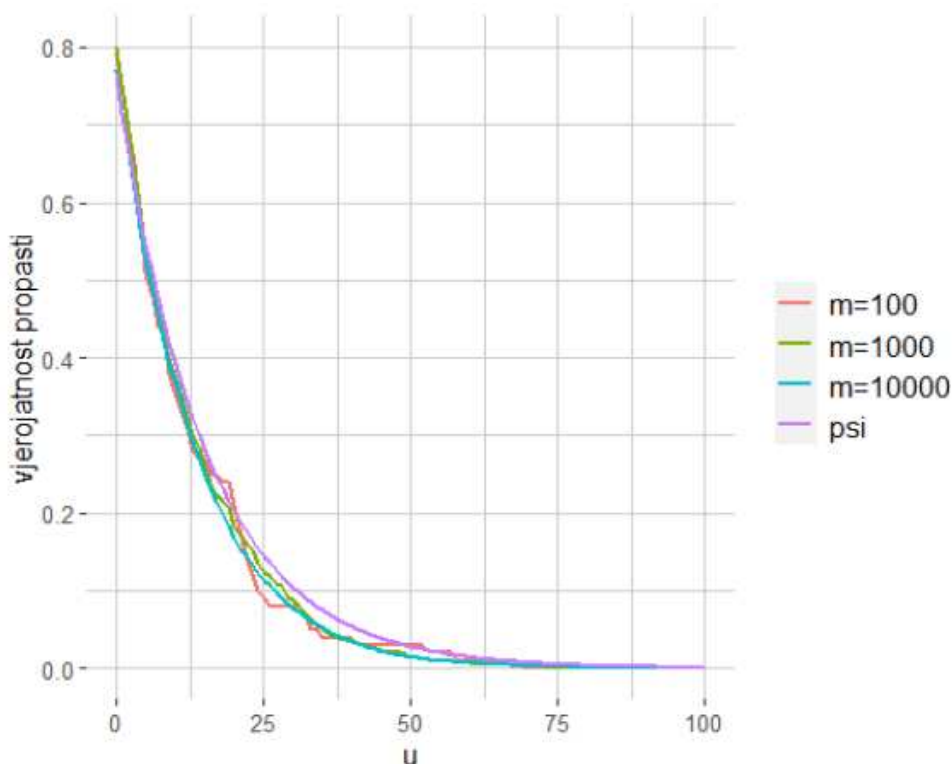
Promotrimo prvo kako na iznos vjerojatnosti propasti utječe variranje parametara  $\alpha$  i  $\beta$ , uz  $p = \frac{1}{2}$  i fiksno očekivanje jednako  $\mu = 3$ .



Slika 4.3:  $\psi(u)$  za različite  $\alpha$  i  $\beta$

Slika 4.3 upućuje na to da što su  $\alpha$  i  $\beta$  bliže po vrijednosti, to je odgovarajuća vjerojatnost propasti manja. Konkretno, za  $u = 10$  vjerojatnosti propasti iznose  $\psi(10) = 0.3626359$  za  $\alpha = 2/7$  i  $\beta = 2/5$ ,  $\psi(10) = 0.4447398$  za  $\alpha = 1/5$  i  $\beta = 1$  te  $\psi(10) = 0.5075013$  u slučaju kada je  $\alpha = 5/29$  i  $\beta = 5$ .

Za kraj ovog primjera, pogledajmo kako se ponašaju procijenjene vrijednosti  $\psi_n(u)$  u odnosu na samu vjerojatnost propasti  $\psi(u)$ , koje su granice 95% pouzdanog intervala za  $m = 10000$  te koliko je simulacija potrebno provesti kako bi međusobna udaljenost tih granica bila jednaka 0.01 ili manja, za isplate čija je funkcija gustoće oblika  $f(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1-p)\beta e^{-\beta x}$ ,  $p = \frac{3}{4}$ ,  $\alpha = \frac{3}{11}$ ,  $\beta = 1$ . Kao i u primjeru prikazanom na slici 4.1  $\psi(u)$  ćemo procijeniti pomoću  $\psi_n(u)$  za  $n = 1000$  te ćemo promotriti koliko se procjene razlikuju ovisno o broju provedenih simulacija  $m$ .



Slika 4.4:  $\psi(u)$  za različite  $m$

Usporedimo li slike 4.1 i 4.4, procjene dobivene za  $m = 1000$  i  $m = 10000$  u slučaju isplata čija je distribucija kombinacija eksponencijalnih distribucija djeluju nepreciznije od procjena dobivenih za iste vrijednosti  $m$  te eksponencijalno distribuirane isplate. Promotrimo dobivene rezultate za inicijalni kapital  $u = 25$ : vjerojatnost propasti jednaka je



$\psi(25) = 0.1450785$  dok su procijenjene vrijednosti jednake  $\psi_n(25) = 0.09$  za  $m = 100$ ,  $\psi_n(25) = 0.124$  za  $m = 1000$  te  $\psi_n(25) = 0.1142$  za  $m = 10000$ . Uz  $m = 10000$  aproksimativni 95% pouzdani interval je  $[0.1081138, 0.1205825]$ , a kada bismo htjeli da njegova širina bude manja od 0.01, trebali bismo provesti  $m = 15546$  simulacija.

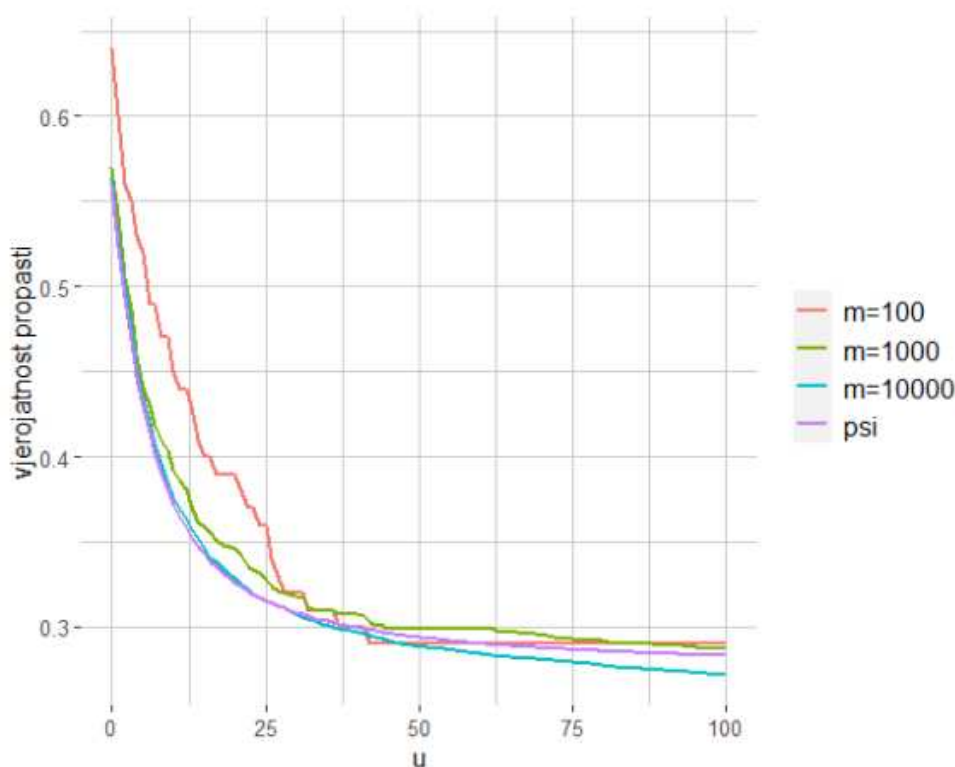
**Primjer 4.0.3.** Vratimo se sada na miješane Poissonove procese. Na početku poglavlja 3.2 pokazali smo da i kod miješanih Poissonovih procesa eksponencijalno distribuirane isplate vode do jednostavnog izraza za vjerojatnost propasti, uz dodatnu pretpostavku na distribuciju slučajne varijable intenziteta  $\Lambda$  Poissonovog procesa. Podsjetimo se, kada je  $\Lambda$  eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla s matematičkim očekivanjem  $\mu_\Lambda$ , kada su isplate eksponencijalno distribuirane s matematičkim očekivanjem  $\mu$  i  $c$  stopa premije, tada sigurnosna premija iznosi  $\rho = \frac{c - \mu\mu_\Lambda}{\mu\mu_\Lambda}$ , a vjerojatnost propasti, kao funkcija inicijalnog kapitala  $u$ , jednaka je

$$\psi(u) = \frac{(u^2 - (u + \mu)\mu(1 + \rho))e^{-(1+\rho)} + \mu^2(1 + \rho)e^{-u/\mu}}{(u - \mu(1 + \rho))^2}.$$

Vjerojatnost propasti  $\psi(u)$  ponovno procjenjujemo pomoću  $\psi_n(u)$ . Jedina razlika u odnosu na primjer 4.0.1 je što sada simuliramo  $m$  intenziteta Poissonovog procesa iz eksponencijalne distribucije s parametrom  $1/\mu_\Lambda$  te potom simuliramo vremena između dvaju uzastopnih isplata iz eksponencijalne distribucije čiji su parametri realizacije slučajne varijable  $\Lambda$ . I ovaj slučaj možemo iskoristiti za usporedbu procjena vjerojatnosti propasti i njene stvarne vrijednosti.

Uzmimo  $\mu = 3$ ,  $\mu_\Lambda = 1$ ,  $\rho = 0.3$ ,  $n = 1000$  i  $m \in \{100, 1000, 10000\}$ . Krivulje vjerojatnosti propasti za navedene parametre prikazane su na slici 4.5.

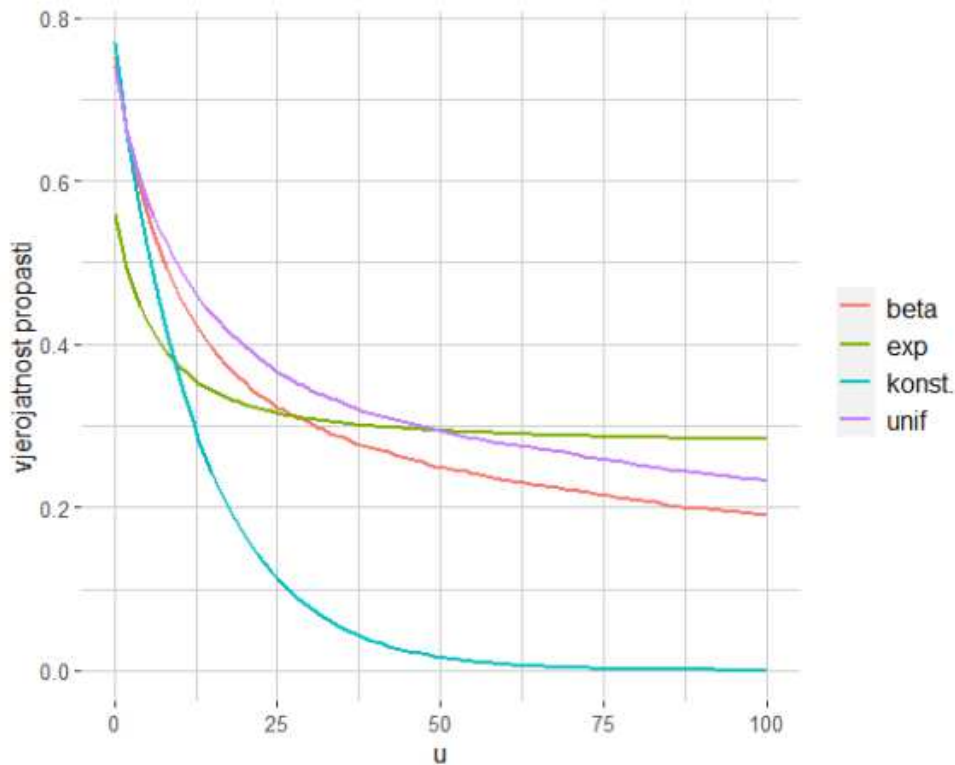
Iako graf funkcije  $\psi_n$  za  $m = 10000$  približno prati graf funkcije  $\psi$ , za veće vrijednosti inicijalnog kapitala ipak dolazi do odstupanja, za razliku od slučaja prikazanog na slici 4.1. Također su vidljiva i veća odstupanja kod krivulja  $\psi_n$  za  $m = 100$  i  $m = 1000$ . Kada je inicijalni kapital jednak  $u = 25$ ,  $\psi(25) = 0.3157492$ ,  $\psi_n(25) = 0.3155$  kada je  $m = 10000$ ,  $\psi_n(25) = 0.328$  kada je  $m = 1000$  te  $\psi_n(25) = 0.36$  kada je  $m = 100$ . Neka je  $m = 10000$ . 95% pouzdani interval je  $[0.3064641, 0.3246776]$ , a ograničimo li njegovu širinu na 0.01, minimalan broj simulacija koje bismo morali provesti bit će  $m = 33181$ .

Slika 4.5:  $\psi(u)$  za različite  $m$ 

Kada slučajna varijabla intenziteta  $\Lambda$  Poissonovog procesa ne dolazi iz eksponencijalne distribucije, odgovarajuću vjerojatnost propasti više ne možemo egzaktno izračunati, ali i dalje možemo promotriti njene procjene. Neke od mogućih distribucija također su uniformna distribucija na segmentu  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , u oznaci  $U(a, b)$ , ili beta distribucija,  $B(\alpha, \beta)$ . Slučajna varijabla  $\Lambda$  dolazi iz beta distribucije s parametrima  $\alpha, \beta > 0$  ako joj je funkcija gustoće jednaka  $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$  za  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , a 0 inače.

Slika 4.6 prikazuje slučaj kada isplate ponovno dolaze iz eksponencijalne distribucije s matematičkim očekivanjem  $\mu = 3$ , sigurnosna premija iznosi  $\rho = 0.3$ ,  $n = 1000$  i  $m = 10000$ . Uspoređujemo vjerojatnost propasti, u ovisnosti o inicijalnom kapitalu, za tri različite distribucije intenziteta  $\Lambda$ :  $\Lambda \sim \exp\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $\Lambda \sim U\left(\frac{1}{3}, 1\right)$  i  $\Lambda \sim B(2, 1)$ . Dodatno, radi usporedbe vjerojatnosti propasti "običnih" i miješanih Poissonovih procesa, promatramo i vjerojatnost propasti za slučaj kada je  $N$  Poissonov proces s konstantnim intenzitetom  $\lambda = \frac{2}{3}$ . Možemo uočiti velike razlike u vjerojatnosti propasti Poissonovog procesa s konstantnim intenzitetom u odnosu na vjerojatnost propasti miješanih Poissonovih procesa. Dok su vjerojatnosti propasti za miješane Poissonove procese, bez obzira na distribuciju intenziteta  $\Lambda$ ,

bliske po vrijednosti te se uglavnom kreću između 0.2 i 0.4, vjerojatnost propasti "običnog" Poissonovog procesa znatno je manja. Primjerice, za  $u = 25$ ,  $\psi(25) = 0.1124281$  kada je intenzitet neslučajan,  $\psi(25) = 0.3157492$  u slučaju kada  $\Lambda$  dolazi iz eksponencijalne distribucije,  $\psi_n(25) = 0.3225$  za  $\Lambda \sim B(2, 1)$  te  $\psi_n(25) = 0.3664$  za  $\Lambda \sim U\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ .



Slika 4.6: usporedba  $\psi(u)$  za različite distribucije intenziteta  $\Lambda$

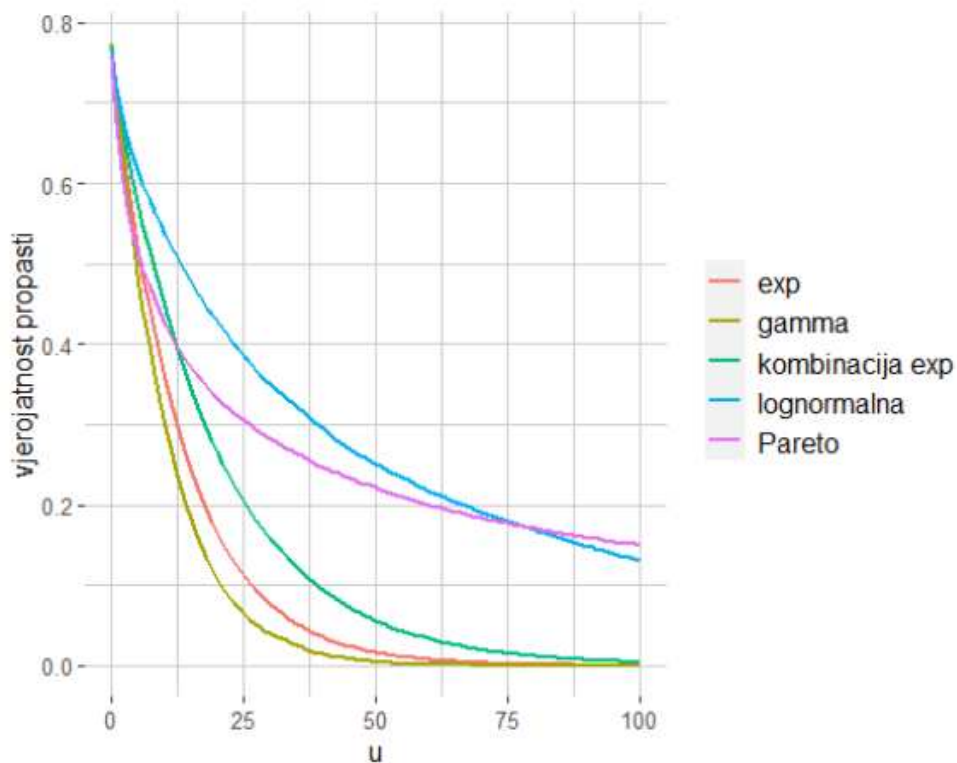
**Primjer 4.0.4.** Na kraju ćemo još usporediti vjerojatnost propasti za nekoliko različitih distribucija isplata. Parametri distribucija odabrani su tako da pripadna očekivanja budu jednaka. Osim eksponencijalne distribucije te kombinacije eksponencijalnih distribucija, za koje ćemo prikazati stvarnu vjerojatnost propasti u ovisnosti o inicijalnom kapitalu  $u$ , promatramo i gama distribuciju. Također ćemo promotriti i dvije distribucije poznate po teškim repovima - lognormalnu i Paretovu distribuciju. Za distribucije čije vjerojatnosti propasti ne znamo egzaktno izračunati prikazujemo krivulje njihovih procijenjenih vrijednosti,  $\psi_n(u)$ , za  $n = 1000$  i  $m = 10000$ .

Kažemo da slučajna varijabla  $Z$  ima lognormalnu distribuciju s parametrima  $\mu$  i  $\sigma$  ako vrijedi  $\ln Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Tada je njeno očekivanje jednako  $\mathbb{E}[Z] = e^{\mu + \sigma^2/2}$ . Slučajna varijabla

$Z$  je Paretove distribucije s parametrom  $\alpha$  ukoliko je  $\ln Z \sim \exp(\alpha)$  te joj matematičko očekivanje iznosi  $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ , za  $\alpha > 1$ . Očekivanje slučajne varijable  $Z \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  jednako je  $\alpha/\beta$ , a njenu funkciju gustoće definiramo kao u primjeru 3.2.5.

Konkretno, promatramo sljedeće slučajeve:

- i. isplate su eksponencijalno distribuirane s matematičkim očekivanjem jednakim 3;
- ii. distribucija isplata je kombinacija eksponencijalnih distribucija uz  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{5}$  i  $\beta = 1$ ;
- iii. isplate su gama distribuirane s parametrima  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;
- iv. isplate imaju lognormalnu distribuciju za  $\mu = 0$  i  $\sigma = \sqrt{2 \ln 3}$ ;
- v. isplate dolaze iz Paretove razdiobe s parametrom  $\frac{1}{3}$ .

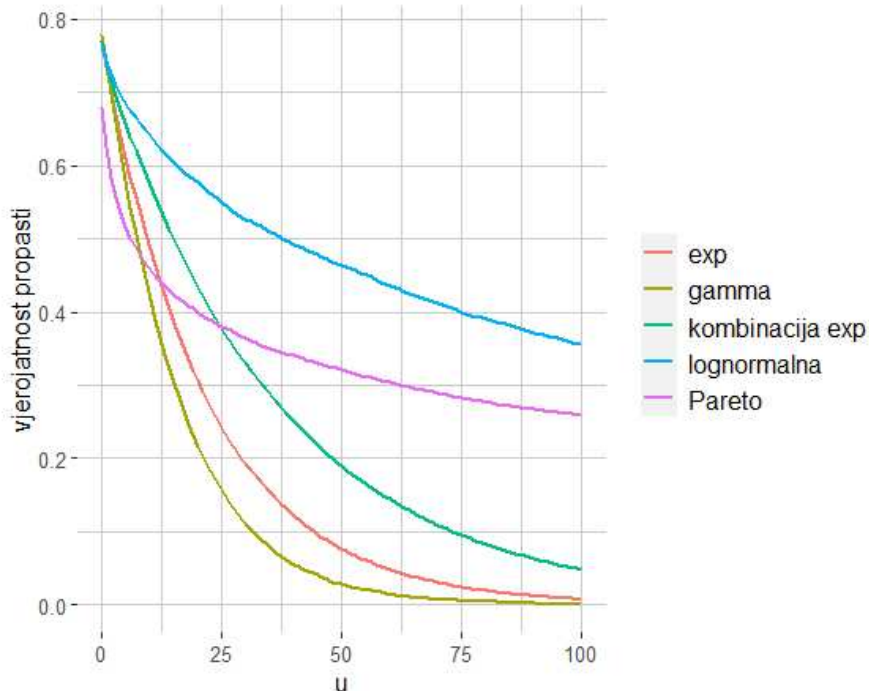


Slika 4.7: usporedba  $\psi(u)$  za različite distribucije isplata,  $\mu = 3$

Primijetimo, za male vrijednosti inicijalnog kapitala vjerojatnost propasti, odnosno procjena iste, visoka je neovisno o distribuciji te razlike među distribucijama nisu jako izražene. Promatramo li pak vjerojatnost propasti za veće vrijednosti inicijalnog kapitala, razlike između distribucija s teškim repovima i ostalih distribucija postaju znatno uočljivije. Uzmemo li za iznose inicijalnog kapitala  $u = 10$  te  $u = 40$ , dobivene vrijednosti vjerojatnosti propasti i njenih procjena, u istom poretku distribucija kao prije, su sljedeće:

- i.  $\psi(10) = 0.356438$ ,  $\psi(40) = 0.03546222$ ;
- ii.  $\psi(10) = 0.4447398$ ,  $\psi(40) = 0.09415735$ ;
- iii.  $\psi(10) = 0.2981$ ,  $\psi(40) = 0.0146$ ;
- iv.  $\psi(10) = 0.5361$ ,  $\psi(40) = 0.2956$ ;
- v.  $\psi(10) = 0.4253$ ,  $\psi(40) = 0.2466$ .

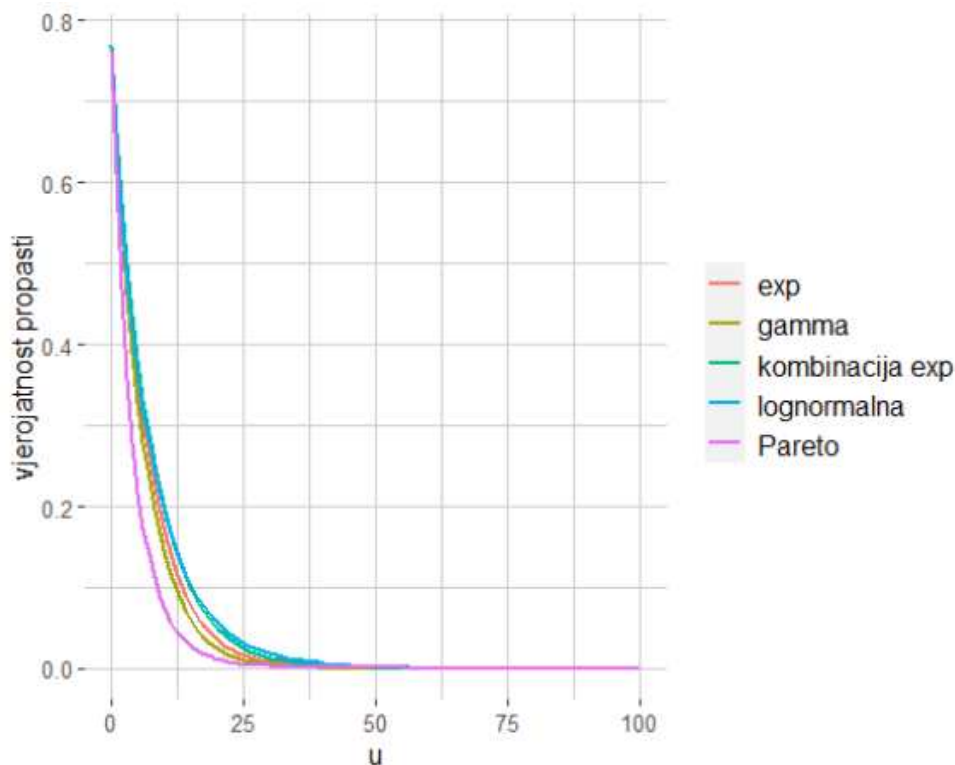
Pogledajmo još hoće li se odnosi među vjerojatnostima propasti promijeniti promijenimo li parametre distribucija. Promotrit ćemo dva slučaja - u prvom ćemo parametre odrediti tako da matematičko očekivanje isplata, za sve distribucije, bude jednako 5, dok će u drugom slučaju ono iznositi  $\frac{3}{2}$ .



Slika 4.8: usporedba  $\psi(u)$  za različite distribucije isplata,  $\mu = 5$

Slika 4.8 prikazuje prvi slučaj. Pri tome su korišteni parametri  $\lambda = \frac{1}{5}$  za eksponencijalnu distribuciju;  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{9}$ ,  $\beta = 1$  za kombinaciju eksponencijalnih distribucija;  $\alpha = \sqrt{5}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  za gama distribuciju;  $\mu = 0$ ,  $\sigma = \sqrt{2 \ln 5}$  za lognormalnu distribuciju te  $\alpha = \frac{5}{4}$  za Paretovu distribuciju. Najveća promjena u odnosu na slučaj prikazan slikom 4.7 vidljiva je u ponašanju vjerojatnosti propasti isplata s Paretovom distribucijom. Odnos vjerojatnosti propasti za ostale je distribucije ostao nepromijenjen, ali su razlike u vrijednostima veće.

Drugi je slučaj prikazan na slici 4.9. Parametar eksponencijalne distribucije je  $\lambda = \frac{2}{3}$ ; parametri kombinacije eksponencijalnih distribucija su  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 1$ ; gama distribucije  $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ; lognormalne distribucije  $\mu = 0$ ,  $\sigma = \sqrt{2 \ln \frac{3}{2}}$ , dok je parametar Pareto distribucije  $\alpha = 3$ . Uzevši manje matematičko očekivanje isplata i razlike među vjerojatnostima propasti za različite distribucije su manje. Ponovno je najveća promjena uočljiva kod vjerojatnosti propasti za Paretovu distribuciju čija se krivulja sada nalazi ispod krivulja vjerojatnosti propasti za ostale distribucije.



Slika 4.9: usporedba  $\psi(u)$  za različite distribucije isplata,  $\mu = \frac{3}{2}$

# Bibliografija

- [1] R. G. Bartle i D. R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, Wiley New York, 2000.
- [2] P. J. Boland, *Statistical and probabilistic methods in actuarial science*, CRC Press, 2007.
- [3] H. Cramér, *Collected works. 2*, Springer, 1994.
- [4] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1*, John Wiley & Sons, 1968.
- [6] J. Grandell, *Mixed poisson processes*, CRC Press, 1997.
- [7] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene i M. Denuit, *Modern actuarial risk theory: using R*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [8] O. Thorin, *Ruin probabilities when the claim amounts are gamma distributed*, Försäkringstekniska forskningsnämnden **69** (1986).

# Sažetak

Cilj ovoga diplomskog rada bio je definirati osnovne pojmove vezane uz vjerojatnost propasti osiguravajućeg društva i dokazati neke ključne rezultate za Poissonove procese, kao što su Pollaczek-Khinchinova formula, Lundbergova nejednakost, Cramér-Lundbergova aproksimacija te izraz za vjerojatnost propasti kada isplate dolaze iz eksponencijalne distribucije. Neke od navedenih rezultata poopćili smo i za slučaj miješanih Poissonovih procesa. Također smo analizirali ovisnost vjerojatnosti propasti o parametrima modela, distribuciji isplata i distribuciji intenziteta miješanog Poissonovog procesa. Naposljetku smo opisali jedan način procjene vjerojatnosti propasti te razmotrili preciznost dobivenih procjena.



# Summary

The aim of this thesis was to define the main concepts connected with the probability of ruin and to prove some of the key results for Poisson processes such as the Pollaczek-Khinchine formula, the Lundberg inequality, the Cramér-Lundberg approximation and the expression for the probability of ruin when the claims are exponentially distributed. We generalized some of those results for the mixed Poisson case as well. We also analyzed the dependence of the probability of ruin on the model parameters, the distribution of the claims and the distribution of the intensity of the mixed Poisson process. Finally, we described how to estimate the probability of ruin and discussed whether the estimation is accurate.

# Životopis

Rođena sam 1. prosinca 1996. u Zagrebu. 2011. godine, nakon završene Osnovne škole „Malešnica”, upisala sam II. gimnaziju u Zagrebu. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na državnim natjecanjima iz matematike na kojima sam osvojila jedno prvo i dva druga mjesta. 2015. godine dobila sam i Posebno priznanje za izniman rezultat na državnoj maturi. Iste sam godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu te potom 2018. godine i diplomski studij Financijska i poslovna matematika. 2018. i 2020. godine dobila sam Priznanje za izniman uspjeh na studiju, a 2020. godine i Dekaničinu nagradu.