Izborni sustavi i proporcionalnost

Alagić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Alagić

IZBORNI SUSTAVI I PROPORCIONALNOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Roditeljima, prijateljima i svim dragim ljudima koji su me motivirali da dovršim ovaj rad.

Sadržaj

Uvod

Pretpostavimo da na izborima sudjeluju stranke $a_1, a_2, \ldots, a_k$ koje su osvojile redom $v_1, v_2, \ldots, v_k$ glasova. Te glasove treba raspodijeliti na m mandata. Dakle, traže se $m_1, m_2, \ldots, m_k$ cijeli nenegativni brojevi koji će održavati proporcionalnost i zadovoljavati $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$.

Idealnim brojem mandata pojedine liste smatramo sljedeći broj:

$$\frac{\text{broj glasova liste}}{\text{zbroj svih glasova}} \cdot \text{broj mjesta za diobu.} \tag{1}$$

U ovom diplomskom radu opisat će se nekoliko metoda koje rješavaju taj problem: D'Hondtova i Sainte-Laguëova, te Jeffersonova i Websterova metoda. Pokazat ćemo i nekoliko primjera sa izbora zastupnika u Hrvatski sabor 2020.

Poseban naglasak bit će na D'Hondtovoj metodi s obzirom na njezinu primjenu u Republici Hrvatskoj. Nakon toga ćemo dati uvod u opću teoriju razdiobe mandata.

Poglavlje 1

Metode

1.1 Opisi metoda

D'Hondtova metoda

Uzmimo $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_k$. Formirajmo matricu:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{1} & \frac{v_1}{2} & \cdots & \frac{v_1}{m} \\ \frac{v_2}{1} & \frac{v_2}{2} & \cdots & \frac{v_2}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{v_k}{1} & \frac{v_k}{2} & \cdots & \frac{v_k}{m} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

U toj matrici izaberemo m najvećih brojeva. Neka su to brojevi $\frac{v_1}{1}, \dots \frac{v_1}{m_1}, \frac{v_2}{1}, \dots, \frac{v_2}{m_2}, \dots, \frac{v_j}{1}, \dots, \frac{v_j}{m_j}$. Tada stranke $a_1, a_2, \dots, a_j$ redom osvajaju $m_1, m_2, \dots m_j$ mandata.

Sainte-Laguëova metoda

U ovoj metodi, postupak je isti kao i kod D'Hondtove metode, osim što djelitelji nisu 1,2, . . . ,m, nego 1,3, . . . , $2m - 1$. Dakle, matrica u kojoj tražimo m najvećih brojeva izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{1} & \frac{v_1}{3} & \cdots & \frac{v_1}{2m-1} \\ \frac{v_2}{1} & \frac{v_2}{3} & \cdots & \frac{v_2}{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{v_k}{1} & \frac{v_k}{3} & \cdots & \frac{v_k}{2m-1} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Jeffersonova metoda

Za Jeffersonovu metodu prvo se odredi standardni djelitelj $q = \frac{v_1 + \cdots + v_k}{m}$. Nakon toga se uzme modificirani djelitelj Q koji je malo manji od standardnog djelitelja. Mandati m_i se računaju na sljedeći način: $m_i = \left\lfloor \frac{v_i}{Q} \right\rfloor$. Ako je $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$, onda je postupak gotov. Ako je suma prevelika, izabire se novi modificirani djelitelj koji je veći od Q. Ako je suma premala, izabire se novi modificirani djelitelj koji je manji od Q. Postupak se ponavlja dok se ne dobije $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$.

Websterova metoda

Websterova metoda je slična Jefferonovoj. Jedina je razlika u računanju m_i. Uzima se $m_i = \left[\frac{v_i}{Q} \right]$. Dakle, ovdje umjesto na prvi manji cijeli broj zaokružujemo na najbliži cijeli broj.

Napomena 1.1.1. *Ovdje se za zaokruživanje 0.5 uzima sljedeće pravilo:* $\left\lceil n + \frac{1}{2} \right\rceil = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *To možemo pisati kao* $[x] = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

1.2 Ekvivalencije

D'Hondtova i Jeffersonova metoda

Sada ćemo dokazati da su D'Hondtova i Jeffersonova metoda ekvivalentne.

Lema 1.2.1. *Uzmimo iz D'Hondtove metode najmanji* $\frac{v_j}{m_j}$ *(tj. m−ti po veličini od odabranih brojeva) i označimo ga s Q. Tada je Q Jeffersonov djelitelj.*

Dokaz. Vrijedi
$$\frac{v_j}{m_j} = Q > \frac{v_j}{m_j + 1}. \tag{1.3}$$
Dakle, $\frac{v_j}{Q} = m_j$ i $\frac{v_j}{Q} < m_j + 1$, to jest $\frac{v_j}{Q} \in [m_j, m_j + 1\rangle$. Za retke takve da je $i < j$ vrijedi sljedeće: $\frac{v_i}{m_i}$ ulazi u m najvećih brojeva iz matrice, dok $\frac{v_i}{m_i + 1}$ ne ulazi. Dakle,
$$\frac{v_i}{m_i} \geq Q > \frac{v_i}{m_i + 1} \tag{1.4}$$
iz čega slijedi $\frac{v_i}{Q} \in [m_i, m_i + 1\rangle$. Dakle, Q je Jeffersonov djelitelj.

Uočimo: ako Q iz (1.3) označimo s Q_0, pa ako uzmemo bilo koji Q sa svojstvom
$$\frac{v_j}{m_j} > Q > \frac{v_i}{m_i + 1}, \quad \forall i = 1, \ldots, k \tag{1.5}$$
onda isti dokaz pokazuje da je i svaki takav Q Jeffersonov djelitelj. □

Napomena 1.2.2. *Pogledajmo rubne slučajeve:*

- $\frac{v_j}{m_j}$ *iz prethodne leme je možda* $\frac{v_1}{m}$. *To znači da stranka* a_1 *dobiva svih* m *mandata. Zaista, to znači da je* $Q_0 = \frac{v_1}{m}$, *pa je* $\frac{v_2}{1} < Q$, *tj.* $\frac{v_2}{Q} < 1$ *i Jefferson daje* $m_2 = 0$. *Pogotovo je* $m_i = 0$ *za* $i \geq 3$.

- *Možda je* $\frac{v_j}{1} = Q$. *To znači da stranka* a_j *dobiva samo 1 mandat i taj je "zadnji" za dodijeliti. I Jefferson daje isti rezultat jer je tada za sve* $i > j$, $\frac{v_i}{1} < Q$ *i stoga* $\frac{v_i}{Q} < 1$.

Lema 1.2.3. *Neka je* Q *Jeffersonov djelitelj koja dovodi do raspodjele madata na* $m_1, \ldots, m_j$. *Tada tu istu raspodjelu daje i D'Hondt.*

Dokaz. Vrijedi, dakle,
$$m_i \leq \frac{v_i}{Q} < m_i + 1, \quad \forall i = 1, \ldots, j \leq k.$$
Drugačije napisano,
$$\frac{v_i}{m_i} \geq Q > \frac{v_i}{m_i + 1}, \quad \forall i = 1, \ldots, j \leq k.$$
U matrici iz opisa D'Hondtove metode svi su redci opadajući. Zbog toga je u prvom retku m_1 elemenata većih od Q, u drugom m_2, u $i-$tom m_i za $i = 1, \ldots, j \leq k$. Svi ostali elementi su manji od Q. Dakle, D'Hondtova metoda će stranci a_i dodijeliti m_i mandata, baš kao i Jefferson. □

Teorem 1.2.4. *Websterova i Sainte-Laguëova metoda su ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su najveći brojevi u Sainte-Laguëovoj tablici $\frac{v_i}{1}, \dots, \frac{v_i}{2(m_i-1)+1}$, $\forall i = 1, \dots, j \leq k$. Dakle, stranka a_i ima m_i mandata. Označimo s Q najmanjeg od njih: $Q = \frac{v_j}{2(m_j-1)+1}$. Tada vrijedi

$$\frac{v_j}{2(m_j-1)+1} = Q > \frac{v_j}{2m_j+1} \quad \text{te} \quad \frac{v_i}{2(m_i-1)+1} > Q > \frac{v_i}{2m_i+1} \quad \forall i < j.$$

Iz toga se vidi da vrijedi

$$\frac{v_j}{2Q} = m_j - 1 + \frac{1}{2} \quad \text{te} \quad \frac{v_i}{2Q} \in \left\langle m_i - 1 + \frac{1}{2}, m_i + \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \forall i < j.$$

Dakle, Websterova metoda strankama a_i točno m_i mandata, $\forall i \leq j$.

Dokaz obrata je analogan dokazu leme 1.2.3. Označimo Websterovog djelitelja s $2Q$. Ako je ta metoda stranci a_i dodijelila m_i mandata, tada vrijedi $\frac{v_i}{2Q} \in \left[m_i - 1 + \frac{1}{2}, m_i + \frac{1}{2} \right\rangle$, odnosno

$$m_i - 1 + \frac{1}{2} \leq \frac{v_i}{2Q} < m_i + \frac{1}{2}, \quad \forall i$$

odakle je

$$\frac{v_i}{2(m_i-1)+\frac{1}{2}} \geq Q > \frac{v_i}{2m_i+1}, \quad \forall i.$$

Odatle slijedi da Sainte-Laguë također dodjeljuje m_i mandata stranci a_i, $\forall i$. □

1.3 Primjeri

Primjer kada D'Hondtova metoda ne daje rezultat

Pogledajmo sada primjer gdje D'Hondtova metoda ne daje rezultat. Kandidirane su 4 stranke koje su osvojile sljedeći broj glasova: $v_1 = 100$, $v_2 = 80$, $v_3 = 30$ i $v_4 = 20$. Za početak, neka je $m = 8$ (ovo će dati rezultat). Uvrstimo ove vrijednosti u matricu 1.1 i formirajmo tablicu 1.1.

Označimo sada u njoj 8 najvećih brojeva iz te tablice plavom bojom. Iz tablice 1.2, vidimo da u ovom slučaju stranci a_1 pripadaju četiri mandata, stranci a_2 tri mandata i stranci a_3 jedan mandat, dok stranka a_4 ne dobiva niti jedan mandat.

Kada bismo uz isti broj glasova imali 9 mandata za rasporediti, u tablici bimo tražili sljedeći najveći broj. Taj broj je 20. Međutim, on se pojavljuje kod čak tri stranke: a_1, a_2 i

Broj glasova \ Djelitelji	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_1 = 100$	100	50	33.33	25	20	16.67	14.28	12.5
$v_2 = 80$	80	40	26.67	20	16	13.33	11.43	10
$v_3 = 30$	30	15	10	7.5	6	5	4.29	3.75
$v_4 = 20$	20	10	6.67	5	4	3.33	2.86	2.5

Tablica 1.1: Tablica za D'Hondtovu metodu

Broj glasova \ Djelitelji	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_1 = 100$	100	50	33,33	25	20	16,67	14,28	12,5
$v_2 = 80$	80	40	26,67	20	16	13,33	11,43	10
$v_3 = 30$	30	15	10	7,5	6	5	4,29	3,75
$v_4 = 20$	20	10	6,67	5	4	3,33	2,86	2,5

Tablica 1.2: Tablica za D'Hondtovu metodu uz $m = 8$

a_4. Iz toga ne možemo odrediti kojoj stranci bismo trebali dodijeliti zadnji mandat. Dakle, D'Hondtova metoda u ovom slučaju ne daje rezultat.

Da bi se to popravilo, potrebno je nekakvo dodatno pravilo. Na primjer, lista a_4 je osvojila $\frac{20}{230} \approx 8{,}696\%$ glasova. Kada bismo stavili izborni prag 10%, lista a_4 bi odmah ispala iz razmatranja. Drugi način bi mogao biti da između lista s neriješenim rezultatom mandat dodijelimo onoj od njih s najvećim brojem glasova. Tako se radi u izborima zastupnika u Hrvatski sabor (više u [1], članak 40). Zbog toga ćemo od sada pa nadalje u ovom radu to uzimati za pravilo.

Primjer sa izbora zastupnika u Hrvatski sabor 2020.

140 zastupnika bira se u Zastupnički dom Sabora tako da se iz svake od 10 izbornih jedinica u Republici Hrvatskoj izabere po 14 zastupnika. Hrvatski izborni sustav koristi izborni prag od 5%. To znači da se mandati dodjeljuju samo onim listama koje su skupile više od 5% glasova, tj. za koje vrijedi $\frac{v_i}{v_1 + v_2 + \cdots + v_k} \geq 5\%$.

Pogledat ćemo rezultate iz I. i VII. izborne jedinice dobivene D'Hondtovom metodom i vidjet ćemo koje rezultate bi dala Sainte-Laguëova metoda. Treba uzeti u obzir da se uzima izborni prag od 5%. To znači da svaka lista koja dobije manje od 5% glasova neće ulaziti u raspodjelu mandata, čak i ako bi ga inače osvojila.

U svakoj izbornoj jedinici dodjeljuje se $m = 14$ mandata. Svi podaci iz ovog odjeljka preuzeti su iz [2].

Pogledajmo, dakle, I. izbornu jedinicu. Prvih 6 lista prekoračilo je izborni prag i zato ćemo gledati samo njih. Označimo ih kao i dosad: $a_1, \dots, a_6$. Redom su osvojile sljedeće brojeve glasova: 49.202, 38.701, 36.702, 15.586, 14.134 i 11.039.

Uvrstimo ove vrijednosti u matricu 1.1. Budući da su svi reci opadajući, nije potrebno kreirati svih 14 stupaca. Dovoljno je ići tako daleko dok se nakon m izabranih najvećih brojeva ne pojavi barem jedan prazan stupac. Tablice su dane na stranici 8.

U tablici 1.3 plavom bojom je označeno 14 najvećih brojeva. Iz nje se vidi da su liste dobile sljedeće brojeve mandata: $m_1 = 5$, $m_2 = m_3 = 3$ i $m_4 = m_5 = m_6 = 1$. To se i poklapa sa rezultatima izbora.

Pogledajmo sada koju bi raspodjelu mandata dala Sainte-Laguëova metoda. Dakle, umjesto sa $1, 2, 3 \dots$, dijelimo sa $1, 3, 5, \dots$, kao u matrici 1.2.

Iz tablice 1.4 vidi se da su mandati raspodijeljeni drugačije nego kod D'Hondtove metode: $m_1 = m_2 = 4$, $m_3 = 3$ i $m_4 = m_5 = m_6 = 1$.

U VII. izbornoj jedinici je također 6 lista prekoračilo izborni prag. Redom su osvojile sljedeće brojeve glasova: 68.401, 46.722, 19.949, 18.086, 12.997 i 12.228. Tablica za D'Hondtovu metodu je tablica 1.5.

Dakle, rezultati su sljedeći: $m_1 = 6$, $m_2 = 4$ i $m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1$.

Tablica za Sainte-Laguëovu metodu je 1.6 i daje sljedeće rezultate: $m_1 = 5$, $m_2 = 4$, $m_3 = 2$ i $m_4 = m_5 = m_6 = 1$.

Vidimo da u oba primjera D'Hondtova i Sainte-Laguëova metoda daju različite rezultate.

	1	2	3	4	5	6	7	Rezultati
v_1 = 49.202	49.202,00	24.601,00	16.400,67	12.300,50	9.840,40	8.200,33	7.028,86	5
v_2 = 38.701	38.701,00	19.350,50	12.900,33	9.675,25	7.740,20	6.450,17	5.528,71	3
v_3 = 36.702	36.702,00	18.351,00	12.234,00	9.175,50	7.340,40	6.117,00	5.243,14	3
v_4 = 15.586	15.586,00	7.793,00	5.195,33	3.896,50	3.117,20	2.597,67	2.226,57	1
v_5 = 14.134	14.134,00	7.067,00	4.711,33	3.533,50	2.826,80	2.355,67	2.019,14	1
v_6 = 11.039	11.039,00	5.519,50	3.679,67	2.759,75	2.207,80	1.839,83	1.577,00	1

Tablica 1.3: I. izborna jedinica - D'Hondtova metoda

	1	3	5	7	9	11	13	Rezultati
v_1 = 49.202	49.202,00	16.400,67	9.840,40	7.028,86	5.466,89	4.472,91	3.784,77	4
v_2 = 38.701	38.701,00	12.900,33	7.740,20	5.528,71	4.300,11	3.518,27	2.977,00	4
v_3 = 36.702	36.702,00	12.234,00	7.340,40	5.243,14	4.078,00	3.336,55	2.823,23	3
v_4 = 15.586	15.586,00	5.195,33	3.117,20	2.226,57	1.731,78	1.416,91	1.198,92	1
v_5 = 14.134	14.134,00	4.711,33	2.826,80	2.019,14	1.570,44	1.284,91	1.087,23	1
v_6 = 11.039	11.039,00	3.679,67	2.207,80	1.577,00	1.226,56	1.003,55	849,15	1

Tablica 1.4: I. izborna jedinica - Sainte-Laguëova metoda

	1	2	3	4	5	6	7	Rezultati
v_1 = 68.401	68.401,00	34.200,50	22.800,33	17.100,25	13.680,20	11.400,17	9.771,57	6
v_2 = 46.722	46.722,00	23.361,00	15.574,00	11.680,50	9.344,40	7.787,00	6.674,57	4
v_3 = 19.949	19.949,00	9.974,50	6.649,67	4.987,25	3.989,80	3.324,83	2.849,86	1
v_4 = 18.086	18.086,00	9.043,00	6.028,67	4.521,50	3.617,20	3.014,33	2.583,71	1
v_5 = 12.997	12.997,00	6.498,50	4.332,33	3.249,25	2.599,40	2.166,17	1.856,71	1
v_6 = 12.228	12.228,00	6.114,00	4.076,00	3.057,00	2.445,60	2.038,00	1.746,86	1

Tablica 1.5: VII. izborna jedinica - D'Hondtova metoda

	1	3	5	7	9	11	13	Rezultati
v_1 = 68.401	68.401,00	22.800,33	13.680,20	9.771,57	7.600,11	6.218,27	5.261,62	5
v_2 = 46.722	46.722,00	15.574,00	9.344,40	6.674,57	5.191,33	4.247,45	3.594,00	4
v_3 = 19.949	19.949,00	6.649,67	3.989,80	2.849,86	2.216,56	1.813,55	1.534,54	2
v_4 = 18.086	18.086,00	6.028,67	3.617,20	2.583,71	2.009,56	1.644,18	1.391,23	1
v_5 = 12.997	12.997,00	4.332,33	2.599,40	1.856,71	1.444,11	1.181,55	999,77	1
v_6 = 12.228	12.228,00	4.076,00	2.445,60	1.746,86	1.358,67	1.111,64	940,62	1

Tablica 1.6: VII. izborna jedinica - Sainte-Laguëova metoda

Poglavlje 2

Svojstva D'Hondtove metode

2.1 Monotonost

Neka je, kao i do sada, k broj lista koje se natječu na izborima. Neka su $a_1, \dots, a_k$ liste i $v_1, \dots, v_k$ glasovi koje je pojedina lista osvojila. Neka je m mjesta u predstavničkom tijelu i neka je v ukupan broj izašlih birača.

Prije svega, htjeli bismo da je metoda raspodjele mandata monotona, odnosno, da lista s više glasova dobije i više mandata. Sljedeći teorem kaže da je D'Hondtova metoda monotona.

Teorem 2.1.1. *Ako je $v_j > v_i$, tada je $m_j \geq m_i$, tj. lista s više glasova osvojit će bar onoliko mandata u predstavničkom tijelu koliko i lista s manje glasova.*

Dokaz. Teorem se dokazuje indukcijom po m. Za $m = 1$ je tvrdnja očita jer je u tom slučaju sigurno $m_i = 0$, a $m_j \in \{0, 1\}$, ovisno o osvojenim glasovima drugih lista. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za $m = n \geq 1$. Pokažimo da ona vrijedi i za $m = n + 1$. Neka su m_j^a i m_i^a mandati koje su liste osvojile nakon a podijeljenih mjesta. Nakon podjele prvih n mjesta po pretpostavci vrijedi $m_j^n \geq m_i^n$.

- Ako je $m_j^n > m_i^n$, koja god lista da dobije $n + 1$-vo mjesto, vrijedit će $m_j^{n+1} \geq m_i^{n+1}$.
- Ako vrijedi $m_j^n = m_i^n$, tada će po pravilima D'Hondtove metode mandat dobiti ili lista j ili neka treća lista.

□

2.2 Proporcionalnost

Nakon monotonosti, htjeli bismo da je metoda proporcionalna. D'Hondtova metoda teži k proporcionalnosti uz poneka odstupanja u korist lista s najvećim brojem glasova. To se vidi i na primjeru iz 1.3. D'Hondtova metoda je vodećim listama dodijelila više mandata od Sainte-Laguëove metode.

Prije idućeg teorema, navedimo algoritam za D'Hondtovu metodu kako je naveden u [9].

Algoritam 1: Algoritam za D'Hondtovu metodu

Ulaz: $glasovi$ [vektor s k pozitivnih brojeva], $mjesta$ [broj mjesta],
$obrada = glasovi$, $mandati = [0, \dots, 0]$ [nul-vektor duljine k]
Dok $mjesta > 0$ **radi**
  nađi sve $indekse$ između 1 i k takve da je
   $obrada[indeks] == max_{j=1,\dots,k} obrada[j]$;
  Ako *ima više takvih indeksa* **onda**
    među svim $indeksima$ odaberi onaj za koji je $glasovi[indeks]$ najveći;
  kraj
  $mandati[indeks] = mandati[indeks] + 1$;
  $obrada[indeks] = glasovi[indeks]/(mandati[indeks] + 1)$;
  $mjesta = mjesta - 1$;
kraj
Izlaz: mandati [broj mjesta koje je osvojila pojedina lista]

Idealni broj mandata pojedine liste dan je sa (1).

Teorem 2.2.1. *Neka su liste $a_1, a_2, \dots, a_k$ redom osvojile $v_1, v_2, \dots, v_k$ glasova. Neka im je D'Hondtova metoda pridružila redom $m_1, m_2, \dots, m_k$ mandata. Neka je $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ i $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. Tada vrijedi*

$$\left\lfloor m \cdot \frac{v_j}{v} \right\rfloor \leq m_j. \tag{2.1}$$

Dokaz. Provedemo li algoritam 1, u zadnjem koraku vektor *obrada* izgledat će ovako:

$$\left(\frac{v_1}{m_1 + 1}, \dots, \frac{v_k}{m_k + 1} \right).$$

Neka je $t = \max \left\{ \frac{v_1}{m_1 + 1}, \dots, \frac{v_k}{m_k + 1} \right\}$. Iz jednadžbe (1.4) iz dokaza leme 1.2.1, jasno je da vrijedi $t \leq \frac{v_i}{m_i}$ za sve $i = 1,2, \dots, k$.

Dakle, za proizvoljni $j \in \{1, \dots, k\}$ vrijedi

$$\frac{v_j}{m_j + 1} \leq \frac{v_i}{m_i} \quad \Leftrightarrow \quad m_i \frac{v_j}{m_j + 1} \leq v_i. \tag{2.2}$$

Posebno, za $i = j$ vrijedi $m_i \frac{v_j}{m_j + 1} < v_i$. Zbrojimo nejednakost (2.2) po i i dobit ćemo

$$m \frac{v_j}{m_j + 1} < v.$$

Sada vrijedi

$$m_j + 1 > m \frac{v_j}{v} \geq \left\lfloor m \cdot \frac{v_j}{v} \right\rfloor.$$

Nejednakost (2.1) očito slijedi odavde. □

Prethodni teorem daje jamstvo da je D'Hondtova metoda donekle proporcionalna. Iz njega slijedi sljedeći korolar.

Korolar 2.2.2. *Ako je $m \cdot \frac{v_j}{v}$ cijeli broj za sve j, tj. ako se mandati daju proporcionalno podijeliti, D'Hondtova metoda će to i napraviti.*

Dokaz. Ako je $m \cdot \frac{v_j}{v}$ cijeli broj za sve j, onda zbog $m \cdot \frac{v_1}{v} + \cdots + m \cdot \frac{v_k}{v} = m$, vrijedi jednakost za sve j u (2.1). □

Za precizan dokaz tvrdnje o asimptotskom ponašanju koja slijedi, trebat će nam pomoćne tvrdnje.

Lema 2.2.3. *Neka liste dobivaju redom $v_1, v_2, \ldots, v_k$ glasova na izborima. Tada za i-tu listu i svaki prirodan broj n postoji ukupan broj mandata $m \in \mathbb{N}$, takav da i-ta lista dobiva n mandata.*

Lema 2.2.4. *Neka su A i B realni brojevi takvi da je $A > B$. Definirajmo dva harmonijska niza na sljedeći način: $\left\{a_i = \frac{A}{i}, i \in \mathbb{N}\right\}$ i $\left\{b_i = \frac{B}{i}, i \in \mathbb{N}\right\}$. Za proizvoljan $j \in \mathbb{N}$, označimo s n_j broj elemenata niza $\{a_i\}$ za koje vrijedi $a_i > b_j$ te uvedimo oznaku $p_j = \frac{j}{n_j}$. Tada $p_j \to \frac{A}{B}$ kada $j \to \infty$.*

Ovu lemu interpretiramo ovako: broj n_j predstavlja broj mandata dodijeljenih listi s više glasova, prije nego li se listi s manje glasova dodijeli j-ti mandat. Lema tvrdi da omjer dodijeljenih mandata teži omjeru osvojenih glasova kada broj dodijeljenih mandata m teži u beskonačno.

Dokazi lema 2.2.3 i 2.2.4 mogu se naći u [6].

Propozicija 2.2.5. *Neka vrijede pretpostavke teorema 2.2.1. Tada za svaki $i = 1, \ldots, k$ udio i-te liste u mandatima $\frac{m_i}{m}$ teži udjelu i-te liste u glasovima $\frac{v_i}{v}$ kada $m \to \infty$.*

Dokaz. Prema lemi 2.2.3 za dovoljno veliki m svaka lista osvaja barem jedan mandat. Zbog toga bilo koje dvije liste zadovoljavaju uvjete leme 2.2.4. Za sve $i \neq j$ po lemi 2.2.3 vrijedi $\frac{m_j}{m_i} \to \frac{v_j}{v_i}$ kada $m \to \infty$. $\frac{m_i}{m_i} \to \frac{v_i}{v_i}$ vrijedi trivijalno. Dakle, vrijedi

$$\frac{m_j}{m_i} \to \frac{v_j}{v_i}, \qquad \text{za sve } j = 1, 2, \dots, k.$$

Zbrajanjem po j dobivamo

$$\left(\frac{m_1}{m_i} + \frac{m_2}{m_i} + \dots + \frac{m_k}{m_i}\right) \quad \to \quad \left(\frac{v_1}{v_i} + \frac{v_2}{v_i} + \dots + \frac{v_k}{v_i}\right).$$

Iz ovoga odmah slijedi

$$\frac{m}{m_i} \to \frac{v}{v_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_i}{m} \to \frac{v_i}{v}$$

čime je tvrdnja pokazana. □

Bez obzira na prethodne tvrdnje, D'Hondtova metoda ipak može odstupati od proporcionalnosti. Pogledajmo sljedeći primjer preuzet iz [9]. Sedam lista natječe se za 100 mjesta u predstavničkom tijelu. Redom su dobile sljedeće brojeve glasova: 500, 300, 200, 100, 50, 30 i 20. Idealan broj mandata za prvu listu po (1) je

$$\frac{500}{1200} \cdot 100 \approx 41{,}67.$$

Dakle, za očekivati je da će ta lista onda dobiti 41 ili 42 mandata. Međutim, D'Hondtova metoda toj listi dodjeljuje 43 mjesta.

U [8] dana je formula za pristranost D'Hondtove metode prema i-toj po redu vodećoj listi u izborima za m mandata:

$$B_i(m) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=i}^{k} \frac{1}{j} - 1\right) + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Dakle, iz ovoga se vidi da D'Hondtova metoda favorizira vodeće liste, dok prema onima s najmanjim brojem glasova ima negativnu pristranost.

2.3 Očuvanje većine

D'Hondtova metoda ima svojstvo očuvanja većine, odnosno, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3.1. *Neka vrijedi* $v_1 > v_2 + v_3 + \cdots + v_k$*. Tada je*

$$m_1 \geq m_2 + m_3 + \cdots + m_k.$$

Nadalje, ako je broj mandata m neparan, vrijedi $m_1 > m_2 + m_3 + \cdots + m_k$*.*

Dokaz. Ideja je ista kao i u dokazu teorema 2.2.1. Vrijedi $\frac{v_1}{m_1 + 1} \leq \frac{v_j}{m_j}$ za sve j. To je ekvivalentno sljedećem:

$$\frac{m_j}{m_1 + 1} \leq \frac{v_j}{v_1}, \quad \forall j.$$

Zadnju nejednakost zbrojimo po svim $j > 1$ i dobivamo

$$\frac{m_2 + m_3 + \cdots + m_k}{m_1 + 1} \leq \frac{v_2 + v_3 + \cdots + v_k}{v_1} < 1.$$

Dakle, $m_2 + m_3 + \cdots + m_k < m_1 + 1$. Budući da imamo prirodne brojeve na obje strane, prva tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo sada da je m neparan, odnosno da je $m = 2x + 1$. Iz posljednje nejednakosti imamo

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k < 2m_1 + 1.$$

Budući da je m neparan cijeli broj, stroga nejednakost će vrijediti i ako desnu stranu umanjimo za 1, odnosno vrijedi $m < 2m_1$. Iz toga dobivamo $m_2 + m_3 + \cdots + m_k < m_1$. □

2.4 Isplativost koaliranja

Budući da D'Hondtova metoda daje prednost listama s većim brojem glasova, postavlja se pitanje isplati li se listama sličnog programa s manjim brojem glasova udružiti.

Pogledajmo simulaciju iz [9]. Pretpostavke su da se $k = 4$ liste natječu za $m = 51$ mjesto u predstavničkom tijelu. Liste 1 i 2 imaju podršku između 20% i 30% birača, dok liste 3 i 4 imaju između 10% i 20% podrške, a ostali birači neće izaći na izbore.

Liste 1 i 3 imaju sličan program, pa se možda odluče koalirati. Isto vrijedi i za liste 2 i 4. Liste 1 i 3 zvat ćemo neparnim blokom, a liste 2 i 4 parnim. Blok koji osvoji više glasova na izborima zvat ćemo većinskim, a drugi blok manjinskim.

Simulacija je provedena na sljedeći način: v_1 i v_2 su simulirani kao slučajno odabrani brojevi iz intervala $[0.2, 0.3]$, a v_3 i v_4 iz intervala $[0.1, 0.2]$.

U jednoj od simulacija dobiven je rezultat dan u tablici 2.1. Iako je lista 1 dobila najviše

i	1	2	3	4
v_i	27,16%	11,42%	25.36%	18.82%

Tablica 2.1: Rezultat jedne simulacije

Liste	m_{13}	m_1	m_3	m_{24}	m_2	m_4
1, 2, 3, 4	24	17	7	27	16	11
1&3, 2&4	24	–	–	27	–	–
1, 3, 2&4	24	17	7	27	–	–
1&3, 2, 4	24	–	–	27	16	11

Tablica 2.2: Raspodjela mandata uz potencijalne koalicije

glasova (27.16%), parni blok je osvojio većinu (44.18%), dok je neparni dobio 38.57%.

U tablici 2.2 preuzetoj iz [9] vidi se kako bi prošle potencijalne koalicije. U ovom slučaju blokovi i pojedine liste u slučaju kad su izašle samostalno nisu promijenile odnose u predstavničkom tijelu bez obzira na koalicijske kombinacije.

Većinski blok je, dakle, ili parni ili neparni blok. Simulacije su provedene 1.000.000 puta i tri scenarija su uspoređena:

1. liste većinskog bloka koaliraju;
2. liste većinskog bloka izlaze samostalno na izbore, dok stranke manjinskog bloka koaliraju
3. sve liste izlaze samostano na izbore.

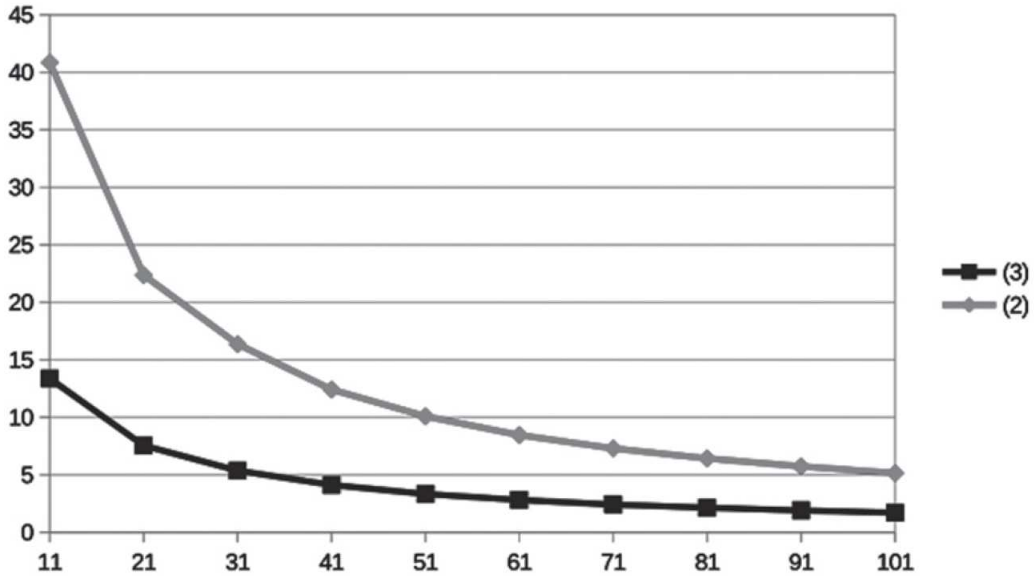
Rezultati simulacija dani su u tablici 2.3 preuzetoj iz [9].

Scenarij / Ishod	1.	2.	3.
Pobjeda većinskog bloka	100%	89,91%	96,66%
Pobjeda manjnskog bloka	0%	10,09%	3,34%

Tablica 2.3: Rezultati simulacija

Stopostotna pobjeda većinskog bloka u scenariju 1. direktna je posljedica teorema 2.3.1. Nadalje, u slučaju 2. vidi se da je manjinski blok pobijedio u otprilike 10% slučajeva ako su stranke većinskog bloka izašle samostalno. Ako su sve liste izašle samostalno, manjinski blok je pobijedio u otprilike 4% slučajeva.

Simulacije su također provedene za različite m. Na sljedećoj slici dane su vjerojatnosti pobjede manjinskog bloka u scenarijima 2. i 3. za različite m.



Slika 2.1: Vjerojatnost pobjede manjinskog bloka u scenarijima 2. i 3. za $m = 11, 21, \ldots, 101$.

Na slici 2.1 preuzetoj iz [9] vidi se da vjerojatnost da manjinski blok pobijedi opada kako raste m. Dakle, kako raste m, tako raste i proporcionalnost metode.

Još jedno bitno pitanje je kolika je razlika u broju mandata u slučaju kada stranke izlaze na izbore udruženo u odnosu na slučaj kada izlaze samostalno. Opet je napravljeno 1.000.000 simulacija za sljedeća dva scenarija:

1. Liste manjinskog bloka izašle su samostalno. Koja je razlika u broju mandata većinskog bloka kada liste koaliraju u odnosu na slučaj kada izlaze samostalno?

2. Liste većinskog bloka koaliraju. Koja je razlika u broju mandata manjinskog bloka kada liste koaliraju u odnosu na slučaj kada izlaze samostalno?

Rezultati su dani u tablici preuzetoj iz [9].

Mandata više \ Scenarij	1.	2.
0	77,33%	76,91%
1	22,67%	23,09%

Tablica 2.4: Rezultati simulacija za razliku u broju mandata

Dakle, koalicija dviju lista može u otprilike 23% slučajeva osigurati do jedan mandat više udruženim strankama nego da su izašle samostalno na izbore.

2.5 Izborni pragovi

Već smo spomenuli da u hrvatskom izbornom sustavu postoji izborni prag od 5% i da se u svakoj izbornoj jedinici bira 14 zastupnika. Po propoziciji 2.2.5, dalo bi se zaključiti da bi najpravednije bilo kada bi postojala samo jedna velika izborna jedinica u kojoj bi se biralo 140 zastupnika. No, reprezentabilnost nije jedini kriterij po kojem se određuje izborni sustav. Kriterij zbog kojeg se uvode izborne jedinice i izborni prag je stabilnost parlamentarne većine.

Zadani izborni prag nazivamo nominalnim. Označimo ga s $p_n \in \langle 0{,}1\rangle$. Dakle, u Hrvatskoj je $p_n = 5\% = 0{,}05$.

U D'Hondtovoj metodi postoji i druga vrsta praga, takozvani prirodni prag. Postoji prirodan broj $p_p \in \langle 0{,}1\rangle$ takav da ako lista osvoji udio u glasovima veći od p_p sigurno osvaja barem jedan mandat. Nominalni i prirodni prag nisu iste vrste. Nominalni izborni prag je nužan uvjet za osvajanje mandata, ali ne i dovoljan, dok je prelazak prirodnog izbornog praga dovoljan.

Pogledajmo prvo D'Hondtovu metodu bez propisanog nominalnog praga.

Propozicija 2.5.1. *Neka vrijede pretpostavke i oznake kao i do sada. Pretpostavimo dodatno da su liste poredane prema broju osvojenih glasova, od one s najvećim brojem glasova do one s najmanjim. Ukoliko i-ta lista osvoji udio glasova veći od* $\frac{1}{m+1}$*, tj. ukoliko je* $V_i := \frac{v_i}{v} > \frac{1}{m+1}$*, tada ta lista osvaja barem jedan mandat.*

Nadalje, ukoliko j-ta lista osvoji udio glasova manji od $\frac{1}{m+1}$*, tj. ako vrijedi* $V_j < \frac{1}{m+1}$*, tada postoji raspodjela preostalih glasova* v_i*,* $i = 1, \ldots, k$ *takva da j-ta lista ne osvaja mandat.*

Dakle, prethodna propozicija kaže da ako udio glasova liste prijeđe bilo koju vrijednost iz $\left\langle \frac{1}{m+1}, 1 \right\rangle$, tada lista osvaja mandat. Također, ne postoji manji broj od $\frac{1}{m+1}$ koji bi bio dovoljan uvjet za osvajanje mandata. Stoga broj $\frac{1}{m+1}$ označavamo s p_p i zovemo prirodnim pragom.

Htjeli bismo da zadovoljavanje nužnog uvjeta za dodjelu mandata povlači i zadovoljavanje dovoljnog uvjeta, tj. da je prirodni izborni prag D'Hondove metode manji od nominalnog. Da bi to bilo ispunjeno, u izbornim jedinicama bi se trebalo dijeliti 19 ili više mandata. Dokazi tvrdnji iz ovog odjeljka mogu se naći u [6].

Promotrimo sada kako će D'Hondtova metoda izgledati kada je propisan nominalni izborni prag.

Pretpostavimo opet da su liste poredane poveličini po broju osvojenih glasova, od najvećeg prema njamanjem. Neka one osvajaju v_i, $i = 1, \dots, k$ glasova. S $n \in \{1, \dots, k\}$ označimo posljednju listu koja je prekoračila nominalni izborni prag.

Propozicija 2.5.2. *Neka D'Hondtova metoda listama dodjeljuje m_i, $i = 1, \dots, k$ mandata. Neka je $p_n \in \langle 0{,}1 \rangle$ nominalan izborni prag i neka je $n \in \{0, 1, \dots, k\}$ broj lista koje su prekoračile prag. Označimo s $\overline{v_n}$ sumu glasova lista koje su prešle nominalan izborni prag. Tada za svaki $i = 1, \dots n$ udio i-te liste u mandatima $M_i := \frac{m_i}{m}$ teži udjelu i-te liste u glasovima $V_i' := \frac{v_i}{\overline{v_n}}$ kada m teži u beskonačno.*

Dakle, bez obzira na nominalni prag, D'Hondtova metoda ima asimptotsko ponašanje koje teži udjelima lista u ukupnom broju glasova lista koje su prešle izborni prag.

Budući da sada samo dio stranaka sudjeluje u podjeli mandata, mijenja se i prirodni izborni prag. Ovdje ćemo ga označavati sa $p_{p,n}$ Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.5.3. *Neka D'Hondtova metoda listama dodjeljuje m_i, $i = 1, \dots, k$ mandata. Neka je $p_n \in \langle 0{,}1 \rangle$ nominalan izborni prag i neka je $n \in \{0, 1, \dots, k\}$ broj lista koje su prekoračile prag. Označimo s $\overline{v_n}$ sumu glasova lista koje su prešle nominalan izborni prag. Tada je dovoljan uvjet za osvajanje mandata za liste koje su prešle nominalni izborni prag osvajanje udjela od ukupnog broja birača $V_i = \frac{v_i}{v}$ takav da vrijedi*

$$V_i > p_{p,n} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{\overline{v_n}}{v}.$$

Budući da prirodni prag ovisi o zbroju glasova lista koje su prešle izborni prag, on ovisi i o visini nominalnog praga. Zbog toga ga označavamo i sa indeksom n.

U [6] dane su tablice s rezultatima parlamentarnih izbora 2000., 2003. i 2007. godine. U njima su dani $p_{n,p}$ za $m = 14$, a nakon toga i za $m = 16, 17$ i 19. Iz podataka se vidi da je tek za $m = 17$ prirodni izborni prag $p_{n,p}$ bio niži od 5% u svim izbornim jedinicama.

Poglavlje 3

Opća teorija razdiobe mandata

3.1 Pretpostavke problema

Postavimo još jednom problem razdiobe mandata. Od sada nadalje zapisivat ćemo podatke pomoću vektora. Dakle, početni podaci su vektor "glasova" $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k)$, prirodni broj koji predstavlja veličinu predstavničkog tijela m i vektor "minimalnog zahtjeva" $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$. Vektor glasova ponekad se naziva i vektor "populacije" jer se broj prestavnika pojedine države u Predstavničkom domu Sjedinjenih Američkih Država bira na temelju populacije pojedine države. Označimo vektor "stranki" (ili vektor "država") sa $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$.

Brojevi v_i su pozitivni. Brojevi r_i su nenegativni i uglavnom su jednaki nekom $r \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, k$. Na primjer, svakoj državi u Sjedinjenim Američkim Državama je osigurano barem jedno mjesto u Predstavničkom domu. U tom je slučaju, dakle, $r = 1$.

Razdioba m *mandata* na k stranaka je vektor $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ nenegativnih cijelih brojeva takvih da je $m_i \geq r_i, \forall i = 1, \ldots, k$ i $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$. U ovom poglavlju ćemo umjesto "mandat" često koristiti izraz "sjedalo".

Nadalje ćemo pretpostavljati da je $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Idealni broj mandata još ćemo nazivati i kvota i vektor kvota označavat ćemo sa $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_k)$. Dakle, $q_i = \dfrac{m_i}{v} m$, gdje je $v = \sum_{i=1}^{k} v_i = v$.

Pitanje koje nas zanima je koja je pravedna metoda za određivanje razdiobe. I to nije pitanje koje se tiče samo politike. Na primjer, u statističkim izvješćima postoji problem zapisivanja zaokruženih postotaka u tablice tako da oni u zbroju daju 100%. Svaki problem u kojem m objekata treba raspodijeliti proporcionalno, ali u cijelim brojevima pripada ovoj vrsti problema i teorija ispod vrijedi u tom slučaju.

Navedimo prvo nekoliko poznatih paradoksa koji su se dogodili kroz povijest u pokušaju raspodijele mandata.

3.2 Paradoksi

Budući da je dijeljenje mandata zapravo pridruživanje cijelih brojeva razlomcima, lako može doći do paradoksa, odnosno do neočekivanih rezultata. Takozvani "paradoks Alabame" bio je prvi otkriveni paradoks raspodjele mandata. Tada je korištena Hamiltonova metoda koja je funkcionirala na sljedeći način:

1. Izračuna se idealni broj mandata za svaku stranku, tj. proporcionalni dio mandata koji bi svaka stranka dobila da su razlomci dozvoljeni.

2. Svaka stranka dobije onoliko mandata koliko iznosi najveće cijelo od njenog idealnog broja mandata.

3. Svaka stranka koja nije dobila mandat dobije jedan mandat.

4. Ostali mandati su raspodijeljeni po jedan svakoj stranci čiji idealni brojevi mandata imaju najveći razlomljeni dio.

Razlomljeni dio od broja x definiran je na sljedeći način: $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

"Paradoks Alabame" otkriven je 1880. godine kada se izračunom utvrdilo da bi hipotetsko povećanje broja mandata za razdiobu smanjilo broj mandata koje je Alabama osvojila sa 8 na 7.

Takozvani "paradoks populacije" dogodio se 1900. kada je Virginia izgubila mandat, a Maine dobio iako je populacija Virginije rasla brže nego populacija Mainea. To se dogodilo korištenjem Hamiltonove metode. Međutim, ne bi se dogodilo "djeliteljskoj" metodi (na primjer D'Hondtovoj).

Još jedan poznati paradok je takozvani "paradoks novih država". Ako je broj predstavnika fiksan, dodavanje nove države bi u teoriji smanjilo broj predstavnika već postojećih država. 1907. je Oklahoma postala država. Dodijeljen joj je idealni broj mandata i ukupan broj mandata se povećao za taj broj. Ponovno računanje razdiobe dovelo je do toga da je New York izgubio mandat, dok ga je Maine dobio.

1983. Balinski i Young dokazali su da ne postoji metoda razdiobe mandata među strankama koja bi zadovoljavala sljedeća svojstva:

- Poštuje takozvano "pravilo kvote", tj. svaka stranka dobiva jedan od dva broja mandata koja su najbliža idealnom broju.

- Nema "paradoks Alabame", tj. ako se ukupni broj mandata poveća, niti jednoj stranci se neće smanjiti broj mandata.

- Nema "paradoks populacije", tj. ako stranka A dobije više glasova od stranke B, stranka A neće izgubiti mandat u korist stranke B.

3.3 Osnovna načela

Tražimo metodu raspodjele, to jest, pravilo koje će svakom k-vektoru $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ (odnosi se na nejednakosti po komponentama) i cijelom broju $m > 0$ dati raspodjelu m na k. Funkcija koja vraća jednu vrijednost nije dovoljan koncept za ovu metodu. Pretpostavimo da dvije stranke s jednakom brojem glasova trebaju podijeliti neparan broj mandata $2a + 1$. Dva su rješenja, $(a, a + 1)$ i $(a + 1, a)$. Međutim, ni po čemu ne možemo jednom rješenju dati prednost pred drugim. Metoda koja je poštena treba dati priliku oboma.

Formalno, **metodu** definiramo kao skup M koji se sastoji od svih razdiobi m na k za svaki k-vektor $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ i cijeli broj m. **Partikularno M-rješenje** je funkcija f za koju vrijedi $f(\mathbf{v}, m) = \mathbf{m} \in M(\mathbf{v}, m)$. Partikularno M-rješenje svaki neriješeni rezultat rješava na umjetni način. Na primjer, u slučaju dvije stranke s jednakim brojem glasova i neparnim brojem mandata $2a + 1$, može izabrati $(a + 1, a)$.

Ideja proporcionalnosti nameće nekoliko osnovnih načela koje bi metoda trebala imati. Prvo je homogenost, odnosno, ako se svi brojevi glasova (ili sve populacije) povećaju tako da proporcije ostanu iste, ne bi trebalo biti promjene u razdiobi. Preciznije, M je **homogena** ako je M-razdioba za $\mathbf{v}$ i m ista kao i M-razdioba za $\lambda\mathbf{v}$ i m, za bilo koji pozitivni λ.

Permutiranje glasova treba rezultirati samo u permutiranju razdijeljenih mandata na isti način. Takve metode su **simetrične**.

M je **slabo proporcionalna** ako kad god je razdioba $\mathbf{m}$ proporcionalna s $\mathbf{v}$, tada je $\mathbf{m}$ jedinstvena M-razdioba za $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ kada je $m = \sum m_i$. Štoviše, kako veličina predstavničkog tijela raste, rješenja bi se trebala sve više približavati idealnoj proporcionalnosti. Ako je $\mathbf{b}'$ M-razdioba za $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ i $\mathbf{b}$ vektor cjelobrojnih komponenti proporcionalan sa $\mathbf{b}'$ za koji vrijedi $\sum b_i < \sum b'_i$, tada bi $\mathbf{b}$ trebao biti jedinstvena razdioba u $M(\mathbf{v}, \sum b_i)$. Na primjer, ako M šest mandata između dvije stranke razdijeli na 3 i 3, tada ta ista metoda mora 4 mandata između iste dvije stranke razdijeliti na 2 i 2. Metoda koja zadovoljava ovo svojstvo i koja je slabo proporcionalna je **proporcionalna**.

Prirodno se pojavljuju neriješeni rezultati, odnosno slučajevi gdje metoda daje nekoliko različitih razdioba. Jedan način za opisati točku neriješenog rezultata $\mathbf{v}^*$ je da kažemo da proizvoljno male promjene oko nje mogu dati različite razdiobe. Kažemo da je metoda **potpuna** ako kad god vrijedi $\mathbf{v}^n \to \mathbf{v} > \mathbf{0}$ i $\mathbf{m} \in M(\mathbf{v}^n, m)$ za svaki n, tada vrijedi i $\mathbf{m} \in M(\mathbf{v}, m)$.

Od sada pa nadalje pretpostavljat će se da su metode razdiobe mandata homogene, simetrične, proporcionalne i potpune ako se ne naglasi drugačije.

Propozicija 3.3.1. *Hamiltonova, Jeffersonova, Websterova, Adamsova, Deanova i Hillova metoda su homogene, simetrične, proporcionalne i potpune.*

Za objašnjenje Adamsove, Deanove i Hillove metode vidi odjeljak 3.4.

3.4 Tradicionalni pristupi

U ovom odjeljku ćemo detaljnije opisati razičite metode koje su se tradicionalno koristile. Često se dogodi da različiti pristupi računanju predstavljaju istu metodu pod različitim krinkama.

Najprirodniji pristup je da se izračunaju kvote i zaokruže na uobičajeni način. No, to ne mora uvijek dati rješenje. Npr., neka je $\mathbf{v} = (27.744, 25.178, 19.951, 14.610, 9.225, 3.292)$ i $m = 36$. Vektor $\mathbf{q}$ je tada jednak $(9{,}988; 9{,}064; 7{,}182; 5{,}260; 3{,}321; 1{,}185)$. Kada bismo zaokruživali na standardni način, dobili bismo $(10, 9, 7, 5, 3, 1)$. Međutim, zbroj tih komponenti je 35.

Jedan način da se taj problem riješi je Hamiltonova metoda. Drugi način bi bio izabrati djelitelj x i izračunati kvocijente za svaku stranku $q_i^x = v_i/x$, i onda to zaokružiti koristeći neko pravilo. Websterov prijedlog bio je to zaokružiti na standardan način, a ako je razlomljeni dio jedak točno jednoj polovini, onda se može zaokružiti i na veći i na manji broj. Taj slučaj je prirodni neriješeni rezultat. Dakle, Websterova metoda dana je s

$$W(\mathbf{v}, m) = \left\{ \mathbf{m} : \quad m_i = \left[\frac{v_i}{x} \right], \quad \sum_i m_i = m \quad \text{za neke } x \right\}.$$

Umjesto "običnog" zaokruživanja, može se koristit isti pristup sa zaokruživanjem kvocijenata na druge načine, kao na primjer u Jeffersonovoj metodi. Generalno, svaki postupak zaokruživanja može se opisati precizirajući djeliteljsku točku $d(a)$ u svakom intervalu kvocijenata $[a, a+1]$ za svaki nenegativni a.

Za bilo koji pozitivni realni broj z, takozvano $d-$zaokruživanje z-a, $[z]_d$ je bilo koji cijeli broj a takav da vrijedi $d(a-1) \leq z \leq d(a)$, što je jedinstveno osim u slučaju $z = d(a)$. Tada se uzme ili a ili $a+1$. Mora vrijediti $d(a) < d(a+1)$. Svaki monotono rastući $d(a)$ definiran za sve cijele brojeve $a \geq 0$ koji zadovoljava $a \leq d(a) \leq a+1$ zove se **kriterij djelitelja**. **Djeliteljska metoda** temeljena na d je

$$M(\mathbf{v}, m) = \left\{ \mathbf{m} : \quad m_i = \left[\frac{v_i}{x} \right]_d, \quad \sum_i m_i = m \quad \text{za neke } x \right\}. \tag{3.1}$$

U slučaju $d(0) = 0$ i $0 < m < k$ prihvaćamo konvenciju da m najvećih stranaka dobije po jedan mandat. Pet tradicionalnih djeliteljskih metoda dano je u tablici 3.1.

Metoda	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson
$d(a)$	a	$\dfrac{a(a+1)}{a+0{,}5}$	$\sqrt{a(a+1)}$	$a+\dfrac{1}{2}$	$a+1$

Tablica 3.1: Tradicionalne djeliteljske metode

U definiciji djeliteljske metode, gledalo se $d(m_i - 1) \leq \frac{v_i}{x} \leq d(m_i)$. Alternativno, može se gledati postoji li x takav da za sve $m_i > 0$ vrijedi $\frac{v_i}{d(m_i - 1)} \geq x \geq \frac{v_i}{d(m_i)}$ i za sve $m_i = 0$, $x \geq \frac{v_i}{d(m_i)}$. Dakle, djeliteljska metoda može biti opisana i u terminima min-max nejednakosti:

$$M(\mathbf{v}, m) = \left\{ \mathbf{m} : \quad \min_{m_i > 0} \frac{v_i}{d(m_i - 1)} \geq \max_{m_j \geq 0} \frac{v_j}{d(m_j)}, \quad \sum_i m_i = m \right\}. \tag{3.2}$$

Djeliteljska metoda M temeljena na d za probleme sa minimalnim i maksimalnim zahtjevima $\mathbf{r} \leq \mathbf{r}^+$ može se opisati na sljedeći način

$$M(\mathbf{v}, m) = \left\{ \mathbf{m} : \quad m_i = \operatorname{mid}\left\{ r_i, r_i^+, \left[\frac{v_i}{x}\right]_d \right\}, \quad \sum_i m_i = m \quad \text{za neke } x \right\},$$

gdje mid$\{a,b,c\}$ daje srednju vrijednost od tri broja a, b i c.

Postoji beskonačno mnogo djeliteljskih metoda. Postavlja se pitanje koju od njih odabrati. Huntington je u [7] opisao ideju usporedbi "količine nejednakosti" između dviju država. Uvijek će jedna država imati blagu prednost u odnosu na drugu. Prebacivanje mandata jedne države drugoj promijenit će predznak nejednakosti, tako da favorizirana država postane manje favorizirana. Treba li se prebacivanje napraviti ovisi o tome hoće li se "količina nejednakosti" smanjiti tim prebacivanjem. Sada je pitanje kako izmjeriti tu "količinu nejednakosti".

Neka države i i j imaju populacije v_i i v_j i neka im je dodijeljeno redom m_i i m_j sjedala. Može se reći da je i favorizirana u odnosu na j ako i samo ako vrijedi $\frac{m_i}{v_i} > \frac{m_j}{v_j}$. Dakle, jedna prirodna mjera nejednakosti između i i j je $\left|\frac{m_i}{v_i} - \frac{m_j}{v_j}\right|$.

Ako se količina nejednakosti smanji prebacivanjem sjedala između i i j, tada se to prebacivanje treba napraviti. Dakle, ako vrijedi

$$\left|\frac{m_i - 1}{v_i} - \frac{m_j + 1}{v_j}\right| < \left|\frac{m_i}{v_i} - \frac{m_j}{v_j}\right|,$$

tada je jedno sjedalo od i treba prebaciti j. Kažemo da je razdoba nestabilna ako dozvoljava takva prebacivanja. Razdioba ne dozvoljava takva prebacivanja ako za sve parove i i j takve da je $\frac{m_i}{v_i} \leq \frac{m_j}{v_j}$ vrijedi

$$\frac{m_i}{v_i} - \frac{m_j}{v_j} \leq \frac{m_j + 1}{v_j} - \frac{m_i - 1}{v_i}.$$

Množenjem posljednje nejednakosti s $v_i v_j$ i grupiranjem članova dobivamo sljedeće

$$\frac{v_i}{m_i - \frac{1}{2}} \geq \frac{v_j}{m_j + \frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Pogledamo li (3.2) i tablicu 3.1, vidimo da je takav $\mathbf{m}$ dan Websterovom metodom razdiobe. Obratno, svaka razdioba dana Websterovom metodom zadovoljava (3.3), odnosno, zadovoljava takozvani "test prebacivanja".

No, izjava da je i favorizirana u odnosu na j može se izreći na puno različitih načina. Za mjeriti nejednakost između i i j jednako bi valjano bilo promatrati nejednakosti između brojeva $\frac{v_i}{m_i}$ i $\frac{v_j}{m_j}$, ili između $\frac{m_j v_i}{v_j}$ i m_i i tako dalje.

Neće svaka mjera nejednakosti dati stabilne razdiobe. Huntington je pokazao da, osim za takve "neizvodive" mjere, sve ostale daju ili Adamsovu, Deanovu, Hillovu, Websterovu ili Jeffersonovu metodu. Primjeri testova koji su doveli do tih metoda dani su u tablici 3.2.

Metoda	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson
Test	$m_i - m_i\frac{v_i}{v_j}$	$\frac{v_j}{m_j} - \frac{v_i}{m_i}$	$\frac{m_i/v_i}{m_j/v_j} - 1$	$\frac{m_i}{v_i} - \frac{m_j}{v_j}$	$m_i\frac{v_j}{v_i} - m_j$

Tablica 3.2: Testovi usporedbi za $m_i/v_i \geq m_j/v_j$

Još jedan pristup je optimizacija s ograničenjima. Varijable su $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, a ograničenja da komponente od $\mathbf{m}$ koraju biti nenegativne i $\sum_i m_i = m$. Sada je pitanje koju funkciju optimizirati.

Idealno bi bilo da su mandati m_i "blizu" kvotama q_i. Dakle, jedan izbor funkcije za minimizaciju bio bi $\sum_i |m_i - q_i|$, ili možda $\sum_i (m_i - q_i)^2$. Iz opisa Hamiltonove metode jasno je da ona rješava oba ova slučaja.

"Greška" u pokusnoj raspodjeli može se mjeriti i na druge načine. Nejednakost $m_i \neq q_i$ ekvivalentna je nejednakosti $\frac{v_i}{m_i} \neq \frac{v}{m}$. Dakle, može se gledati i minimizacija funkcije

$\sum_i \left|\frac{v_i}{m_i} - \frac{v}{m}\right|$ ili funkcije $\sum_i \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{v}{m}\right)^2$. Alternativno i jednako razumno bilo bi gledati $\sum_i \left|\frac{m_i}{v_i} - \frac{m}{v}\right|$ ili $\sum_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{m}{v}\right)^2$.

Još jedna opcija za mjerenje greške je $\sum_i v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{m}{v}\right)^2$. U [5] pokazano je da razdioba dana Websterovom metodom minimizira ovu funkciju.

Ukupna greška u razdiobi može biti mala, dok greška za pojedinu državu može biti nerazumno velika. Cilj onda može biti minimizirati najgoru grešku. I to se može napraviti na različite načine. Na primjer, možemo promatrati problem $\min_{\mathbf{m}} \max_{i,j} \left|\frac{v_i}{m_i} - \frac{v_j}{m_j}\right|$. Slično, možemo gledati i $\min_{\mathbf{m}} \max_{i,j} |m_i - q_i|$.

S druge strane, možemo promatrati i države pojedinačno, bez uspoređivanja. Na primjer, možemo uzeti problem $\min_{\mathbf{m}} \max_i \frac{v_i}{m_i}$ ili $\min_{\mathbf{m}} \max_i \frac{m_i}{v_i}$.

Dakle, ne može se izabrati funkcija koja bi bila optimalna u svakom slučaju. Isto vrijedi i za ostale tradicionalne pristupe. Zašto izabrati jednu djeliteljsku točku $d(a)$ umjesto druge? Zašto uzeti jednu mjeru količine nejednakosti u usporedbi u paru umjesto druge? Zašto izabrati jednu funkciju za minimiziranje umjesto druge? Od puno veće važnosti od formula koje se koriste su svojstva metodi.

3.5 Populacijska monotonost

Nekoliko principa je bitno u određivanju metode: izbjegavanje "paradoksa Alabame", nepristranost, poštivanje "pravila kvote" i konzistentnost sa promjenama u populaciji. Na djeliteljske metode stavljen je naglasak u prošlom odjeljku upravo jer su one jedine metode koje su konzistente s promjenjivim podacima. U ovom odjeljku ćemo razmatrati tu tvrdnju. Dokazi tvrdnji koji nisu dani u ovom odjeljku mogu se naći u [5].

Od raznih parametara koji utječu na razdiobu - populacija (odnosno glasovi), veličina predstavničkog tijela m i broj država (odnosno stranaka) k - populacija se najviše mijenja. Ako pretpostavimo da su veličine m i k fiksne, tada je dovoljno promatrati **parcijalnu metodu** $M^*(\mathbf{v})$, koja daje razdiobu m na k za svaki k-vektor $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. M^* bi se trebala ponašati monotono u populaciji: ugrubo, države koje se povećaju trebaju dobiti više sjedala, a države koje se smanje trebaju dobiti manje.

Jedan pristup populacijskoj monotonosti bio bi sljedeći: *ako se q_i poveća, tada se m_i ne smanjuje.*

To svojstvo se zove **jaka populacijska monotonost**. Nažalost, taj zahtjev je prejak.

Teorem 3.5.1. *Za $k \geq 3$ i $m \neq 0$, $m \neq k$, niti jedna parcijalna metoda ne zadovoljava jaku populacijsku monotonost.*

Drugi pristup bio bi ovaj: ako se populacija države i poveća i populacija države j smanji, tada i ne bi trebao dobiti manje sjedala, a j više (osim ako se radi o neriješenom rezultatu). Po homogenosti, isti zaključak vrijedi kad god se populacija od i poveća relativno u odnosu na j. Preciznije, parcijalna metoda je **populacijski monotona** ako za svaka dva k-vektora $\mathbf{v}, \mathbf{v}' > \mathbf{0}$ i odgovarajuće razdiobe $\mathbf{m}$ i $\mathbf{m}'$, te za sve $i < j$,

$$\frac{v'_i}{v'_j} \geq \frac{v_i}{v_j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m'_i \geq m_i \quad \text{ili} \quad m'_j \leq m_j, \\ \text{ili} \\ \dfrac{v'_i}{v'_j} = \dfrac{v_i}{v_j}, \quad \text{i} \quad m_i, m_j \text{ mogu biti zamijenjeni sa } m'_i, m'_j \text{ u } \mathbf{m}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Parcijalna metoda M^* je **parcijalna djeliteljska metoda** ako za neku monotno rastuću funkciju $d(a)$ vrijedi

$$M^*(\mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{m} \geq \mathbf{0} : \sum_i m_i = m, \quad \min_{m_i > 0} \frac{v_i}{d(m_i - 1)} \geq \max_{m_i \geq 0} \frac{v_i}{d(m_i)}. \right\} \tag{3.5}$$

U ovom slučaju $d(a)$ ne mora nužno biti djeliteljski kriterij jer nije pretpostavljeno da vrijedi $a \leq d(a) \leq a + 1$.

Teorem 3.5.2. *Neka je $m \leq k \leq 2$, $k \neq 3$. Parcijalna metoda M^* je populacijski monotona ako i samo ako je parcijalna djeliteljska metoda.*

Dokaz u slučaju $k = 2$ je relativno jednostavan, no za $k \geq 4$ bit će potrebne dodatne leme. Za svaki $\mathbf{m} \geq 0$, $\sum_i m_i = m$, neka je $V(\mathbf{m}) = \{\mathbf{v} > \mathbf{0} : \mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})\}$.

Neka je $\overline{m}$ minimalni broj sjedala koje je bilo koja država dobila i neka je $\overline{\overline{m}}$ maksimalni broj sjedala za sve populacije $\mathbf{v}$ i $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$. Slaba proporcionalnost povlači da je $\overline{m} = 0$ ili 1.

Lema 3.5.3. *Postoji $\mathbf{v}^* > \mathbf{0}$ takav da $\mathbf{v}^*$ ima M^*-razdiobu oblika $\left(\overline{m}, \overline{\overline{m}}, m_3, \ldots, m_k\right)$.*

Partikularna metoda M^* može dozvoliti nekoliko različitih razdiobi za fiksiranu populaciju. Kada se to dogodi, kažemo da podskup država T koje su primile različite brojeve sjedala u različitim razdiobama ima neriješen rezultat. Fiksirajmo $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Neka je $T(\mathbf{v})$ skup svih država sa neriješenim rezultatom i neka je za svaki i $\overline{m}_i(\mathbf{v}) = \min m_i$ po svim $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$.

Lema 3.5.4. *Ako je M^* populacijski monotona, tada je*

$$M^*(\mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{m} \geq \mathbf{0} : \quad \sum_i m_i = m \quad i \quad m_i = \overline{m}_i(\mathbf{v}) \quad ili \quad \overline{m}_i(\mathbf{v}) + 1 \quad \forall i \in T(\mathbf{v}) \right\}.$$

Ako je S podskup država s neriješenim rezultatom u $M^*(\mathbf{v})$ i svaka država iz S dobiva ili m_i ili $m_i + 1$ sjedala kada je populacija jednaka $\mathbf{v}$, kažemo da je $(\mathbf{v}_S; \mathbf{m}_S)$ neriješen rezultat i pišemo $t(\mathbf{v}_S; \mathbf{m}_S)$. Posebno, ako vrijedi $t(v_1,v_2; m_1,m_2)$ za neki problem $\mathbf{v}$, tada po prethodnoj lemi $\mathbf{v}$ ima M^*-razdiobe oblika $(m_1 + 1, m_2, b_3, \ldots, b_k)$ i $(m_1, m_2 + 1, b_3, \ldots, b_k)$. Definirajmo Π kao skup svih parova (a,b) koji se pojavljuju u M^*-razdiobi za neki $\mathbf{v}$.

Lema 3.5.5. *Ako $(a,b) \in \Pi$ i $\overline{\overline{m}} \geq a > 1$, $\overline{\overline{m}} > b \geq 1$, tada postoje $v', v'', v''' > 0$ takvi da vrijedi $t(v',v'',v'''; \overline{m}, a-1, b)$.*

Dokaz. Prvi je korak naći neki $\mathbf{v}$ sa razdiobom oblika $\mathbf{m} = (\overline{m}, a, b, c_4, \ldots, c_k)$.

Ako je $\overline{m} = 1$, možemo izabrati $\mathbf{m} > \mathbf{0}$ i staviti $\mathbf{v} = \mathbf{m}$.

Pretpostavimo da je $\overline{m} = 0$. Budući da je $(a,b) \in \Pi$, postoji neka razdioba $\mathbf{b}$ za koju vrijedi $b_i = a > 0$, $b_j = b > 0$. Ako je neki $b_s = 0$ $(s \neq i, j)$, tada permutacijom vektora $\mathbf{b}$ možemo dobiti $\mathbf{m}$. Inače je $b_s \geq 1$ za sve s i po slaboj proporcionalnosti postoji M^*-razdioba oblika $\mathbf{m}' = (1, a, b, \ldots) \geq (1,1, \ldots, 1)$. Sada je $(1, 1, \ldots, m - k + 1)$ razdioba po slaboj proporcionalnosti, dakle $\overline{\overline{m}} \geq m - k + 1$. Budući da je $a > 1$ i $b \geq 1$, postoji $s \geq 4$ takav da je $m'_s < \overline{\overline{m}}$.

Za različite i i j pišemo $i \to j$ ako postoji neki $\hat{m} \in M^*(\mathbf{v})$ za koji vrijedi $\hat{m}_i < m_i$, $\hat{m}_j > m_j$.

Krenimo sa $\mathbf{v}' = \mathbf{m}' \in V(\mathbf{m}')$. Smanjujmo v'_1 pazeći da ostanemo u $V(\mathbf{m}')$ dok ne dosegnemo točku $\mathbf{v}'' \in V(\mathbf{m}')$ za koju vrijedi $1 \to j$ za neki j. Takva točka postoji jer u slučaju kada bi se v'_1 smanjivao do $\dfrac{v'_1}{v'_s} < \dfrac{v^*_1}{v^*_s}$, gdje je $\mathbf{v}^*$ vektor iz leme 3.5.3, onda bi država a_1 dobila $\overline{m} = 0$ sjedala. Ako je $j \geq 4$, tada razdioba oblika $(0, a,b, \ldots)$ postoji za $\mathbf{v}''$.

Ako je $j = 2$ ili 3, krenimo sa $\mathbf{v}''$ i smanjujmo v''_1, v''_2 i v''_3 proporcionalno (za neki zajednički faktor α) dok ne dosegnemo točku $\mathbf{v}''' \in M^*(\mathbf{m}')$ za koju vrijedi $i \to l$, $i \leq 2$, $l \geq 4$. Takva točka postoji po lemi 3.5.3 i činjenici da je $m'_s < \overline{\overline{m}}$. Po lemi 3.5.4 $1 \to l$, što potvrđuje da postoji razdioba oblika $(0, a,b, \ldots)$ za $\mathbf{v}'''$.

Neka je $\mathbf{m} = (\overline{m}, a, b, c_4, \ldots, c_k)$ i izaberimo bilo koji $\mathbf{v} \in V(\mathbf{m})$. Neka se T_1 sastoji od a_2 i svih drugih država (ako postoje) koje imaju neriješen rezultat sa državom a_2 u $\mathbf{v}$. Krenimo s $\mathbf{v}$, smanjujmo populacije država u T_1 proporcionalno dok ne dođemo do točke $\mathbf{v}^1 \in M^*(\mathbf{m})$, takve da $2 \to j$ za neki $j \notin T_1$. Neka je $T_2 \supsetneq T_1$ skup svih država s neriješenih rezultatom u točki $\mathbf{v}^1$. Smanjujmo populacije država iz T_2 proporcionalno dok god se skup država s neriješenim rezultatom ponovno ne poveća $\mathbf{v}^2$, i tako dalje. Postupak će stati u nekoj točki $\mathbf{v}^n$ gdje su sve države koje zadovoljavaju $m_1 < \overline{\overline{m}}$ imaju neriješen rezultat. Posebno, države a_1 i a_3 imaju neriješen rezultat u $\mathbf{v}^n$. Iz leme 3.5.3 slijedi

$$(\overline{m}, a, b, c_4, \ldots, c_k), (\overline{m} + 1, a - 1, b, c_4, \ldots, c_k), (\overline{m}, a - 1, b + 1, c_4, \ldots, c_k) \in M^*(\mathbf{v}^n). \tag{3.6}$$

□

Dokaz teorema 3.5.2. Fiksirajmo $m \geq k = 2$. Pokazat ćemo da za danu populacijski monotonu M^* postoji monotono rastuća funkcija $d(a)$ takva da za svaki $\mathbf{v} = (v_1, v_2) > \mathbf{0}$ vrijedi $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in M^*(\mathbf{v})$ ako i samo ako $m_1, m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 = m$ i

$$\min_{m_i>0} \frac{v_i}{d(m_i - 1)} \geq \max_{a_i \geq 0} \frac{v_i}{d(m_i)}.$$

Ekvivalentno,

$$\frac{d(m_1 - 1)}{d(m_2)} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{d(m_1)}{d(m_2 - 1)} \quad \text{ako su } m_1, m_2 > 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{v_1}{v_2} \leq \frac{d(0)}{d(m-1)} \quad \text{ako je } m_1 = 0, m_2 = m, \tag{3.8}$$

i

$$\frac{d(m-1)}{d(0)} \leq \frac{v_1}{v_2} \quad \text{ako je } m_1 = m, m_2 = 0. \tag{3.9}$$

Neka je $\overline{V}$ skup svih normaliziranih populacija, tj. $\overline{V} = \{\mathbf{v} > \mathbf{0} : v_1 + v_2 = m\}$, i neka je za svaki $m_1, m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 = h$, $\overline{V}(\mathbf{m})$ skup svih populacija $\mathbf{v} \in \overline{V}$ takvih da je $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$. Po populacijskoj monotonosti, svaki $\overline{V}(\mathbf{m})$ je interval linije $\overline{V}$. Po slaboj proporcionalnosti, $\mathbf{m} \in \overline{V}(\mathbf{m})$ kad god je $\mathbf{m} > \mathbf{0}$. Štoviše, budući da je $\mathbf{m}$ jedinstvena razdioba kada $\mathbf{v} = \mathbf{m} > \mathbf{0}$, potpunost povlači da je $\mathbf{m}$ u interioru intervala $\overline{V}(\mathbf{m})$. Potpunost također povlači da je $\overline{V}(\mathbf{m})$ zatvoren interval kad god je $\mathbf{m} > \mathbf{1}$. Intervali $\overline{V}(1, m-1)$ i $\overline{V}(m-1, 1)$ su ili zatvoreni ili poluotvoreni. $\overline{V}(0, m)$ i $\overline{V}(m, 0)$ su ili poluotvoreni (budući da je $\mathbf{v} > \mathbf{0}$) ili prazni. Napokon, intervali se mogu preklapati samo u rubnim točkama, inače bi se kršila populacijska monotonost.

Za definiciju djeliteljskog kriterija $d(a)$, neka je jednostavno $(d(m_1 - 1), d(m_2))$ lijeva rubna točka intervala $\overline{V}(m_1, m_2)$ i $(d(m_1), d(m_2 - 1))$ desna, za sve $m_1 \geq m_2 > 0, m_1 + m_2 = m$. To definira $d(a)$ na intervalu $0 \leq a \leq m$, i $d(a)$ je monotono rastući po a. Štoviše, $d(a)$ zadovoljava $a \leq d(a) \leq a + 1$.

Neka je sada $k \leq 4$. Ideja je sljedeća. Ako u nekom problemu država koja ima $\overline{m}$ sjedala ima neriješen rezultat sa državom koja ima m_i sjedala, na primjer, ako je $t(\overline{v}, v_i; \overline{m}, m_i)$, definirajmo $d(a) = \frac{v_1}{\overline{v}}$. $d(a)$ je dobro definirana jer ako također vrijedi $t(\overline{v}', v_j; \overline{m}, m_j)$, tada populacijska monotonost povlači $\frac{v_i}{\overline{v}} = \frac{v_j}{\overline{v}'}$. Lako se pokaže da je d monotono rastuća funkcija.

Neka je sada $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$ i izaberimo $i \neq j$ za koje vrijedi $\overline{\overline{m}} \geq m_i > 1$ i $\overline{\overline{m}} > m_j \geq 1$. Po lemi 3.5.5 vrijedi $t(v', v'', v'''; \overline{m}, m_i - 1, m_j)$ za neke $v', v'', v''' > 0$. Ako ovo usporedimo sa razdiobom $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$, vidimo da iz populacijske monotonosti slijedi $\frac{v''}{v'''} \leq \frac{v_i}{v_j}$. Ali

$\frac{v'''}{v'} = d(m_j)$ i $\frac{v''}{v'} = d(m_i - 1)$ odakle slijedi $\frac{d(m_i - 1)}{d(m_j)} \leq \frac{v_i}{v_j}$ i

$$\frac{v_i}{d(m_i - 1)} \geq \frac{v_j}{d(m_j)}. \tag{3.10}$$

Ostaje pokazati da (3.10) vrijedi kada je $m_j = \overline{\overline{m}}$ i/ili $m_i = 1$. Do sada $d\left(\overline{\overline{m}}\right)$ nije bilo definirano. Dakle, stavimo $d\left(\overline{\overline{m}}\right) = \infty$ (odnosno, dovoljno velik broj) i (3.10) vrijedi. U slučaju $\overline{m} = 0$, tada $d(0)$ definiramo kao $d(0) = 1$. Tada (3.10) glasi $\frac{v_j}{v_i} \leq d(m_j)$, što je izravna posljedica definicije $d(m_j)$ i populacijske monotonosti. Inače je $\overline{m} = 1$ i $d(0)$ još nije definirano. U ovom slučaju stavimo $d(0) = 0$ (odnosno, dovoljno mali broj) i opet (3.10) vrijedi, tj. (3.10) vrijedi u svakom slučaju. Dakle, budući da je $d(m_i) > d(m_i - 1)$ za sve i, možemo pisati

$$\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \min_{m_i > 0} \frac{v_i}{d(m_i - 1)} \leq \max_{m_i \geq 0} \frac{v_i}{d(m_i)}. \tag{3.11}$$

Obratno, neka $\mathbf{m}$ zadovoljava (3.11) za neki $\mathbf{v}$. Budući da je $d(a)$ strogo monotono rastuća, $\mathbf{v}$ možemo malo promijeniti tako da dobijemo $\mathbf{v}'$ takav da nejednakost (3.11) bude stroga. Za takav $\mathbf{v}'$ jedina razdioba koja zadovoljava nejednakost je $\mathbf{m}$, pa je po (3.11) $\mathbf{m}$ jedinstvena razdioba za $\mathbf{v}'$. Sada konstruiramo niz takvih $\mathbf{v}'$ koji teže u $\mathbf{v}$ i po potpunosti zaključimo da je $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$. □

Teorem ne vrijedi za $k = 3$. Pogledajmo kontraprimjer. Neka je $e(m_1, m_2) = v_1/v_2$ ako je $t(v_1, v_2; m_1, m_2)$. Ako je M^* parcijalno djeliteljska metoda, tada je $e(m_1, m_2) = d(m_1)/d(m_2)$ i sljedeće pravilo mora vrijediti za sve parove za koje je e definiran:

$$e(m_1, m_2)e(m_2, m_3) = e(m_1, m_3). \tag{3.12}$$

Obratno, ako (3.12) vrijedi, možemo definirati $d(a) = e(\overline{m}, a)$ i odmah izvesti min-max nejednakost iz populacijske monotonosti.

(3.12) možemo uspostaviti konstruirajući neriješene rezultate između tri države iz $t(v_1, v_2, v_3; m_1, m_2, m_3)$ kao u lemi 3.5.5. Međutim, za fiksne m konstrukcija prolazi samo ako postoji barem još jedna država koja će apsorbirati ostala sjedala.

Za ilustraciju, uzmimo $k = 3$ i $m = 7$. Neriješeni rezultat sa tri države će uključivati pomicanje jednog ili dva sjedala. Dakle, $t(\mathbf{v},\mathbf{m})$ znači da je ili $\sum_i m_i = 5$ ili $\sum_i m_i = 6$, pa postoji (do na poredak) deset mogućnosti za $\mathbf{m}$ danih u tablici 3.5.

Svaka od ovih deset trojki stvara jednu ovisnonst u varijablama $e(a,b)$ oblika (3.12). Također, mora vrijediti $e(a,b) = 1/e(b,a)$ i $e(a,a) = 1$. Sada stavimo $e(a, 0) = 2a + 1$.

$\sum_i m_i = 6$	$\sum_i m_i = 5$
(0,0,6)	(0,0,5)
(0,1,5)	(0,1,4)
(0,2,4)	(0,2,3)
(0,3,3)	(0,2,3)
(1,2,3)	(1,2,2)

Deset ovisnosti su redundantne i određuju 4 dodatne vrijednosti:

$$\begin{aligned}
e(1,4) &= e(1,0)e(0,4) = 1/3,\\
e(1,5) &= e(1,0)e(0,5) = 3/11,\\
e(2,3) &= e(2,0)e(0,3) = 5/7,\\
e(2,4) &= e(2,0)e(0,4) = 5/9.
\end{aligned}$$

Preostaju $e(1,2)$ i $e(1,3)$ koji su povezani izrazom $e(1,3) = e(1,2)e(2,3) = 5e(1,2)/7$. Da bismo imali djeliteljsku metodu, $e(1,2)$ mora zadovoljavati i $e(1,2) = e(1,0)e(0,2) = 3/5$. Međutim, za $m = 7$, trojka (0,1,2) se ne pojavljuje kao neriješeni rezultat, pa ne postoji takva ovisnost. Zapravo, ako izaberemo $e(1,2)$ da bude blizu, ali ne jednako 3/5, tada će M^* biti populacijski monotona, ali ne i djeliteljska metoda.

Pretpostavimo da je M metoda takva da je svaka restrikcija na neke fiksne k i m populacijski monotona. Po teoremu 3.5.2, svaka takva restrikcija je parcijalno djeliteljska metoda. Međutim, pridružene funkcije $d(a)$ mogu ovisiti o k i m. Dakle, takva metoda ne bi davala konzistente rezultate kada se veličina predstavničkog tijela ili broj država (odnosno) stranaka promijeni. Takva situacije se može izbjeći proširivanjem koncepta populacijske monotonosti tako da dozvolimo usporedbu između bilo koja dva problema, uključujući i one s različitim k i m.

Metoda M je **populacijski monotona** ako za svaka dva vektora $\mathbf{v}, \mathbf{v}' > \mathbf{0}$ i $\mathbf{m} \in M(\mathbf{v}, h)$, $\mathbf{m}' \in M(\mathbf{v}', h')$

$$\frac{v'_{i'}}{v'_{j'}} \geq \frac{v_i}{v_j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m'_{i'} \geq m_i \quad \text{ili} \quad m'_{j'} \leq m_j, \\ \text{ili} \\ \dfrac{v'_{i'}}{v'_{j'}} = \dfrac{v_i}{v_j}, \quad \text{i} \quad m_i, m_j \text{ mogu biti zamijenjeni sa } m'_{i'}, m'_{j'} \text{ u } \mathbf{m}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Teorem 3.5.6. *Metoda je populacijski monotona ako i samo ako je djeliteljska metoda.*

Metoda M izbjegava "paradoks Alabame" ako za svaki $\mathbf{v}$ i m, $\mathbf{m} \in M(\mathbf{v}, m)$ implicira $\mathbf{m}' \in M(\mathbf{v}, m+1)$ za neki $\mathbf{m}' \geq \mathbf{m}$.

Korolar 3.5.7. *Ako je metoda populacijski monotona, tada ona izbjegava "paradoks Alabame".*

Do sada smo u ovom odjeljku vidjeli da su djeliteljske metode populacijski monotone i da im se neće dogoditi "paradoks Alabame". Za kraj ćemo dati teorem koji će pokazati da ne zadovoljavaju uvijek jedno bitno svojstvo.

Teorem 3.5.8. *Ne postoji parcijalna metoda sa $k \geq 4$ i $m \geq k+3$ koja je populacijski monotona i poštuje "pravilo kvote".*

Dokaz. Fiksirajmo $k \geq 4$, $m \geq k+3$ i pretpostavimo da je M^* parcijalna metoda koja je populacijski monotona i poštuje "pravilo kvote". Pogledajmo vektor populacije $\mathbf{v} = \left(5+\epsilon, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}-\epsilon, b_5, \ldots, b_k\right)$ gdje su $b_5, \ldots, b_k$ bilo koji prirodni brojevi čiji je zbroj $m-7$ i $\epsilon > 0$ je mali. Budući da je $\sum_i v_i = m$, $v_i = q_1$ za svaki i. Izaberimo $\mathbf{m} \in M^*(\mathbf{v})$. Po pretpostavci poštivanja kvote, $m_1 \geq 5$ i $m_i = b_i$ za sve $i \geq 5$. Dakle, $m_2 + m_3 + m_4 \leq m - 5 - (h-7) = 2$. Dakle, barem jedna od država a_2, a_3 i a_4 dobiva 0 sjedala. Po populacijskoj monotonosti, to je a_4.

Pogledajmo sada vektor populacije $\mathbf{v}' = \left(4-\epsilon, 2-\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}+\epsilon, b_5, \ldots, b_k\right)$. Opet je $\sum_i v'_i = h$, pa vrijedi $v'_i = q'_i$ za sve i. Izaberimo $\mathbf{m}' \in M^*(\mathbf{v}')$. Po "pravilu kvote", $m'_1 \leq 4$, $m'_2 \leq 2$ i $m'_i = b_i$ za $i \geq 5$. Dakle ili a_3 ili a_4 dobiva jedno sjedalo. Po populacijskoj monotonosti to mora biti a_4. Dakle, $m'_4 > m_4$ dok je $m'_1 < m_1$, pa je populacijskoj monotonosti $\frac{v'_1}{v'_4} < \frac{v_1}{v_4}$, odnosno $\frac{4-\epsilon}{1/2+\epsilon} < \frac{5+\epsilon}{2/3-\epsilon}$. To je ekvivalentno sljedećem: $\epsilon > \frac{1}{61}$, što nije istina za dovoljno male ϵ. □

Bibliografija

[1] *Zakon o izborima zastupnika u Hrvatski državni Sabor*, (1999.), https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/full/1999_11_116_1854.html.

[2] *Konačni rezultati izbora zastupnika u Hrvatski sabor 2020.*, (2020.), https://www.izbori.hr/site/UserDocsImages/2020/Izbori_za_zastupnike_u_HS/Kona%C4%8Dni%20rezultati.pdf.

[3] Coconino Community College, Math. 142 Lecture Notes (pristupljeno 11. rujna 2020.), https://www.coconino.edu/resources/files/pdfs/academics/arts-and-sciences/MAT142/Chapter_9_Apportionment.pdf.

[4] *Apportionment paradox*, (pristupljeno 3. rujna 2020.), https://en.wikipedia.org/wiki/Apportionment_paradox.

[5] M. L. Balinski i H. P. Young, *Fair Representation: meeting the ideal of one man, one vote*, Brookings Institution Press, 2001.

[6] A. Hatzivelkos, *Parametri optimalne reprezentabilnosti D'Hondtove metode*, (2011.), https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=152692.

[7] E. V. Huntington, *The Apportionment of Representatives in Congress*, Transactions of the American Mathematical Society **30** (1928.), br. 1, 85–110.

[8] K. Schuster, F. Pukelsheim, M. Drton i N. R. Draper, *Seat biases of apportionment methods for proportional representation*, Electoral Studies **22** (2003.), br. 4, 651–676.

[9] T. Tadić, *Proporcionalnost D'Hondtove metode i izborni sustav u Hrvatskoj*, (2015.), https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=234045.

Sažetak

U ovome radu se bavimo metodama razdiobe mandata na temelju broja glasova u proprcionalnim izbornim sustavima. U prvom poglavlju, opisujemo nekoliko metoda poput D'Hontove, Sainte-Laguëove, Jeffersonove i Websterove metode. Zatim pokazuje da su D'Hondtova i Jeffersonova metoda ekvivalentne, kao i Sainte-Laguëove i Websterova.

U drugom poglavlju naglasak je na D'Hondtovoj metodi. Pokazujemo da teži proporcionalnoj raspodjeli mjesta u predstavničkom tijelu, odnosno, kada veličina predstavničkog tijela teži ka beskonačnosti, tada udio pojedine liste u mandatima teži udjelu te liste u glasovima. U slučaju manjeg predstavničkog tijela, blagu prednost daje vodećim listama. Jamči da dobitnik natpolovične većine glasova dobije i natpolovičnu većinu mjesta. Na simulacijama se vidi da koaliranje neće puno utjecati na rezultate izbora. No, ipak postoji vjerojatnost da koaliranje promijeni ishod u slučaju kada dva bloka imaju približno isti broj glasova.

U trećem poglavlju bavimo se općom teorijom razdiobe mandata. Navodimo nekoliko poznatih paradoksa koji su se dogodili kroz povijest. Pokazujemo da su djeliteljske metode populacijski monotone zbog čega su popularne u tradicionalnim pristupima. Djeliteljske metode neće dovesti do "paradoksa Alabame." Ne postoji djeliteljska metoda koja poštuje "pravilo kvote" za svaki problem.

Summary

In this paper, we deal with methods of distribution of seats based on the number of votes in proportional electoral systems. In the first chapter, we describe several methods such as D'Hont's, Sainte-Laguë's, Jefferson's and Webster's methods.

In the second chapter, the emphasis is on D'Hondt's method. We show that it tends to the proportional distribution of seats in the representative body, that is, when the size of the representative body tends to infinity, then the share of an individual list in the mandates tends to the share of that list in the votes. In the case of a smaller representative body, it gives a slight advantage to the leading lists. It guarantees that the winner of more than half of the votes also receives more than half of the seats. The simulations show that the coalition will not have much of an impact on the election results. However, there is a possibility that the coalition will change the outcome in the case when two blocs have approximately the same number of votes.

In the third chapter, we deal with the general theory of the distribution of mandates. Here are a few well-known paradoxes that have occurred throughout history. We show that divisor methods are population monotone which is why they are popular in traditional approaches. Divisor methods will not lead to the "Alabama paradox.„ There is no divisor method that follows the "quota rule" for every problem.

Životopis

Dana 27. ožujka 1997. rođena sam u Slavonskom Brodu. Osnovnu školu Antuna Matije Reljkovića pohađala sam u područnoj školi u Stupničkim Kutima od prvog do četvrtog razreda, te u matičnoj školi u Bebrini od petog do osmog razreda. Gimnaziju Matije Mesića pohađala sam u Slavonskom Brodu. Opredijelila sam se za prirodoslovno-matematičku gimnaziju.

2015. godine sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Završila sam ga 2018. godine. Tada sam upisala Diplomski sveučilišni studij Primijenjene matematike, također na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.