

# Modeli multivarijatne volatilnosti

---

**Burić, Dorotea**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:021530>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Modeli multivarijatne volatilnosti

---

**Burić, Dorotea**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:021530>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Dorotea Burić

**MODELI MULTIVARIJATNE**  
**VOLATILNOSTI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Azra Tafro

Zagreb, rujan, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem svojoj mentorici doc. dr. sc. Azri Tafro na strpljenju i svim savjetima  
pruženim prilikom izrade ovog rada.*

# Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	3
<b>1 Modeli uvjetne heteroskedastičnosti</b>	<b>4</b>
1.1 Uvod . . . . .	4
1.2 Multivarijatne vremenske serije . . . . .	8
1.3 Testiranje uvjetne heteroskedastičnosti . . . . .	9
<b>2 EWMA i BEKK model</b>	<b>16</b>
2.1 EWMA . . . . .	16
2.2 Primjer . . . . .	17
2.3 BEKK modeli . . . . .	20
2.4 Primjer . . . . .	20
<b>3 Choleskyjeva dekompozicija i modeliranje volatilnosti</b>	<b>24</b>
3.1 Specifikacija modela . . . . .	24
3.2 Primjer . . . . .	27
<b>4 Modeli dinamičke uvjetne korelacije</b>	<b>35</b>
4.1 Specifikacija modela . . . . .	35
4.2 Primjer . . . . .	37
<b>5 Go-GARCH model</b>	<b>42</b>
5.1 Specifikacija modela . . . . .	42
5.2 Primjer . . . . .	43
<b>A Pojmovi iz linearne algebre</b>	<b>48</b>
A.1 Pozitivna definitnost i kvadratni korijen matrice . . . . .	48
A.2 Vektorizacija i Kroneckerov produkt . . . . .	49

*SADRŽAJ*

v

**Bibliografija**

**50**

# Kratice i pojmovi

ARCH - Autoregressive Conditional Heteroscedasticity  
ARMA - Autoregressive Moving Average  
BEKK - Baba-Engle-Kraft-Kroner  
CCC - Constant Conditional Correlation  
DCC - Dynamic Conditional Correlation  
dccPre - Preliminary Fitting of DCC Models  
GARCH - Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity  
Go-GARCH - Generalized Orthogonal GARCH  
EWMA - Exponentially Weighted Moving Average  
EWMAvol - Exponentially Weighted Moving-Average Volatility  
KO - Coca Cola  
IBM - International Business Machines  
ICA - Independent Component Analysis  
MarchTest - Multivariate ARCH Test  
MCHdiag - Multivariate Conditional Heteroscedastic Model Checking  
MTS - Multivariate Time Series  
O-GARCH - Orthogonal GARCH  
S&P 500 - burzovni indeks na njujorškim burzama vrijednosnih papira NYSE i  
NASDAQ



# Uvod

U financijskom se svijetu posljednjih godina sve više pažnje posvećuje različitim vrstama rizika. Mjerenje i upravljanje rizikom jedna je od glavnih zadaća svake financijske institucije koja želi ostati konkurentna. Jedan od pokazatelja rizika je volatilnost. Volatilnost univarijatne vremenske serije mjerimo na temelju fluktuacije cijena nekog financijskog instrumenta i to izračunavanjem standardne devijacije, no uobičajeno je promatrati njegove log-povrate koji nam i statistički i grafički više toga otkrivaju. Proučavajući serije stope inflacije Ujedinjenog Kraljevstva, Engle 1982. godine uviđa vremenski promjenjivu varijancu koja se kosi s dotadašnjom pretpostavkom matematičkih modela. Osim toga, u studijama se pokazuje da povrati imaju svojstvo *grupiranja volatilnosti*; što znači da ako nedavni povrati ukazuju na veliku volatilnost, onda barem neko vrijeme možemo očekivati veliku razinu volatilnosti povrata. Upravo nam je zato važan GARCH model kojeg 1986. godine uvodi Bollerslev. Ekonomska globalizacija i razvoj interneta posljednjih su godina ubrzali integraciju financijskih tržišta. Kretanje cijena na jednom tržištu može lako potaknuti promjenu cijena na nekom drugom tržištu. Kako financijska tržišta zavise jedan o drugom više nego ikada prije, promatramo ih zajedno. Investitoru ili financijskoj instituciji koji u svom portfelju drži više financijskih imovina poznavanje dinamičke veze između povrata na imovine utječe na donošenje odluka kojima želi ostvariti veće povrate. Analiza multivarijatnih serija volatilnosti sastoji se od istovremenog promatranja više vremenskih serija, a čiji su podaci zavisni.

Rezultate i pojmove kao što je volatilnost koji su poznati za univarijatne vremenske serije poopćit ćemo za multivarijatne vremenske serije i dati demonstraciju procjena modela multivarijatne volatilnosti u programskom jeziku R. Promatrat ćemo serije volatilnosti za IBM dionicu, S&P 500 indeks i za Coca Cola dionicu u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine., koristeći neke od modela predloženih u literaturi. Svaki od modela ima svoje prednosti i nedostatke, a cilj im je uz što manje ograničavajuće pretpostavke procijeniti serije volatilnosti financijskih instrumenata. Kako volatilnost ne možemo direktno opaziti, izbor modela za procjenu volatilnosti je važan. U prvom poglavlju definiramo osnovna svojstva multivarijatnih vremenskih serija. U drugom poglavlju uvodimo EWMA model koji je jedan od

najjednostavnijih modela za računanje multivarijatne volatilnosti. Također se upoznajemo s BEKK modelom kojeg su uveli Engle i Kroner 1995. godine, a predstavlja općeniti način računanja multivarijatne volatilnosti. U trećem poglavlju predlažemo jedan od modela koji koristi Choleskyjevu dekompoziciju matrice volatilnosti. U četvrtom poglavlju predstavljamo i uspoređujemo dva DCC modela koji procjenjuju vremenski promjenjive korelacije promatranih serija (ne kovarijance kao u prethodnim modelima). U petom poglavlju uvodimo Go-GARCH model koji je pogodan i za velik broj vremenskih serija.

# Poglavlje 1

## Modeli uvjetne heteroskedastičnosti

### 1.1 Uvod

Financijskom imovinom trguje se u trenucima  $t = 0, 1, \dots, n^1$ . Financijske modele gradimo na diskretnom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , gdje je prostor elementarnih događaja  $\Omega$  konačan. Uz vjerojatnosni prostor  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dan nam je i neopadajuća niz  $\sigma$ -algebri sadržanih u  $\mathcal{F} : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ . O  $\sigma$ -algebri  $\mathcal{F}_t$  mislimo kao o informaciji o stanju svijeta koja nam je dostupna u trenutku  $t$ . Informacija se vremenom povećava, otkuda uvjet o neopadajućoj familiji. Pretpostavljamo da je  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , tj. u trenutku  $t = 0$  nemamo nikakvu informaciju o svijetu. Također pretpostavljamo da je  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ , tj. na kraju imamo potpunu informaciju. Neka je  $z_t$  univarijatna vremenska serija i  $\mathcal{F}_{t-1}$   $\sigma$ -algebra generirana s  $\{z_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots\}$ . Uvedimo pojam log-povrata koji ćemo uvelike koristiti u analizi. Neka je  $P_t$  vrijednost dionice (ili neke druge financijske imovine) u trenutku  $t$ .

**Neto povrat** u vremenskom periodu od  $t - 1$  do  $t$  definiramo kao

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

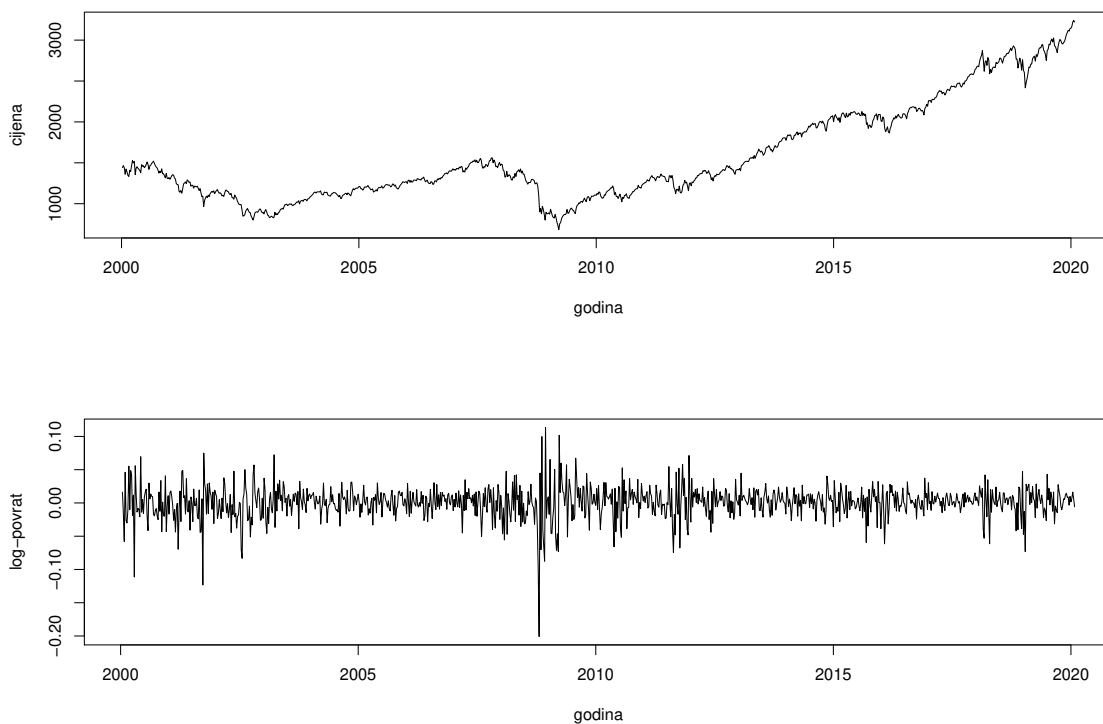
dok **log-povrat** definiramo kao

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}, \quad \text{gdje je } \log(P_t) = p_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Log-povrati približno su jednaki neto povratima jer za mali  $x$ ,  $\log(1+x) \approx x$ .

---

<sup>1</sup>Svi pojmovi ovog poglavlja mogu se naći u [23], [5], [18].



Slika 1.1: Tjedni S&P 500 indeks i tjedni log-povrati S&P 500 indeksa od siječnja 2000. godine do prosinca 2019. godine.

Promotrimo tjedne log-povrate S&P 500 indeksa. Na slici 1.1 prikazani su tjedni S&P 500 indeks i tjedni log-povrati S&P 500 indeksa u razdoblju od siječnja 2000. godine do prosinca 2019. godine, redom. Gledajući graf teško možemo uočiti neku pravilnost, osim kratkotrajnog pada indeksa izazvanog financijskom krizom 2008. godine. Do kraja 2019. godine izražen je rastući trend vrijednosti indeksa. Promotrimo vrijednosti indeksa na drugi način, preko tjednih log-povrata.

Na prvi pogled graf tjednih log-povrata može nam se učiniti težim za razumijevanje, ali iz njega možemo dosta toga zaključiti. Primjerice, na grafu vidimo da postoje razdoblja u kojima su oscilacije tjednih log-povrata izraženije nego inače. Tada kažemo da je volatilitet indeksa bila veća, a uočeno svojstvo nazivamo **grupiranje/klasteriranje volatiliteta** (eng. *volatility clustering*). Također možemo vidjeti kako povrati osciliraju oko neke stabilne (ali nekonstantne) srednje vrijednosti.

Vremenska stabilnost takvih podataka upućuje na stacionarnost promatrane vremenske serije.

Općenito, za stacionaran proces (neuvjetna) srednja vrijednost vremenske serije se ne mijenja kroz vrijeme, ali se mijenja uvjetno očekivanje  $\mathbb{E}[z_t|\mathcal{F}_{t-1}]$  kao funkcija prošlih opažanja. Stacionaran autoregresivni model s pomičnim prosjecima ARMA( $p, q$ ) definiran kao

$$z_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} + a_t, \quad (1.1)$$

možemo napisati kao sumu predvidivog dijela i pripadne greške

$$z_t = \mu_t + a_t,$$

gdje su  $\mu_t = \mathbb{E}[z_t|\mathcal{F}_t - 1]$  i  $a_t$  nezavisne greške za koje vrijedi

$$\mathbb{E}[a_t] = 0 \quad \text{i} \quad \text{Var}[a_t] = \sigma_a^2.$$

Pokazalo se da pretpostavka o konstantnoj varijanci  $\sigma_a^2$  koja ne ovisi o prošlim događajima ne vrijedi za financijske vremenske serije. Stoga Engle [7] uvodi ARCH (Autoregressive conditional heteroscedastic) model kako bi opisao vremenski promjenjivu varijancu koju je primijetio promatrajući vremensku seriju stope inflacije Ujedinjenog Kraljevstva. Pretpostavka ARCH modela je da se uvjetna varijanca od  $a_t$  mijenja kao funkcija prošlih kvadrata grešaka. U tom slučaju  $a_t$  je uvjetno heteroskedastičan. Kada govorimo o uvjetnoj heteroskedastičnosti, zapravo mislimo na uvjetnu varijancu (u multivarijantnoj vremenskoj seriji mislimo na uvjetnu kovarijancu).

Označimo sa

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[a_t|\mathcal{F}_{t-1}]$$

**uvjetnu varijancu** od  $a_t$  uz dano  $\mathcal{F}_{t-1}$ . Pod procesom **vremenski promjenjive volatilnosti** podrazumijevamo proces  $\sigma_t$ .

ARCH( $p$ ) model definiramo kao

$$a_t = \sigma_t e_t, \quad (1.2)$$

pri čemu su  $\{e_t\}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom 1 i

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p a_{t-p}^2, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \leq 0 \text{ za } i = 1, \dots, p-1, \quad \alpha_p > 0.$$

Uz dodatni uvjet  $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ ,  $a_t$  je stacionaran s varijancom  $\sigma_a^2$ . Za neke vremenske serije, kao što su povrati na imovine, originalni podaci  $z_t$  nisu autokorelirani ( $\mathbb{E}[z_t z_{t-j}] = 0$  za  $j > 0$ ) i  $a_t$  direktno opažamo. Nedostatak ARCH modela je taj što

je često potrebna velika vrijednost pomaka  $p$  kako bi opisali promjenu volatilnosti. Stoga Bollerslev [2] uvodi generalizirani ARCH model, kraće GARCH.

GARCH( $p, q$ ) model pretpostavlja

$$a_t = \sigma_t e_t,$$

pri čemu su  $\{e_t\}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom 1.

$\sigma_t$  je definiran kao

$$\sigma_t^2 = \mathbb{E}[a_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

pri čemu je  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p-1$ ,  $\alpha_p > 0$ ,  $\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q-1$ ,  $\beta_q > 0$ . Uz dodatni uvjet  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) < 1$ , gdje je  $m = \max(p, q)$  s tim da je  $\alpha_i = 0$  za  $i > p$  i  $\beta_j = 0$  za  $j > q$ , varijanca  $\sigma_a^2$  je konačna.

Kovarijancu  $\gamma(\ell) = \text{cov}(z_t, z_{t-\ell})$  nazivamo autokovarijancom za  $\ell$ -pomak od  $z_t$ . Kada nas zanima linearna zavisnost  $z_t$  i  $z_{t-\ell}$ , generaliziramo pojam korelacije autokorelacijom.

Definiramo autokorelaciju stacionarne serije  $z_t$  za  $\ell$ -pomak kao

$$\rho_\ell = \frac{\text{cov}(z_t, z_{t-\ell})}{\text{Var}(z_t)} = \frac{\gamma(\ell)}{\gamma(0)}. \quad (1.3)$$

Za uzorak  $(z_t, t = 1, \dots, n)$  uzoračka autokorelacijska funkcija [5] dana je s

$$\hat{\rho}_\ell = \frac{\hat{\gamma}(\ell)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad (1.4)$$

gdje je  $\hat{\rho}_\ell = \frac{1}{n} \sum_{t=\ell+1}^n (z_t - \bar{z})(z_{t-\ell} - \bar{z})$ ,  $\bar{z}$  je srednja vrijednost uzorka.

GARCH(1,1) koji ćemo promatrati najjednostavniji je GARCH model definiran s

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad 0 < \alpha_0, \alpha_1, \beta_1 < 1, \quad \alpha_1 + \beta_1 < 1.$$

Kako su konstante  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  pozitivne, velika (mala) vrijednost  $a_{t-1}^2$  ili  $\sigma_{t-1}^2$  rezultira velikom (malom) vrijednošću  $\sigma_t^2$ , što znači da velika (mala) vrijednost  $a_{t-1}^2$  rezultira velikom (malom) vrijednošću  $a_t^2$ . Ovime smo upravo opisali svojstvo grupiranja volatilnosti koje provjeravamo ispitivanjem autokorelacije od  $a_t^2$ , za različite vrijednosti pomaka  $\ell$ . Pretpostavimo da je  $a_t^2$  autokoreliran. Ako je GARCH model dobro definiran, trebao bi ukloniti autokorelaciju. Drugim riječima, ako  $a_t^2/\sigma_t^2$  ima vrlo malu autokorelaciju, model za  $\sigma_t$  dobro opisuje autokorelaciju od  $a_t^2$ .

## 1.2 Multivarijatne vremenske serije

Pad ili rast cijena financijskih instrumenata na jednom tržištu može lako potaknuti promjenu cijena na nekom drugom tržištu. Kako financijska tržišta zavise jedan o drugom više nego ikada prije, promatramo ih zajedno. Prethodno uvedene pojmove kao što je volatilitnost definiramo za multivarijatne vremenske serije.

Analiza multivarijatnih serija volatilitnosti sastoji se od istovremenog promatranja više vremenskih serija. Multivarijatna vremenska serija  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{kt})^T$  je  $k$ -dimenzionalni slučajni vektor. Ubuduće će nam  $z_{it}, i = 1, \dots, k$ , označavati log-povrat  $i$ -te financijske imovine u trenutku  $t$ . Neka je  $\mathcal{F}_{t-1}$   $\sigma$ -algebra generirana podacima  $\{\mathbf{z}_{t-1} \mid i = 1, 2, \dots\}$ . O  $\mathcal{F}_{t-1}$  mislimo kao o informaciji o stanju svijeta koja nam je dostupna u trenutku  $t - 1$ .

Slično kao i za univarijatnu seriju, napišimo  $\mathbf{z}_t$  kao

$$\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{a}_t, \quad (1.5)$$

gdje je  $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{z}_t | \mathcal{F}_{t-1})$  uvjetno očekivanje od  $\mathbf{z}_t$  uz dano  $\mathcal{F}_{t-1}$ .  $\boldsymbol{\mu}_t$  ćemo zvati jednadžba srednje vrijednosti. Definiramo s

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \text{cov}(\mathbf{a}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} & \dots & \sigma_{1n,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,t}^2 & \dots & \sigma_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1,t} & \sigma_{n2,t} & \dots & \sigma_{n,t}^2 \end{bmatrix}$$

**uvjetnu matricu kovarijanci** od  $\mathbf{a}_t$  uz dano  $\mathcal{F}_{t-1}$ .

Kada govorimo o multivarijatnoj volatilitnosti mislimo na uvjetnu matricu kovarijanci. Od sada pa nadalje multivarijatnu volatilitnost ćemo zvati samo volatilitnost. Proces  $\mathbf{a}_t$  nazivamo **inovacija** (ponekad i *šok*). Veza između procesa inovacija  $\mathbf{a}_t$  i procesa volatilitnosti dana je s

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\Sigma}_t^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (1.6)$$

gdje je  $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$  niz n.j.d. slučajnih vektora takvih da je  $\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$  i  $\text{cov}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{I}_k$ .

Matrica  $\boldsymbol{\Sigma}_t^{1/2}$  označava drugi korijen matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_t^2$ .  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  ćemo zvati **matrica volatilitnosti** od  $\mathbf{z}_t$ . Jedna od pretpostavki (uvjeta) svakog modela kojeg promatramo je da je matrica volatilitnosti pozitivno definitna za svaki  $t$ . U svakom modelu kojeg ćemo uvesti cilj je (bez smanjenja općenitosti, tj. velikih restrikcija) procijeniti matricu volatilitnosti (ili uvjetnih korelacija kod DCC modela). Za dane podatke, nakon procjene modela provjeravamo i valjanost modela. Koristimo samo tri različite financijske imovine (IBM dionicu, S&P 500 indeks i Coca Cola dionicu) kako bi vidjeli koji

---

<sup>2</sup>Vidjeti Dodatak A.

su modeli valjani za iste podatke. EWMA modeli i DCC modeli često se odbacuju prilikom provjere modela. Napomenimo samo da ćemo za svaki model dati demonstraciju procjene pomoću nekih podataka. Ako je model odbačen, to ništa ne govori o samom modelu, on samo nije valjan za podatke koje smo mi koristili. Naravno, modeli koje ćemo uvesti prošli su kroz razne studije, stoga iskustvo pokazuje koji se modeli češće odbacuju.

### 1.3 Testiranje uvjetne heteroskedastičnosti

Prije nego uvedemo testove za testiranje uvjetne heteroskedastičnosti, definirat ćemo matricu unakrsnih kovarijanci i korelacija (za pomak  $\ell$ ) stacionarne vremenske serije  $\mathbf{z}_t$ .

Za  $k$ -dimenzionalnu vremensku seriju  $\mathbf{z}_t$  kažemo da je (**slabo**) **stacionarna** ako vrijedi (a)  $\mathbb{E}(\mathbf{z}_t) = \boldsymbol{\mu}$  je konstantan vektor, i  $\text{cov}(\mathbf{z}_t) = \mathbb{E}[(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu})^T] = \boldsymbol{\Sigma}_z$  je konstantna  $k \times k$  pozitivno definitna matrica.

Za stacionarnu vremensku seriju  $\mathbf{z}_t = \{z_{1t}, \dots, z_{kt}\}$  definiramo **matricu unakrsnih kovarijanci** za  $\ell$ -pomak kao

$$\boldsymbol{\Gamma}_\ell = \text{cov}(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-\ell}) = \mathbb{E}[(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z}_{t-\ell} - \boldsymbol{\mu})^T] = [\gamma_{ij}(\ell)], \quad (1.7)$$

gdje je  $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{z}_t)$ . Za  $\ell = 0$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  je upravo matrica kovarijanci od  $\mathbf{z}_t$ .

Označimo s  $\gamma_{ij}(\ell)$  ( $i, j$ )-ti element matrice  $\boldsymbol{\Gamma}_\ell$ . Iz definicije (1.7)  $\gamma_{ij}(\ell)$  je kovarijanca između  $z_{it}$  i  $z_{j,t-\ell}$ . Dakle, za pozitivnu vrijednost pomaka  $\ell$ ,  $\gamma_{ij}(\ell)$  mjeri linearnu zavisnost komponente  $z_{it}$  i komponente pomaknute za  $\ell$  mjesta od  $z_{jt}$ .

Nadalje, za stacionarnu seriju  $\mathbf{z}_t$  definiramo **matricu unakrsnih korelacija** za  $\ell$ -pomak kao

$$\boldsymbol{\rho}_\ell = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_\ell\mathbf{D}^{-1} = [\rho_{ij}(\ell)], \quad (1.8)$$

gdje je  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  dijagonalna matrica čiji su elementi standardne devijacije komponenti od  $\mathbf{z}_t$ . Posebno,  $\sigma_i^2 = \text{Var}(z_{it}) = \gamma_{ij}(0)$  je ( $i, i$ )-ti element matrice  $\boldsymbol{\Gamma}_0$ .  $\boldsymbol{\rho}_0$  je simetrična matrica s jedinicama na dijagonali. Za  $\ell > 0$ ,  $\boldsymbol{\rho}_\ell$  općenito nije simetrična zato što je  $\rho_{ij}(\ell)$  koeficijent korelacije između  $z_{it}$  i  $z_{j,t-\ell}$ , dok je  $\rho_{ji}(\ell)$  koeficijent korelacije između  $z_{jt}$  i  $z_{i,t-\ell}$ .



Za uzorak  $(\mathbf{z}_t, t = 1, \dots, n)$ , procjene srednje vrijednosti  $\boldsymbol{\mu}$  i matrice kovarijanci  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  [16] su

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{z}_t, \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (\mathbf{z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)(\mathbf{z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)^T. \quad (1.9)$$

Procjena uzoračke matrice unakrsnih kovarijanci za  $\ell$ -pomak dana je s

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\ell = \frac{1}{T-1} \sum_{t=\ell+1}^T (\mathbf{z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)(\mathbf{z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)^T, \quad (1.10)$$

dok je procjena uzoračke matrice unakrsnih korelacija dana s

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_\ell = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\ell \hat{\mathbf{D}}^{-1}, \quad (1.11)$$

gdje je  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\hat{\gamma}_{11}^{1/2}(0), \dots, \hat{\gamma}_{kk}^{1/2}(0)\}$ , s tim da je  $\hat{\gamma}_{ii}(0)$  ( $i, i$ )-ti element matrice  $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0$ .

Za početak modeliranja volatilitnosti uvodimo dva testa koji provjeravaju prisutnost uvjetne heteroskedastičnosti. Proučavamo ukazuju li vrijednosti testnih statistika na nepostojanje autokoreliranosti i unakrsne koreliranosti. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je  $\boldsymbol{\mu}_t$  poznat. Iz diskusije u uvodnom dijelu za univarijatnu vremensku seriju, testovi koriste proces  $\mathbf{a}_t^2$ .

## Portmanteau test

Testiramo hipoteze

$$H_0 : \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \dots = \boldsymbol{\rho}_m = \mathbf{0}$$

$$H_a : \boldsymbol{\rho}_\ell \neq \mathbf{0} \text{ za neki } \ell \text{ (} 1 \leq \ell \leq m \text{),}$$

gdje je  $\boldsymbol{\rho}_\ell$  definiran u (1.8) za  $\mathbf{a}_t^2$ . Testna statistika koju koristimo u ovoj situaciji je Ljung-Boxova statistika

$$Q_k^*(m) = n^2 \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{n-\ell} \mathbf{b}_\ell^T (\hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1}) \mathbf{b}_\ell, \quad (1.12)$$

gdje  $n$  označava veličinu uzorka,  $k$  dimenziju od  $\mathbf{a}_t$  i  $\mathbf{b}_\ell = \text{vec}(\hat{\boldsymbol{\rho}}_\ell^T)$ . Nulhipoteza tvrdi da  $\mathbf{a}_t$  nije uvjetno heteroskedastičan, te da je  $Q_k^*(m)$  asimptotski distribuiran kao  $\chi_{k^2 m}^2$ . Definicija Kroneckerovog produkta  $\otimes$  i  $\text{vec}(\cdot)$  može se pronaći u Dodatku A.

Alternativno, možemo i koristiti standardiziranu seriju

$$e_t = \mathbf{a}_t^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{a}_t - k, \quad (1.13)$$

gdje  $\Sigma$  označava matricu kovarijanci od  $\mathbf{a}_t$  i testirati hipoteze

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

$$H_a : \rho_\ell \neq 0 \quad \text{za neki } \ell \quad (1 \leq \ell \leq m),$$

gdje je  $\rho_\ell$  definiran u (1.3) za  $e_t$ .

U ovom je slučaju koristimo Ljung-Boxovu testnu statistiku za univarijatne serije  $e_t$ ,

$$Q_k^*(m) = n(n+2) \sum_{\ell=1}^m \frac{\hat{\rho}_\ell^2}{n-\ell},$$

gdje je  $\hat{\rho}_\ell$  definiran u (1.4) za  $e_t$ . U praksi,  $\Sigma$  se procjenjuje uzoračkom matricom kovarijanci od  $\mathbf{a}_t$ . Pod nulhipotezom je tvrdnja da  $\mathbf{a}_t$  nije uvjetno heteroskedastičan, te da je  $Q_k^*$  asimptotski distribuiran kao  $\chi_m^2$ . Odabir vrijednosti  $m$  utječe na testnu statistiku. Simulacijske su studije pokazale da je  $m \approx \ln(n)$  optimalan izbor [18].

Multivarijatni test  $Q_k^*(m)$  u jednadžbi (1.3) loš je izbor za konačne uzorke kad  $\mathbf{a}_t$  ima teške repove, vidi [16]. Stoga koristimo robusnu modifikaciju od  $Q_k^*$  na način da izbacimo zadnjih 5% podataka u gornjem repu. Specijalno, neka je  $q_{0.95}$  empirijski 0.05-kvantil standardiziranih skalarnih reziduala  $e_t$  iz jednadžbe (1.13). Iz  $\mathbf{z}_t$  se izbacuju ona opažanja čiji odgovarajući  $e_t$  premašuje  $q_{0.95}$  i koristi se  $0.95n$  podataka za izračun testne statistike u jednadžbi (1.12). Dobivenu testnu statistiku označavamo s  $Q_k^r(m)$ , gdje  $r$  označava da se radi o robusnom testu.

## Rang test

Povrati imovine skloni su imati teške repove. U slučaju ekstremnih povrata ne koristimo testnu statistiku (1.12), već su Dufour i Roy [6] rangirali standardizirane serije  $e_t$  u (1.13). Svakom  $e_t$  dodjeljujemo rang  $R_t$ . Iz (1.3) autokorelacija ranga od  $e_t$  za  $\ell$ -pomak tada ima oblik

$$\rho_\ell = \frac{\sum_{t=\ell+1}^n (R_t - \bar{R})(R_{t-\ell} - \bar{R})}{\sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R})^2}, \quad (1.14)$$

gdje su

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t = \frac{n+1}{2},$$

$$\sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R})^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Testiramo hipoteze

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

$$H_a : \rho_\ell \neq 0 \quad \text{za neki } \ell \quad (1 \leq \ell \leq m),$$

gdje je  $\rho_\ell$  definiran u (1.14).

Dufour i Roy su pokazati da je statistika

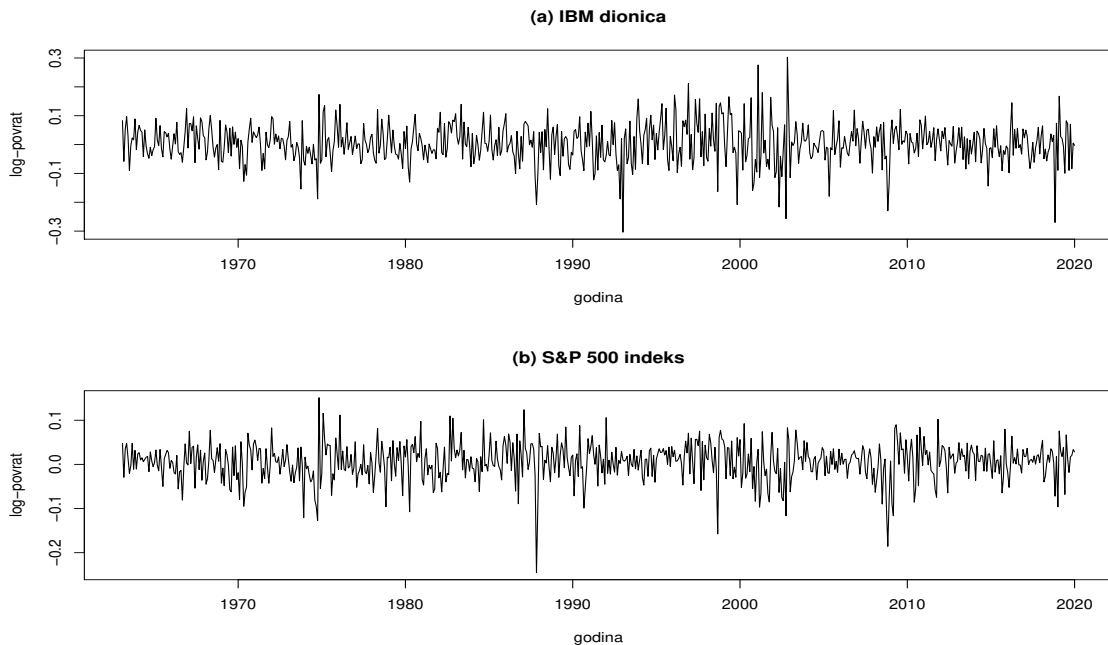
$$Q_R(m) = \sum_{\ell=1}^m \frac{[\rho_\ell - \mathbb{E}(\rho_\ell)]^2}{\text{Var}(\rho_\ell)} \quad (1.15)$$

asimptotski distribuirana kao  $\chi_m^2$  ako  $e_t$  nisu autokorelirani.

Navedne četiri statistike također koristimo za provjeru valjanosti modela jednom kada procijenimo matricu volatilnosti  $\hat{\Sigma}_t$ . Iz MTS [19] paketa koristimo naredbu **MCHdiag** (*Multivariate Conditional Heteroscedastic Model Checking*) koja provjerava valjanost procijenjenog modela multivarijatne volatilnosti. Računa portmanteau statistiku i portmanteau statistiku baziranu na rangui za skalarno transformirane rezidualne  $e_t = \hat{\mathbf{a}}_t^T \hat{\Sigma}_t^{-1} \hat{\mathbf{a}}_t - k$  i multivarijatnu portmanteau statistiku i njezinu robusnu verziju za standardizirane rezidualne  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t = \hat{\Sigma}_t^{-1/2} \hat{\mathbf{a}}_t$ . Za razne vrijednosti  $m$  (npr.  $m = 5$  ili  $m = 10$ ) na razini značajnosti 5%  $p$ -vrijednosti će ukazivati ili neće ukazivati uvjetnu heteroskedastičnost reziduala, tj. trebamo li odbaciti model ili ne. Za svaki model, počevši od EWMA modela, demonstrirat ćemo provjeru valjanosti modela.

## Primjer

Promatramo dvije vremenske serije. Prva serija je 5-dimenzionalna n.j.d. serija simulirana iz  $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_5)$  s 400 opažanja, dok druga vremenska serija sadrži mjesečne log-povrate IBM dionice i S&P 500 indeksa u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine, podaci preuzeti s [25]. Označimo sa  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t})^T$ <sup>3</sup> log-povrate za IBM dionicu i S&P 500 indeks, redom. Za  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$  uzimamo srednju vrijednost uzorka  $\mathbf{z}_t$ . Naredba `scale` uklanja srednje vrijednosti uzorka. Koristimo naredbu `MarchTest` iz MTS paketa [19] s  $m = 10$  pomaka koja računa spomenute testne statistike i  $p$ -vrijednosti.



Slika 1.2: Mjesečni log-povrati (a) IBM dionice i (b) S&P 500 indeksa od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine.

<sup>3</sup>Slučajne varijable i vektore označavat ćemo jednako kao i njihove realizacije. Kada promatramo njihova svojstva, smatramo da se radi o slučajnoj varijabli (vektoru). U primjerima će označavati realizacije uzorka.

Za demonstraciju računamo testne statistike

1.  $Q_k^*(m)$  iz jednadžbe (1.12)
2.  $Q_k^r(m)$ : robusna verzija od  $Q_k^*(m)$  sa skraćenim gornjim repom (5% zadnjih podataka)
3.  $Q^*(m)$ : dolazi iz transformiranih skalarnih reziduala jednadžbe (1.13)
4.  $Q_R(m)$ : dolazi od rang testa baziranog na rang u od  $e_t$ .

```
library(MTS)
zt=matrix(rnorm(2000),400,5)

MarchTest(zt)

## Q(m) of squared series(LM test):
## Test statistic: 8.518968 p-value: 0.5782798
## Rank-based Test:
## Test statistic: 9.415931 p-value: 0.4931366
## Q_k(m) of squared series:
## Test statistic: 261.9945 p-value: 0.2885016
## Robust Test(5%) : 268.4998 p-value: 0.2011816
```

Dobivene testne statistike (u zagradi navedene pripadne  $p$ -vrijednosti) za prvu vremensku seriju su:

$$Q_k^*(10) = 8.518 (0.578),$$

$$Q_k^r(10) = 268.499 (0.201),$$

$$Q^*(10) = 261.995 (0.288),$$

$$Q_R(10) = 9.416 (0.493).$$

Za simuliranu seriju, pomoću  $p$ -vrijednosti zaključujemo da ne odbacujemo nulhipoteze.

```
at=scale(logp,center=T,scale=F)
MarchTest(at)

## Q(m) of squared series(LM test):
## Test statistic: 45.87674 p-value: 1.509888e-06
## Rank-based Test:
## Test statistic: 134.4519 p-value: 0
## Q_k(m) of squared series:
## Test statistic: 111.6486 p-value: 1.085021e-08
## Robust Test(5%) : 103.1385 p-value: 1.764414e-07
```

Za mjesečne log-povrate testne statistike (u zagradi navedene pripadne  $p$ -vrijednosti) su:

$$Q_k^*(10) = 45.877 (1.510 \times 10^{-6}),$$

$$Q_k^r(10) = 103.139 (1.764 \times 10^{-7}),$$

$$Q^*(10) = 111.649 (1.085 \times 10^{-8}),$$

$$Q_R(10) = 134.452 (0).$$

Za seriju mjesečnih log-povrata pomoću  $p$ -vrijednosti zaključujemo da odbacujemo nulhipoteze; one ukazuju da su mjesečni log-povrati uvjetno heteroskedastični.

## Poglavlje 2

# EWMA i BEKK model

### 2.1 EWMA

Najjednostavniji model multivarijatne volatilnosti naziva se EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) model. Glavni cilj ovog modela je procjena volatilnosti vremenske serije u sljedećem periodu (sljedeći dan, tjedan i sl.) i prikaz njezinih promjena u određenom vremenskom periodu. Matricu kovarijanci inovacija možemo procijeniti s

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^T,$$

gdje je srednja vrijednost od  $\mathbf{a}_j$  jednaka nuli za svaki  $j$ . Svakom se članu sumacije pridružuje jednaka težina  $1/(t-1)$ . Želimo li naglasiti kako su za procjenu matrice kovarijanci važniji nedavni povrati, dodijelit ćemo im veću težinu zadavanjem parametra  $\lambda \in (0, 1)$ . Primjerice, za procjenu volatilnosti važniji nam je jučerašnji dnevni povrat nego dnevni povrat izračunat prije godinu dana.

Definiramo EWMA model kao

$$\Sigma_t = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{t-1}} \sum_{j=1}^{t-1} \lambda^{j-1} \mathbf{a}_{t-j} \mathbf{a}_{t-j}^T, \quad (2.1)$$

Za dovoljno veliki  $t$  tako da vrijedi  $\lambda^{t-1} \approx 0$ , jednadžba (2.1) postaje

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1-\lambda) \mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_{t-1}^T. \quad (2.2)$$

U praksi, uzimamo fiksni parametar  $\lambda$  ili ga možemo procijeniti. Kratkotrajno iskustvo pokazuje da je  $\lambda \approx 0.96$  [18] za mnoge serije povrata imovine. U tom

slučaju, težina zadnjeg člana sumacije iznosi  $(1 - 0.96)(0.96)^0 = 4\%$ , njemu prethodnog  $(1 - 0.96)(0.96)^2 = 3.69\%$ , itd. Jedna mana ovog modela je ta što često biva odbačen dijagnostičkim provjerama, što je i očekivano jer samo jednom vrijednošću parametra  $\lambda$  određujemo sve uvjetne varijance i kovarijance.

## 2.2 Primjer

Promatramo IBM dionicu, S&P 500 indeks i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Podaci su preuzeti s [25]. Za modeliranje koristimo programski jezik R [15]. Označimo sa  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t}, z_{3t})^T$  seriju mjesečnih log-povrata IBM dionice i S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice, redom.

```
at=scale(logp,scale=F,center=T)
MarchTest(at)

## Q(m) of squared series(LM test):
## Test statistic: 181.2719 p-value: 0
## Rank-based Test:
## Test statistic: 233.1151 p-value: 0
## Q_k(m) of squared series:
## Test statistic: 349.3525 p-value: 0
## Robust Test(5%) : 209.5125 p-value: 1.584743e-11

m=EWMVol(at,lambda=-0.1)

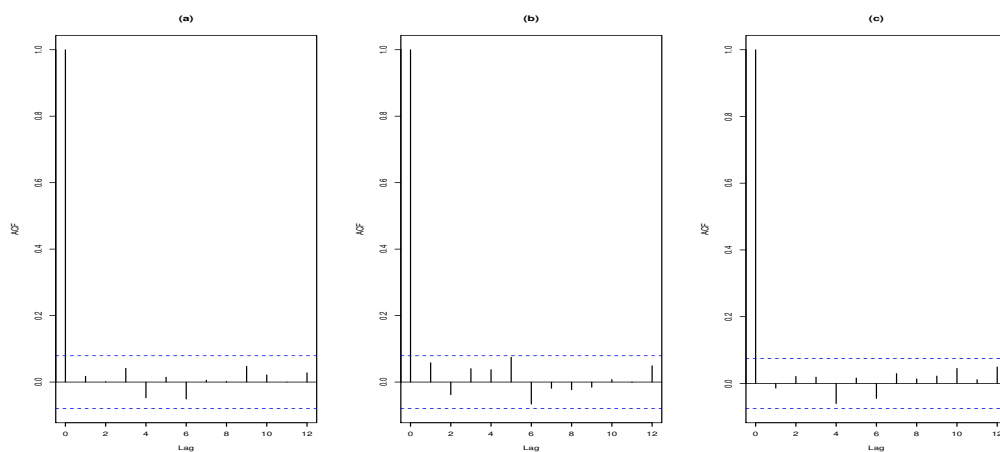
##
## Coefficient(s):
##      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## lambda 0.963626 0.004727 203.9 <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Kao i u Poglavlju 1 koristimo naredbu `MarchTest`. Dobivene  $p$ -vrijednosti ukazuju da je  $\mathbf{z}_t$  uvjetno heteroskedastičan. Prema slici 2.1 možemo reći da  $z_t$  nije značajno autokoreliran. U tom slučaju  $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}$ . Primjenjujemo EWMA model na  $\mathbf{a}_t = \mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}$ .



```
Sigma.t=m$Sigma.t
MCHdiag(at,Sigma.t)

## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 60.85004 2.501603e-09
## Rank-based test:
## Test and p-value: 96.92606 2.220446e-16
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 241.7293 7.771561e-16
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 132.28 0.002489077
```

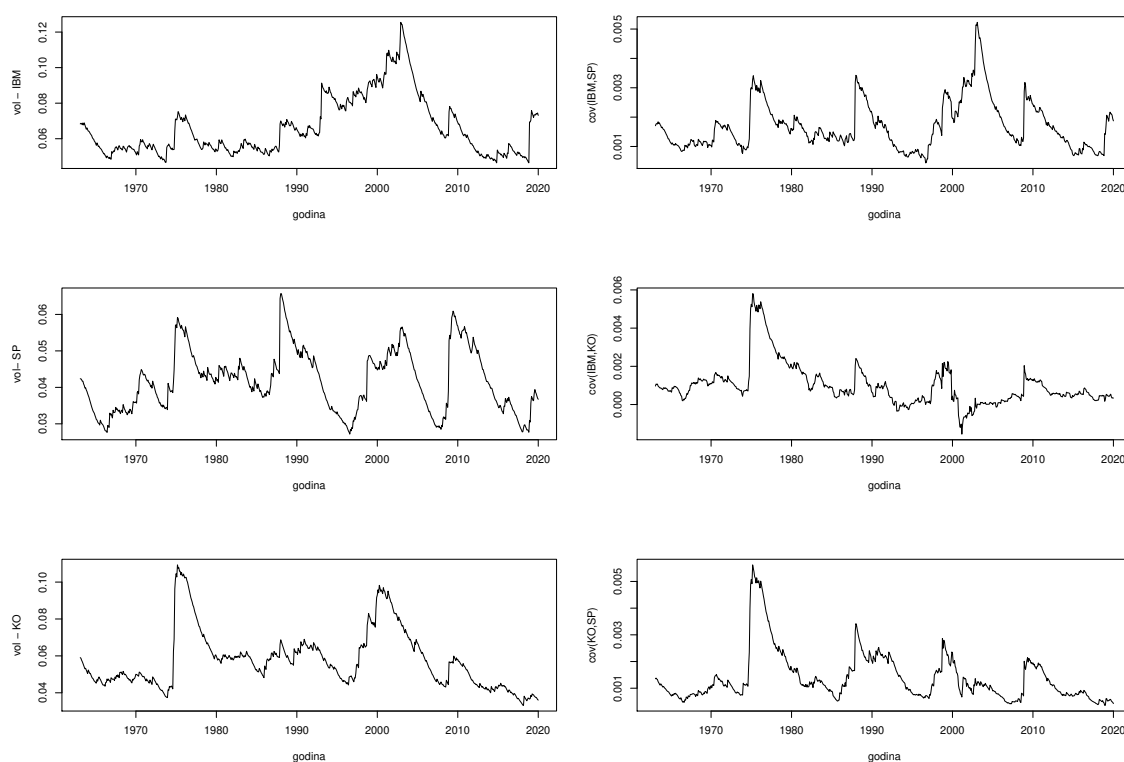


Slika 2.1: Uzoračke autokorelacijske funkcije za (a) IBM dionicu, (b) S&P 500 indeks i (c) Coca Cola dionicu.

Naredba `EWMAvo1` iz paketa [19] procjenjuje matricu volatilnosti u (2.2). Ako navedemo negativnu vrijednost  $\lambda$ , naredba procjenjuje  $\lambda$ .

Na slici 2.2 prikazane su vremenski varirajuće volatilnosti i kovarijance IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Lijevo su prikazane serije volatilnosti koje postizu dosta velike vrijednosti u određenim razdobljima. Također možemo uočiti veću zaglađenost linija. Desno su prikazane uvjetne kovarijance promatranih serija. Njihove vrijednosti su blizu nule, uglavnom pozitivne.

Testne statistike potvrđuju postojanje uvjetne heteroskedastičnosti u serijama povrata; sve su  $p$ -vrijednosti blizu nule. Procjena od  $\lambda$  iznosi 0.9636 sa standardnom greškom 0.0047. Dobivene  $p$ -vrijednosti iz Poglavlja 1 očekivano ukazuju kako su i standardizirani reziduali EWMA modela još uvijek uvjetno heteroskedastični. Dakle, EWMA model se ne čini adekvatan za promatrane podatke.



Slika 2.2: Vremenski varirajuće volatilnosti i kovarijance IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine procijenjene pomoću EWMA modela.

## 2.3 BEKK modeli

BEKK model smatramo jednim od ekstremnih multivarijatnih modela volatilnosti zato što koristi prevelik broj parametara. DVECH model<sup>1</sup> kojeg 1988. godine uvode Bollerslev, Engle i Wooldridge [4], ne osigurava pozitivnu definitnost matrice volatilnosti. Osim toga, definicija DVECH modela ukazuje na to da varijancu neke vremenske serije određuje samo njezin *šok*, a ne *šok* neke druge vremenske serije. Kako bi ukazali na međusobnu ovisnost vremenskih serija i osigurali pozitivnu definitnost matrice volatilnosti, Engle i Kroner 1995. godine uvode Baba-Engle-Kraft-Kroner (BEKK) [9] model.

Za  $k$ -dimenzionalnu vremensku seriju  $\mathbf{z}_t$ , BEKK(1,1) model volatilnosti je oblika

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_{t-1}^T \mathbf{A}_1^T + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Sigma}_{t-1} \mathbf{B}_1^T, \quad (2.3)$$

gdje je  $\mathbf{A}_0$  donjetrokutasta matrica tako da je  $\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^T$  pozitivno definitna,  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{B}_1$  su  $k \times k$  matrice. Ovaj model sadrži  $2k^2 + [k(k+1)/2]$  parametara i osigurava pozitivnu definitnost matrice volatilnosti  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  za svaki  $t$ .

BEKK modeli višeg reda mogu se pronaći u literaturi, ali u ovom poglavlju proučavat ćemo samo BEKK(1,1) model. U praksi, primjena BEKK modela postaje složenija kako  $k$  raste. Već BEKK model reda (1,1) sadrži prevelik broj parametara. Za  $k = 3$ , jednadžba (2.3) sadrži 24 parametara. Stoga je otežano procjenjivati koristeći BEKK(1,1) model za  $k > 3$ . Također, kratkotrajno iskustvo pokazuje kako neki od procijenjenih parametara BEKK(1,1) modela nisu statistički značajni na razini od 5% [18]. Nadalje, ne postoji jednostavna veza između parametara u  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{B}_1$  i matrice volatilnosti zato što je ona nelinearna funkcija elemenata iz  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{B}_1$ . Kako trenutno ne postoje metode koje bi pojednostavile strukturu BEKK modela, i uzimajući u obzir prethodno navedeno, čini se da je BEKK(1,1) model bez dodatnih pretpostavki primjenjiv u praksi samo za mali  $k$ .

## 2.4 Primjer

Još jednom promatramo IBM dionicu i S&P 500 indeks u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Označimo sa  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t})^T$  seriju mjesečnih log-povrata IBM dionice i S&P 500 indeksa, redom.

U Poglavlju 1 pokazali smo da  $\mathbf{z}_t$  nije značajno serijski koreliran, ali ima jako uvjetnu heteroskedastičnost. Stoga, koristimo  $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}$  i primjenjujemo BEKK(1,1) iz 2.3 na  $\mathbf{z}_t$ .

---

<sup>1</sup>DVECH - Diagonal vech; ime je dobilo po operatoru vech [4]

```

library(MTS)

m=BEKK11(logp)

## Initial estimates:  0.004750701 0.005754032 0.06831145 ...
## Lower limits:     -0.04750701 -0.05754032 0.01366229 ...
## Upper limits:     0.04750701 0.05754032 0.07514259 ...
## Log likelihood function:  2264.055
##
## Coefficient(s):
##      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
## mu1    0.00436533  0.00241037  1.81107  0.07013049 .
## mu2    0.00627645  0.00141644  4.43115  9.3734e-06 ***
## A011   0.01366229  0.00395078  3.45813  0.00054395 ***
## A021   0.00822819  0.00260643  3.15688  0.00159466 **
## A022   0.00683810  0.00189174  3.61470  0.00030069 ***
## A11    0.12112280  0.05345808  2.26575  0.02346653 *
## A21   -0.06629751  0.03230243 -2.05240  0.04013083 *
## A12    0.25564723  0.07552558  3.38491  0.00071202 ***
## A22    0.40377655  0.04868077  8.29438 < 2.22e-16 ***
## B11    0.98099689  0.02078772  47.19117 < 2.22e-16 ***
## B21    0.01234962  0.01090312  1.13267  0.25735354
## B12   -0.09259173  0.03030031 -3.05580  0.00224460 **
## B22    0.89371828  0.02283145  39.14417 < 2.22e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Za  $k=2$  ili  $3$  iz MTS [19] paketa koristimo naredbu BEKK11. Nisu dostupni modeli višeg reda.

U tablici 2.1 dane su procjene matrica  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{B}_1$  iz (2.3). Procijenjeni (2,1)-ti element matrice  $\hat{\mathbf{B}}_1$  nije statistički značajan na razini značajnosti 5%, što smo naveli kao jedan od nedostataka BEKK modela.

Tablica 2.1: Procjena BEKK(1,1) modela

parametar	procjene		standardne greške	
$\hat{\mathbf{A}}_0$	0.0137	0.0000	0.0039	0.0000
	0.0082	0.0068	0.0026	0.0019
$\hat{\mathbf{A}}_1$	0.1211	0.2556	0.0535	0.0755
	-0.0663	0.4038	0.0323	0.0487
$\hat{\mathbf{B}}_1$	0.9809	-0.0926	0.0208	0.0303
	0.0123	0.8937	0.0109	0.2283

```
at=cbind(logp[,1]-0.00437,logp[,2]-0.00628)
MCHdiag(at,Sigma.t,m=5)
```

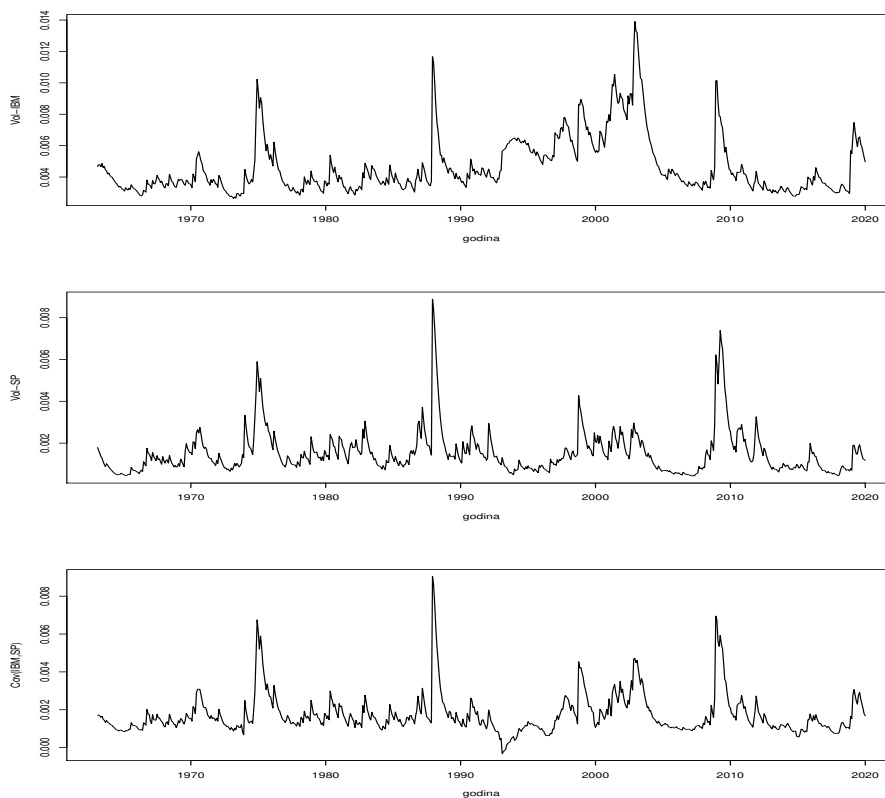
```
## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 4.581133 0.469102
## Rank-based test:
## Test and p-value: 6.925831 0.2262151
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 25.4415 0.1850592
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 24.70126 0.2130998
```

```
MCHdiag(at,Sigma.t)
```

```
## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 7.805362 0.6478422
## Rank-based test:
## Test and p-value: 20.1751 0.02763935
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 39.36502 0.4986639
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 43.94393 0.3080925
```

Za provjeru valjanosti procijenjenog BEKK(1,1) modela računamo testne statistike iz Poglavlja 1. Samo za testnu statistiku baziranu na rangu standardiziranih reziduala  $Q_R(10) = 20.175$ ,  $p$ -vrijednost ukazuje na dodatnu uvjetnu heteroskedastičnost. Dakle, procijenjeni BEKK(1,1) model čini se valjan.

Slika 2.3 prikazuje procijenjene serije volatiliteti i uvjetnu kovarijancu između log-povrata IBM dionice i S&P 500 indeksa u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Možemo vidjeti kako je volatilitet IBM dionice kretala približno kao i volatilitet S&P 500 indeksa, ali je postizala nešto veće vrijednosti. Uvjetna kovarijanca za promatrano razdoblje bila je niska, uglavnom pozitivna.



Slika 2.3: Volatiliteti i uvjetna kovarijanca mjesečnih log-povrata IBM dionice i S&P 500 indeksa u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine procijenjene pomoću BEKK(1,1) modela.

## Poglavlje 3

# Choleskyjeva dekompozicija i modeliranje volatilnosti

### 3.1 Specifikacija modela

U ovom poglavlju predložimo jedan od načina procjene matrice volatilnosti korištenjem Choleskyjeve dekompozicije. Lopes i dr. [11] pokazuju koje sve prednosti ima takva dekompozicija. Ideja je transformirati inovacije  $\mathbf{a}_t$  koristeći Choleskyjevu dekompoziciju što rezultira time da su novodobivene komponente nekorelirane [17]. Za pozitivno definitnu matricu  $\Sigma_t$  postoji donjetrokutasta matrica  $\mathbf{L}_t$  s jedinicama na dijagonali i dijagonalna matrica  $\mathbf{G}_t$ , čiji su elementi pozitivni tako da vrijedi

$$\Sigma_t = \mathbf{L}_t \mathbf{G}_t \mathbf{L}_t^T. \quad (3.1)$$

Dekompoziciju matrice  $\Sigma_t$  nazivamo **Choleskyjeva dekompozicija**. Za razliku od BEKK modela, elementi matrica  $\mathbf{L}_t$  i  $\mathbf{G}_t$  imaju interpretaciju. Neka je  $\mathbf{a}_t$   $k$ -dimenzionalna inovacija s matricom volatilnosti  $\Sigma_t$ . Označimo s  $\mathcal{F}_{t-1}$  informaciju dostupnu do trenutka  $t - 1$ . Definiramo sustav  $k$  višestrukih linearnih regresija. Komponente  $b_{it}, i = 1 \dots k$  u  $\mathbf{b}_t$  definiramo rekursivno tako da su međusobno ortogonalne.

Neka je  $b_{1t} = a_{1t}$  i neka je jednostavna linearna regresija dana s

$$a_{2t} = \beta_{21,t} b_{1t} + b_{2t}, \quad (3.2)$$

gdje je

$$\beta_{21,t} = \frac{\text{cov}(a_{2t}, b_{1t} | \mathcal{F}_{t-1})}{\text{Var}(b_{1t} | \mathcal{F}_{t-1})}.$$

U praksi,  $\beta_{21,t}$  procjenjujemo metodom najmanjih kvadrata koristeći dostupne podatke iz  $\mathcal{F}_{t-1}$ . Iz svojstava metode najmanjih kvadrata,  $b_{2t}$  je ortogonalan na  $b_{1t} = a_{1t}$  i vrijedi

$$\text{Var}(b_{2t}|\mathcal{F}_{t-1}) = \text{Var}(a_{2t}|\mathcal{F}_{t-1}) - \beta_{21,t}^2 \text{Var}(a_{1t}|\mathcal{F}_{t-1}).$$

U sljedećem koraku jednadžba linearne regresije glasi

$$a_{3t} = \beta_{31,t}a_{1t} + \beta_{32,t}a_{2t} + b_{3t}. \quad (3.3)$$

Ponavljajući prethodni postupak dobivamo

$$a_{kt} = \beta_{k1,t}a_{1t} + \dots + \beta_{k,k-1,t}a_{k-1,t} + b_{kt}. \quad (3.4)$$

Prethodne jednadžbe možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_{21,t} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_{31,t} & -\beta_{32,t} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -\beta_{k1,t} & -\beta_{k2,t} & -\beta_{k3,t} & \cdots & -\beta_{k,k-1,t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \\ \vdots \\ a_{kt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1t} \\ b_{2t} \\ b_{3t} \\ \vdots \\ b_{kt} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

odnosno kao

$$\boldsymbol{\beta}_t \mathbf{a}_t = \mathbf{b}_t \quad \text{ili} \quad \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\beta}_t^{-1} \mathbf{b}_t, \quad (3.6)$$

gdje su  $b_{it}$  preko konstrukcije međusobno okomiti pa je matrica volatilnosti od  $\mathbf{b}_t = (b_{1t}, \dots, b_{kt})^T$  dijagonalna.

Ako označimo matricu volatilnosti od  $\mathbf{b}_t$  s  $\boldsymbol{\Sigma}_{b,t}$  dobivamo

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \boldsymbol{\beta}_t^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{b,t} (\boldsymbol{\beta}_t^{-1})^T, \quad (3.7)$$

gdje je matrica  $\boldsymbol{\Sigma}_{b,t}$  dijagonalna.

Kako su svi dijagonalni elementi matrice  $\boldsymbol{\beta}_t$  jednaki 1, matrica volatilnosti  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  je pozitivno definitna, pod uvjetom da je matrica  $\boldsymbol{\Sigma}_{b,t}$  pozitivno definitna. Posljedično, sve dok su volatilnosti od  $b_{it}$  pozitivne za svaki  $i$  i za svaki  $t$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  je pozitivno definitna za svaki  $t$ .



Nadalje, opisujemo detaljan postupak modeliranja multivarijatne volatilnosti pomoću jednadžbe 3.6, koristeći Choleskyjevu dekompoziciju.

1. Primjena EWMA<sup>1</sup> postupka za  $\lambda = 0.96$ . Posebno, neka je  $\hat{\mu}_i$  srednja vrijednost uzorka od  $\{\hat{\beta}_{i,t}\}$  i  $\hat{\beta}_{i,t}^* = \hat{\beta}_{i,t} - \hat{\mu}_i$  vektor devijacije. Procjene  $\beta_{i,t}$  dobijemo iz

$$\tilde{\beta}_{i,t}^* = \lambda \tilde{\beta}_{i,t-1}^* + (1 - \lambda) \hat{\beta}_{i,t-1}^*, \quad t = 2, 3, \dots, \quad (3.8)$$

uz početnu vrijednost  $\tilde{\beta}_{i,1}^* = \hat{\beta}_{i,1}^*$ .

2. Neka je  $\hat{b}_{1t} = a_{1t}$ . Za  $i = 2, \dots, k$  izračun serija reziduala

$$\hat{b}_{it} = a_{it} - \mathbf{a}_{it}^T \tilde{\beta}_{i,t},$$

gdje je  $\mathbf{a}_{it} = (a_{1t}, \dots, a_{i-1,t})^T$ .

3. Procjena univarijatnog GARCH(1,1) modela za svaki  $b_{it}$  kako bi dobili procese uvjetne varijance  $\hat{\sigma}_{b,i,t}^2$  za  $i = 1, \dots, k$  koji su oblika:

$$\sigma_{b,i,t}^2 = \alpha_{0,i} + \alpha_{1,i} b_{i,t-1}^2 + \beta_{1,i} \sigma_{i,t-1}^2, \quad 0 \leq \alpha_{1,i}, \beta_{1,i} \leq 1, \quad \alpha_{1,i} + \beta_{1,i} < 1. \quad (3.9)$$

4. Procjena matrice volatilnosti  $\hat{\Sigma}_t$  koristeći  $\tilde{\beta}_{i,t}$  i procese uvjetne varijance  $\hat{\sigma}_{b,i,t}^2$  za  $i = 1, \dots, k$ .
5. Primjena metode najmanjih kvadrata na svaku jednadžbu od 3.2 do 3.4. Za  $i$ -tu linearnu regresiju, označavamo s  $\hat{\beta}_{i,t}$ ,  $i = 2, \dots, k$  procijenjene vrijednosti.

Iz jednadžbe (3.4) slijedi da dodavanjem  $(k + 1)$ -te imovine u portfelj ne procjenjujemo iznova  $k$  postojećih serija volatilnosti  $\sigma_{b,i,t}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Samo procijenimo seriju volatilnosti  $\sigma_{b,k+1,t}$  pomoću GARCH(1,1) modela i izračunamo novu matricu  $\Sigma_t$  za  $k + 1$  imovina.

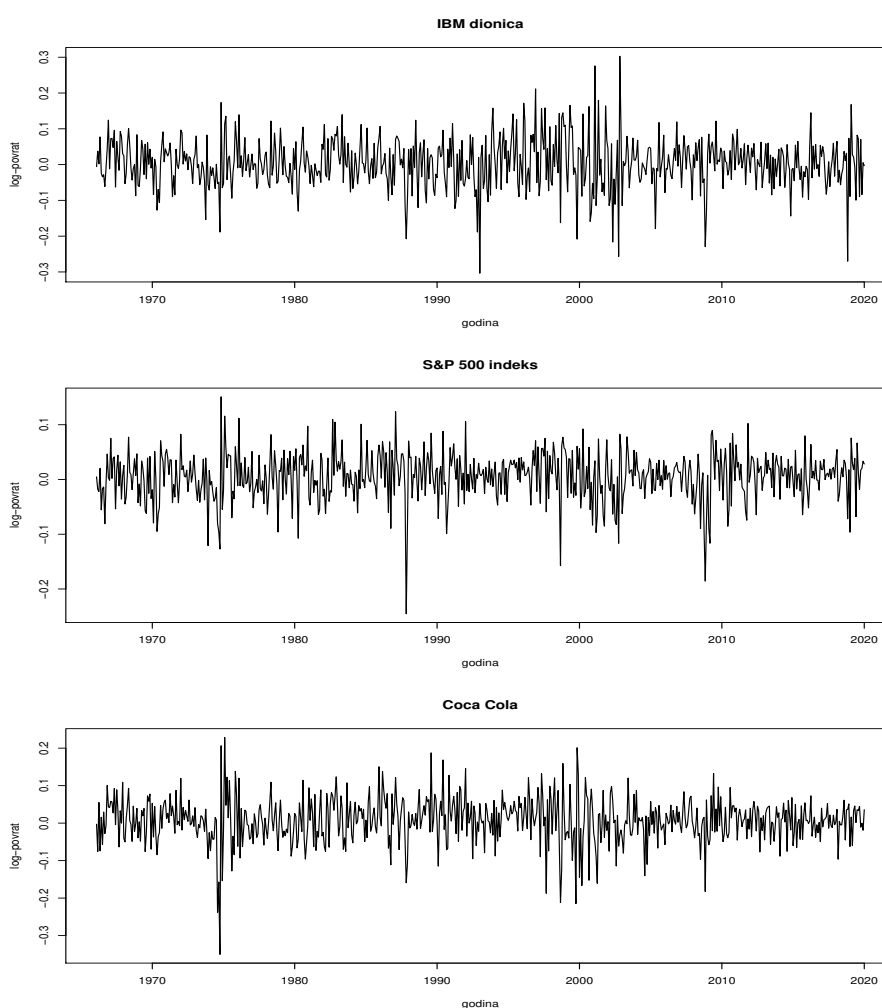
Lopes i dr. [11] napravili su studiju kako bi vidjeli utječe li na procjene različit redoslijed dodavanja imovina u portfelj. U teoriji, redoslijed  $z_{it}$  u  $\mathbf{z}_t$  može biti proizvoljan. Pokazali su da bi se procjene mogle razlikovati za različit redoslijed  $z_{it}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , za veliki  $k$  i mali  $n$ .

---

<sup>1</sup>U Choleskyjevoj dekompoziciji koristimo sve podatke, a za procjenu  $\Sigma_t$  ne koristimo prvih 36 podataka, stoga kako se ne bi stvorio pomak (*drift*) u komponentama  $\beta_{ij}$ , koristimo njezine zaglađene procjene.

### 3.2 Primjer

Promatramo mjesečne log-povrate triju imovina; IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Označimo sa  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t}, z_{3t})^T$  mjesečne log-povrate IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice, redom. Na slici (3.1) prikazani su mjesečni log-povrati IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice od siječnja 1966. godine do prosinca 2019. godine. Na grafovima ne prikazujemo podatke iz prve tri godine jer ćemo ih iskoristiti za procjenu početnih vrijednosti od  $\beta_t$ .



Slika 3.1: Mjesečni log-povrati IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice od siječnja 1966. godine do prosinca 2019. godine.

Kako je broj serija  $k = 3$ , matrice iz (3.1) su:

$$L_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_{21,t} & 1 & 0 \\ q_{31,t} & q_{31,t} & 1 \end{bmatrix}, \quad G_t = \begin{bmatrix} g_{11,t} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22,t} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33,t} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Slijedi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{21,t} & \sigma_{31,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} & \sigma_{32,t} \\ \sigma_{31,t} & \sigma_{32,t} & \sigma_{33,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11,t} & q_{21,t}g_{11,t} & q_{31,t}g_{11,t} \\ q_{21,t}g_{11,t} & q_{21,t}^2g_{11,t} + g_{22,t} & q_{31,t}q_{21,t}g_{11,t} + q_{32,t}g_{22,t} \\ q_{31,t}g_{11,t} & q_{31,t}q_{21,t}g_{11,t} + q_{32,t}g_{22,t} & q_{31,t}^2g_{11,t} + q_{32,t}^2g_{22,t} + g_{33,t} \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem elemenata prethodne jednadžbe dobivamo

$$g_{11,t} = \sigma_{11,t}, \quad q_{21,t} = \frac{\sigma_{21,t}}{\sigma_{11,t}}, \quad g_{22,t} = \sigma_{22,t} - q_{21,t}^2g_{11,t},$$

$$q_{31,t} = \frac{\sigma_{31,t}}{\sigma_{11,t}}, \quad q_{32,t} = \frac{1}{g_{22,t}} \left( \sigma_{32,t} - \frac{\sigma_{31,t}}{\sigma_{21,t}}\sigma_{11,t} \right),$$

$$g_{33,t} = \sigma_{33,t} - q_{31,t}^2g_{11,t} - q_{32,t}^2g_{22,t},$$

što su koeficijenti u

$$\begin{aligned} b_{1t} &= a_{1t}, \\ b_{2t} &= a_{2t} - \beta_{21,t}b_{1t}, \\ b_{3t} &= a_{3t} - \beta_{31,t}b_{1t} - \beta_{32,t}b_{2t}, \end{aligned}$$

gdje je  $q_{ij,t} = \beta_{ij,t}$  i  $g_{ii,t} = \text{Var}(b_{it}|\mathcal{F}_{t-1})$ .

Za procjenu  $\beta_{21,t}$ ,  $\beta_{31,t}$  i  $\beta_{32,t}$  u trenutku  $t = 1$  koristimo prvih 36 opažanja, što je već implementirano u naredbi `MCholV` iz paketa `MTS` [19]. Naredba `MCholV` (*Multivariate Cholesky Volatility Model*) za  $684 \times 3$  matricu log-povrata pomoću metode najmanjih kvadrata daje rekursivno definirane  $b_{it}$ ,  $i=1,2,3$  i  $\beta_t$  iz Choleskyjeve dekompozicije. Dobivene se procjene zaglađuju pomoću EWMA metode gdje se radi jednostavnosti uzima  $\lambda = 0.96$ . Može se koristiti i druga vrijednost parametra  $\lambda$  ili se procijeniti kao u Poglavlju 2.1. Također, može se koristiti bilo koji univarijatni model volatilnosti za svaki  $b_{it}$ , ali također radi jednostavnosti primjenjujemo univarijatni GARCH(1,1) model.

```

library(MTS)
library(fGarch)

m=MCholV(logp)

## Sample means:  0.004751 0.005754 0.008068

## Estimation of the first component
## Estimate (alpha0, alpha1, beta1):  0.000353 0.080296 0.845816
## s.e.                               :  0.000199 0.032226 0.068232
## t-value                             :  1.777794 2.491659 12.39613

## Component 2 Estimation Results (residual series):
## Estimate (alpha0, alpha1, beta1):  6.4e-05 0.092309 0.85929
## s.e.                               :  3e-05 0.02554 0.036834
## t-value                             :  2.16905 3.614234 23.32867

## Component 3 Estimation Results (residual series):
## Estimate (alpha0, alpha1, beta1):  0.000156 0.107792 0.828973
## s.e.                               :  5.3e-05 0.024861 0.035346
## t-value                             :  2.936154 4.335709 23.45288

```

Za metodu najmanjih kvadrata, prvih 36 zapažanja koristimo za početne vrijednosti tako da za procjenu volatilnosti koristimo 648 opažanja, tj. od 1966. godine do 2019. godine. Univarijatne GARCH(1,1) modele koristimo za transformiranu seriju  $\mathbf{b}_t$ .

Posebno, tri univarijatna GARCH(1,1) modela iz (3.9) su:

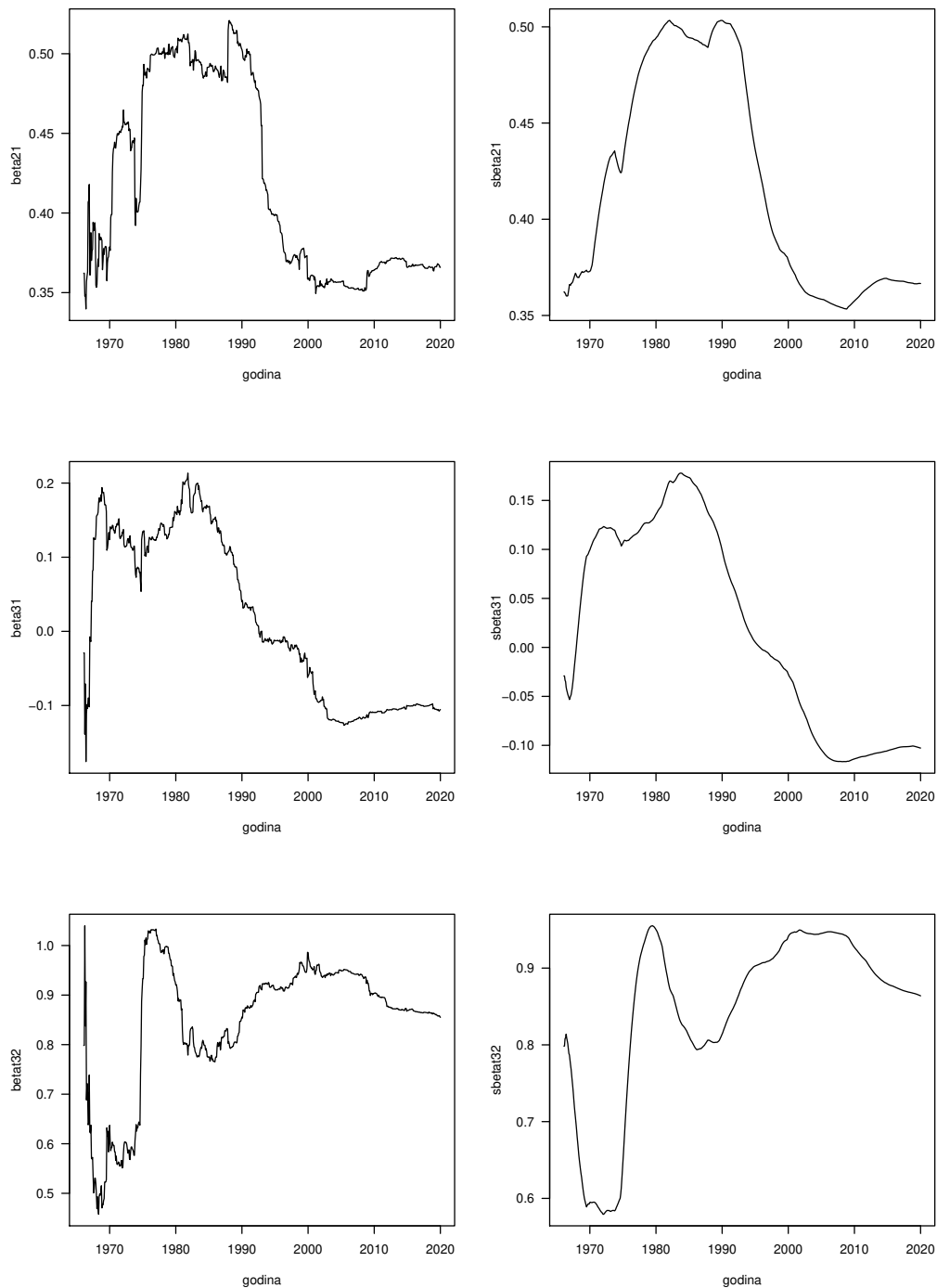
$$\sigma_{1t}^2 = 0.000353 + 0.080 b_{1,t-1}^2 + 0.846 \sigma_{1,t-1}^2$$

$$\sigma_{2t}^2 = 6.4 \times 10^{-5} + 0.092 b_{2,t-1}^2 + 0.859 \sigma_{2,t-1}^2$$

$$\sigma_{3t}^2 = 0.000156 + 0.108 b_{3,t-1}^2 + 0.829 \sigma_{3,t-1}^2,$$

gdje su sve procjene na razini značajnosti od 5%.

Slika 3.2 prikazuje procijenjene  $\hat{\beta}_{ij,t}$  i pripadne zaglađene procjene.



Slika 3.2: Procjene metodom najmanjih kvadrata (lijevo) i njihove zaglađene verzije (desno) korištene u Choleskyjevoj dekompoziciji mjesečnih log-povrata IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1966. godine do prosinca 2019. godine.

```

at=scale(logp[37:684,],center=T,scale=F)
Sigma.t=m$Sigma.t

MCHdiag(at,Sigma.t)

## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 18.2009 0.0516679
## Rank-based test:
## Test and p-value: 25.06718 0.005219616
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 124.924 0.008775837
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 116.7492 0.0305141

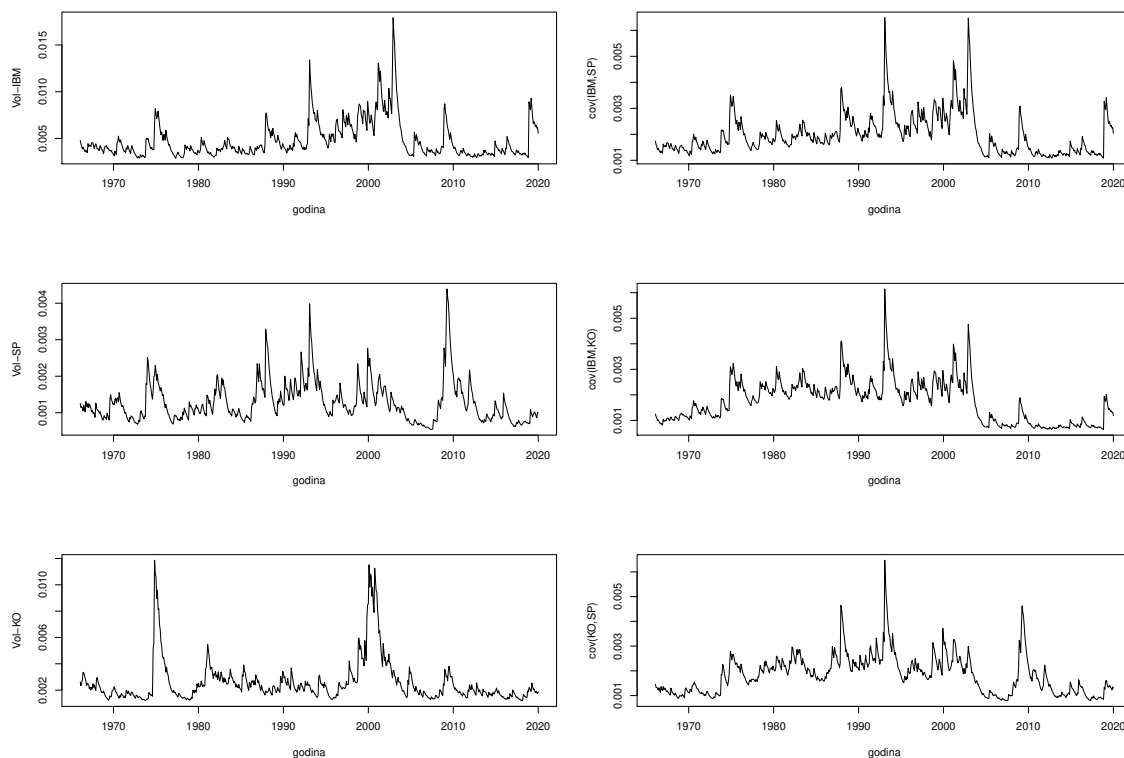
MCHdiag(at,Sigma.t,5)

## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 8.82489 0.1162559
## Rank-based test:
## Test and p-value: 6.604425 0.2517603
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 63.42254 0.03635681
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 63.0491 0.03893449

```

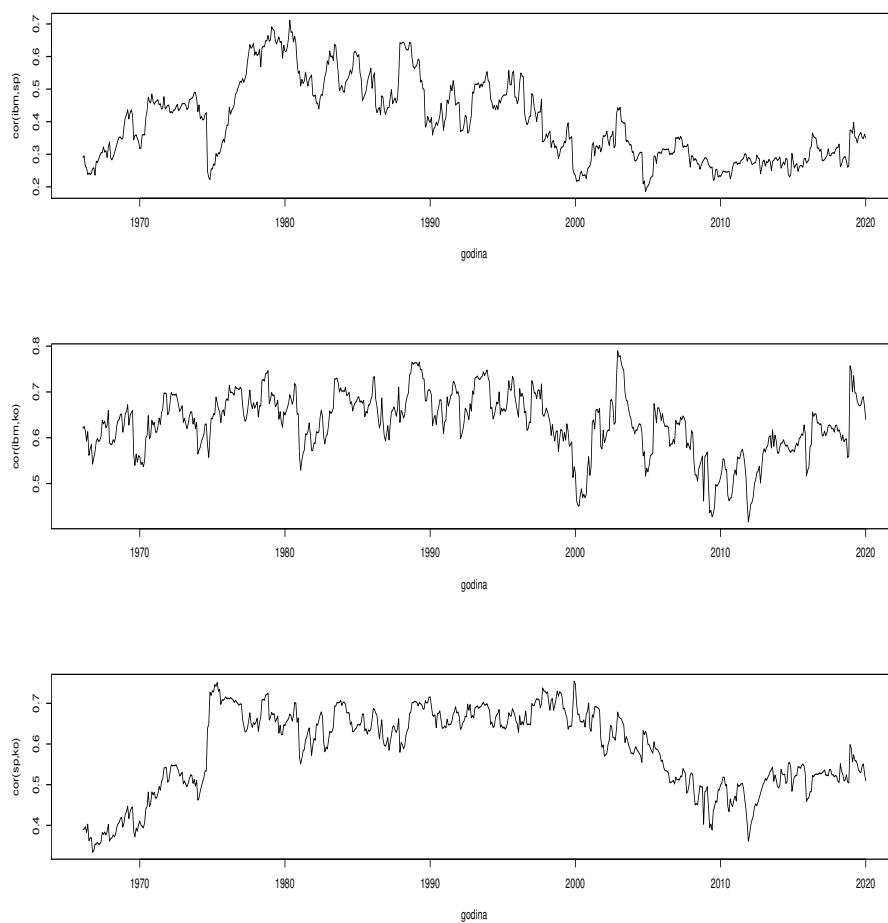
Označimo sa  $\hat{\Sigma}_t$  procijenjenu matricu volatilnosti. Za testne statistike iz Poglavlja 1 provjeravamo uvjetnu heteroskedastičnost standardiziranih reziduala. Za broj pomaka jednak 5, prema testnim statistikama  $Q_k^*(m) = 8.825 (0.116)$  i  $Q_R(m) = 6.604 (0.252)$  ne odbacujemo nultu hipotezu na razini značajnosti od 5%, dok za broj pomaka jednak 10 ne odbacujemo nultu hipotezu prema testnoj statistici  $Q_k^*(m) = 18.201 (0.052)$  na razini značajnosti od 5%. U zagradama su dane pripadne  $p$ -vrijednosti. Drugim riječima,  $p$ -vrijednosti ukazuju na postojanje uvjetne heteroskedastičnosti. Mogli bi zaključiti da za dane podatke model nije valjan.

Na lijevoj su strani slike 3.3 prikazane serije volatilnosti, dok su na desnoj strani prikazane uvjetne kovarijance. Možemo uočiti porast volatilnosti tijekom 2008. godine, uzrokovan financijskom krizom.



Slika 3.3: Volatilnosti i uvjetne kovarijance mjesečnih log-povrata IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice od siječnja 1966. godine do prosinca 2019. godine procijenjene pomoću Choleskyjeve dekompozicije.

Slika 3.4 prikazuje vremenski varirajuće korelacije između triju povrata na imovine. Prosječna korelacija između dviju dionica iznosi 0.239, između S&P 500 indeksa i IBM dionice iznosi 0.591, dok korelacija između S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice iznosi 0.541. Za razliku od korelacije između S&P 500 indeksa i Coca Cola, možemo uočiti primjetno smanjivanje korelacije između S&P 500 indeksa i IBM dionice nakon financijske krize 2008. godine. Posljednjih deset godina ima trend rasta. Korelacija između dviju dionica nije se značajno mijenjala tijekom posljednjih deset godina.



Slika 3.4: Vremenski varirajuće korelacije između mjesečnih log-povrata IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice od siječnja 1966. godine do prosinca 2019. godine procijenjene pomoću Choleskyjeve dekompozicije.



Promijenimo li redoslijed dodavanja komponenti  $z_{it}, i = 1, 2, 3$  u  $z_t$  tako da su redom dodani log-povrati IBM dionice, Coca Cola dionice i S&P 500 indeksa, prema donjim  $p$ -vrijednostima mogli bismo zaključiti da je model valjan.

```
MCHdiag(at,Sigma.t)

## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 13.7792 0.1833032
## Rank-based test:
## Test and p-value: 27.58193 0.00210527
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 109.7465 0.07707645
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 104.665 0.1383313

MCHdiag(at,Sigma.t,5)

## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 5.51225 0.3566045
## Rank-based test:
## Test and p-value: 6.618239 0.2506151
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 47.50389 0.3709953
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 52.67992 0.2013003
```

## Poglavlje 4

# Modeli dinamičke uvjetne korelacije

### 4.1 Specifikacija modela

Donedavno se smatralo kako su u određenom vremenskom periodu korelacije konstantne. Kako bi smanjio broj parametara BEKK modela, Bollerslev [3] 1990. godine uvodi CCC (Constant Conditional Correlation) model, pretpostavljajući da su sve korelacije imovina konstantne. Kada su empirijske studije htjele provjeriti valjanost ove pretpostavke, nisu uspjele u istom. Štoviše, iz iskustva bi se moglo potvrditi kako se vrijednost korelacije povećala u periodu visoke volatilnosti te kako volatilnost utječe i na veličinu i na postojanost korelacije. Modeli dinamičke uvjetne korelacije (Dynamic Conditional Correlation models), kraće DCC modeli, zadržavaju lakoću procjene CCC modela, ali dozvoljavaju vremenski promjenjivu korelaciju. U ovom poglavlju uspoređujemo dva DCC modela koje su uveli Tse i Tsui (2002) te Engle (2002). Radi se o dvoparametarskim modelima jednostavnim za procjenu, no koji imaju sličan nedostatak kao i EWMA modeli.

Neka je  $\mathbf{z}_t$  serija povrata na imovine,  $\mathbf{a}_t$   $k$ -dimenzionalna inovacija i  $\Sigma_t = [\sigma_{ij,t}]$  matrica volatilnosti od  $\mathbf{a}_t$  uz dato  $\mathcal{F}_{t-1}$ . Matricu uvjetnih korelacija je definiramo s

$$\boldsymbol{\rho}_t := \mathbf{D}_t^{-1} \Sigma_t \mathbf{D}_t^{-1}, \quad (4.1)$$

gdje je  $\mathbf{D}_t = \text{diag}\{\sigma_{11,t}^{1/2}, \dots, \sigma_{kk,t}^{1/2}\}$  dijagonalna matrica čiji su elementi volatilnosti u trenutku  $t$ . Modeliranje je podijeljeno u dva su koraka. U prvom koraku procjenjujemo serije volatilnosti  $\{\sigma_{ii,t}\}$ , za  $i = 1, \dots, k$ . Drugi je korak modeliranje dinamičke zavisnosti korelacijskih matrica  $\boldsymbol{\rho}_t$ .

Neka je  $\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{kt})^T$  standardizirani vektor inovacija, definiran kao

$$\eta_{it} = \frac{a_{it}}{\sqrt{\sigma_{ii,t}}}.$$

Uočimo da je  $\boldsymbol{\rho}_t$  matrica volatilnosti od  $\boldsymbol{\eta}_t$ .

Dva su tipa DCC modela; prvog je uveo Engle [8]:

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{\mathbf{Q}} + \theta_1\mathbf{Q}_{t-1} + \theta_2\boldsymbol{\eta}_{t-1}\boldsymbol{\eta}_{t-1}^T, \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\rho}_t = \mathbf{J}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{J}_t, \quad (4.3)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{Q}}$  matrica kovarijanci od  $\boldsymbol{\eta}_t$ ,  $\theta_i$  su nenegativni realni brojevi za koje vrijedi  $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$ . Matrica  $\mathbf{J}_t$  je oblika  $\mathbf{J}_t = \text{diag}\{q_{11,t}^{-1/2}, \dots, q_{kk,t}^{-1/2}\}$  gdje je s  $q_{ii,t}$  označen  $(i, i)$ -ti element od  $\mathbf{Q}_t$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Iz definicije,  $\mathbf{Q}_t$  je pozitivno definitna matrica.  $\boldsymbol{\rho}_t$  je zaista matrica korelacija,  $\rho_{ij,t} = [\rho_{ij,t}] = q_{ij,t}/\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}$ .

Drugi su tip uveli Tse i Tsui [20]:

$$\boldsymbol{\rho}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{\boldsymbol{\rho}} + \theta_1\boldsymbol{\rho}_{t-1} + \theta_2\boldsymbol{\psi}_{t-1} \quad (4.4)$$

gdje je  $\bar{\boldsymbol{\rho}}$  matrica korelacija od  $\boldsymbol{\eta}_t$ ,  $\theta_i$  su nenegativni realni brojevi za koje vrijedi  $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$  i  $\boldsymbol{\psi}_t$  lokalna matrica korelacija koja ovisi o  $\{\boldsymbol{\eta}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{t-m}\}$  za neki pozitivan cijeli broj  $m$ . U praksi,  $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$  procjenjujemo uzoračkom matricom korelacija od  $\{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{t-1}, \dots, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{t-m}\}$  za fiksni  $m > 1$ .

Modeli su slični zato što oba koriste matricu kovarijanci od  $\boldsymbol{\eta}_t$ , no razlikuju se u korištenju lokalne informacije u trenutku  $t - 1$ . Engleov DCC model koristi  $\boldsymbol{\eta}_{t-1}$  samo za ponovno normaliziranje  $\mathbf{Q}_t$  u (4.3) za svaki vremenski indeks  $t$ . DCC model definiran u (4.4) koristi lokalne korelacije kako bi se ažurirale matrice uvjetnih korelacija. U praksi je potrebno odabrati odgovarajući parametar  $m$  modela (4.4) kojeg smatramo parametrom zaglađivanja; što je veći  $m$  korelacije su glatkije. U slučaju  $m > k$ , lokalna je matrica korelacija  $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$  pozitivno definitna.

Iz definicije, DCC modeli koriste samo dva parametra,  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , koji određuju sve uvjetne korelacije, neovisno o broju imovina  $k$ . Prednost malog broja parametara olakšava procjenu, no slično kao i kod EWMA modela pitanje je kako opravdati to da samo dva parametra utječu na izračun svih korelacija, neovisno o vrijednosti  $k$ .

## 4.2 Primjer

Kako bismo usporedili vrijednosti uvjetnih korelacija dva tipa DCC modela, promatramo mjesečne log-povrate IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Označimo sa  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t}, z_{3t})^T$  mjesečne log-povrate od IBM, S&P 500 i KO, redom. Prvo, za seriju povrata  $\mathbf{z}_t$  procijenimo  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$  i označimo seriju reziduala s  $\hat{\mathbf{a}}_t = \mathbf{z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ . Nakon toga za svaku komponentu u  $\mathbf{a}_t$  procjenjujemo parametre GARCH modela. Koristeći procijenjene serije volatilnosti  $\sigma_{ii,t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dobivamo standardizirane serije

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_t = (\hat{\eta}_{1t}, \hat{\eta}_{2t}, \hat{\eta}_{3t})^T, \quad \hat{\eta}_{it} = \frac{\hat{a}_{it}}{\sqrt{\sigma_{ii,t}}},$$

i primjenjujemo DCC modele na  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$ .

Iz paketa `fGarch` [24] naredba `dccPre` daje procijenjene parametre GARCH(1,1) modela i standardizirane serije pomoću kojih naredba `dccFit` procjenjuje željeni DCC model naveden pod `type`. Ako ne navedemo drugačije, procjenjuju se parametri DCC modela Tsea i Tsuija.

```
m1=dccPre(logp,include.mean=T,p=0)

## Sample mean of the returns: 0.004750701 0.005754032 0.008068322

## Component: 1
## Estimates: 0.000312 0.079193 0.853365
## se.coef : 0.00017 0.029981 0.061606
## t-value : 1.835401 2.641449 13.85207

## Component: 2
## Estimates: 7.6e-05 0.130926 0.837202
## se.coef : 3.1e-05 0.028839 0.028317
## t-value : 2.473626 4.539847 29.56503

## Component: 3
## Estimates: 0.000198 0.099631 0.841007
## se.coef : 6.4e-05 0.02087 0.029912
## t-value : 3.083246 4.773815 28.1157

logp1=m1$sresi
Vol=m1$marVol
```

```

m2=dccFit(logp1)

## Estimates:  0.7247404 0.03971838 7.644158
## st.errors:  0.1685669 0.02140445 0.9785622
## t-values:   4.299422 1.855613 7.811621

S2.t=m2$rho.t
m3=dccFit(logp1,type="Engle")

## Estimates:  0.9195184 0.03189651 7.948253
## st.errors:  0.03574407 0.01148676 1.06213
## t-values:   25.72506 2.776807 7.483314

```

Jednadžba srednje vrijednosti je  $\hat{\mu}_t = \hat{\mu} = (0.0048, 0, 0058, 0, 0081)^T$ .

Tri procijenjena GARCH(1,1) za IBM, S&P 500 i KO povrate, redom:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,t} &= 3.12 \times 10^{-4} + 0.079 a_{1,t-1}^2 + 0.853 \sigma_{11,t-1}, \\ \sigma_{22,t} &= 7.6 \times 10^{-5} + 0.130 a_{2,t-1}^2 + 0.837 \sigma_{22,t-1}, \\ \sigma_{33,t} &= 1.98 \times 10^{-4} + 0.099 a_{3,t-1}^2 + 0.841 \sigma_{33,t-1}.\end{aligned}$$

Procijenjeni DCC model Tsea i Tsuija iz (4.4) je

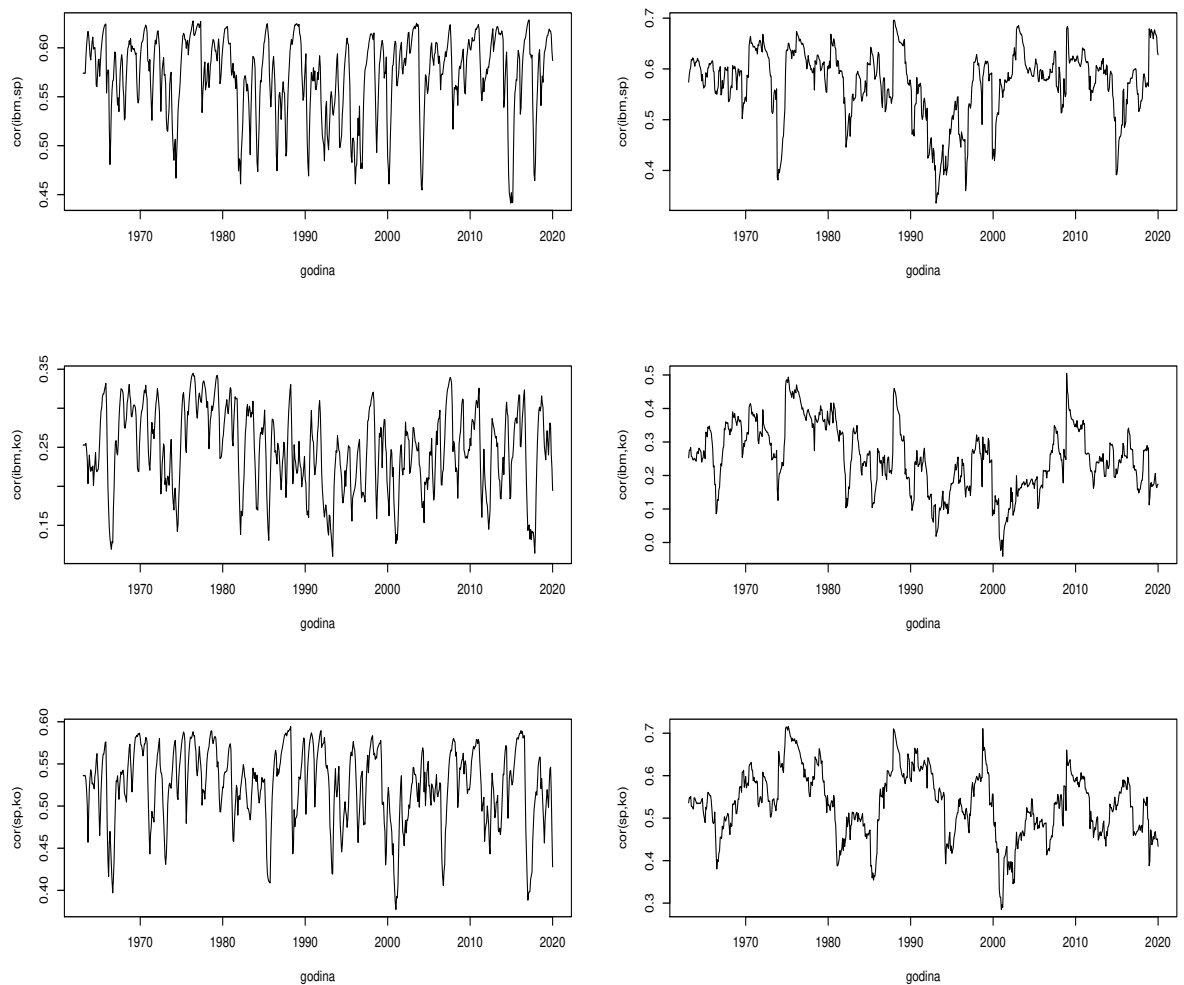
$$\rho_t = (1 - 0.7247 - 0.0397)\bar{\rho} + 0.7247 \rho_{t-1} + 0.0397 \psi_{t-1}, \quad (4.5)$$

gdje je  $\psi_{t-1}$  uzoračka matrica korelacija od  $\{\hat{\eta}_{t-1}, \dots, \hat{\eta}_{t-4}\}$  s tim da je  $m = k + 1 = 4$  i  $\bar{\rho}$  je uzoračka matrica korelacija od  $\hat{\eta}_t$ .

Procijenjeni Engleov DCC model iz (4.2) je

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_t &= (1 - 0.9195 - 0.0319)\bar{\rho} + 0.9195 \mathbf{Q}_{t-1} + 0.0319 \hat{\eta}_{t-1} \hat{\eta}_{t-1}^T, \\ \rho_t &= \mathbf{J}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{J}_t,\end{aligned} \quad (4.6)$$

gdje je  $\mathbf{J}_t = \text{diag}\{q_{11,t}^{-1/2}, q_{22,t}^{-1/2}, q_{33,t}^{-1/2}\}$ , s tim da je  $q_{ii,t}$   $i$ -ti element od  $\mathbf{Q}_t$  i  $\bar{\rho}$  definiran u (4.5).



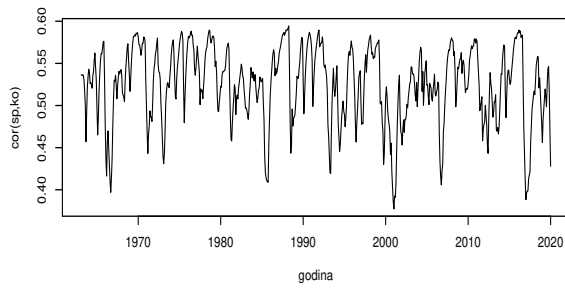
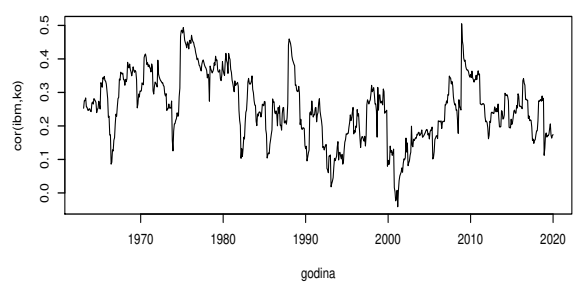
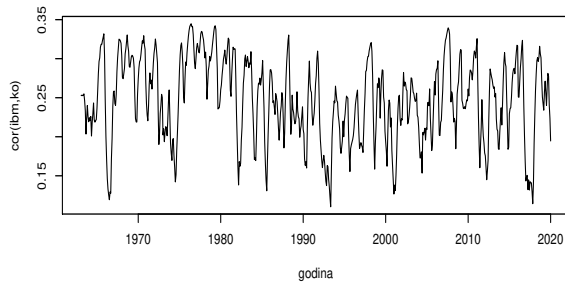
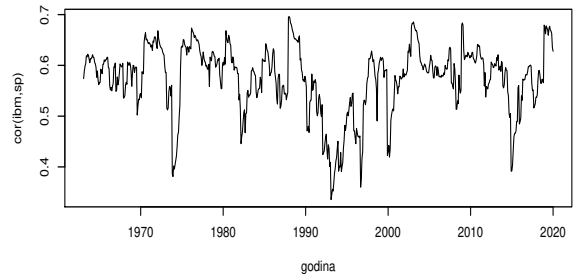
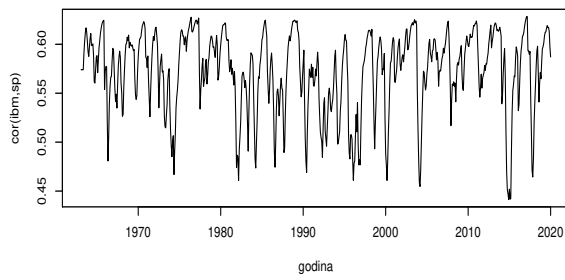
Slika 4.1: Procijenjene vremenski varirajuće korelacije mjesečnih log-povrata IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju o siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine; lijevo su prikazane procijenjene korelacije iz DCC modela Tsea i Tsuija, desno su prikazane procijenjene korelacije Engleovog DCC modela.

Tablica 4.1: Sažetak vremenski varirajućih korelacija

Tse i Tsui			
statistike	(ibm,sp)	(ibm,ko)	(sp,ko)
minimum	0.441	0.110	0.377
srednja vrijednost	0.580	0.249	0.524
maksimum	0.628	0.345	0.594
Engle			
statistike	(ibm,sp)	(ibm,ko)	(sp,ko)
minimum	0.336	-0.041	0.285
srednja vrijednost	0.589	0.254	0.532
maksimum	0.696	0.505	0.716

Pomoću slike (4.1) na kojoj su prikazane procijenjene vremenski varirajuće korelacije mjesečnih log-povrata IBM dionice, S&P indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine možemo usporediti korelacije dva spomenuta DCC modela. Lijevo su prikazane procijenjene korelacije DCC modela u (4.5), dok su desno prikazane procijenjene korelacije Engleovog DCC modela (4.6). Grafovi ukazuju kako su korelacije Engleov modela više varijabilne. U tablici 4.1 možemo vidjeti kako su srednje vrijednosti procijenjenih korelacija približno jednake, no rasponi se razlikuju, što također ukazuje da je Engleov DCC model više varijabilan. Dakle, u praksi bi trebali uzeti oba modela u obzir.

Za provjere valjanosti modela, računamo testne statistike iz Poglavlja 1 za  $\hat{\eta}_t$  koristeći procijenjene vremenski varirajuće matrice korelacija. Sve četiri  $p$ -vrijednosti oba modela ukazuju na dodatnu uvjetnu heteroskedastičnost, što nije neuobičajeno zato što dijagnostički testovi često odbacuju procijenjene DCC modele. U tom je slučaju potrebno uzeti u obzir neki drugi model, slično kao i kod EWMA modela.





# Poglavlje 5

## Go-GARCH model

### 5.1 Specifikacija modela

Ortogonalni GARCH (O-GARCH) model kojeg je uveo Alexander [1] bio je popularan model za procjenu volatilnosti financijskih podataka prije svega zato što je primjenjiv za velike matrice uvjetnih kovarijanci. O-GARCH model pretpostavlja da se opaženi podaci mogu prikazati kao linearna kombinacija nekoreliranih komponenti, s time da je veza među njima ortogonalna matrica. Kako je pretpostavka ortogonalnosti podosta ograničavajuća van der Weide [21] uvodi generalizirani ortogonalni GARCH model koji pretpostavlja da je spomenuta veza bila koja matrica koja ima inverz. Razvio je analizu nezavisnih komponenti (eng. *independent component analysis*) metodu, kraće ICA.

Pretpostavljamo da za  $k$ -dimenzionalnu inovaciju  $\mathbf{a}_t$  postoji nesingularna matrica  $\mathbf{M}$  tako

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{Z}\mathbf{b}_t, \quad (5.1)$$

gdje su komponente u  $\mathbf{b}_t$  međusobno nezavisne. Drugim riječima, matrica  $\mathbf{Z}$  predstavlja linearnu vezu između procesa kojeg možemo opaziti  $\mathbf{a}_t$  i onog kojeg ne možemo opaziti  $\mathbf{b}_t$ . Cilj ICA metode je procijeniti matricu  $\mathbf{Z}^{-1}$  i  $b_{it}$  za svaki  $i = 1, \dots, k$  tako da su komponente  $b_{it}$  međusobno nezavisne što je više moguće.

Ključne pretpostavke Go-GARCH modela su da je matrica transformacije  $\mathbf{Z}$  konstantna i da je matrica kovarijanci  $\mathbf{V}_t$  od  $\mathbf{b}_t$  dijagonalna za svaki  $t$ . Svaka se komponenta  $b_{it}$  procjenjuje GARCH(1,1) modelom:

$$\mathbf{V}_t = \text{diag}\{\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{kt}^2\}, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 b_{i,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{i,t-1}^2, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.3)$$

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je matrica kovarijanci od  $\mathbf{b}_t$  jedinična matrica  $\mathbf{I}_k$ .

Iz (5.1) tada slijedi da je matrica kovarijanci od  $\mathbf{a}_t$  dana s

$$\boldsymbol{\Sigma} := \text{cov}(\mathbf{a}_t) = \mathbb{E}(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t^T) = \mathbf{Z} \text{cov}(\mathbf{b}_t) \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T.$$

Ova veza je korisna ako želimo procijeniti  $\mathbf{Z}$ . Međutim iz te veze slijedi da matrica transformacije  $\mathbf{Z}$  nije jedinstvena zato što za svaku  $k \times k$  ortogonalnu matricu  $\mathbf{U}$  za koju vrijedi  $\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_k$  imamo  $\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{Z} \mathbf{U})(\mathbf{Z} \mathbf{U})^T$ .

Uz navedene pretpostavke, matrica volatilnosti od  $\mathbf{a}_t$  je oblika

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{Z} \mathbf{V}_t \mathbf{Z}^T, \quad (5.4)$$

gdje je  $\mathbf{V}_t$  matrica volatilnosti od  $\mathbf{b}_t$ , tj.  $\mathbf{V}_t = \text{cov}(\mathbf{b}_t | \mathcal{F}_{t-1})$ .

Neka je  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{P}^T$  spektralna dekompozicija matrice<sup>1</sup> kovarijanci od  $\mathbf{a}_t$ . Iz dekompozicije singularnih vrijednosti (SVD) [10] slijedi da postoji ortogonalna matrica  $\mathbf{U}$  tako da vrijedi  $\mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U} = \mathbf{Z}$ . Iz prethodne tvrdnje vrijedi

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{P}^T = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T.$$

Dakle za procjenu od  $\mathbf{Z}$ , potrebna nam je ortogonalna matrica  $\mathbf{U}$  koju možemo odabrati tako da vrijedi  $\det(\mathbf{U}) = 1$  i dekomponirati ju kao u sljedećoj tvrdnji. Svaku  $k$ -dimenzionalnu ortogonalnu matricu  $\mathbf{U}$  za koju vrijedi  $\det(\mathbf{U}) = 1$  možemo napisati kao produkt  $k(k+1)/2$  matrica rotacije:

$$\mathbf{U} = \prod_{i < j} \mathbf{R}_{ij}(\theta_{ij}), \quad -\pi \leq \theta_{ij} \leq \pi,$$

gdje  $\mathbf{R}_{ij}(\theta_{ij})$  predstavlja rotaciju u ravnini razapetoj s  $\mathbf{e}_i$  i  $\mathbf{e}_j$  za kut  $\theta_{ij}$ , s  $\mathbf{e}_i$  je označen  $i$ -ti stupac od  $\mathbf{I}_k$ .

Givensovu matricu rotacije  $\mathbf{R}_{ij}(\theta_{ij})$  konstruiramo tako da u  $k \times k$  jediničnoj matrici umjesto  $(i, i)$ -tog i  $(j, j)$ -tog elementa pišemo  $\cos(\theta_{ij})$ , umjesto  $(j, i)$ -tog elementa  $\sin(\theta_{ij})$  i umjesto  $(i, j)$ -tog elementa  $-\sin(\theta_{ij})$ .

## 5.2 Primjer

Na mjesečne log-povrate IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice primjenjujemo Go-GARCH(1,1) model koristeći ICA metodu. Definiramo  $\mathbf{z}_t$  kao u Primjeru 2.2. Koristimo gogarch paket [14]. Metoda procjene koju koristimo naziva se ica.

<sup>1</sup>Za definiciju vidjeti Dodatak A.

```
library(gogarch)

clogp=scale(logp,center=T,scale=F)
m1=gogarch(clogp,~garch(1,1),estby="ica")

m1

##
## *****
## *** GO-GARCH ***
## *****
##
## Components estimated by: fast ICA
## Dimension of data matrix: (684 x 3).
## Formula for component GARCH models: ~ garch(1, 1)
##
## Orthogonal Matrix U:
##           [,1]      [,2]      [,3]
## [1,]  0.5011571 -0.7544420 -0.4238619
## [2,] -0.3144381 -0.6150936  0.7230411
## [3,]  0.8062073  0.2290788  0.5454839
##
## Linear Map Z:
##           [,1]      [,2]      [,3]
## [1,]  0.033138733 -0.0581757785 -0.01330545
## [2,]  0.007024374 -0.0315487151  0.02731765
## [3,]  0.044964606  0.0002649712  0.03822585
##
## Estimated GARCH coefficients:
##           omega    alpha1    beta1
## y1  0.03648425  0.1026944  0.8582309
## y2  0.08834536  0.0651610  0.9071177
## y3  0.38153565  0.1379016  0.7104196
##
## Convergence codes of component GARCH models:
## y1 y2 y3
##  1  1  1
```

```

sigma.t=NULL
for (i in 1:684){
sigma.t=rbind(sigma.t,c(m1@H[[i]]))
}
MCHdiag(clogp,sigma.t)

## Test results:
## Q(m) of et:
## Test and p-value: 21.82623 0.01601476
## Rank-based test:
## Test and p-value: 25.22823 0.004929283
## Qk(m) of epsilon_t:
## Test and p-value: 151.7043 5.156157e-05
## Robust Qk(m):
## Test and p-value: 114.6898 0.04063813

M=m1@Z
Minv=solve(M)
bt=clogp%%t(Minv)
cor(bt^2)

##          [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 1.00000000 0.09347845 0.2054779
## [2,] 0.09347845 1.00000000 0.3324913
## [3,] 0.20547787 0.33249129 1.0000000

```

Matrica transformacije glasi

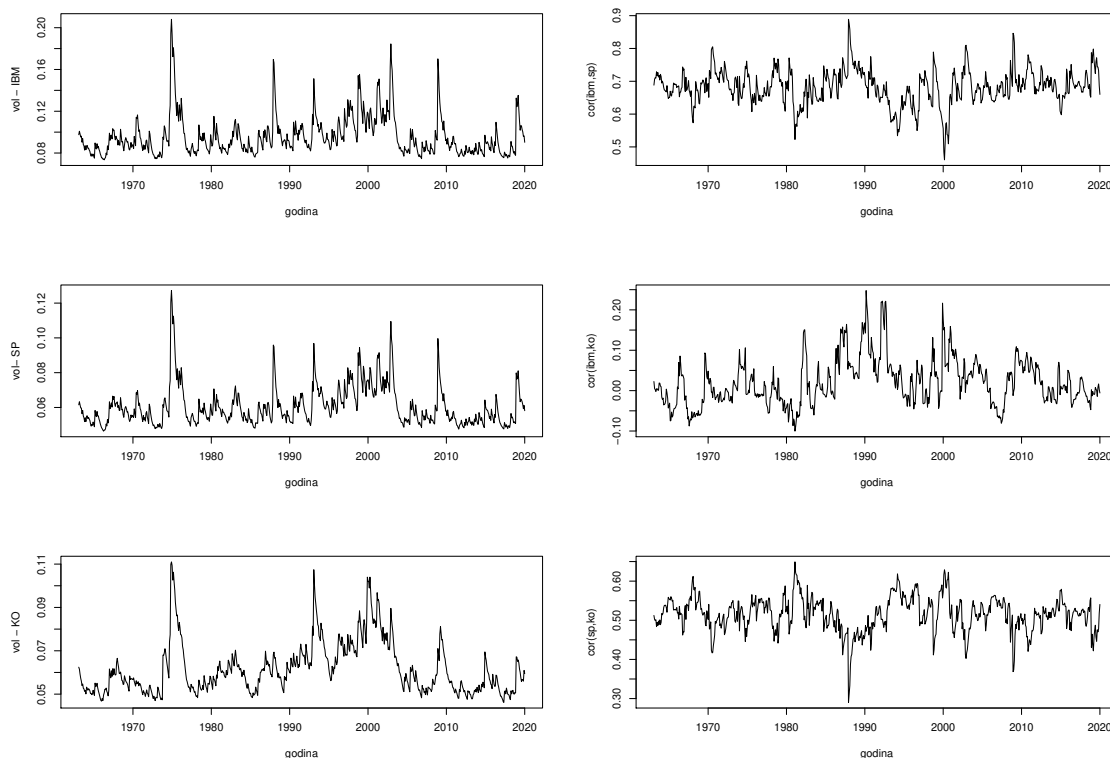
$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0.0331 & -0.0582 & -0.0133 \\ 0.0070 & -0.0315 & 0.0273 \\ 0.0450 & 0.0003 & 0.0378 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

i GARCH(1,1) modeli za varijable  $b_{it}$  su dani s

$$\sigma_{1t}^2 = 0.0364 + 0.1027 b_{1,t-1}^2 + 0.8582 \sigma_{1,t-1}^2,$$

$$\sigma_{2t}^2 = 0.0883 + 0.0652 b_{2,t-1}^2 + 0.9071 \sigma_{2,t-1}^2,$$

$$\sigma_{3t}^2 = 0.3815 + 0.1379 b_{3,t-1}^2 + 0.7104 \sigma_{3,t-1}^2.$$



Slika 5.1: Procijenjene volatilnosti (lijevo) i vremenski varirajuće korelacije (desno) mjesčnih povrata IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. do prosinca 2019. godine primjenom Go-GARCH modela.

Na lijevoj strani slike 5.1 prikazane su procijenjene volatilnosti IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Na istoj su slici desno prikazane procijenjene korelacije za isto razdoblje. Primijetimo da su se vrijednosti volatilnosti približno kretale zajedno, ali da serija volatilnosti IBM dionice poprima veće vrijednosti volatilnosti od preostale dvije vremenske serije. Također možemo primijetiti da je koeficijent korelacije između IBM dionice i S&P 500 indeksa uglavnom veći je od preostala dva koeficijenta. Nadalje, možemo uočiti da se procijenjene korelacije znatno razlikuju od onih dobivenih primjenom DCC modela.

Prema četiri testne statistike i pripadnim  $p$ -vrijednostima inovacije procijenjenog Go-

GARCH modela i dalje su jako heteroskedastične, što smo i očekivali jer su neki koeficijenti korelacije kvadrata transformiranih varijabli  $b_{it}$  i dalje dosta veći od nule. Primjerice,  $\text{cor}(b_{2t}^2, b_{3t}^2)=0.332$ . Ovakav se rezultat često dobiva ako uzmemo u obzir i neku drugu metodu procjene.

# Dodatak A

## Pojmovi iz linearne algebre

### A.1 Pozitivna definitnost i kvadratni korijen matrice

Kvadratna matrica  $\mathbf{A}_{n \times n}$  je **pozitivno definitna** ako je simetrična i ako su joj sve svojstvene vrijednosti pozitivne. Alternativno, matrica  $\mathbf{A}$  je pozitivno definitna ako za svaki vektor  $\mathbf{x} \neq 0$  vrijedi  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ .

Svojstva koja slijede iz pozitivne definitnosti su (1) sve svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}$  su realne i pozitivne, i (2) matrica  $\mathbf{A}$  se može dekomponirati kao

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T, \quad (\text{A.1})$$

gdje je  $\mathbf{\Lambda}$  dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti od  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{P}$  je ortonormirana matrica svojstvenih vektora od  $\mathbf{A}$ , tj.  $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}_n$ . Vrijedi  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ . Dekompoziciju iz (A.1) možemo napisati kao

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T,$$

i često ju nazivamo **spektralna dekompozicija** matrice  $\mathbf{A}$ .

Može se pokazati da vrijedi  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{P}^T$ .

Pomoću spektralne dekompozicije možemo izračunati kvadratni korijen matrice  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{P}^T.$$

Posebno, imamo

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{P}^T = \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{A}^{1/2}.$$

Svojstva matrice  $\mathbf{A}^{1/2}$  su

1.  $\mathbf{A}^{1/2}$  je simetrična,
2.  $(\mathbf{A}^{1/2})^{-1} = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}^T)^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{P}^T = \sum_{i=1}^n (1/\sqrt{\lambda_i})e_i e_i^T = \mathbf{A}^{-1/2}$ .

## A.2 Vektorizacija i Kroneckerov produkt

Matricu  $\mathbf{A}$  dimenzija  $m \times n$  zapišimo pomoću njezinih redaka kao  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  i definirajmo  $mn \times 1$  vektor  $vec(\mathbf{A}) = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_n^T)^T$ . Za matrice  $\mathbf{A}_{m \times n}$  i  $\mathbf{C}_{p \times q}$ , Kroneckerov produkt od  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{C}$  je

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{C} & a_{12}\mathbf{C} & \cdots & a_{1n}\mathbf{C} \\ a_{21}\mathbf{C} & a_{22}\mathbf{C} & \cdots & a_{2n}\mathbf{C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{C} & a_{m2}\mathbf{C} & \cdots & a_{mn}\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Primjer 1. Neka su matrice  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  i  $\mathbf{C}_{2 \times 3}$  dane s

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tada je  $vec(\mathbf{A}) = (2, -1, 1, 3)^T$ ,  $vec(\mathbf{C}) = (4, -2, -1, 5, 3, 2)^T$  i

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 & 4 & -1 & 3 \\ -4 & 10 & 4 & -2 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -3 & 12 & -3 & 9 \\ 2 & -5 & -2 & -6 & 15 & 6 \end{bmatrix}.$$



# Bibliografija

- [1] C. Alexander, *Orthogonal GARCH*, In C. Alexander (ed.), *Mastering Risk: Volume 2: Applications*, Financial Times Management, London, 2001.
- [2] T. Bollerslev, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, *Journal of Econometrics*, **31** (1986), 307-327.
- [3] T. Bollerslev, *Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model*. *The Review of Economics and Statistics*, **72** (1999), 498–505.
- [4] T. Bollerslev, R. Engle, J. Wooldrige, *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances*, *Journal of Political Economy*, **96** (1988), 116–131.
- [5] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. and Reinsel, G.M. Ljung, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2016.
- [6] J. M. Dufour, R. Roy, *Generalized portmanteau statistics and tests of randomness*, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **15** (1986), 2953-2972.
- [7] R. F. Engle, *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations*, *Econometrica*, **50** (1982), 987–1007.
- [8] R. F. Engle, *Dynamic conditional correlations: a simple class of multivariate GARCH models*, *Journal of Business and Economic Statistics*, **17** (2002), 549–564.
- [9] R. F. Engle, K. F. Kroner, *Multivariate simultaneous generalized ARCH*, *Econometric Theory*, **11** (1995), 122–150.
- [10] R. Horn , C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press: Cambridge, 1999.
- [11] H. Lopes, R. E. McCulloch, R. S. Tsay, *Parsimony-inducing priors for large scale state-space models*, Working Paper, Booth School of Business, University of Chicago, 2013.

- [12] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Chicago, IL, 1980.
- [13] D. S. Matteson, R. S. Tsay, *Dynamic orthogonal components for multivariate time series*, Journal of the American Statistical Association, **106** (2011), 1450-1463.
- [14] B. Pfaff, gogarch: Generalized Orthogonal GARCH (GO-GARCH) models, 2012, dostupno na <https://cran.r-project.org/web/packages/gogarch/index.html> (srpanj 2020.)
- [15] R Core Team, R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020, dostupno na <https://www.R-project.org/> (srpanj 2020.)
- [16] D. Ruppert, D. S. Matteson, *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering with R Examples*, Springer, New York, 2015.
- [17] R. S. Tsay, *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New York, 2010.
- [18] R. S. Tsay, *Multivariate Time Series Analysis With R and Financial Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New York, 2014.
- [19] R. S. Tsay, D. Wood, All-Purpose Toolkit for Analyzing Multivariate Time Series (MTS) and Estimating Multivariate Volatility Models, 2018, dostupno na <https://cran.r-project.org/web/packages/MTS/index.html> (srpanj 2020.)
- [20] Y. K. Tse , A. K. C. Tsui, *A multivariate GARCH model with time-varying correlations*, Journal of Business and Economic Statistics, **20** (2002), 351-362.
- [21] R. Van der Weide, *A multivariate generalized orthogonal GARCH model*, **17** (2002) Journal of Applied Econometrics, 549-564.
- [22] N. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representation, translations of mathematical monographs*, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1968.
- [23] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje 1: skripta s predavanja*, Zagreb, 2016, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/fm-p2.pdf> (srpanj 2020.)

- [24] D. Wuertz, Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modelling, dostupno na <https://cran.r-project.org/web/packages/fGarch/index.html> (srpanj 2020.)
- [25] Yahoo Finance, dostupno na <https://finance.yahoo.com/> (srpanj 2020.)

# Sažetak

U ovom su radu predstavljeni neki od modela koji procjenjuju vremenski promjenjive volatilnosti i korelacije multivarijatnih vremenskih serija. Za demonstraciju koristimo mjesečne log-povrate IBM dionice, S&P 500 indeksa i Coca Cola dionice u razdoblju od siječnja 1963. godine do prosinca 2019. godine. Cilj analize multivarijatnih vremenskih serija je korištenjem stvarnih podataka više vremenskih serija procijeniti valjani model i proučiti međusobnu povezanost tih serija.

Uvodimo osnovna svojstva ARCH i GARCH modela. GARCH modeli se primjenjuju u (financijskim) vremenskim serijama zato što pretpostavljaju da one imaju vremenski promjenjivu varijancu. Dodatni je razlog procjene korištenjem GARCH modela taj što financijske vremenske serije kao što su povrati pokazuju svojstvo grupiranja volatilnosti, što znači da vremenske serije imaju periode visoke i niske volatilnosti. Na procjenu EWMA modela i Modela dinamičke uvjetne korelacije (DCC) utječu jedan ili dva parametra te se zato često odbacuju dijagnostičkim provjerama. Jednostavni BEKK (Baba-Engle-Kraft-Kroner) model pruža općenit postupak za modeliranje multivarijatne volatilnosti, ali se susreće s poteškoćama u procjeni već za mali broj vremenskih serija. Također uvodimo postupak za modeliranje koji koristi Choleskyjevu dekompoziciju. Naposljetku, promatramo Go-GARCH model koji je prikladan i za velik broj vremenskih serija.

# Summary

In this paper, we present some models that explain how one estimates time-varying volatilities and correlations of multivariate time series. For demonstration, we consider monthly log-returns of IBM stock, S&P 500 index, and Coca Cola stock from January 1963 to December 2019. The objective of multivariate time series analysis is to study the past observations of a multiple time series to fit an adequate model that describes how the time series are interrelated.

We give a brief description of the univariate ARCH and GARCH models. GARCH models are used in financial time series because they have time-varying variance. An additional reason for using GARCH models is a feature of time series called volatility clustering. Financial time series such as stock returns often exhibit volatility clustering, where time series show periods of high volatility and periods of low volatility. Models such as the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) model and Dynamic Conditional Correlation (DCC) model are extremely parsimonious because they estimate only one or two parameters. For that reason, they tend to be rejected by diagnostic checks. The simple Baba-Engle-Kraft-Kroner (BEKK) model provides a general framework for estimating time-varying volatilities but encounters some difficulties in practice when the number of time series is large. We also give a procedure for multivariate volatility modeling using Cholesky decomposition. Finally, we employ the Go-GARCH model which is suitable for a large number of time series.

# Životopis

Rođena sam 8. svibnja 1995. godine u Zagrebu, Hrvatska. Nakon završene Osnovne škole Sveta Nedelja, srednjoškolsko obrazovanje nastavljam u V. gimnaziji u Zagrebu. Godine 2014. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Titulu prvostupnika matematike stekla sam 2018. godine. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.