Teorem četiri boje

Bukulin, Anamarija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Bukulin

TEOREM ČETIRI BOJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Može li se proizvoljna zemljopisna karta obojiti sa najviše četiri boje tako da susjedne zemlje budu različito obojane?

Problem četiri boje kojeg je prvi formulirao Francis Guthrie 1852. godine po mnogo čemu je poseban i vrlo važan povijesni problem. Među ostalim, postavio je temelje za razvoj čitave matematičke grane - teorije grafova. Jednostavnost iskaza i zanimljivost teme intrigirali su pune 124 godine mnoge matematičare - od amatera, preko studenata do profesionalaca, ali dokaz nisu mogli pronaći. To je vrlo zanimljiv podatak, pogotovo s obzirom na činjenicu da je pripadni teorem pet boja dokazan relativno brzo i bez puno muke. Taj glasoviti problem četiri boje uspješno je savladan tek 1976. godine i to uz pomoć računala. Upravo iz tog razloga ispravnost dokaza i dalje je osporavana od strane mnogih kritičara koji postavljaju sljedeće pitanje: može li se dokaz dobiven uz pomoć računala uopće prihvatiti kao pravi dokaz?

Povijest problema četiri boje započinje sredinom 19. stoljeća kada je matematičar Francis Guthrie bojeći kartu Engleske došao do zanimljive slutnje, da će onome koji želi obojati bilo koju kartu na način da su susjedne zemlje obojane različitim bojama, biti potrebne samo četiri boje. Zamolio je svog mlađeg brata Fredericka za pomoć. Frederick je bratovu slutnju proslijedio svom profesoru Augustusu de Morganu. Iako oduševljen problemom četiri boje, profesor ga nije znao riješiti, pa se obratio kolegi sir Williamu Rowanu Hamiltonu. Za razliku od de Morgana, Hamilton Problem uopće nije smatrao zanimljivim. De Morgan se konzultirao i sa drugim kolegama, ali nakon 1860. godine interes matematičara za problemom četiri boje jenjava.
Dvadesetak godina kasnije, matematičar Arthur Cayley objavljuje kratku analizu Problema u jednom geografskom časopisu te tako ponovno pokreće zaboravljenu temu.
Samo godinu dana nakon Cayleyjevog članka, 1879. godine, sir Alfred Bray Kempe objavljuje potpuni dokaz Problema u [8]. Kempeova verzija dokaza bila je prihvaćena punih jedanaest godina, sve do 1890. kada je Percy John Heawood u njoj pronašao pogrešku.
Iako se ispostavilo da Kempeov dokaz nije bio ispravan, iz njega su proizašle neke ideje koje će se kasnije pokazati kao vrlo bitne kod konačnog rješavanja Problema. Polazeći

od Kempeovih ideja, Heawood je tada dokazao teorem pet boja. To se pokazalo kao relativno jednostavan zadatak, ali teorem četiri boje još uvijek ostaje nedokazan. Mnogi matematičari su na njemu radili godinama, ali do rješenja nisu mogli doći.
Idući veliki doprinos rješenju Problema daje George David Birkhoff sa svojim radom [2] u kojem unaprjeđuje Kempeove tehnike te uvodi pojam reducibilnih prstenova.
Iako su u međuvremenu razni matematičari na određeni način dali svoj doprinos u pronalaženju dokaza, ključan preokret se dogodio tek šezdesetih godina 20. stoljeća sa pojavom ideja njemačkog matematičara Heinricha Heeschea. Među ostalim, njegova ideja je bila pronaći takozvani neizbježan skup reducibilnih konfiguracija. Još važnije, Heesch je formalizirao poznate metode provjeravanja reducibilnosti te uočio da su neke od njih dovoljno mehaničke da bi se mogle izvesti računalom.
1965. godine Heinrich Heesch i Karl Dürre po prvi puta koriste računalo u testiranju reducibilnosti raznih konfiguracija. Nakon toga Heesch surađuje sa Wolfgangom Hakenom, a potom se njihovi putevi razilaze te Haken nastavlja raditi na razvoju računalnih programa zajedno sa Kennethom Appelom. U to su doba Appel i Haken proučavali skupove koji su imali i do milijun elemenata. Sve svoje nade su polagali u elektronička računala koja bi im omogućila rapidni napredak u rješavanju problema.
1976. godine je uz pomoć računala IBM 360 i konačno u potpunosti dokazan teorem četiri boje. Iako su u međuvremenu otkrivene pojedine pogreške u programu, one su ispravljene te 1989. godine Appel i Haken objavljuju članak u kojem opisuju svoje metode korištene pri dokazivanju Teorema.
Naravno, s vremenom se pojavilo još poboljšanih jednostavnijih verzija dokaza, a za očekivati je da će ih se pojavljivati i još. Međutim, svima njima je zajedničko da se oslanjaju na upotrebu računala.
Pri pisanju ovog povijesnog dijela koristili smo [3], [5], [7], [11] i [6].

Ovaj diplomski rad podijeljen je u tri poglavlja. Prvo poglavlje rada bavi se topološkom formulacijom Teorema. Problemu najprije pristupamo na intuitivnoj razini, a potom definiramo potrebne topološke koncepte. Slijedi iskaz topološke verzije Teorema te prvi koraci njegovog iznimno zahtjevnog dokaza.
Kako je sami teorem četiri boje u svojoj biti kombinatorne naravi, u drugom poglavlju prelazimo sa topološkog gledišta na kombinatorno. Najprije definiramo potrebne pojmove, a potom i dovršavamo skicu dokaza Teorema.
U posljednjem, trećem poglavlju ovog rada precizno je iskazan i dokazan teorem pet boja. Pri tome dajemo i uspoređujemo njegova tri različita dokaza koji se mogu pronaći redom u [3], [10] i [1].

Poglavlje 1

Topološka formulacija teorema četiri boje

1.1 Heuristička razmatranja i definicije osnovnih pojmova

U ovom potpoglavlju slijedimo izlaganje iz poglavlja 2 knjige [3].
Najprije ćemo pojmove karta, granica, (dopustivo) bojanje itd. uvesti intuitivno i matematički neprecizno.

Što bi uopće značilo obojati kartu? *Obojati kartu* znači svakoj zemlji na karti pridružiti jednu boju. Ako pak svaku zemlju na karti obojamo tako da su susjedne zemlje obojane različitim bojama, takav način bojanja ćemo zvati *dopustivo bojanje*. Dopustivo bojanje gdje koristimo najviše n boja (gdje je $n \in \mathbb{N}$), zovemo *dopustivo n-bojanje*. Dakle, kada govorimo o teoremu četiri boje, primarno nas zanima dopustivo 4-bojanje.
Kartu definiramo kao particiju beskonačne ravnine na konačno mnogo zemalja koje su međusobno odijeljene granicama. Točke u kojima se te granice sijeku zvat ćemo *multinacionalnim točkama*. *Granice* su linije o kojima intuitivno razmišljamo kao o skupovima točaka u ravnini koji se mogu prelaziti u jedinici vremena takvi da su bez prekida, bez stacionarnih točaka i ne mogu presjeći sami sebe. Karta je u potpunosti određena svojim granicama.

Napomena 1.1.1. *U ovom trenutku pojam granice koristimo još uvijek vrlo neprecizno. Razlike između pojmova granične linije i granice bit će nam jasne pri kraju ovog potpoglavlja kada ćemo iste pojmove i strogo matematički definirati.*

Ovako definirana karta se po značenju podudara sa pojmom zemljopisne karte koja

je zapravo jedno pravokutno područje. Zbog značenjskog podudaranja pojmova, dopustivo n-bojanje ravnine jednako je dopustivom n-bojanju pravokutne karte. Na sličan način možemo govoriti i o dopustivom bojanju Zemljine kugle.
Kako intuitivno izgleda tranzicija od sfere do ravnine? Odaberemo zemlju na sferi (Zemaljskoj kugli) te izvadimo komadić, tako da u unutrašnjosti te zemlje nastane mala rupica. Ostatak sfere rastegnemo u pravokutnu kartu. Tada problem dopustivog bojanja sfere postaje jednak problemu dopustivog bojanja ravnine.

No ipak nećemo moći promatrati bilo kakve karte. Zanimat će nas samo one karte koje su *povezane*, pa nećemo dopuštati da karta sadrži zemlje koje se sastoje od dvije ili više odvojenih regija (npr. Aljaska koja je odvojena od ostatka teritorija Sjedinjenih Američkih Država (slika 1.1), Kanarski otoci odvojeni od ostatka teritorija Španjolske itd.)

Slika 1.1: Aljaska i ostatak teritorija Sjedinjenih Američkih Država[1]

Sada je potrebno prethodne definicije koje su bile na intuitivnoj razini pretvoriti u strogi matematički jezik. Najprije ćemo krenuti sa definicijom pojmova koji će nam biti vrlo korisni pri definiranju svih ostalih koncepata.

Definicija 1.1.2. *Neka je C podskup ravnine* $\mathbb{R}^2$.

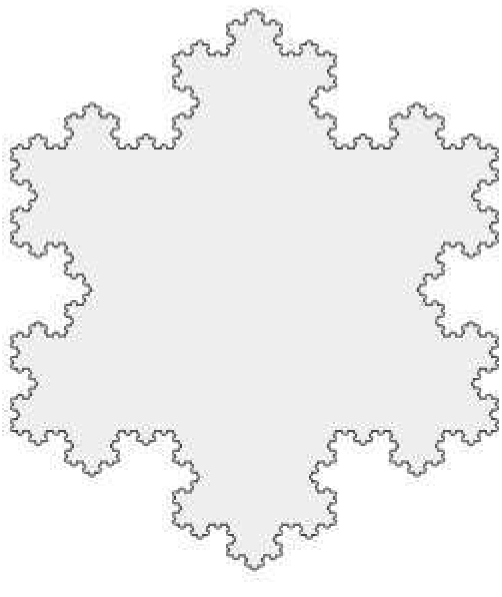
[1]Slika preuzeta sa `https://images.app.goo.gl/o98As2zdgakEsCea9` (15.08.2020.)

(i) *C zovemo* ***luk****, ako postoji injektivna i neprekidna funkcija* $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *takva da vrijedi* $C = \mathrm{Im}(c)$.

(ii) *C zovemo* ***jednostavna zatvorena krivulja*** *ili* ***zatvorena Jordanova krivulja****, ako postoji neprekidna funkcija* $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *takva da* $c(0) = c(1)$*, restrikcija funkcije* $c|_{[0,1\rangle}$ *je injekcija i vrijedi* $C = \mathrm{Im}(c)$.

(iii) *C zovemo* ***jednostavna krivulja*** *ako je ili luk ili zatvorena Jordanova krivulja.*

Definicija 1.1.2 je intuitivna, ali istovremeno i vrlo općenita jer pojam jednostavne krivulje uključuje i nigdje glatku (tj. nigdje diferencijabilnu) Kochovu pahuljicu (pogledajte sliku 1.2) kao i Osgoodovu krivulju koja ima pozitivnu površinu (pogledajte sliku 1.3). Međutim, za naša razmatranja problema četiri boje takva definicija će biti dovoljna.

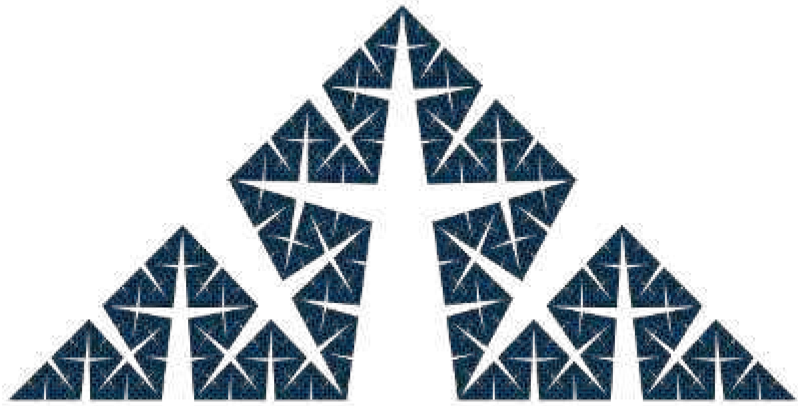


Slika 1.2: Kochova pahuljica[2]

Napomena 1.1.3. *Luk povezuje dvije različite točke u ravnini koje nazivamo njegovim* rubnim *točkama. Točke nekog luka koje nisu rubne nazivat ćemo* unutrašnje *točke luka. Skup svih unutrašnjih točaka luka B označavat ćemo sa* $\overset{\circ}{B}$.

[2]Slika preuzeta sa `https://hr.wikipedia.org/wiki/Kochova_krivulja` (26.08.2020.)

[3]Slika preuzeta sa `https://en.wikipedia.org/wiki/Osgood_curve` (26.08.2020.)



Slika 1.3: Osgoodova krivulja [3]

Najkraći put između dvije različite točke $\mathbf{x}_0$ *i* $\mathbf{x}_1$ *zvat ćemo* (ravna) dužina *od* $\mathbf{x}_0$ *do* $\mathbf{x}_1$. *Općenito,* ravni *luk je dužina koja povezuje svoje rubne točke.*

Prije nego nastavimo, potrebno je istaknuti nekoliko definicija topološki vrlo važnih objekata i ideja.

Kažemo da je skup točaka u ravnini *ograničen*, ako je u potpunosti sadržan u nekom pravokutniku. Skup je *neograničen*, ako ne postoji neki pravokutnik koji ga sadrži.
Točka $\mathbf{x}$ u ravnini $\mathbb{R}^2$ je *granična točka* skupa M, ako svaki otvoreni krug sa središtem u $\mathbf{x}$ sadrži barem jednu točku koja pripada skupu M i barem jednu točku koja ne pripada skupu M. Skup svih graničnih točaka skupa M zovemo *granica ili rub skupa* M.
Točka $\mathbf{x}$ je *unutrašnja točka* skupa M, ako pripada skupu M, ali nije granična točka toga skupa. U tom slučaju, kažemo da je skup M *okolina* točke $\mathbf{x}$.
Kažemo da je skup M *otvoren* (u $\mathbb{R}^2$), ako ne sadrži niti jednu svoju graničnu točku. S druge strane, skup je *zatvoren* (u $\mathbb{R}^2$), ako sadrži sve svoje granične točke. Važno je napomenuti da postoje skupovi koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni.
Konačno, kažemo da je skup *kompaktan*, ako je zatvoren i ograničen.

Najjednostavniji primjer otvorenog skupa u $\mathbb{R}^2$ je skup

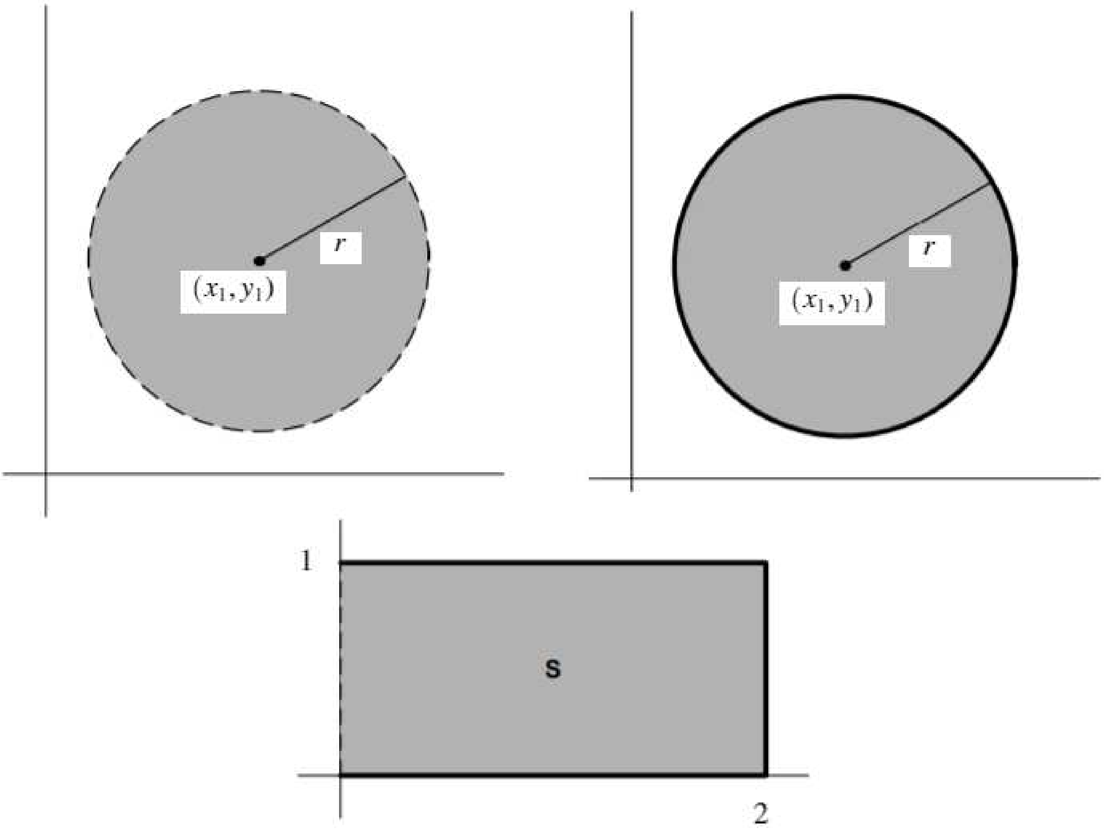
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < r^2\},$$

tj. otvoreni krug u $\mathbb{R}^2$ sa središtem u $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ radijusa r.
Skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq r^2\},$$

tj. zatvoreni krug u $\mathbb{R}^2$ sa središtem u $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ radijusa r je jedan primjer zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^2$.

Skup $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ nije niti zatvoren niti otvoren.
Navedene primjere otvorenog, zatvorenog i niti otvorenog niti zatvorenog skupa pogledajte na slici 1.4.



Slika 1.4: S lijeva na desno: otvoren, zatvoren te niti otvoren niti zatvoren skup[4]

Grafički, granice između dvije multinacionalne točke su zapravo lukovi definirani u 1.1.2. Te se granice na karti mogu pojaviti u beskonačno mnogo međusobnih položaja, čiji je rezultat beskonačno mnogo različitih karata. Pa tako npr. između Lihtenštajna, Austrije i Švicarske postoje dvije granice između dvije multinacionalne točke (slika 1.5). Može se, također, dogoditi da jedna zemlja okružuje drugu, kao što je slučaj sa Italijom koja u potpunosti okružuje San Marino. Također je moguće da takva zatvorena granica dodiruje

[4]Slika preuzeta iz [4] (26.08.2020.)

neku multinacionalnu točku itd.

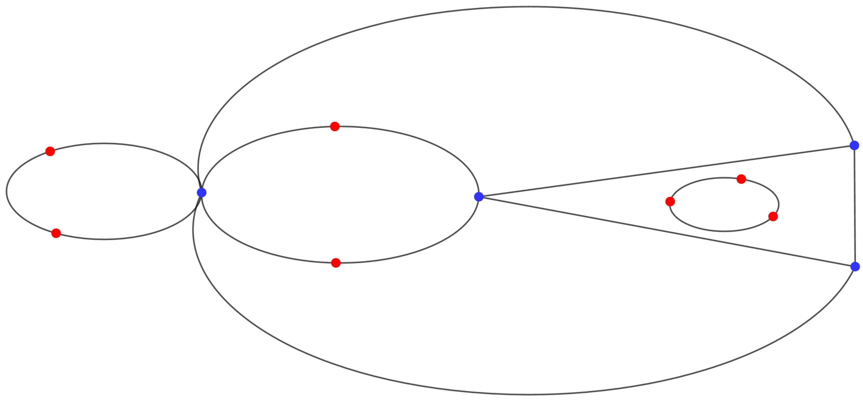
Slika 1.5: Dvije multinacionalne točke povezane sa 2 granice[5]

Sa takvim je kartama izrazito nezgodno matematički manipulirati. Kako bismo si olakšali posao, poslužit ćemo se jednom dosjetkom. Naime, na karte ćemo uvesti jedan dodatni element - tzv. *granične prepreke*.
Postupak je takav da ako su dvije multinacionalne točke povezane sa više granica, onda svaku granicu podijelimo uz pomoć granične prepreke, a svaku zatvorenu granicu podijelimo sa tri granične prepreke. U nastavku ćemo multinacionalne točke također smatrati graničnim preprekama. Dakle, opisanim postupkom ćemo postići da su svake dvije granične prepreke povezane najviše jednim lukom.
Za ilustraciju gore opisanog postupka pogledajte sliku 1.6. Na slici su plavom bojom označene multinacionalne točke, a crvenom bojom granične prepreke.

Ova nam dosjetka omogućava sljedeću, vrlo važnu definiciju.

Definicija 1.1.4. ***Karta*** *$\mathcal{L}$ je konačan skup lukova u ravnini $\mathbb{R}^2$ takav da je presjek bilo koja dva različita luka u $\mathcal{L}$ ili prazan ili jednak zajedničkoj rubnoj točki tih lukova.*

[5]Slika preuzeta sa `https://www.economist.com/1843/2019/01/16/liechtenstein-the-magic-princedom` (15.08.2020.)



Slika 1.6: Ilustracija dodavanja graničnih prepreka na kartu

Prije sljedeće definicije potrebno je uvesti još jedan pojam: za danu kartu $\mathcal{L}$, lukove koji pripadaju karti $\mathcal{L}$ zovemo *bridovi* karte $\mathcal{L}$.

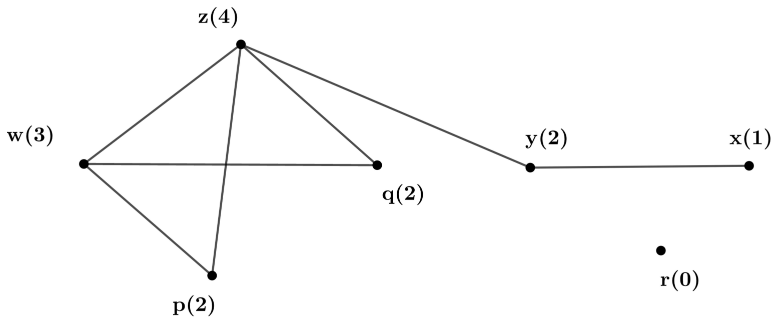
Definicija 1.1.5. *Neka je $\mathcal{L}$ karta. Točku u ravnini $\mathbb{R}^2$ koja je rubna točka nekog brida u $\mathcal{L}$ zovemo* ***vrh*** *karte $\mathcal{L}$. Skup svih vrhova karte $\mathcal{L}$ označavamo sa $E_{\mathcal{L}}$.*

Konačni ravninski graf definiramo kao uređeni par $\mathbf{G} = (E_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$. Općenito, u analizi problema četiri boje, koristi se upravo terminologija iz teorije grafova. Pa se tako umjesto granična prepreka i luk, koriste pojmovi *vrh* i *brid*. Iz istog razloga pojmovi karta i *graf*[6] imaju isto značenje te ćemo ih koristiti kao sinonime.

U budućim razmatranjima bit će nam korisna i sljedeća definicija: broj bridova karte $\mathcal{L}$ kojima je vrh $\mathbf{x}$ karte $\mathcal{L}$ rubna točka nazivamo *stupanj* od $\mathbf{x}$ i označavamo sa $d_{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$.

Pogledajte sliku 1.7 i pripadni graf koji se sastoji od sedam vrhova $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ te sedam bridova $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{p}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{z}, \mathbf{q}\}$ i $\{\mathbf{q}, \mathbf{w}\}$. Vrh $\mathbf{x}$ je rubna točka samo jednog brida $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, stoga je stupanj vrha $\mathbf{x}$ jednak 1, tj. $d(\mathbf{x}) = 1$. Vrh $\mathbf{w}$ je rubna točka tri brida $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{p}\}$ i $\{\mathbf{w}, \mathbf{q}\}$, stoga je stupanj vrha $\mathbf{w}$ jednak 3, tj. $d(\mathbf{w}) = 3$. Vrh r je izolirani vrh, tj. on nije rubna točka niti jednog brida, pa je stupanj toga vrha jednak 0. Kao što je dogovoreno, u budućim razmatranjima grafove sa takvim vrhovima nećemo uzimati u obzir. Stupnjeve ostalih vrhova grafa pogledajte u pripadnim zagradama na slici.

[6] Kada ćemo u budućim razmatranjima spominjati graf, to će uglavnom podrazumijevati konačni ravninski graf (u većini naših slučajeva bez izoliranih vrhova).



Slika 1.7: Primjer grafa koji sadrži 7 bridova i 7 vrhova, a pripadni stupnjevi vrhova označeni su u zagradama

Mi u ovom trenutku još uvijek nemamo preciznu definiciju *zemlje* neke karte. Kako bismo je precizno matematički definirali, u tome će nam pomoći slijedeći pojmovi.

Sve točke karte $\mathcal{L}$ koje pripadaju nekom bridu karte $\mathcal{L}$ nazivamo *neutralnim točkama*, a skup svih neutralnih točaka je pak *neutralni skup* karte $\mathcal{L}$ kojeg označavamo sa $N_{\mathcal{L}}$. Neutralnu točku $\mathbf{x}$ karte L zovemo *točka na granici* zemlje L ako postoji luk iz $\mathbf{x}$ do točke koja pripada skupu L tako da čitav luk (ne uključujući točku $\mathbf{x}$) leži unutar skupa L.
Također bit će korisno znati što su to putovima povezan skup te komponenta povezanosti putevima nekog skupa. Kažemo da je skup M *putovima povezan*, ako svake dvije različite točke toga skupa možemo povezati lukom koji čitav leži unutar skupa M. Skup L je *komponenta povezanosti putevima* skupa M, ako je skup L neprazan i putevima povezan podskup skupa M, te ako niti jedan element skupa L ne može biti povezan sa nekim elementom iz njegovog komplementa $M \setminus L$ sa lukom koji čitav leži u M.

Ovo je pogodan trenutak da spomenemo jedan od fundamentalnih teorema povezanih sa teoremom četiri boje. Riječ je o Jordanovom teoremu o krivulji koji ćemo navesti bez dokaza.

Teorem 1.1.6. (Jordanov teorem o krivulji)
Neka je K zatvorena Jordanova krivulja. Tada je $\mathbb{R}^2 \setminus K$ disjunktna unija dva otvorena skupa $I(K)$ (tzv. unutrašnje područje od *K) i $A(K)$ (tzv.* vanjsko područje od *K) te vrijedi slijedeće:*

(i) $I(K)$ je ograničen skup, dok je $A(K)$ neograničen.

(ii) $I(K)$ i $A(K)$ su putovima povezani skupovi.

(iii) Svaki luk koji povezuje točku iz skupa $I(K)$ sa točkom iz skupa $A(K)$ ima najmanje jednu zajedničku točku sa K.

(iv) Svaka okolina točke krivulje K ima neprazan presjek sa $I(K)$ i sa $A(K)$.

Slijede definicije i ostalih pojmova potrebnih za razumijevanje problema četiri boje.

Definicija 1.1.7. *Neka je $\mathcal{L}$ karta.* ***Zemlja*** *u $\mathcal{L}$ je komponenta povezanosti putevima skupa $\mathbb{R}^2 \setminus N_{\mathcal{L}}$ (komplement neutralnog skupa od $\mathcal{L}$). Skup svih zemalja karte $\mathcal{L}$ označavamo sa $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.*

Definicija 1.1.8. *Za kartu kažemo da je* ***povezana****, ako svaki par vrhova možemo povezati lukom koji se sastoji od spojenih bridova.*

Definicija 1.1.9. *Neka je $\mathcal{L}$ karta, te L zemlja karte $\mathcal{L}$.*

(i) Brid koji čitav leži unutar granica skupa L zovemo ***granična linija*** *od L.*

(ii) Skup svih graničnih linija od L zovemo ***granica*** *od L i označavamo sa $\mathcal{G}_L$.*

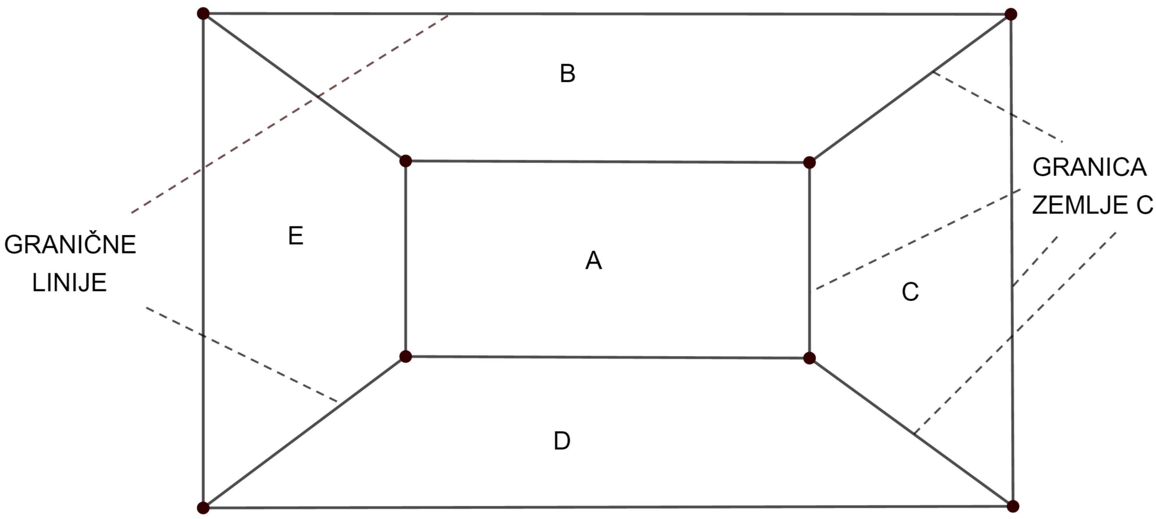
Granica zemlje je karta čiji je neutralni skup jednak graničnoj liniji zemlje te je svaka neutralna točka karte točka na granici zemlje.

Definicija 1.1.10. *Neka je $\mathcal{L}$ karta.* ***Zajednička granica*** *dvije zemlje u $\mathcal{L}$ je brid koji pripada granicama obiju zemalja.*

Definicija 1.1.11. *Dvije zemlje na karti koje imaju zajedničku granicu zovemo* ***susjednim zemljama*** *ili kraće* ***susjedima****.*

Za ilustraciju prethodno definiranih pojmova pogledajte sliku 1.8. Na prikazanoj karti nalazi se pet zemalja A, B, C, D i E sa pripadnim graničnim linijama i granicama. Uočite da npr. zemlja B i zemlja E imaju zajedničku granicu, pa su te zemlje susjedne, dok npr. zemlje E i C nemaju zajedničkih granica, pa one nisu susjedne.

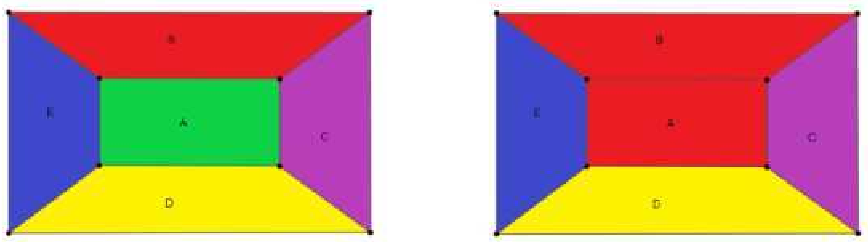
Na samom kraju ovog potpoglavlja matematički ćemo definirati i (dopustivo) n-bojanje karte.



Slika 1.8: Primjer karte sa označenim zemljama, graničnim linijama i granicama

Definicija 1.1.12. *Neka je $\mathcal{L}$ karta i neka je $n \in \mathbb{N}$.* **n-*bojanje*** *karte $\mathcal{L}$ definiramo kao funkciju $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \to \{1, \dots, n\}$.*
Ako susjedne zemlje L_1 i L_2 imaju pridružene različite funkcijske vrijednosti (tj. $\varphi(L_1) \neq \varphi(L_2)$), za takvo n-bojanje kažemo da je ***dopustivo****.*

Na slici 1.9 možete vidjeti već ranije prikazanu kartu koja je sada obojana. Na lijevoj strani radi se dopustivom 5-bojanju te karte jer su susjedne zemlje obojane različitim bojama, dok 4-bojanje karte na desnoj strani nije dopustivo. Možete primijetiti da su susjedne zemlje A i B obojane istom bojom.



Slika 1.9: S lijeva ne desno: dopustivo 5-bojanje te 4-bojanje koje nije dopustivo

Napomena 1.1.13. :

(i) *Kada govorimo o četiri specifične boje, najčešće pomislimo na plavu, žutu, zelenu i crvenu. No mi ćemo te četiri boje označavati brojevima* 1, 2, 3 *i* 4. *Takva će nam oznaka dati više matematičke slobode te će nam omogućiti da bez ikakvih poteškoća svoja razmatranja proširimo i na više od četiri boje.*

(ii) *Dva n-bojanja* φ_1 *i* φ_2 *ćemo smatrati ekvivalentnima ako se razlikuju jedino po permutaciji boja, tj. ako postoji permutacija* σ *skupa* $\{1, \ldots, n\}$ *takva da je* $\sigma \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

1.2 Iskaz Teorema i minimalni kontraprimjeri

U ovom potpoglavlju slijedimo izlaganje iz poglavlja 3 knjige [3].

Slijedi iskaz topološke verzije Teorema.

Teorem 1.2.1. *Za svaku kartu postoji dopustivo* 4*-bojanje te karte.*

Dok je, kao što smo već spomenuli, dokaz ovog teorema izrazito opsežan i kompliciran, sama ideja dokaza je poprilično jednostavna. Riječ je o verziji klasične matematičke indukcije koja se bazira na traženju *minimalnih kontraprimjera*.
Dakle, pretpostavimo da postoji karta koja se ne može obojiti sa samo četiri boje. Među svim takvim kartama odaberemo onu sa najmanjim brojem zemalja, te taj broj označimo sa f. Karte sa najviše 4 zemlje se očito mogu obojiti sa 4 boje, stoga sigurno vrijedi $f > 4$. Takvu promatranu kartu sa f zemalja za koju ne postoji dopustivo 4-bojanje nazivamo minimalnim kontraprimjerom. Dokazati teorem 1.2.1 sada znači dokazati da minimalni kontraprimjer ne postoji.

Dokaz započinjemo promatranjem topoloških karakteristika minimalnog kontraprimjera te traženjem karata sa tim svojstvima. Najprije ćemo se koncentrirati na one karte koje zbog svojih svojstava sigurno ne mogu biti minimalni kontraprimjeri, pa ih stoga možemo isključiti iz potrage.

Propozicija 1.2.2. *Na karti koja je minimalni kontraprimjer ne postoji zemlja sa manje od* 4 *susjeda.*

Dokaz. U dokazu ove propozicije koristit ćemo sljedeću lemu čiji dokaz nećemo navesti, ali on se može pronaći u [3].

Lema 1.2.3. *Za svaku kartu sa najmanje dvije zemlje vrijedi da svaka zemlja te karte ima susjednu zemlju.*

Minimalni kontraprimjer ima najmanje pet zemalja. Koristeći lemu 1.2.3 zaključujemo da svaka od tih zemalja ima najmanje jednog susjeda. Kada bi na takvoj karti postojala zemlja L sa najviše tri susjeda, tada bi L mogli spojiti sa susjednom zemljom L' tako da uklonimo jednu od njihovih zajedničkih granica. Na taj način bismo dobili kartu koja ima jednu zemlju manje. Za takvu kartu postoji dopustivo 4-bojanje. Potom vratimo uklonjenu granicu, a zemlju L' ostavimo obojanu u istu boju od prijašnje spojene zemlje. Svakako, tada za L ostaje slobodna još jedna boja. □

Iz prethodne propozicije slijedi da na traženoj karti svaka zemlja ima najmanje 4 susjeda. Npr. San Marino (koji je u potpunosti okružen drugom zemljom, Italijom) (slika 1.10) te Andora koja ima samo dva susjeda (Francusku i Španjolsku) su primjeri zemalja koje nemaju to svojstvo.

Slika 1.10: Država San Marino je u potpunosti okružena Italijom[7]

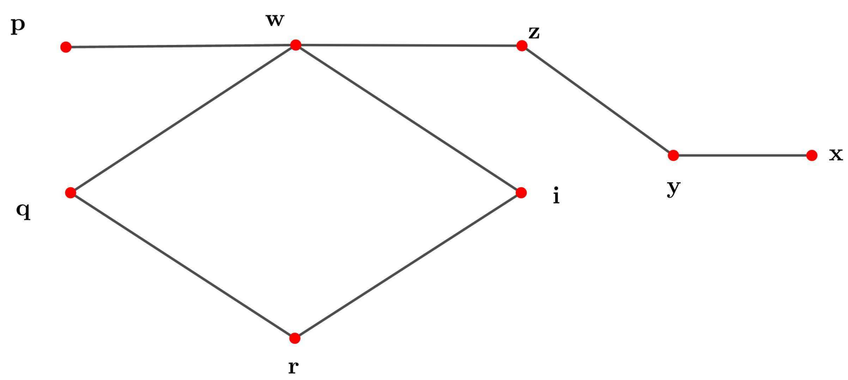
Prije nego nastavimo sa rezultatima koji govore o svojstvima minimalnih kontraprimjera, potrebno je uvesti još nekoliko pojmova.

Kažemo da je karta $\mathcal{K}$ *kontura*, ako je njezin neutralni skup $N_{\mathcal{L}}$ zatvorena Jordanova krivulja. Bridovi karte koji formiraju konturu nazivaju se *bridovi konture*. U slučaju kada

[7]Slika preuzeta sa `https://www.mapsofworld.com/answers/world/is-san-marino-country/` (15.08.2020.)

je karta jednaka konturi, bridovi konture zapravo su neutralni skup karte, no ovako uvedena terminologija kasnije će nam biti od koristi. *Unutrašnje (vanjsko) područje* konture jednako je unutrašnjem (vanjskom) području njezinog neutralnog skupa.
Vrh karte $\mathcal{L}$ nazivamo *završnim vrhom* karte $\mathcal{L}$, ako je on vrh samo jednog brida u $\mathcal{L}$. *Završni brid* je brid koji je incidentan[8] sa završnim vrhom.
Bridovi koji nisu niti bridovi konture niti završni bridovi nazivaju se *mostovi*.

Pogledajte sliku 1.11 i pripadni graf (kartu) koji se sastoji od osam vrhova $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ i $\mathbf{i}$ te osam bridova $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$, $\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{z},\mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{w},\mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{w},\mathbf{q}\}$, $\{\mathbf{q},\mathbf{r}\}$, $\{\mathbf{r},\mathbf{i}\}$ i $\{\mathbf{i},\mathbf{w}\}$.
Vrh $\mathbf{x}$ je rubna točka samo jednog brida $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$, stoga je vrh $\mathbf{x}$ završni vrh, a brid $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ je završni brid. Vrh $\mathbf{p}$ i brid $\{\mathbf{w},\mathbf{p}\}$ su drugi primjer završnog vrha i završnog brida na danom grafu. Bridovi $\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}$ i $\{\mathbf{z},\mathbf{w}\}$ su primjeri bridova koje nazivamo mostovi.



Slika 1.11: Graf na kojem promatramo završne vrhove, završne bridove i mostove

U sljedećem teoremu dana su neka fundamentalna svojstva minimalnog kontraprimjera. Dokaz teorema se može pronaći u [3].

Teorem 1.2.4. *:*

(*i*) *Ako postoji minimalni kontraprimjer sa f zemalja, onda postoji minimalni kontraprimjer sa f zemalja koji nema mostove niti završne bridove.*

[8] Brid je incidentan sa svojim rubnim vrhovima.

(*ii*) *Minimalni kontraprimjer koji nema mostove niti završne bridove je povezana karta.*

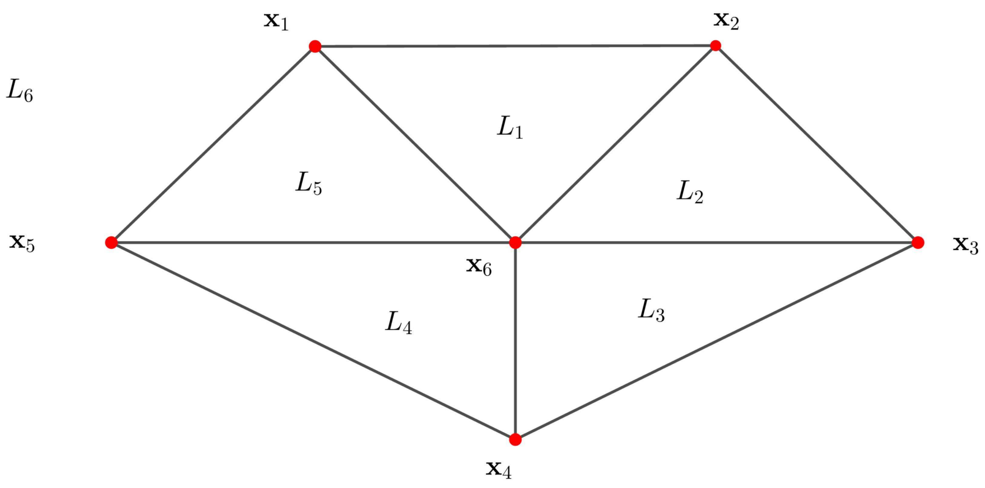
(*iii*) *Ako postoji minimalni kontraprimjer* $\mathcal{L}$ *sa* f *zemalja, onda postoji minimalni kontraprimjer sa* f *zemalja takav da je stupanj svakog vrha barem* 3.

(*iv*) *Pretpostavimo da je karta* $\mathcal{L}$ *minimalni kontraprimjer koji nema mostove. Također pretpostavimo da svaki vrh u* $\mathcal{L}$ *je stupnja većeg ili jednakog* 3. *Tada dvije različite zemlje na karti* $\mathcal{L}$ *imaju najviše jednu zajedničku granicu.*

Prethodna razmatranja možemo sažeti u slijedeću definiciju.

Definicija 1.2.5. *Pretpostavimo da karta nije prazna, povezana je te ne sadrži mostove niti završne bridove. Također pretpostavimo da svake dvije različite zemlje na toj karti imaju najviše jednu zajedničku granicu. Takvu kartu nazivamo* ***regularnom kartom****.*

Na slici 1.12 pogledajte jedan primjer regularne karte. Uočite da vrh $\mathbf{x}_6$ ima stupanj 5, dok su svi ostali vrhovi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_5$ stupnja 3. Kasnije ćemo pokazati da za svaku regularnu kartu vrijedi da je stupanj svakog njenog vrha barem 3. Osim toga, vidjet ćemo da svaka regularna karta sadrži barem 4 zemlje. Regularna karta iz našeg primjera ima 6 zemalja $L_1, \ldots, L_6$.



Slika 1.12: Regularna karta

Sljedeći vrlo važan teorem nam omogućava da potragu za minimalnim kontraprimjerom ograničimo na regularne karte.

Teorem 1.2.6. *Ako minimalni kontraprimjeri postoje, onda među njima postoji i regularna karta.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{L}$ minimalni kontraprimjer. $\mathcal{L}$ mora imati najmanje pet zemalja, stoga nije prazna karta. Točnije, $\mathcal{L}$ sadrži konture. Štoviše, možemo pretpostaviti da $\mathcal{L}$ nema mostove niti završne bridove (teorem 1.2.4 (*i*)). U tom slučaju, $\mathcal{L}$ je također povezana karta (teorem 1.2.4 (*ii*)). Dva brida konture koji se dodiruju pri vrhu stupnja 2 uvijek je moguće spojiti. Naime, vrijedi sljedeća lema čiji dokaz možete pronaći u [3]:

Lema 1.2.7. *Neka je karta $\mathcal{L}$ minimalni kontraprimjer te neka je vrh* $\mathbf{x}$ *na karti $\mathcal{L}$ stupnja* 2*, te neka su B_1 i B_2 dva brida karte $\mathcal{L}$ incidentna sa* $\mathbf{x}$*. Tada rubne točke od B_1 i B_2 različite od* $\mathbf{x}$ *nisu povezane bridom u $\mathcal{L}$. Slijedi da je skup*

$$\mathcal{L}' = (\mathcal{L} \setminus \{B_1, B_2\}) \cup \{B_1 \cup B_2\}$$

karta koja je minimalni kontraprimjer.

Takvim postupkom ponovno dobivamo brid konture. Dakle, možemo pretpostaviti da $\mathcal{L}$ sadrži samo vrhove stupnja barem 3. U tom slučaju, dvije različite zemlje karte $\mathcal{L}$ imaju najviše jednu zajedničku granicu (teorem 1.2.4 (*iv*)). □

S obzirom da je, zahvaljujući teoremu 1.2.6, dovoljno promatrati samo regularne karte, u nastavku navodimo još nekoliko rezultata koji govore o njihovim svojstvima.

Propozicija 1.2.8. *:*

(*i*) *Svaki vrh regularne karte je stupnja barem* 3.

(*ii*) *Regularna karta ima barem* 4 *zemlje.*

Dokaz. Dokaz ovih tvrdnji pogledajte u [3]. □

Slijede i posljednja dva rezultata u ovom poglavlju.

Teorem 1.2.9. *Na regularnoj karti koja je minimalni kontraprimjer, granica svake zemlje jednaka je skupu bridova konture.*

Skica dokaza. U skici dokaza ovog teorema koristit ćemo sljedeći teorem čiji dokaz nećemo navesti, ali on se može pronaći u [3].

Teorem 1.2.10. *Za karte koje imaju najmanje dvije zemlje vrijedi da granica svake zemlje sadrži barem jednu konturu.*

Neka je $\mathcal{L}$ minimalni kontraprimjer te L zemlja karte $\mathcal{L}$. Karta $\mathcal{L}$ sadrži najmanje četiri zemlje, pa sigurno postoji kontura $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}_L$ (teorem 1.2.10). Trebamo pokazati $\mathcal{K} = \mathcal{G}_L$ (iz čega bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $L \subset I(\mathcal{K})$).
Pretpostavimo da postoji brid $B \in \mathcal{G}_L \backslash \mathcal{K}$.
Sve točke brida B su točke na granici zemlje L te postoji zemlja L' takva da su sve točke brida B također točke na granici zemlje L'. Koristeći prethodne tvrdnje i regularnost karte $\mathcal{L}$, može se pokazati da $I(\mathcal{K})$ sadrži najmanje dvije zemlje.
Kontura sadrži najmanje tri brida. Ponovno koristeći svojstvo regularnosti, može se pokazati da postoje minimalno tri zemlje u $A(\mathcal{K})$. Nadalje, niti jedna takva zemlja ne može imati zajedničku granicu sa zemljom iz $I(\mathcal{K})$ različitom od L.
Konstruirajmo sada dvije nove karte $\mathcal{L}^i$ i $\mathcal{L}^a$. U prvoj karti spojimo sve zemlje iz $I(\mathcal{K})$ sa zemljom L. Na taj način dobivamo zemlju L^i. U drugoj karti $\mathcal{L}^a$ sve zemlje sadržane u $A(\mathcal{K})$ spojimo sa zemljom L. Na taj način dobivamo zemlju L^a. Tada svaka od ovih karata ima manje zemalja od karte $\mathcal{L}$ te stoga postoji dopustivo 4-bojanje tih karata. Izaberemo dopustivo 4-bojanje φ^i karte $\mathcal{L}^i$ te dopustivo 4-bojanje φ^a karte $\mathcal{L}^a$ i to tako da vrijedi $\varphi^i(L^i) = \varphi^a(L^a)$. Sada definiramo $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \to \{1, \ldots, 4\}$ na sljedeći način:

$$\varphi(\tilde{L}) = \begin{cases} \varphi^a(L^a), & \tilde{L} = L \\ \varphi^a(\tilde{L}), & L \neq \tilde{L} \subset I(\mathcal{K}) \\ \varphi^i(\tilde{L}), & \tilde{L} \subset A(\mathcal{K}) \end{cases}$$

Time smo definirali dopustivo 4-bojanje karte $\mathcal{L}$. Dakle, dobivena je kontradikcija sa našom pretpostavkom. □

Korolar 1.2.11. *Na karti koja je minimalni kontraprimjer stupanj vrha jednak je broju zemalja za koje je taj vrh točka na granici.*

Poglavlje 2

Kombinatorna formulacija teorema četiri boje

U ovom poglavlju slijedimo izlaganja iz poglavlja 4 i 5 knjige [3].

2.1 Osnovni pojmovi i rezultati

U svojim budućim razmatranjima primarno ćemo koristiti terminologiju teorije grafova. Kao što je već dogovoreno u prošlom poglavlju, kada kažemo graf, to se odnosi na konačni ravninski graf. U iznimnim ćemo slučajevima naglašavati atribut „ravninski” da bismo naznačili razliku u odnosu na „kombinatorni” graf. Pojmovi karta i graf i dalje imaju isto značenje te ćemo ih i dalje koristiti kao sinonime.

Pojam *strana grafa* će označavati zemlju promatrane karte. *Neograničena strana grafa* odgovara neograničenoj zemlji na karti, dok *ograničena strana* odgovara ograničenoj.
U našim razmatranjima pojavljivat će se i grafovi sa izoliranim vrhovima, ali nećemo promatrati grafove sa višestrukim bridovima i petljama.

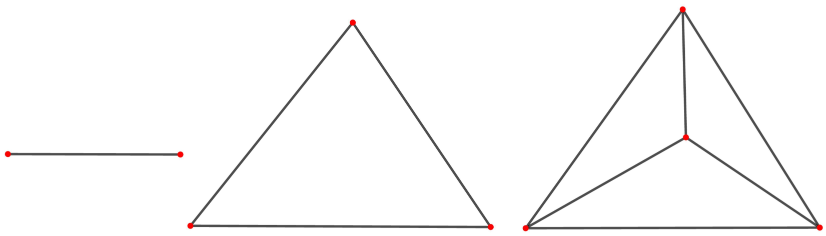
Definicija 2.1.1. *Kažemo da je graf* ***potpun****, ako za svaki par vrhova postoji brid koji ih povezuje.*

Teorem 2.1.2. *Potpuni ravninski grafovi imaju ili* 2 *ili* 3 *ili* 4 *vrha.*

Tipične primjere takvih grafova pogledajte na Slici 2.1.

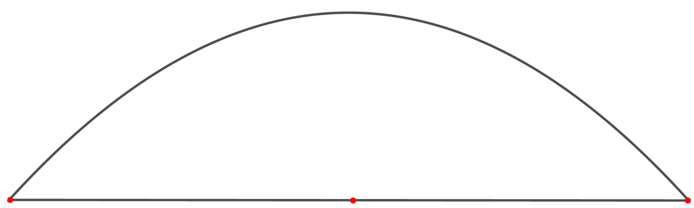
Teorem 2.1.3. *Ne postoji potpuni ravninski graf sa* 5 *vrhova.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema pogledajte u [3]. □



Slika 2.1: Potpuni (ravninski) grafovi sa 2, 3 i 4 vrha

Ako 3 različite točke u ravnini ne leže na istom pravcu, one formiraju potpuni graf kojeg nazivamo *(pravocrtni) trokut* (drugi graf na slici 2.1).
Općenito, potpuni graf sa 3 vrha ćemo nazivati *(krivuljni) trokut*. Primjer jednog krivuljnog trokuta kojemu vrhovi leže na istom pravcu pogledajte na slici 2.2.



Slika 2.2: (Krivuljni) trokut

Potpune grafove sa 4 vrha ćemo nazivati *potpuni četverokuti*.

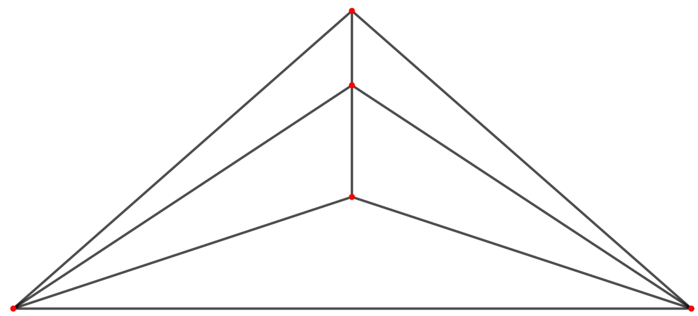
Definicija 2.1.4. *Kažemo da je ravninski graf* ***zasićen****, ako nije pravi podgraf*[1] *nekog dru-*

[1]Podgraf grafa je graf kojemu su skup vrhova i skup bridova podskupovi skupa vrhova i skupa bridova

gog ravninskog grafa koji ima isti skup vrhova.

Drugim riječima, ravninski graf je zasićen, ako se grafu ne mogu dodati novi bridovi bez da se poveća skup vrhova.

Dok su potpuni grafovi zasićeni, obratna tvrdnja općenito ne vrijedi. Pogledajte sliku 2.3 na kojoj se se nalazi zasićeni graf koji nije potpun, jer potpuni graf sa 5 vrhova ne postoji!



Slika 2.3: Zasićeni graf koji nije potpun

Sljedeća zanimljiva karakterizacija zasićenog grafa će nam kasnije u radu biti od koristi. Dokaz možete pronaći u [3], a mi tvrdnju teorema ovdje navodimo bez dokaza.

Teorem 2.1.5. *Graf sa najmanje tri vrha je zasićen ako i samo ako su granice svih njegovih strana (krivuljni) trokuti.*

Definicija 2.1.6. ***Pravocrtni*** *graf je graf čiji su svi bridovi (ravne) dužine.*

Teorem 2.1.7. (Wagner-Faryjev teorem)
Svaki graf možemo transformirati u pravocrtni graf koristeći homeomorfizam[2] *ravnine u sebe samu.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema pogledajte u [3]. □

originalnog grafa.

[2]*Homeomorfizam* je neprekidno bijektivno preslikavanje ravnine takvo da mu je inverzno preslikavanje također neprekidno. Kažemo da su objekti *homeomorfni*, ako postoji homemorfizam između njih.

Ovaj teorem jedan je od najbitnijih rezultata teorije grafova. Vrlo je važan i za naša razmatranja jer predstavlja konačni rastanak od općenitog topološkog gledišta te nam omogućava da svoju istragu ograničimo samo na one karte čiji su bridovi (ravne) dužine.

U kombinatornom pristupu Teoremu glavnu ulogu imaju rezultati raznih prebrojavanja. Prije svega, za proizvoljnu kartu $\mathcal{L}$ uvodimo sljedeće oznake:

- $v_{\mathcal{L}}$ označava broj vrhova
- $e_{\mathcal{L}}$ označava broj bridova
- $f_{\mathcal{L}}$ označava broj zemalja (tj. strana grafa)

Jedan od važnijih alata u dokazu teorema pet boja (a onda, naravno, i za teorem četiri boje) bila je poznata Eulerova poliedarska formula.
Naime, za proizvoljnu nepraznu i povezanu kartu $\mathcal{L}$ vrijedi sljedeće:

$$v_{\mathcal{L}} - e_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{L}} = 2 \tag{2.1}$$

Pitate li se kakve veze imaju karte i poliedri? Eulerova poliedarska formula vrijedi za poliedre koji su homemorfni sa sferom. Granice poliedra možemo identificirati sa kartom na sferi, koja pak uz pomoć stereografije može biti projicirana u promatranu pravokutnu kartu.

Promatrajući strukturu grafa sa gledišta teorije grafova, on je određen samo sa svojim vrhovima i bridovima. Strane grafa su objekti proizašli iz vrhova i bridova. Dakle, ima smisla promatrati bojanje vrhova grafa. Sličan pristup imao je i Tait, koji je promatrao bojanje bridova (više o tome pročitajte u [3] na str. 134. − 137.).

Definicija 2.1.8. *Neka je* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *graf i neka je* $n \in \mathbb{N}$. **n−*bojanje vrhova*** *grafa* $\mathbf{G}$ *definiramo kao preslikavanje* $\chi : E \to \{1, \ldots, n\}$.
Kažemo da je takvo n-bojanje ***dopustivo****, ako svaka dva vrha koji su rubne točke jednog, istog brida karte* $\mathcal{L}$ *uvijek imaju pridružene različite funkcijske vrijednosti (tj. boje).*

Kada iskažemo i kombinatornu verziju teorema četiri boje, vidjet ćemo i koja je veza između bojanja vrhova i Teorema.

Na početku ovog potpoglavlja smo spomenuli da ćemo jednom definirati graf i u potpuno kombinatornom smislu. Sada je vrijeme da to i učinimo.

Definicija 2.1.9. ***Kombinatorni graf*** *je uređeni par* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *koji se sastoji od konačnog skupa E te konačnog skupa* $\mathcal{L}$ *dvočlanih podskupova skupa E. Nazivi će ostati isti kao i u slučaju ravninskih grafova. Elemente skupa E zovemo* ***vrhovi*** *grafa* $\mathbf{G}$*, a elemente skupa* $\mathcal{L}$ *zovemo* ***bridovi*** *grafa* $\mathbf{G}$*.*

U sljedećoj definiciji ćemo vidjeti kombinatorne verzije nekoliko bitnih pojmova iz teorije grafova koje smo već ranije definirali u topološkom smislu.

Definicija 2.1.10. *:*

(*i*) *Kažemo da je kombinatorni graf* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ ***potpun****, ako* $\mathcal{L}$ *sadrži sve dvočlane podskupove skupa E.*

(*ii*) ***Stupanj*** $d_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ *vrha* $\mathbf{x}$ *kombinatornog grafa* $\mathbf{G}$ *definiramo kao broj bridova grafa* $\mathbf{G}$ *kojima vrh* $\mathbf{x}$ *pripada.*

(*iii*) *Kombinatorni graf* $\mathbf{G}' = (E', \mathcal{L}')$ *zovemo* ***podgraf*** *kombinatornog grafa* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *ako* $E' \subset E$ *i* $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$*.*

(*iv*) *Kažemo da su kombinatorni grafovi* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *i* $\mathbf{G}' = (E', \mathcal{L}')$ ***izomorfni*** *ako postoji bijektivno preslikavanje* $\gamma : E' \to E$ *koje inducira bijekciju* $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}$*.*

(*v*) *Neka je dani graf* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *i* $n \in \mathbb{N}$*. Za n-bojanje* $\chi\colon E \to \{1, \ldots, n\}$ *grafa G kažemo da je* ***dopustivo****, ako svaka dva rubna vrha jednog, istog brida uvijek poprimaju različite funkcijske vrijednosti (boje), tj. ako za sve* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *vrijedi:*

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{L} \implies \chi(\mathbf{x}) \neq \chi(\mathbf{y})$$

Svaki ravninski graf i svaka karta određuju kombinatorni graf.

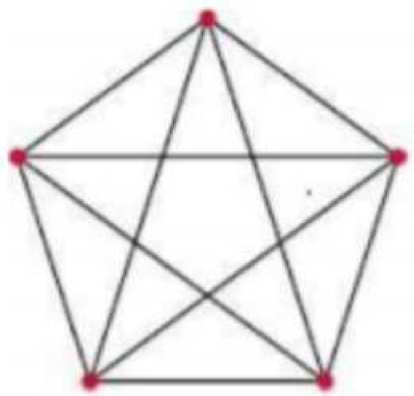
Definicija 2.1.11. *Neka je* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *ravninski graf. Kažemo da je kombinatorni graf* $\mathbf{G}^{\mathbf{b}} = (E, \mathcal{L}^b)$ ***pripadan*** *grafu* $\mathbf{G}$*, gdje* $\mathcal{L}^b$ *označava skup parova vrhova grafa* $\mathbf{G}$ *koji su povezani bridom u* $\mathbf{G}$*.*

Mogao bi nas zanimati odgovor na sljedeće pitanje. Je li svaki kombinatorni graf pripadan nekom ravninskom grafu? Općenito, to ne mora vrijediti jer proizvoljan konačni skup E ne mora biti skup točaka u ravnini.
Ako se ipak odlučimo za manje striktan pristup, moglo bi nas zanimati da li je svaki kombinatorni graf izomorfan nekom grafu koji je pripadan nekom ravninskom grafu. No odgovor i na ovo pitanje je ne. Kao primjer, pogledajmo kombinatorni graf $\mathbf{K}_5$[3] na slici 2.4. To je tzv. *graf Kuratowskog*. Kako ne postoji potpuni ravninski graf sa 5 vrhova, graf $\mathbf{K}_5$ ne može do na izomorfizam biti pripadan niti jednom ravninskom grafu.

To nas vodi do sljedeće definicije.

[3] K_n je potpuni kombinatorni graf sa n vrhova. [9]

[4] Slika preuzeta sa [9] (15.08.2020.)



Slika 2.4: Kombinatorni graf $\mathbf{K}_5$[4]

Definicija 2.1.12. ***Planarni graf*** *je kombinatorni graf koji je izomorfan sa grafom koji je pripadan nekom ravninskom grafu.*

Sada ćemo definirati još dva pojma, koja će nam biti od koristi u kasnijim razmatranjima.

Definicija 2.1.13. *Neka je* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *(ravninski ili kombinatorni) graf.*

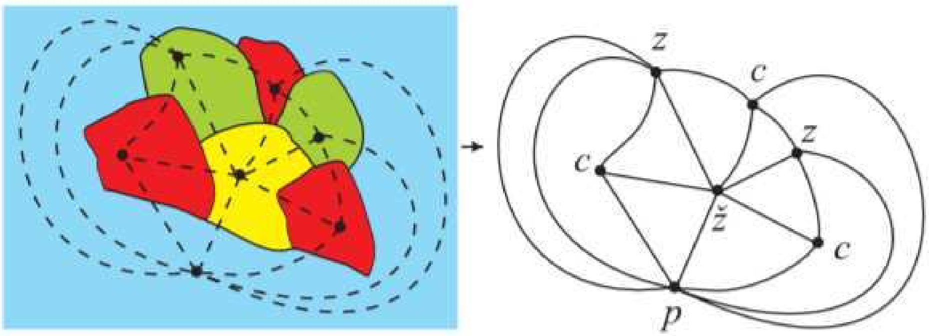
(*i*) *Kažemo da su dva vrha grafa* **G** ***susjedni vrhovi*** *ili samo* ***susjedi****, ako su međusobno različiti i ako su rubne točke istog brida iz* $\mathcal{L}$.

(*ii*) *Niz vrhova* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r)$ *zovemo* ***lanac (od*** $\mathbf{x}_1$ ***do*** $\mathbf{x}_r$***)*** *ako su svaka dva para uzastopnih vrhova međusobno različita te ako se svaki par uzastopnih vrhova sastoji od susjednih vrhova. Broj r zovemo* ***duljina*** *lanca, a bridove koji povezuju dva uzastopna vrha nazivamo* ***karikama*** *lanca.*

2.2 Dualna i kubna karta

Još je i sam Kempe u svom neuspješnom dokazu zaključio da bi se problem bojanja karte mogao formulirati samo pomoću vrhova i bridova (ravninskog) grafa.
Njegova ideja je bila sljedeća. Zamislimo da se u svakoj zemlji na karti istakne jedna točka (npr. glavni grad). A zatim se točke koje predstavljaju susjedne zemlje povežu linijama i

to na način da se linije ne sijeku te jedna linija prelazi samo jednu granicu. Glavni gradovi i dobivene linije formiraju vrhove i bridove grafa, kojeg nazivamo *dualnim* grafom za danu kartu.
Za ilustraciju prethodnih ideja pogledajte sliku 2.5.



Slika 2.5: Karta i pripadni dualni graf[5]

Sada ćemo prethodni postupak iskazati i strogo matematičkim jezikom.
Neka je dana karta $\mathcal{L}$. Označimo sa $L_r, r \in \{1, 2, \dots, f_{\mathcal{L}}\}$ zemlje karte $\mathcal{L}$, a sa $\tilde{k}$ označimo broj parova susjednih zemalja. U svakoj zemlji L_r izaberemo točku $\mathbf{x}_r$. Dodatno, za svaki par susjednih zemalja, izaberemo zajedničku granicu B_s te točku $\mathbf{y}_s \in \overset{\circ}{B}_s$, $s \in \{1, 2, \dots, \tilde{k}\}$. I konačno, za svaku zemlju L_r i svaku točku $\mathbf{y}_s$ na njezinoj granici izaberemo luk B_{rs} koji povezuje $\mathbf{x}_r$ sa $\mathbf{y}_s$ i koji čitav leži unutar L_r (osim rubne točke $\mathbf{y}_s$). Ti su lukovi izabrani tako da ne postoje dva takva luka koja imaju zajedničku unutrašnju točku. Za svaki par susjednih zemalja L_{r_1} i L_{r_2} dobivamo luk $B^*_{r_1 r_2} = B_{r_1 s} \cup B_{r_2 s}$ koji povezuje $\mathbf{x}_{r_1}$ i $\mathbf{x}_{r_2}$. Skup tako konstruiranih lukova označavamo sa $\mathcal{L}^*$.

Lema 2.2.1. *$\mathcal{L}^*$ je povezana karta.*

Dokaz. Dokaz ove leme pogledajte u [3]. □

Za kartu $\mathcal{L}^*$ koja je na gore opisani način izvedena iz karte $\mathcal{L}$ kažemo da je *dualna* karti $\mathcal{L}$. No, takav način konstrukcije dualne karte nije jedinstven. Zaista, za proizvoljnu kartu postoji puno karata koje su njoj dualne.

Slijedi i formalna definicija dualne karte.

[5] Slika preuzeta sa [5] (15.08.2020.)

Definicija 2.2.2. *Karta $\mathcal{L}^*$ je* **dualna** *karti $\mathcal{L}$, ako vrijede sljedeći uvjeti:*

(*i*) *Niti jedan vrh karte $\mathcal{L}^*$ nije neutralna točka karte $\mathcal{L}$.*

(*ii*) *Svaka zemlja karte $\mathcal{L}$ sadrži točno jedan vrh karte $\mathcal{L}^*$.*

(*iii*) *Dva vrha karte $\mathcal{L}^*$ su povezana bridom iz $\mathcal{L}^*$ ako i samo ako pripadaju susjednim zemljama karte $\mathcal{L}$.*

(*iv*) *Brid karte $\mathcal{L}^*$ sadrži samo one točke koje leže u dvije zemlje karte $\mathcal{L}$ koje sadrže vrhove tog brida, te još sadrži točno jednu unutrašnju točku zajedničke granične linije tih zemalja.*

Iz prethodne definicije, a koristeći lemu 2.2.1, možemo zaključiti da karte sa najmanje dvije zemlje sigurno imaju dualnu kartu. Također, može se pokazati da je prazna karta dualna kartama sa točno jednom zemljom.

Sada ćemo iskazati rezultat koji govori o broju vrhova, bridova i zemalja međusobno dualnih karti.

Lema 2.2.3. *Neka je $\mathcal{L}$ karta koja sadrži najmanje dvije zemlje, te neka je karta $\mathcal{L}^*$ dualna karti $\mathcal{L}$.*
Tada vrijedi:

$$v_{\mathcal{L}^*} = f_{\mathcal{L}} \tag{2.2}$$

$$e_{\mathcal{L}^*} \leq e_{\mathcal{L}} \tag{2.3}$$

$$f_{\mathcal{L}^*} \leq v_{\mathcal{L}} \tag{2.4}$$

Ako je karta $\mathcal{L}$ regularna, onda u (2.3) *i* (2.4) *vrijede jednakosti.*

Dokaz. Dokaz ove leme pogledajte u [3]. □

Prethodni rezultat ima vrlo važnu posljedicu.

Teorem 2.2.4. *Neka je $\mathcal{L}$ regularna karta, te neka je karta $\mathcal{L}^*$ dualna karti $\mathcal{L}$.*
Tada vrijedi slijedeće:
(*i*) *Karta $\mathcal{L}$ je dualna karti $\mathcal{L}^*$.*
(*ii*) *Karta $\mathcal{L}^*$ je regularna.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema pogledajte u [3] (poglavlje 4.4). □

Napomena 2.2.5. *U slučaju da smo dopustili da naši grafovi sadrže višestruke bridove i petlje, promatrana teorija dualnosti bila bi ponešto jednostavnija.*
Iz zemalja koje imaju više zajedničkih graničnih linija formirali bi se višestruki bridovi. A iz petlji bi nastali mostovi i završni bridovi.
U tom slučaju vrijedi da je graf dualan svakom svom dualnom grafu, ako je neprazan i povezan. Tada svojstvo regularnosti više nije nužno. (Pogledajte iskaz prethodnog teorema).

Sada ćemo se još više približiti traženim minimalnim kontraprimjerima.
U tome će nam pomoći jedna vrlo zanimljiva vrsta karata. Naime, još je i sam Cayley zaključio kako je dovoljno promatrati samo one karte kod kojih se u svakom vrhu dodiruju točno tri zemlje. To su tzv. *kubne karte*.

Prije svega ćemo iskazati Weiskeov teorem, koji je u ono doba bio vrlo značajan za dokaz teorema pet boja, ali nažalost, neupotrebljiv u dokazu teorema četiri boje.

Teorem 2.2.6. (Weiskeov teorem)
Ne postoji karta sa 5 *parova susjednih zemalja.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{L}$ karta koja sadrži pet parova susjednih zemalja. Tada karta $\mathcal{L}^*$ dualna karti $\mathcal{L}$ sadrži pet vrhova koji su po parovima povezani bridovima. Drugim riječima, dobili smo potpun graf sa 5 vrhova. No po teoremu 2.1.3, takav graf ne postoji. □

Slijede značajne poslijedice Weiskeovog teorema:

Korolar 2.2.7. *:*

(i) *Minimalni kontraprimjer ima najmanje* 6 *zemalja.*

(ii) *Ako zemlja proizvoljne karte ima više od tri susjeda, onda ta zemlja ima dva susjeda koji nemaju zajedničku granicu.*

(iii) *Niti jedna zemlja minimalnog kontraprimjera nema manje od* 5 *različitih susjeda.*

Dokaz. :

(i) Pretpostavimo da je dana karta sa pet zemalja. Dvije nesusjedne zemlje obojamo sa bojom 1. Za preostale tri zemlje potrebne su nam još samo 3 dodatne boje.

(ii) Pretpostavimo da na karti $\mathcal{L}$ postoji zemlja L_0 sa najmanje 4 različita susjeda $L_1, \ldots, L_4$. Koristeći Weiskeov teorem (teorem 2.2.6) zaključujemo da od pet zemalja $L_0, \ldots, L_4$, dvije zemlje ne mogu biti susjedne. Zbog pretpostavke niti jedna od te dvije zemlje ne može biti L_0.

(iii) Dokaz ove tvrdnje pogledajte u [3]. □

Slijedeći rezultat je od fundamentalnog značenja.

Teorem 2.2.8. *Svaki vrh minimalnog kontraprimjera je stupnja* 3.

Skica dokaza. Svaki vrh regularne karte je stupnja barem 3 (propozicija 1.2.8 (i)). Dakle, ostaje pokazati da je stupanj svakog vrha u minimalnom kontraprimjeru najviše 3.
Neka je $\mathcal{L}$ minimalni kontraprimjer. Pretpostavimo da postoji vrh $\mathbf{x}$ karte $\mathcal{L}$ takav da $d_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) > 3$.
Sada pomoću karte $\mathcal{L}$ konstruiramo novu kartu $\mathcal{L}'$. Koristeći korolar 1.2.11 i korolar 2.2.7 (ii) može se pokazati da karta $\mathcal{L}'$ sadrži zemlje L'_1, L'_2 i L'_0 takve da su L'_1 i L'_2 susjedne zemlji L'_0 te L'_1 i L'_2 nemaju zajedničku granicu.
Novu kartu $\mathcal{L}''$ dobivamo uklanjanjem zajedničkih granica između zemalja L'_0 i L'_1 te između zemalja L'_0 i L'_2 koje će se potom spojiti u jednu novu zemlju L''.
Pomoću dopustivog 4-bojanja tako dobivene karte $\mathcal{L}''$, možemo dobiti dopustivo 4-bojanje originalne karte $\mathcal{L}$.
Dakle, $\mathcal{L}$ ne može biti minimalni kontraprimjer čime je dobivena kontradikcija sa našom pretpostavkom, tj. onako definirani vrh ne postoji. □

Definicija 2.2.9. *Kažemo da je karta* ***kubna****, ako je regularna i ako su svi njeni vrhovi točno stupnja* 3.

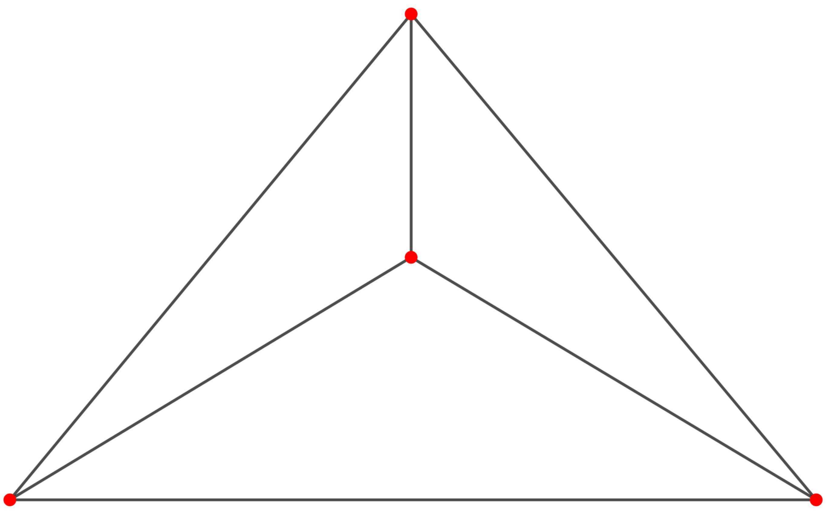
Na slici 2.6 pogledajte jedan primjer kubne karte.

Iz teorema 2.2.8, možemo zaključiti da je svaki minimalni kontraprimjer kubna karta.

Sljedeći teorem povezuje pojam kubne karte sa svojstvom dualnosti.

Teorem 2.2.10. *Neka je $\mathcal{L}$ regularna karta, te neka je karta $\mathcal{L}^*$ dualna karti $\mathcal{L}$.*
Tada vrijedi slijedeće:
(i) *Karta $\mathcal{L}^*$ je zasićena ako i samo ako je karta $\mathcal{L}$ kubna karta.*
(ii) *Karta $\mathcal{L}^*$ je kubna karta ako i samo ako je karta $\mathcal{L}$ zasićena.*

Dokaz. :
(i)
Neka je $\mathcal{L}$ kubna karta. Moramo pokazati da su granice zemalja karte $\mathcal{L}^*$ trokuti (pogledajte teorem 2.1.5). Uzmimo zemlju L^* karte $\mathcal{L}^*$. Sa $\mathbf{x}$ označimo vrh karte $\mathcal{L}$ koji leži u L^*. Taj vrh je rubna točka točno tri brida karte $\mathcal{L}$. Označimo ih sa B_1, B_2 i B_3. Bridovi B_1^*, B_2^* i B_3^* formiraju konturu na karti $\mathcal{L}^*$, pa stoga sačinjavaju granice zemlje L^*.



Slika 2.6: Kubna karta

Obratno, neka je $\mathcal{L}^*$ zasićena karta. Moramo pokazati da je svaki vrh karte $\mathcal{L}$ stupnja 3. Uzmimo vrh $\mathbf{x}$ karte $\mathcal{L}$ te sa L^* označimo zemlju karte $\mathcal{L}^*$ u kojoj leži $\mathbf{x}$. Granica zemlje L^* sastoji se od točno 3 brida karte $\mathcal{L}^*$. Svaki brid karte $\mathcal{L}$ incidentan sa $\mathbf{x}$ mora sjeći brid iz $\mathcal{G}_{L^*}$. S druge strane, svaki brid iz $\mathcal{G}_{L^*}$ će biti presječen sa najviše jednim bridom karte $\mathcal{L}$. Dakle, $d_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) \leq 3$. Zbog pretpostavke da je karta $\mathcal{L}$ regularna, slijedi $d_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = 3$.

(ii)
Dokaz tvrdnje (ii) slijedi iz dokaza tvrdnje (i) jer je karta $\mathcal{L}$ dualna karti $\mathcal{L}^*$ (teorem 2.2.4 (i)). □

Onima koji se bave istraživanjem teorema četiri boje izuzetno je korisno znati broj vrhova, bridova i zemalja neke karte. Još bitnije, važno je znati odnose među tim brojevima.

Teorem 2.2.11. *Promatramo kartu $\mathcal{L}$ sa vrhovima $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{v_{\mathcal{L}}}$ i zemljama $L_1, L_2, \ldots, L_{f_{\mathcal{L}}}$. Stavimo $d_r = d_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_r)$ za $r \in \{1, \ldots, v_{\mathcal{L}}\}$ i neka n_s označava broj graničnih linija zemlje L_s za $s \in \{1, \ldots, f_{\mathcal{L}}\}$.*
Ako je karta $\mathcal{L}$ regularna, tada vrijedi slijedeće:

$$\sum_{r=1}^{v_{\mathcal{L}}} (6 - d_r) \geq 12 \tag{2.5}$$

$$\sum_{s=1}^{f_{\mathcal{L}}}(6 - n_s) \geq 12 \tag{2.6}$$

Sada ćemo se ponovno vratiti na kartu sa slike 1.12 te na tom primjeru regularne karte ispitati nejednakosti (2.5) i (2.6). Dokaz ovog teorema može se pronaći u [3].
Dakle, dana karta $\mathcal{L}$ sadrži šest vrhova $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_6$ te šest zemalja $L_1, \ldots, L_6$, pa vrijedi $v_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}} = 6$.
Vrhovi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_5$ su stupnja 3, tj. $d_1 = \ldots = d_5 = 3$, a vrh $\mathbf{x}_6$ je stupnja 5, tj. $d_6 = 5$, pa vrijedi:

$$\sum_{r=1}^{6}(6-d_r) = \sum_{r=1}^{5}(6-d_r)+(6-d_6) = \sum_{r=1}^{5}(6-3)+(6-5) = \sum_{r=1}^{5} 3+1 = 5\cdot3+1 = 15+1 = 16 \geq 12$$

Zemlje $L_1, \ldots, L_5$ imaju po 3 granične linije, tj. $n_1 = \ldots = n_5 = 3$, a zemlja L_6 ima 5 graničnih linija, tj. $n_6 = 5$, pa vrijedi:

$$\sum_{s=1}^{6}(6-n_s) = \sum_{s=1}^{5}(6-n_s)+(6-n_6) = \sum_{s=1}^{5}(6-3)+(6-5) = \sum_{s=1}^{5} 3+1 = 5\cdot3+1 = 15+1 = 16 \geq 12$$

Dakle, zaključujemo da su za regularnu kartu na slici 1.12 nejednakosti (2.5) i (2.6) zadovoljene.

Desna strana u nejednakostima (2.5) i (2.6) je pozitivna. Dakle, i sume na lijevoj strani moraju biti pozitivne. Iz toga slijedi idući rezultat za kartu sa slike 1.12, koji vrijedi i za svaku drugu regularnu kartu.

Korolar 2.2.12. *Vrhovi svake regularne karte su incidentni sa najviše* 5 *bridova, a zemlje te karte imaju najviše* 5 *susjeda.*

Štoviše, vrijedi i sljedeći rezultat koji govori o novoj, poboljšanoj donjoj granici za broj zemalja u minimalnom kontraprimjeru (u odnosu na donju granicu danu u korolaru 2.2.7 (*i*)). Kao i korolar 2.2.12, sljedeći korolar je posljedica teorema 2.2.11.

Korolar 2.2.13. *Minimalni kontraprimjer ima najmanje* 13 *zemalja.*

2.3 Kombinatorna formulacija Teorema i normalni grafovi

Kao što smo mogli vidjeti ranije u ovom poglavlju, svojstvo planarnosti kombinatornog grafa u potpunosti je kombinatorne naravi. Sada smo konačno u poziciji iskazati i kombinatornu formulaciju Teorema.

Teorem 2.3.1. *Za svaki planarni graf postoji dopustivo* 4*-bojanje vrhova toga grafa.*

Sljedeća dva teorema ukazuju na vezu između bojanja vrhova i teorema četiri boje.

Teorem 2.3.2. *Postoji dopustivo* 4*-bojanje karte ako i samo ako postoji dopustivo* 4*-bojanje vrhova svake karte koja je dualna toj karti.*

Dokaz. Tvrdnja teorema direktno slijedi iz definicije dualne karte (definicija 2.2.2). □

Teorem 2.3.3. *Topološka formulacija teorema četiri boje (teorem 1.2.1) je istinita ako i samo ako postoji dopustivo* 4*-bojanje vrhova svakog (ravninskog) grafa.*

Skica dokaza. Dovoljnost uvjeta slijedi direktno iz teorema 2.3.2.
Nužnost uvjeta dokazuje se metodom minimalnog kontraprimjera.
Pretpostavimo da je topološka formulacija Teorema istinita. Uzmimo minimalni[6] kontraprimjer $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ za kojeg ne postoji dopustivo 4-bojanje vrhova. Možemo pretpostaviti da je graf **G** zasićen. Može se pokazati da je zasićeni graf koji ima više od dvije strane regularan (dokaz pogledajte u [3]). Dakle, koristeći danu tvrdnju zaključujemo da je graf **G** također i regularan.
Sada uzmemo kartu $\mathcal{L}^*$ dualnu karti $\mathcal{L}$. Po pretpostavci postoji dopustivo 4-bojanje karte $\mathcal{L}^*$. Karta $\mathcal{L}$ je regularna pa koristeći teorem 2.2.4 (i) zaključujemo da je $\mathcal{L}$ također dualna $\mathcal{L}^*$.
Dakle, sada pomoću dopustivog 4-bojanja karte $\mathcal{L}^*$ možemo dobiti dopustivo 4-bojanje vrhova grafa **G** (teorem 2.3.2), tj. graf **G** nije minimalni kontraprimjer. □

Iz prethodnog teorema direktno slijedi ekvivalencija kombinatorne (teorem 2.3.1) i topološke (teorem 1.2.1) formulacije teorema četiri boje.

Sada je prikladno vrijeme za istaknuti do sada uočene krucijalne razlike između kombinatornog i topološkog pristupa te istražiti kako bismo ih mogli kombinirati. U kombinatorici konačni skupovi zajedno sa svojim konačnim podskupovima nemaju drugih strukturnih osobina. S druge strane, ono što proučava topologija je geometrija prostora. Dakle, topološki značajni objekti su beskonačni skupovi točaka u ravnini koji mogu biti otvoreni, zatvoreni, kompaktni itd. Također su važna i neprekidna preslikavanja između takvih skupova. U topologiji, pojam okoline ima ključnu ulogu.

Kombinatorni pristup nam odgovara ponajviše zbog toga što tražimo minimalne kontraprimjere za koje ne postoji dopustivo 4-bojanje vrhova. U ovom kontekstu riječ „minimalan" odnosi se na broj vrhova pripadnog grafa.
Sada ćemo svoju potragu za minimalnim kontraprimjerima ograničiti na određenu klasu grafova, a za to nam je bitan sljedeći rezultat iz [3] kojeg navodimo bez dokaza.

[6] Ovdje se riječ *minimalni* odnosi na broj vrhova pripadnog grafa.

Lema 2.3.4. *U minimalnom kontraprimjeru (u smislu nepostojanja dopustivog* 4*-bojanja vrhova; pogledati razmatranja prije ove leme) svaki trokut čini granice strane grafa (tj. zemlje na karti).*

Sada smo u poziciji opisati grafove na koje ćemo usmjeriti svoju pažnju.

Definicija 2.3.5. *Za graf* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *kažemo da je normalan, ako je regularan, zasićeni, pravocrtni graf u kojem svaki trokut čini granice strane grafa.*

Bridovi normalnog grafa su očito (ravne) dužine, dok su ograničene strane grafa ograničene (pravocrtnim) trokutima. Neograničena strana jednaka je vanjskom području trokuta.

Za vrh grafa **G** kažemo da je *unutrašnji vrh*, ako ne pripada granici neograničene strane grafa. Vrh grafa **G** koji pripada granici neograničene strane grafa zovemo *vanjski vrh*.

Normalni grafovi su dualni kubnim grafovima (teorem 2.2.10). Stoga, ako minimalni kontraprimjeri postoje, onda među njima postoji i normalni graf (teoremi 2.2.8 i 2.3.2 te lema 2.3.4). Zbog toga svoju potragu za minimalnim kontraprimjerima možemo ograničiti samo na normalne grafove. Pri tome ćemo koristiti terminologiju koju je oveo još Heesch 1969. godine. Normalne grafove koje smatramo minimalnim kontraprimjerima (u smislu nepostojanja dopustivog 4-bojanja vrhova) zvati ćemo *minimalna triangulacija*.

2.4 Reducibilne konfiguracije i neizbježni skupovi

Kao što je već spomenuto u uvodnom dijelu u kojem smo saželi povijesni pregled problema četiri boje, Percy John Heawood je bio taj koji je 1890. godine otkrio pogrešku u Kempeovom dokazu. Usprkos pronalasku greške, niti Heawood, a niti Kempe nisu znali kako popraviti dokaz.
Nakon Heawoodovog dokaza teorema pet boja, ponovno su uslijedili pokušaji dokazivanja teorema četiri boje. Koristeći Kempeovu verziju dokaza, ti su se pokušaji temeljili na dva osnovna pojma: *reducibilne konfiguracije* i *neizbježni skupovi*. Točnije, ključno je bilo pronaći *neizbježni skup reducibilnih konfiguracija*.
Prvo pravo poboljšanje Kempeove tehnike dokaza uslijedilo je 1913. godine zahvaljujući američkom matematičaru Georgu Davidu Birkhoffu. On je u minimalnim kontraprimjerima proučavao *prstenove* i dokazivao da su reducibilni. (Pogledajte sliku 2.7)
Franklin je, nadalje, proširio Birkhoffov rad i 1920. godine dokazao da je teorem četiri boje istinit za sve grafove s najviše 25 vrhova. Birkhoffove metode su koristili i mnogi drugi matematičari i to kako bi unaprijedili veličinu promatranog neizbježnog skupa reducibilnih konfiguracija.

No ipak najveći doprinos dokazivanju Teorema dao je njemački matematičar Heinrich Hesche koji uvodi tzv. *postupak rasterećenja* te zajedno sa Karl Düreom prvi put koristi računalo u testiranju reducibilnosti raznih konfiguracija. To će kasnije Appelu i Hakenu omogućiti konstrukciju potpunog skupa reducibilnih konfiguracija koji je imao oko 1500 elemenata, a onda i konačni dokaz Teorema.

Sada ćemo gore spomenute pojmove i ideje i matematički definirati. Prije svega potrebna nam je definicija prstena.

Definicija 2.4.1. *Neka je* $\mathbf{G} = (E, \mathcal{L})$ *graf.*

(i) *Lanac* $K = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r)$ *grafa* $\mathbf{G}$ *sa najmanje tri vrha zovemo* ***zatvorenim****, ako su* $\mathbf{x}_1$ *i* $\mathbf{x}_r$*, početni i završni vrh lanca, susjedni. U tom slučaju, brid koji povezuje ta dva rubna vrha također smatramo* ***karikom*** *tog lanca.*

(ii) *Lanac* $K = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r)$ *grafa* $\mathbf{G}$ *zovemo* ***jednostavni zatvoreni lanac****, ako je zatvoren te za sve* $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, r\}$ *takve da je* $1 < |j_1 - j_2| < r-1$ *vrhovi* $\mathbf{x}_{j_1}$ *i* $\mathbf{x}_{j_2}$ *nisu susjedni.*

(iii) *Skup vrhova R zovemo* ***prsten****, ako se elementi toga skupa mogu poredati tako da tvore jednostavni zatvoreni lanac. U tom slučaju, broj elemenata skupa R zovemo* ***veličinom*** *prstena R.*

Karike lanca K u grafu $\mathbf{G}$ formiraju luk $B(K)$ *pridružen* lancu K. Karike zatvorenog lanca K formiraju konturu $\mathcal{K}$. Stoga, govorimo o zatvorenoj Jordanovoj krivulji $J(K)$ *pridruženoj* lancu K koja dijeli ravninu na *unutrašnje područje* $I(K)$ i *vanjsko područje* $A(K)$. Analogno, prsten R određuje konturu $\mathcal{R}$, a sa $J(R)$, $I(R)$ i $A(R)$ označavamo pripadnu zatvorenu Jordanovu krivulju, unutrašnje te vanjsko područje.

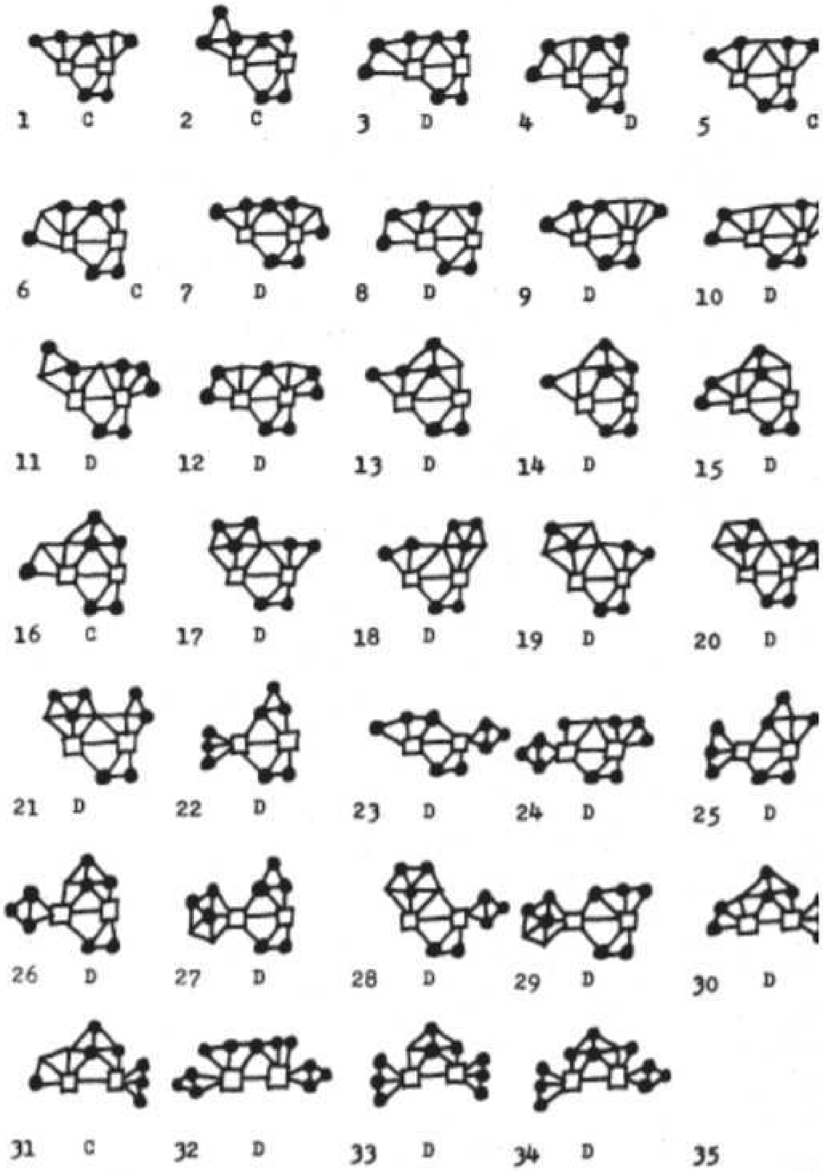
Sada smo spremni definirati sljedeći, vrlo važan tip grafova - konfiguracije. To su zapravo podgrafovi ranije spomenutih normalnih grafova.

Definicija 2.4.2. *Graf* $\mathbf{C}$ *zovemo* ***konfiguracija*** *ako vrijedi slijedeće:*

(i) *Graf je regularan.*

(ii) *Vanjski vrhovi grafa tvore prsten veličine* ≥ 4.

[7]Slika preuzeta sa [5] (15.08.2020.)



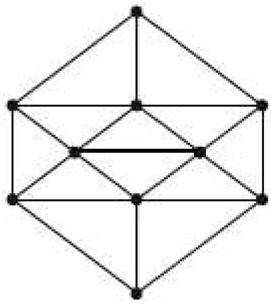
Slika 2.7: Izvadak iz dokaza reducibilnosti prstenova D. Birkhoffa[7]

(*iii*) *Postoje unutrašnji vrhovi grafa.*

(*iv*) *Ograničena strana grafa ima trokutaste granice*[8].

(*v*) *Svaki trokut tvori granice strane grafa (tj. svaki takav trokut tvori granice zemlje na pripadajućoj karti).*

Jedan od najpoznatijih primjera konfiguracije je *Birkhoffov dijamant* prikazan na slici 2.8.



Slika 2.8: Birkhoffov dijamant[9]

Slijedi definicija specijalne vrste konfiguracija koje će nam biti vrlo korisne.

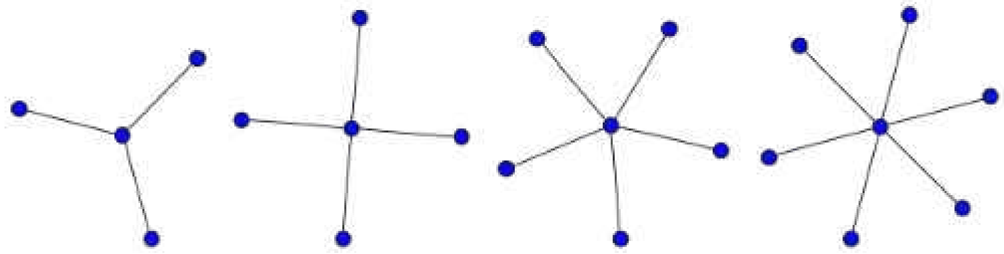
Definicija 2.4.3. *Konfiguraciju koja sadrži samo jedan unutrašnji vrh (tzv.* ***zvjezdište****) nazivamo* ***zvijezda****. Točnije, zvijezdu sa točno k vanjskih vrhova (stoga sa $k+1$ vrhova ukupno, gdje je $k \geq 4$) nazivamo* **k−*zvijezda***.
(Primjeri zvijezda su prikazani na slici 2.9)

Veličina prstena konfiguracije jednaka je veličini prstena koji čine vanjski vrhovi te konfiguracije, npr. prsten Birkhoffovog dijamanta sa slike 2.8 je veličine 6, a prsten k-zvijezde je veličine k.
Unutrašnje područje prstena vanjskih vrhova konfiguracije **C** zovemo *unutrašnje područje*

[8]Iz definicije prstena možemo odmah zaključiti da prsten uvijek ima barem tri vrha. Možemo reći i obrnuto, vrhovi trokuta uvijek tvore prsten. Od sada pa nadalje, koristit ćemo ovakvu definiciju trokuta. Pojam trokut će označavati prsten sa točno tri vrha ili pak skup od tri para susjednih vrhova nekog grafa. Dakle, strana grafa, tj. zemlja neke karte ima trokutaste granice, ako se granične linije te zemlje sijeku u tri vrha koji tvore prsten.

[9]Slika preuzeta sa `https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/find-chromatic-number-following-graphs-explain-answers-completely-trees-b-bipartite-graphs-q36016966` (15.08.2020.)

[10]Slika preuzeta sa `https://en.wikipedia.org/wiki/Star_(graph_theory)` (30.07.2020.)



Slika 2.9: S lijeva na desno: $3, 4, 5$ i 6-zvijezda[10]

od **C**. Ovaj topološki koncept potrebno je razlikovati od kombinatornog pojma *jezgre* konfiguracije. Jezgra konfiguracije sastoji se od podgrafa *obuhvaćenog* unutrašnjim vrhovima konfiguracije, gdje je podgraf obuhvaćen vrhovima grafa **G** jednak grafu koji se sastoji od danih vrhova i svih bridova grafa **G** koji ih povezuju. Jezgra svake k-zvijezde sastoji se od jednog vrha.
Razlikujemo tri tipa bridova neke konfiguracije: *unutrašnji bridovi* koji povezuju dva unutrašnja vrha, *vanjski bridovi* koji povezuju dva vanjska vrha te *krakovi* koji povezuju jedan unutrašnji i jedan vanjski vrh.

Ovako definirana subdivizija vrhova i klasifikacija bridova čisti su kombinatorni koncept, što znači da ih možemo iščitati i iz pripadnog kombinatornog grafa.
Sada ćemo i pojam konfiguracije definirati u čisto kombinatornom smislu.

Jezgra konfiguracije sigurno uvijek zadovoljava barem slijedeće svojstvo regularnih grafova (definicija 1.2.5).

Teorem 2.4.4. *Jezgra konfiguracije je povezani graf.*

Sada ćemo definirati što bi to bile konfiguracije u minimalnoj triangulaciji. Najprije nam je potreban pojam ekvivalentnih konfiguracija.

Definicija 2.4.5. *Kažemo da su dvije konfiguracije* $\mathbf{C}' = (E', \mathcal{L}')$ *i* $\mathbf{C}'' = (E'', \mathcal{L}'')$ ***ekvivalentne****, ako postoji bijekcija* $\varphi : E' \to E''$ *takva da funkcija* φ *i njena inverzna funkcija* φ^{-1} *čuvaju relaciju biti susjedan vrh.*

Uvjet iz prethodne definicije potpuno je kombinatorne naravi; slijedi da su pripadni kombinatorni grafovi izomorfni. Također, iz gornje definicije zaključujemo da su sve k-zvijezde međusobno ekvivalentne. Koristeći, pak Wagner Faryjev teorem (teorem 2.1.7) možemo zaključiti da je svaka konfiguracija ekvivalentna pravocrtnom grafu.

Spremni smo definirati sljedeći bitan pojam.

Definicija 2.4.6. *Kažemo da je konfiguracija* **C** ***uložena*** *u graf* **G***, ako postoji zatvoreni lanac K u* **G** *takav da podgraf* $\mathbf{C}_K$ *grafa* **G***, obuhvaćen vrhovima iz K i vrhovima iz unutrašnjeg područja od K, tvori konfiguraciju koja je ekvivalentna konfiguraciji* **C**.
Kažemo da je konfiguracija **C** ***pravilno uložena*** *u graf* **G***, ako je K jednostavni zatvoreni lanac.*

Najjednostavniji primjer su k-zvijezde koje su pravilno uložene u normalne grafove. Zato jer normalni grafovi imaju točno 3 vanjska vrha, slijedi da sadrže točno $v-3$ zvijezde (gdje je $v > 3$ broj vrhova normalnog grafa). Također vrijedi slijedeće.

Teorem 2.4.7. *Minimalna triangulacija ne može sadržavati* 4*-zvijezdu, ali sadrži najmanje dvanaest* 5*-zvijezda.*

Dokaz. Ako normalni graf sadrži 4-zvijezdu kao konfiguraciju, onda dualna karta sadrži zemlju sa 4 susjeda. Tada ta karta ne može biti minimalni kontraprimjer u smislu nepostojanja dopustivog 4-bojanja zemalja karte (korolar 2.2.7 (*iii*)). Dakle, onda niti originalni graf ne može biti minimalna triangulacija.
Drugi dio tvrdnje teorema slijedi direktno iz nejednakosti (2.5). □

Prilikom dokazivanja teorema četiri boje bilo je potrebno nacrtati i ispitati veliki broj različitih konfiguracija. Heesch se dosjetio pojednostavljenih prikaza koje je nazvao *ogoljene slike*. Njegova je pretpostavka bila da su konfiguracije određene svojom jezgrom i stupnjevima određenih vrhova.

Definicija 2.4.8. *Unutrašnji vrh* **x** *konfiguracije* **C** *zovemo* ***spoj****, ako graf koji sadrži jezgru konfiguracije* **C***, nakon uklanjanja vrha* **x** *i bridova incidentnih sa* **x***, više nije povezan.*

Konačni prikaz konfiguracije dan je slijedećim teoremom.

Teorem 2.4.9. *Konfiguracija čiji svi spojevi imaju točno dva kraka jedinstveno je određena do na ekvivalenciju, sa svojom jezgrom i stupnjevima svojih unutrašnjih vrhova.*

Konačno je došlo vrijeme da dovršimo skicu dokaza teorema četiri boje. Za to nam je potrebna još jedna definicija.

Definicija 2.4.10. *Kažemo da je konfiguracija* **C** ***reducibilna****, ako normalni graf koji sadrži* **C** *ne može biti minimalna triangulacija. U suprotnom, kažemo da je konfiguracija* ***ireducibilna****.*

Koristeći teorem 2.4.7, možemo zaključiti da je 4-zvijezda reducibilna konfiguracija. Nažalost, isto ne možemo zaključiti i za 5-zvijezdu. Kad bismo mogli, teorem četiri boje bi već odavno bio dokazan. Zaista, svaki normalni graf mora sadržavati ili 4-zvijezdu ili 5-zvijezdu (pogledajte korolar 2.2.12). Upravo je pogrešni dokaz reducibilnosti zemlje sa

5 susjeda bio Kempeov kamen spoticanja.
Ono što će se pokazati ključnim dijelom dokaza teorema četiri boje sljedeća je ideja. Svojstvo reducibilnosti konfiguracije je samo dio puta prema dokazu. Potrebno je uvesti još jedan važan koncept i promotriti ga u kombinaciji sa svojstvom reducibilnosti.

Definicija 2.4.11. *Kažemo da je skup konfiguracija $\mathcal{U}$* ***neizbježan****, ako svaki normalni graf sadrži element skupa $\mathcal{U}$.*

Koristeći razmatranja prije ove definicije možemo zaključiti da je skup koji sadrži 4-zvijezdu i 5-zvijezdu - neizbježan.
Ključan korak dokaza, kojega ovdje ne promatramo, bio je pronaći *neizbježni skup konfiguracija* koje su još dodatno i *reducibilne*.
Pronalaženje takvog skupa dokazalo bi teorem četiri boje. Naime, kako je skup neizbježan, svaki normalni graf, pa i minimalna triangulacija mora sadržavati barem jednu od konfiguracija iz tog skupa, a kako je svaka konfiguracija reducibilna, ona ne može biti dio minimalne triangulacije. To pak znači da minimalna triangulacija, tj. minimalni kontraprimjer ne postoji, pa stoga teorem četiri boje mora biti istinit.

Dakle, za dokazivanje Teorema bilo je dovoljno konstruirati neizbježan skup reducibilnih konfiguracija, no to nije bio nimalo lak zadatak. Štoviše, u ono doba to se činilo nemogućim. Naime, Heesch je tvrdio da će takav skup sadržavati oko deset tisuća elemenata. Na taj način problem je sveden na promatranje konačnog, ali vrlo velikog broja konkretnih konfiguracija. Iako je neke dijelove dokaza teorema četiri boje moguće provjeriti ručno, sada nam je jasnije zašto u cjelosti ovaj dokaz nije moguće provjeriti bez pomoći računala.
H. Heesch i K. Dürre 1965. godine prvi su put upotrijebili računalo u testiranju reducibilnosti, ali tehnološke mogućnosti tadašnjih računala bile su vrlo zastarjele što je kočilo daljnji napredak u dokazivanju Teorema. Ubrzani razvoj računala te neprestano unaprijeđivanje algoritama i računalnih programa omogućili su konačan dokaz teorema 1976. godine. Te godine K. Appel i W. Haken konstruirali su neizbježni skup koji se sastojao od 1936 reducibilnih konfiguracija. Za tu konstrukciju utrošeno je preko 1200 sati rada na računalu. 1996. godine, N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour i R. Thomas napravili su poprilično veliko poboljšanje u dokazu, smanjivši neizbježni skup na samo 633 konfiguracije, ali i njihov se dokaz oslanjao na pomoć računala.
I dalje se postavlja isto pitanje: može li se dokaz dobiven pomoću računala uopće prihvatiti kao pravi dokaz? Tko zna, možda će se jednog dana pojaviti dokaz Teorema koji će biti „čisto teoretski", ali ne može se isključiti ni druga mogućnost; da takav dokaz jednostavno nije moguć.

Poglavlje 3

Teorem pet boja

3.1 Prva verzija

Najprije ćemo prikazati ranije spomenutu Heawoodovu verziju dokaza iz 1890. danu u [3].

Teorem 3.1.1. *Za svaku kartu postoji dopustivo* 5*-bojanje.*

Dokaz. Kao i u dokazu teorema četiri boje, opet ćemo koristiti metodu minimalnog kontraprimjera opisanu na stranici 13.
Stoga neka je $\mathcal{L}$ minimalni kontraprimjer. U dokazu teorema četiri boje, a koristeći propoziciju 1.2.2, mogli smo zaključiti da traženi minimalni kontraprimjer neće sadržavati zemlje koje imaju samo 3 susjeda. Na isti način kao u dokazu propozicije 1.2.2 zaključujemo da minimalni kontraprimjer iz teorema pet boja, ne može imati niti zemlje sa 3 susjeda, a niti zemlje sa 4 susjeda. Također, kao i prije, možemo se ograničiti samo na regularne karte (definicija 1.2.5).
Korolar 2.2.12 tvrdi da u minimalnom kontraprimjeru $\mathcal{L}$ postoji zemlja L_0 sa 5 različitih susjeda $L_1, \ldots, L_5$. Od svih susjeda zemlje L_0, sigurno postoje dvije zemlje koje nemaju zajedničku granicu (korolar 2.2.7 (*ii*)). Neka su to zemlje L_2 i L_4.
Ako uklonimo granice između zemalja L_0 i L_2 te zemalja L_0 i L_4, dobit ćemo kartu $\mathcal{L}'$ u kojoj su zemlje L_0, L_2 i L_4 spojene u jednu zemlju L'. Tada karta $\mathcal{L}'$ ima dvije zemlje manje, te za takvu kartu postoji dopustivo 5-bojanje.
Sada možemo pronaći i dopustivo 5-bojanje karte $\mathcal{L}$. Zemlje različite od zemalja L_0, L_2 i L_4, obojamo u istu boju kao i prilikom dopustivog 5-bojanja karte $\mathcal{L}'$. Potom zemlje L_2 i L_4 obojamo u boju koju je imala zemlja L'. Dakle, za bojanje zemalja susjednih zemlji L_0 bile su nam potrebne 4 boje. Preostalom, petom bojom obojamo zemlju L_0.
Dakle, jer postoji dopustivo 5-bojanje karte $\mathcal{L}$, ona ne može biti minimalni kontraprimjer. $\square$

3.2 Druga verzija

Ideja dokaza danog u [10], jednaka je ideji dokaza iz prethodnog potpoglavlja. Naime, u danim grafovima ćemo uklanjati određene granice (tj. brid(ove)), što će rezultirati smanjenjem broja strana. A potom ćemo promatrati bojanje novodobivenog grafa.
U ovom dokazu koristit će se već uvedena i poznata terminologija teorije grafova. Prije svega potrebna nam je slijedeća definicija.

Definicija 3.2.1. *Promatramo dopustivo k-bojanje (vrhova) grafa* $\mathbf{G}$. *Neka je* $\mathbf{G_1}$ *neki podgraf grafa* $\mathbf{G}$ *sa manjim brojem bridova od* $\mathbf{G}$.
Kažemo da je graf $\mathbf{G}$ **k−*reducibilan***, *ako se dopustivo k-bojanje grafa G može izvesti iz dopustivog* k_1 *bojanja grafa* $\mathbf{G_1}$, *gdje je* $k_1 \leq k$.

Teorem 3.2.2. *Za svaki planarni graf postoji dopustivo* 5*-bojanje njegovih vrhova (strana).*

Dokaz. Kao što je već napomenuto, dokaz se, dakle, temelji na serijama redukcija broja strana danog grafa.

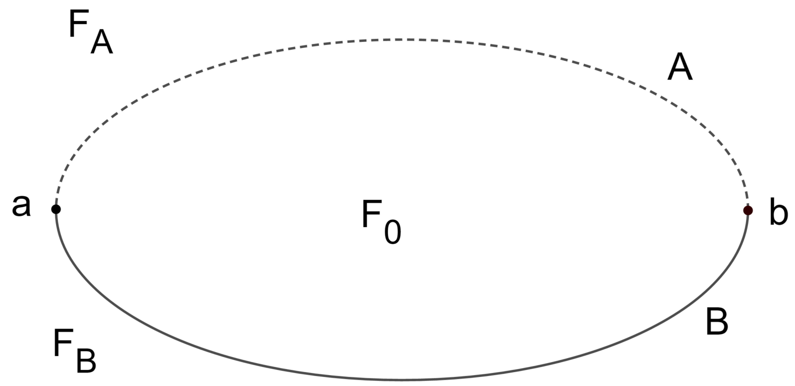
Teorem 3.2.3. *Graf je k-reducibilan (gdje je* $k \geq 3$*), ako sadrži stranu sa samo dva granična brida.*

Dokaz. Neka su $A = (a, b)$ i $B = (a, b)$ dva granična brida strane F_0 grafa $\mathbf{G}$. Ta dva brida tvore granice druge dvije strane F_A i F_B (moguće je da se te dvije strane poklapaju). (Pogledajte sliku 3.1)
Uklanjanjem brida A iz grafa $\mathbf{G}$ dobivamo graf $\mathbf{G_1}$ u kojem nastaje nova strana $F_0 + F_A$. Druge strane ostaju iste kao i u grafu $\mathbf{G}$.
Ako graf $\mathbf{G_1}$ možemo obojati sa $k \geq 3$ boje, onda stranu $F_0 + F_A$ obojamo u boju α, a stranu F_B u boju β.
Vraćanjem brida A, ponovno stvorenu stranu F_0 možemo obojati u neku treću boju, npr. γ, dok ostale strane ostaju obojane kao prije. Time smo dobili traženo dopustivo k-bojanje grafa $\mathbf{G}$. □

Teorem 3.2.4. *Graf je k-reducibilan (gdje je* $k \geq 4$*), ako sadrži trokutastu stranu.*

Teorem 3.2.5. *Graf je k-reducibilan (gdje je* $k \geq 4$*), ako sadrži četverokutnu stranu.*

Dokaz prethodna dva teorema potpuno je analogan prethodnom dokazu. Tražimo dopustivo k-bojanje danog grafa $\mathbf{G}$ tako da pronađemo dopustivo bojanje grafa $\mathbf{G_1}$ kojeg dobijemo uklanjanjem jednog (ili više) bridova iz grafa $\mathbf{G}$. Kao što smo vidjeli i u dokazu prve verzije iz prethodnog potpoglavlja, pri tome moramo paziti da ne uklanjamo bridove onih zemalja koje su susjedne jer to ne bi vodilo dopustivom bojanju originalnog grafa $\mathbf{G}$. Kako bismo dovršili dokaz teorema pet boja dan u [10], potreban nam je još sljedeći teorem.

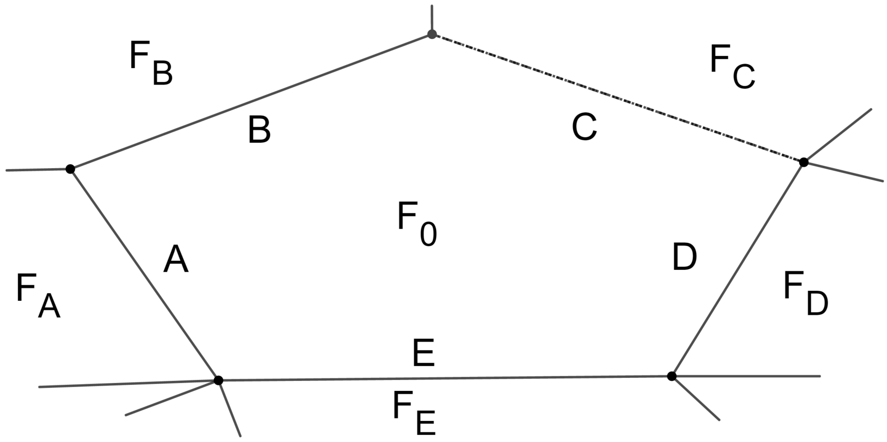


Slika 3.1: Strana F_0 grafa sa 2 granična brida

Teorem 3.2.6. *Graf je k-reducibilan (gdje je $k \geq 5$), ako sadrži peterokut.*

Dokaz. Neka su A, B, C, D i E granični bridovi peterokutne strane F_0 grafa $\mathbf{G}$. Sa F_A, F_B, F_C, F_D i F_E označimo pripadne strane. (Pogledajte sliku 3.2)
Ponovno uzmemo dvije nesusjedne strane grafa, npr. F_A i F_C. Potom iz grafa $\mathbf{G}$ uklonimo bridove A i C te na taj način dobivamo graf $\mathbf{G_1}$. U grafu $\mathbf{G_1}$, tri strane F_0, F_A i F_C postaju jedna strana $F_0' = F_0 + F_A + F_C$.
Pretpostavljamo da postoji dopustivo k-bojanje grafa $\mathbf{G_1}$, pa stranu F_0' obojamo u boju α, a strane F_B, F_D i F_E obojamo redom u boje β, γ i δ.
Kao i u prethodnom dokazu, ponovnim vraćanjem bridova A i C te bojanjem strane F_0 u petu boju ϵ, dobivamo traženo dopustivo bojanje grafa $\mathbf{G}$. □

Sada smo spremni dovršiti dokaz teorema 3.2.2. Može se pokazati da za svaki ravninski graf (kartu $\mathcal{L}$) postoji dopustivo k-bojanje ako i samo ako svaka od njegovih komponenta povezanosti putevima ima to svojstvo, pa možemo zaključiti da je graf za kojeg promatramo dopustivo 5-bojanje, povezan i bez separirajućih vrhova. Također, može se pokazati da za svaki vrh toga grafa vrijedi $d_r \geq 3$ i $n_s \geq 3$, za svaki $r \in \{1, \ldots, v_{\mathcal{L}}\}$ i svaki $s \in \{1, \ldots, f_{\mathcal{L}}\}$. Vrijedi da takav graf sadrži barem jednu stranu sa najviše 5 graničnih linija. Dakle, problem dopustivog 5-bojanja uvijek možemo ograničiti na trivijalni slučaj grafa bez kontura. □



Slika 3.2: Peterokutna strana F_0 grafa

3.3 Treća verzija

I na kraju slijedi još jedna verzija teorema pet boja koja se može pronaći u [1]. Riječ je o dokazu Carstena Thomassena iz 1994. koji se temelji na pojmu *nizovnog kromatskog broja*.

Definicija 3.3.1. *Neka je* $\mathbf{G} = (V, E)$ *graf bez petlji i višestrukih bridova.* ***Kromatski broj*** $\chi(\mathbf{G})$ *grafa* $\mathbf{G}$ *jednak je najmanjem broju boja k takvom da postoji dopustivo k-bojanje vrhova grafa* $\mathbf{G}$.

Definicija 3.3.2. *Pretpostavimo da je u grafu* $\mathbf{G} = (V, E)$ *svakom vrhu* $v \in V$ *pridružen skup boja* $C(v)$.
Nizovno bojanje *definiramo kao bojanje* $c : V \to \cup_{v \in V} C(v)$, *gdje je* $c(v) \in C(v)$, *za sve* $v \in V$.
Nizovni kromatski broj $\chi_l(\mathbf{G})$ *grafa* $\mathbf{G}$ *jednak je najmanjem broju boja k takvom da za proizvoljni niz skupova boja* $C(v)$ *za kojeg vrijedi* $|C(v)| = k$, *za sve* $v \in V$, *uvijek postoji nizovno bojanje. Tada kažemo da postoji* **k−*nizovno bojanje*** *grafa* $\mathbf{G}$.

Napomena 3.3.3. *„Obično" bojanje grafa specijalni je slučaj nizovnog bojanja gdje su svi skupovi* $C(v)$ *jednaki.*

Sada smo konačno spremni iskazati i dokazati i treću verziju teorema pet boja.

Teorem 3.3.4. *Za svaki planarni graf* $\mathbf{G}$ *postoji* 5*-nizovno bojanje toga grafa, tj.*

$$\chi_l(\mathbf{G}) \leq 5$$

Dokaz. Dodavanjem bridova povećava se kromatski broj grafa, tj. za podgraf **H** grafa **G**, vrijedi $\chi_l(\mathbf{H}) \leq \chi_l(\mathbf{G})$. Možemo pretpostaviti da je graf **G** povezan i da sve ograničene strane imaju trokute za granice. Takve ćemo grafove nazivati *približno trokutastima*.
Ključni dio ovog dokaza je pokazati da vrijedi slijedeća, jača tvrdnja:

Neka je $\mathbf{G} = (V, E)$ *približno trokutasti graf i neka je B ciklus*[1] *koji ograničava vanjsku stranu grafa. Pretpostavimo da za skupove boja* $C(v)$, $v \in V$ *vrijedi slijedeće:*
(i) *Dva susjedna vrha x i y ciklusa B su već obojana različitim bojama* α *i* β.
(ii) $|C(v)| \geq 3$, *za svaki vrh v ciklusa B.*
(iii) $|C(v)| \geq 5$, *za svaki vrh v u unutrašnjem području.*
Tada bojanje vrhova x i y možemo proširiti do bojanja grafa **G** *odabirući boje iz danog niza. Drugim riječima, tada vrijedi slijedeće:*

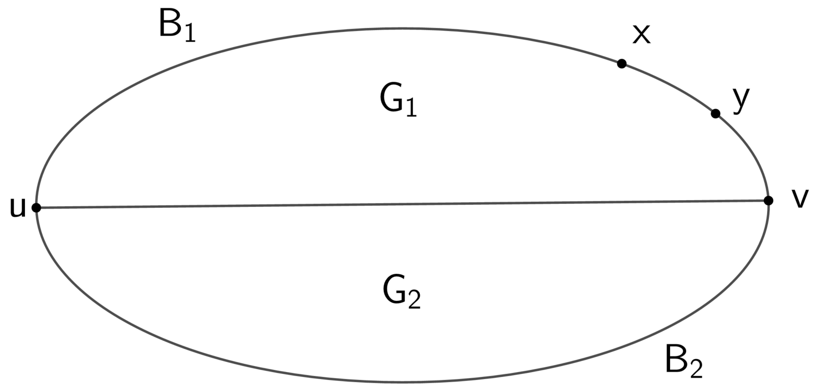
$$\chi_l(\mathbf{G}) \leq 5$$

Gornju tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.
Prvo dokazujemo bazu indukcije. U slučaju $|V| = 3$, za jedini neobojani vrh v sigurno imamo raspoloživu boju, jer $|C(v)| \geq 3$. Iz toga lako slijedi dana tvrdnja.
Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve grafove sa manje ili jednako n vrhova, pri čemu je $n \geq 3$.
Naposljetku slijedi i korak indukcije. Neka je **G** graf kao iz gornje tvrdnje koji ima točno $n + 1$ vrhova. Razlikujemo sljedeća dva slučaja.

1. slučaj:
Pretpostavimo da ciklus B ima tetivu, tj. brid koji se ne nalazi u B sa rubnim vrhovima $u, v \in B$. Podgraf $\mathbf{G_1}$ koji je ograničen lukom B_1 (onaj koji sadrži vrhove x i y) te bridom $\{u, v\}$ je približno trokutast. (Pogledajte sliku 3.3) Stoga, po pretpostavci indukcije zaključujemo da postoji 5-nizovno bojanje toga grafa. Pretpostavimo da su u tom bojanju vrhovi u i v obojani bojama γ i δ.
Sada promotrimo donji podgraf G_2 koji je ograničen lukom B_2 te bridom $\{u, v\}$. Znamo da su vrhovi u i v već obojani. Pa zaključujemo po pretpostavci indukcije da tvrdnja vrijedi i za $\mathbf{G_2}$.
Dakle, postoji 5-nizovno bojanje i samog grafa **G**.

2. slučaj:
Pretpostavimo da ciklus B nema tetivu. Neka je v_0 vrh na suprotnoj strani od vrha x u odnosu na vrh y. te neka su vrhovi $x, v_1, \ldots, v_t, w$ susjedni vrhu v_0.

[1]*Ciklus* je zatvorena staza u kojoj su svi vrhovi osim krajeva međusobno različiti. *Staza* je alternirajući niz vrhova i bridova u kojoj su svi bridovi međusobno različiti. [9]

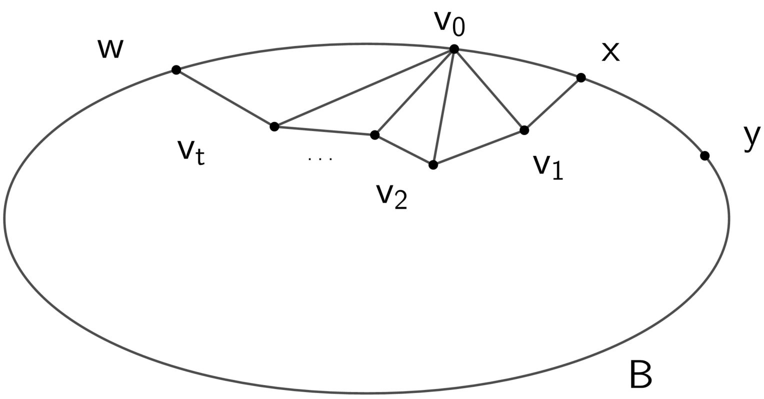


Slika 3.3: Prvi slučaj; ciklus B ima tetivu

Graf $\mathbf{G}$ je približno trokutast, te je pripadna situacija 2. slučaja prikazana na slici 3.4. Konstruirajmo približno trokutast graf $\mathbf{G}' = \mathbf{G}\backslash v_0$ tako da iz grafa $\mathbf{G}$ uklonimo vrh v_0 te sve bridove kojima je v_0 rubni vrh. Tako dobiveni graf $\mathbf{G}'$ kao vanjsku granicu ima

$$B' = (B\backslash v_0) \cup \{v_1, \ldots, v_t\} = \{x, y\} \cup \{y, w\} \cup \{w, v_t\} \cup \ldots \cup \{v_2, v_1\} \cup \{v_1, x\} \cup \{x, w\}$$

Zbog $|C(v_0)| \geq 3$ i pretpostavke (ii), postoje dvije boje γ i δ iz $C(v_0)$ različite od α. Sada svaki skup boja $C(v_i)$ zamijenimo sa $C(v_i)\backslash\{\gamma, \delta\}$, dok za sve ostale vrhove u $\mathbf{G}'$ ostavimo iste skupove boja.
Tada $\mathbf{G}'$ očito zadovoljava sve dane pretpostavke i stoga za taj graf po pretpostavci indukcije postoji 5-nizovno bojanje. Odabirući γ ili δ za v_0, različito od boje vrha w, bojanje grafa $\mathbf{G}'$ možemo proširiti na bojanje cijelog grafa $\mathbf{G}$. □



Slika 3.4: Drugi slučaj; ciklus *B* nema tetivu

Bibliografija

[1] M. Aigner i G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, New-York, 2004.

[2] G. D. Birkhoff, *The reducibility of Maps,* American Journal of Mathematics, **35(2)**, (1913.), 115–128.

[3] R. Fritsch i G. Fritsch, *The Four-Color Theorem : history, topological foundations and idea of proof*, Springer-Verlag, New-York, 1998.

[4] I. Gogić, P. Pandžić i J. Tambača, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/Diferencijalni_racun.pdf`, nastavni materijal, PMF, Sveučilište u Zagrebu, 24. veljače 2019., zadnji pristup: 26.08.2020.

[5] S. Gračan, *Četiri su dovoljne,* Matematika i škola, **41**, (2007.), 26–35.

[6] I. Gregurić i A. Klobučar, *Problem četiri boje,* Osječki matematički list, **10**, (2010.), 21–29.

[7] I. Jurilj, *Povijesni pregled bojenja grafova,* diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2010.

[8] A. B. Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours,* American Journal of Mathematics, **2(3)**, (1879.), 193–200.

[9] M. Křižić, *Planarni grafovi,* diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2013.

[10] O. Oystein, *The four-color problem*, Academic Press, New York, 1967.

[11] G. Papić, *Problem četiriju boja,* Matematičko-fizički list, **4**, (1977.), 129–133.

Sažetak

Još davne 1852. godine Francis Guthrie iznosi slutnju da su četiri boje dovoljne za bojanje proizvoljne zemljopisne karte na način da su svake dvije zemlje obojane različitim bojama. Cilj ovog diplomskog rada je matematički precizno formulirati taj problem te dati povijesni pregled pristupa i rezultata koji su doveli do konačnog dokaza Guthrieove slutnje 124 godine kasnije, 1976. godine. Kratka povijest problema može se pronaći u uvodnom dijelu rada. U prvom poglavlju problem definiramo topološki, a potom u drugom poglavlju i kombinatorno. Pri tome smo iskazali sve definicije i rezultate potrebne za razumijevanje pozadinske teorije te ih ilustrirali primjerima i slikama. Posljednji dio rada posvećen je teoremu pet boja i njegovim različitim dokazima.

Summary

Way back in 1852, Francis Guthrie conjectured that four colors are sufficient to color an arbitrary map in such a way that any two neighboring countries are painted in different colors. The goal of this work is to mathematically formulate this problem and to give a historical overview of the approaches and results that led to the final proof of Guthrie's conjecture 124 years later, in 1976. A brief history of the problem can be found in the introductory part of the work. In the first chapter we define the problem in the topological, and then, in the second chapter, in the combinatorial setting. Moreover, we present all the definitions and results which are required for understanding the background theory and also, we illustrate them with examples and pictures. In the last part of the work, the focus is on the five color theorem and its various proofs.

Životopis

Rođena sam 20. listopada 1993. godine u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole, 2008. godine upisujem prirodoslovno-matematičku V. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja, 2012. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2017. godine stječem titulu sveučilišne prvostupnice matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.