Grupe ornamenata i njihova primjena u nastavi geometrije

Dolčić, Martina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Dolčić

GRUPE ORNAMENATA I NJIHOVA PRIMJENA U NASTAVI GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Često se zna dogoditi da u prirodi primijetimo neke uzorke koji nam privuku pažnju upravo zbog svoje istaknute simetrije. Primjerice, to mogu biti krila leptira, pčelinje saće, cvijeće ili pahuljica snijega.
U ljudskoj praksi oduvijek je bila prisutna potreba za razvojem umjetnosti, estetike i sklada. S time se javlja i težnja da se umjetnost sjedini s geometrijskim znanjem. Već u drevnim civilizacijama nailazimo na upotrebu simetrije i traganje za mogućnostima ukrašavanja neke površine uzorcima. Razvojem civilizacije, razvijala se i ljudska potreba za istraživanjem i nadograđivanjem postojećeg načina ukrašavanja interijera, eksterijera, posuđa, odjeće, nakita...
To pokazuje da potraga za uzorcima nije tipična samo za matematičare. Tako je došlo do pojave umjetnosti koja se koristi pravilnim geometrijskim oblicima. Unatoč tome što se često smatralo da su matematika i umjetnost dva nespojiva područja, njihovim sjedinjavanjem nastaju mnoga zanimljiva postignuća, kako u umjetnosti tako i u matematici.
Promotrimo li kroz vrijeme elemente ukrašavanja koje su koristili umjetnici i arhitekti, možemo primijetiti uzorke čija se struktura ponavlja u jednom smjeru. Jedan od osnovnih elemenata ukrašavanja u likovnoj umjetnosti, arhitekturi i primijenjenoj umjetnosti nazivamo ornament. Razne primjerke ornamenata formirane ponavljanjem nekog uzorka ili motiva možemo susresti na starim zgradama, keramičkim posudama, nakitu i slično. Njihova ljepota sastoji se u nizanju motiva koji su često uklesani, rezani ili naslikani. Zbog svoje istaknute simetrije, ornamenti su zanimljivi i za matematičko proučavanje.
Ornamente u matematici gledamo kao geometrijske beskonačne ravninske uzorke čija se struktura ponavlja u jednom smjeru. Njihove simetrije mogu se organizirati u grupe, te se pokazuje da se ornamenti mogu klasificirati u sedam skupina s obzirom na njihove grupe simetrija.
Cilj ovog diplomskog rada je proučiti grupe simetrija ornamenata, te osmisliti mogućnosti za njihovo proučavanje u nastavi geometrije u osnovnoj i srednjoj školi. S obzirom da ornamenti nisu dio redovnog nastavnog sadržaja, potrebno je pronaći načine na koje bi se primjereno predstavili učenicima i kako bi iskoristili neka njihova svojstva pri predstavljanju redovitog nastavnog sadržaja. U tome nam uvelike pomaže istraživačka nastava koja u današnje vrijeme sve više zamjenjuje klasičnu frontalnu nastavu. Stoga ćemo promotriti

mogućnosti upotrebe ornamenata kroz aktivnosti koje izbjegavaju tradicionalne rutinske metode i potiču učenike na logično razmišljanje, zaključivanje i povezivanje postojećeg znanja ili pak usvajanje novih matematičkih koncepata.

Poglavlje 1

Matematički pojmovi

1.1 Izometrije ravnine

Kako bi grupe ornamenata mogli promatrati s matematičkog gledišta, prvo ćemo definirati neke od pojmova koji su nam nužni za njihovo razmatranje. S izometrijom ravnine učenici se susreću već u osnovnoj školi. Naravno, tada ju nije primjereno formalno definirati, no pojavljuju se pojmovi translacije, osne simetrije, centralne simetrije i rotacije. Kroz brojne primjere učenici usvajaju koncept preslikavanja ravnine, dok formalna definicija slijedi na nešto višoj razini obrazovanja. **Euklidska ravnina** (ili kraće **ravnina**) je skup M čije elemente nazivamo točkama, a neke njene istaknute podskupove pravcima. Objekti ravnine zadovoljavaju sljedeći aksiom metrike.

Aksiom 1.1.1. *Neka je M skup te neka za funkciju $d : M \times M \to \mathbb{R}$ vrijedi:*

M1. $d(A, B) \geq 0$*,* $A, B \in M$

M2. $d(AB) = 0$ *ako i samo ako je* $A = B$

M3. $d(A, B) = d(B, A)$*,* $A, B \in M$

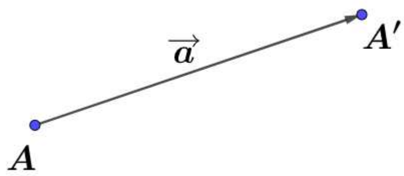
M4. $d(A, B) \leq d(A,C) + d(C, B)$*,* $A, B \in M$

M5. Za svaki polupravac (Ou) s vrhom u O i za svaki realni broj $x > 0$ *postoji (jedinstvena) točka T na tom polupravcu takva da je* $d(O, T) = x$*.*

Tada funkciju d zovemo ***metrika*** *na M. Kažemo da je uređeni par* (M, d) *sa svojstvima M1.-M5. metrički prostor.*

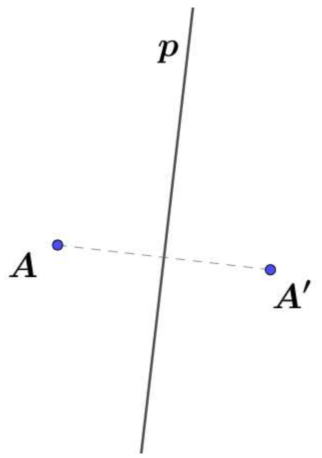
Definicija 1.1.1. *Izometrija ravnine M je bijektivno preslikavanje* $f : M \to M$ *sa svojstvom* $d(A, B) = d(f(A), f(B))$*, za svaki* $A, B \in M$*.*

Definicija 1.1.2. *Translacija ravnine M za vektor $\overrightarrow{a}$ je preslikavanje $t_{\overrightarrow{a}} : M \rightarrow M$ koje točki $A \in M$ pridružuje točku $A' \in M$, pri čemu vrijedi $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a}$.*



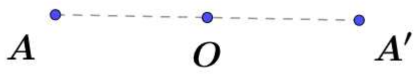
Slika 1.1: Translacija

Definicija 1.1.3. *Osna simetrija ravnine M s obzirom na pravac p je preslikavanje $s_p : M \rightarrow M$ koje točki $A \in M$, $A \notin p$ pridružuje točku $A' \in M$ tako da je pravac p simetrala dužine $\overline{AA'}$. Ako je $A \in p$, tada je $A = A'$*
Pravac p naziva se os simetrije.



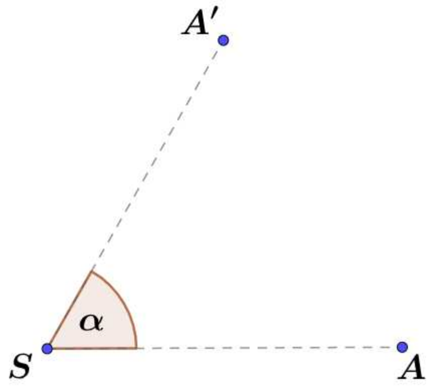
Slika 1.2: Osna simetrija

Definicija 1.1.4. *Centralna simetrija ravnine M s obzirom na točku $O \in M$ je preslikavanje $s_o : M \rightarrow M$ koje točki $A \in M$ pridružuje točku $A' \in M$ tako da je točka O polovište dužine $\overline{AA'}$.*
Točka O naziva se središte ili centar simetrije.



Slika 1.3: Centralna simetrija

Definicija 1.1.5. *Neka je S čvrsta točka ravnine M i α zadani kut. Preslikavanje ravnine koje svakoj točki A pridružuje točku A' tako da vrijedi $|SA| = |SA'|$ i $|\sphericalangle ASA'| = \alpha$ naziva se rotacija ravnine u pozitivnom smjeru oko točke S za kut α.*
Točka S naziva se središte ili centar rotacije, a kut α kut rotacije.



Slika 1.4: Rotacija

Pogledajmo kakva svojstva imaju izometrije u odnosu na kompoziciju funkcija.

Teorem 1.1.6. *Neka su f i g izometrije. Kompozicija $f \circ g$ je također izometrija.*

Dokaz. $d((f \circ g)(A), (f \circ g)(B)) = d(f(g(A)), f(g(B))) =$ [f izometrija]$= d(g(A), g(B)) =$[g izometrija]$= d(A, B)$. □

Teorem 1.1.7. *Neka je f izometrija. Tada je njen inverz f^{-1} također izometrija.*

Dokaz. $d(A, B) = d(id(A), id(B)) = d((f \circ f^{-1})(A), (f \circ f^{-1})(B)) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) =$ [f izometrija]$= d(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$. □

Definicija 1.1.8. *Kažemo da je točka A fiksna točka izometrije f ako vrijedi $f(A) = A$.*

Definicija 1.1.9. *Kažemo da je pravac a fiksni pravac izometrije f ako vrijedi $f(a) = a$.*

Definicija 1.1.10. *Za izometriju f kažemo da je involutorna ako $f \neq id$ i $f \circ f = id$.*

Osim pojmova preslikavanja ravnine, trebaju nam i geometrijski objekti u ravnini.

Definicija 1.1.11. *Figura je svaki podskup ravnine M.*

Pogledajmo neka svojstva izometrija u odnosu na fiksnu figuru.

Teorem 1.1.12. *Neka je f izometrija.*

a) Sjecište dvaju fiksnih pravaca od f (ako postoji) je fiksna točka od f.

b) Spojnica dviju fiksnih točaka od f je fiksni pravac od f i taj pravac je fiksan po točkama.

c) Ako je f involutorna izometrija, onda točkom koja nije fiksna za f prolazi točno jedan pravac fiksan za f.

Sada možemo vidjeti još jedan način kako se definiraju translacija, rotacija, centralna i osna simetrija (vidi [14]). One nisu primjerene u školi, već ih koristimo kod aksiomatske izgradnje geometrije. Nadalje, temeljno preslikavanje koje definiramo je osna simetrija. Pomoću nje, definiramo i ostala preslikavanja.

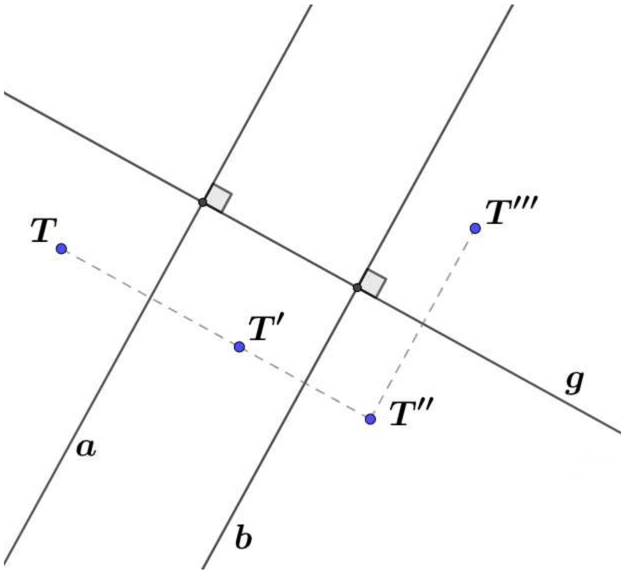
Definicija 1.1.13. *Involutorna izometrija kojoj su sve točke pravca p fiksne naziva se osna simetrija s obzirom na pravac p i označava sa s_p.*

Definicija 1.1.14. *Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo translacija ako su osi a i b paralelni pravci.*

Definicija 1.1.15. *Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo rotacija ako osi a i b nisu paralelni pravci.*

Definicija 1.1.16. *Involutorna izometrija kod koje su svi pravci kroz točku A fiksni naziva se centralna simetrija s centrom A.*

Definicija 1.1.17. *Izometrija koja se može prikazati u obliku kompozicije $s_g \circ s_b \circ s_a$, pri čemu je pravac g okomit na pravce a i b naziva se klizna simetrija s osi g.*



Slika 1.5: Klizna simetrija

Možemo uočiti da kompozicijom dviju osnih simetrija s obzirom na osi a i b dobivamo translaciju prema definiciji 1.1.14. Stoga kliznu simetriju možemo shvatiti još kao i kompoziciju translacije i osne simetrije s obzirom na os koja je paralelna smjeru vektora translacije.

Definicija 1.1.18. *Centralna simetrija sa središtem u točki O je rotacija oko točke O za* 180°.

1.2 Grupe simetrija

Definirat ćemo neke osnovne pojmove (vidi [15]) teorije grupa koje ćemo koristiti prilikom promatranja grupa ornamenata.

Definicija 1.2.1. *Neka je G neprazan skup i* $\cdot : G \times G \to G$ *binarna operacija. Uređen par* $(G, \cdot)$ *naziva se grupa ako su zadovoljena sljedeća svojstva:*

(asocijativnost) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\ x, y, z \in G$

(neutralni element) $(\exists\ e \in G)$*:* $\quad (e \cdot x = x \cdot e = x) \quad \forall\ x \in G$

(inverzni element) $(\forall\ x \in G)\ (\exists !\ x^{-1} \in G)$ *:* $\quad (x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e)$

Ako još i vrijedi svojstvo komutativnosti

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in G,$$

onda kažemo da je G **komutativna** ili **Abelova grupa**. U suprotnom govorimo o nekomutativnoj grupi.
U nastavku, operaciju $\cdot$ više ne pišemo.

Definicija 1.2.2. *Proizvoljan podskup* $A \subseteq G$*, gdje je G grupa nazivamo kompleks.*
Za proizvoljne $A, B \subseteq G$ *definiramo produkt tih kompleksa kao*

$$AB := \{ab \mid a \in A \ \&\ b \in B\}.$$

Definicija 1.2.3. *Kompleks* $H \subseteq G$ *je podgrupa od G ako je to ujedno i grupa za operaciju koja je definirana na G, odnosno ako vrijede sljedeći uvjeti:*

(1) $\forall\ x, y \in H$*:* $\quad xy \in H$*;*

(2) $\forall\ x \in H$*:* $\quad x^{-1} \in H$*.*

Činjenicu da je H podgrupa od G označavamo sa

$$H \leq G.$$

Definicija 1.2.4. *Ako je G grupa, njezin red definiramo kao*

$$|G| := card(G),$$

to jest, red grupe je kardinalni broj skupa G.
Kažemo da je G ***konačna grupa*** *ako je* $|G| < \infty$*. Inače je G* ***beskonačna grupa****.*

Definicija 1.2.5. *Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, \cdot)$ grupe. Preslikavanje $f : G \to H$ je* ***homomorfizam*** *grupa ako vrijedi*

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in G.$$

Označimo sa Hom(G,H):=skup svih homomorfizama iz G u H.

Nadalje, homomorfizam f koji je još i injekcija nazivamo **monomorfizam**, f koji je surjekcija nazivamo **epimorfizam**, a homomorfizam koji je bijektivan nazivamo **izomorfizam**.
Za grupe G i H kažemo da su izomorfne ako među njima postoji izomorfizam i to označavamo kao

$$G \cong H.$$

Posebno, ako je $G = H$, tada kažemo da je f **endomorfizam** od G. Skup svih endomorfizama od G označavamo sa $End(G)$.
Endomorfizam koji je još i bijekcija naziva se **automorfizam** od G i označava se sa $Aut(G)$.

Definicija 1.2.6. *Kažemo da je H ciklička grupa ako postoji $a \in H$ takav da je*

$$H = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Kažemo da je element a generator grupe H i koristimo zapis $H = \langle a \rangle$.

Primjer 1.2.7. *Abelova grupa $(\mathbb{Z}, +)$ je ciklička grupa generirana elementom $1 \in \mathbb{Z}$ jer je $n = n \cdot 1$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Također, i -1 generira navedenu grupu. Možemo primijetiti kako je $\mathbb{Z}$ primjer cikličke grupe beskonačnog reda.*

Teorem 1.2.8. *Neka je $(G, \cdot) = \langle a \rangle$ ciklička grupa. Ako je $|G| = \infty$, onda je G izomorfna grupi $(\mathbb{Z}, +)$.*

Dokaz. Preslikavanje $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G, f(k) = a^k$ je homomorfizam jer je

$$f(k + l) = a^{k+l} = a^k \cdot a^l = f(k) \cdot f(l).$$

Također, ovo preslikavanje je injekcija i surjekcija.
Dakle, grupa G je izomorfna grupi $(\mathbb{Z}, +)$. □

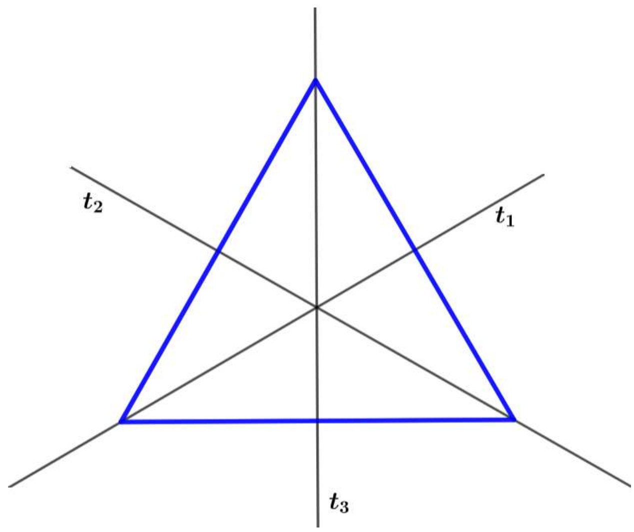
Kada govorimo o simetrijama neke figure, smatramo da je ona invarijantna na određene transformacije. Drugim riječima, figura posjeduje simetriju ako se kompozicijom određenih preslikavanja preslikava u samu sebe čime su očuvane međusobne udaljenosti točaka figure, odnosno preslikavanja su izometrije. Primjerice, kružnica je invarijantna na rotaciju oko središta, pa kažemo da kružnica ima rotacijsku simetriju. Analogno, simetrije možemo uočiti i na pravilnim poligonima.

Definicija 1.2.9. *Neka je $Iz(M)$ skup svih izometrija euklidske ravnine M. $Iz(M)$ zajedno s komponiranjem funkcija kao binarnom operacijom je grupa izometrija, u oznaci $(Iz(M), \circ)$.*

Teorem 1.2.10. *Neka je $Iz(F) = \{f \in Iz(M) : f(F) = F\}$, gdje je F figura Euklidske ravnine M. Tada je $(Iz(F), \circ)$ grupa simetrija figure F.*

Definicija 1.2.11. *Grupa simetrija pravilnog poligona P_n naziva se diedralna grupa D_n.*

Primjer 1.2.12. *Pogledajmo izometrije kojima se jednakostranični trokut preslikava u samog sebe.*
Očito, jednakostranični trokut posjeduje rotacijsku simetriju. Promatramo li rotacije u pozitivnom smjeru, postoje tri moguće rotacije dok su ostale njihovi višekratnici. To su rotacije oko težišta za $0°, 120°, 240°$.
Osim rotacije, jednakostranični trokut posjeduje i osnu simetriju. Osi simetrije su pravci na kojima leže visine, odnosno težišnice trokuta (jer se u jednakostraničnom trokutu one podudaraju). Označimo te osi sa t_1, t_2, t_3.



Slika 1.6: Simetrije jednakostraničnog trokuta

Komponirajmo sve navedene izometrije. Rezultat komponiranja prikazat ćemo pomoću tablice.

$\circ$	id	r	r_2	t_1	t_2	t_3
id	id	r	r_2	t_1	t_2	t_3
r	r	r_2	id	t_3	t_1	t_2
r_2	r_2	id	r	t_2	t_3	t_1
t_1	t_1	t_2	t_3	id	r	r_2
t_2	t_2	t_3	t_1	r_2	id	r
t_3	t_3	t_1	t_2	r	r_2	id

Kompozicijama izometrija jednakostraničnog trokuta koje ga preslikavaju u sebe samog dobivamo opet jednu od tih izometrija. Time smo pokazali da je grupa simetrija jednakostraničnog trokuta diedralna grupa D_3.

Dalje se slično mogu analizirati i simetrije ostalih pravilnih poligona. Općenito, o konačnim grupama izometrija govori sljedeći teorem.

Teorem 1.2.13. *(Leonardov teorem) Grupa simetrija pravilnog poligona je diedralna grupa D_n.*

1.3 Popločavanje ravnine

Definirajmo još popločavanje ravnine.

Definicija 1.3.1. *Popločavanje je razdioba (particija) ravnine na disjunktne skupove H_i, $i \in \mathbb{N}$ čija unija daje cijelu ravninu.*

Specifičnost uzorka ornamenta je u tome što ornament ne popločava cijelu ravninu, već prugu koja je dio ravnine omeđen dvama paralelnim pravcima. Od našeg interesa su oni ornamenti čiji se uzorak ponavlja duž pruge i možemo klasificirati njihove simetrije. Izometrijama dolazimo do neke osnovne figure koju translatiramo duž pruge po fiksnoj osi.

Upoznajmo se s pojmovima koje ćemo koristiti u kreiranju uzorka ornamenta.

• **Uzorak** u ravnini je figura. Uzorak preslikavamo u samog sebe i pomoću izometrija ravnine: rotacija, osnih simetrija, klizne simetrije, translacija.
• **Osnovni uzorak** je dio uzorka sa svojstvom da skup uzoraka u grupi izometrija prekriva ravninu. Drugim riječima, osnovnim uzorkom popločavamo ravninu, to jest u ovom slučaju prugu.

• **Generirajuće područje** je dio osnovnog uzorka čije slike u grupi simetrija uzorka popločavaju ravninu.

Pogledajmo navedene pojmove na primjeru sljedeće slike. Kao uzorak koristit ćemo slovo P koje ćemo preslikavati duž naznačene pruge.

Slika 1.7: Uzorak ornamenta

Uzorak P preslikan je osnom simetrijom s obzirom na os okomitu na pravce koji određuju prugu. Tu os nazivamo **vertikalna os**.

Uzorak zajedno sa svojom osnosimetričnom slikom čini osnovni uzorak koji je na slici 1.7 posebno istaknut u zelenom pravokutniku.

Unutrašnjost zelenog pravokutnika određuje generirajuće područje te se primjenom translacije beskonačno mnogo puta u smjeru pravaca koji određuju prugu stvara slika.

Poglavlje 2

Ornamenti

Uzorci ornamenata tradicionalno se mogu vidjeti kao ukrasi na zgradama, stepenicama, u arhitekturi, a također se mogu pojaviti u mnogim drugim formama, kao što su tepisi, ogrlice, tapete ili bilo koje mjesto u dekoraciji gdje je korišten repetitivni uzorak.

Slika 2.1: Ornament u dekoraciji

Ornament je dekorativna traka ili pruga koja sadrži slova, skulpture, slike i slično. S matematičkog gledišta, uzorak ornamenta promatrat ćemo na način da je omeđen prugom i podrazumijevat ćemo da se u smjeru pravaca koji određuju prugu proteže u beskonačnost.

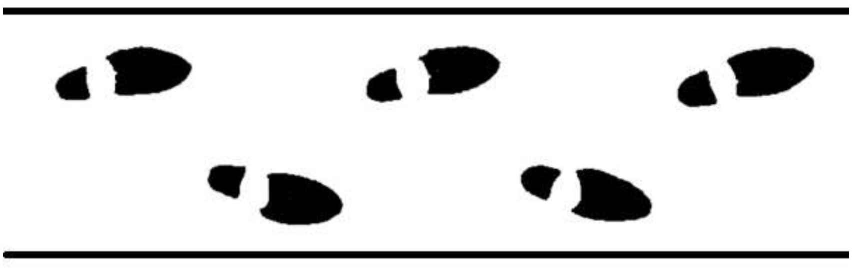
Slika 2.2: Ornament u grafici

Na slici 2.2 nalazi se primjer uzorka ornamenta slavnog grafičara M. C. Eschera [1]. Ovakav uzorak zamišljamo kako se proteže u beskonačnost.

S druge strane, od matematičkog interesa nisu nam ornamenti bez pojave simetrije. Kao primjer promotrimo sljedeću sliku.

Slika 2.3: Ornament bez simetrije

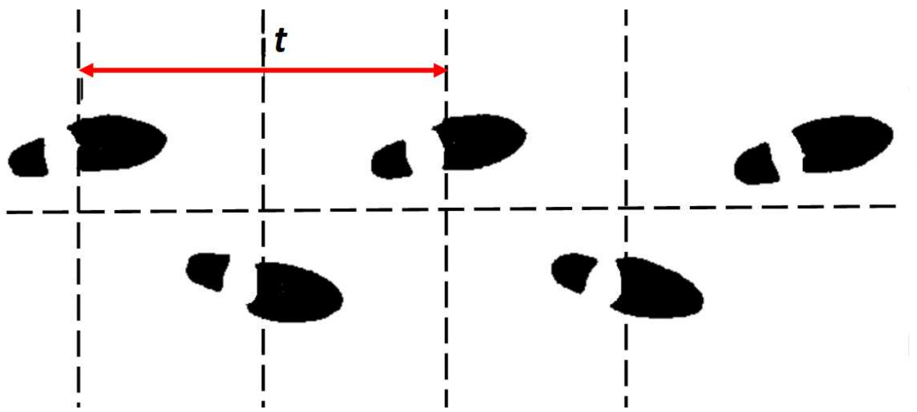
Bez obzira što prikazani reljef sa slike 2.3 smatramo ornamentom s umjetničkog gledišta, ne možemo reći da sadrži uzorak koji se ponavlja te ne posjeduje simetriju. Stoga ovakav ornament neće biti od našeg interesa u ovom radu.
Primijetimo kako u uzorcima ornamenata koje promatramo postoji neki osnovni motiv koji se translatira duž pruge i tako se ponavlja. To je upravo osnovni uzorak. Kao još jedan primjer možemo navesti ostiske stopala.



Slika 2.4: Otisci stopala

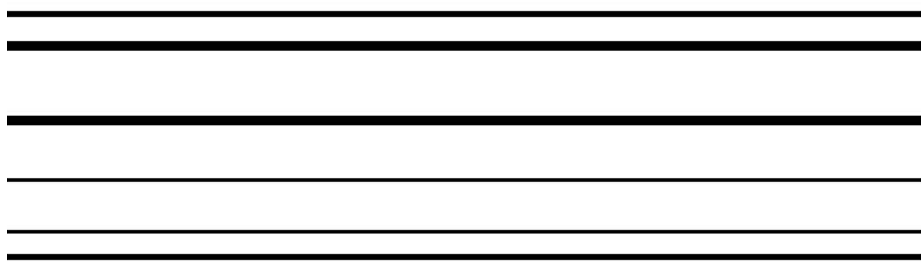
[1]Maurits Cornelis Escher (1898.-1972.), nizozemski grafičar čija inspiracija potječe iz srednjovjekovne palače Alhambre u Španjolskoj. Njegove grafike od posebnog su interesa za proučavanje matematičarima, a svoju primjenu pronalaze i u kristalografiji zbog načina na koji popločavaju ravninu.

Upravo osnovni uzorak koji se ponavlja duž pravca određuje nam **minimalni translacijski period**, koji ćemo ovdje označiti sa t. Njegova duljina određena je širinom generirajućeg područja osnovnog uzorka.



Slika 2.5: Otisci stopala- translacijski period

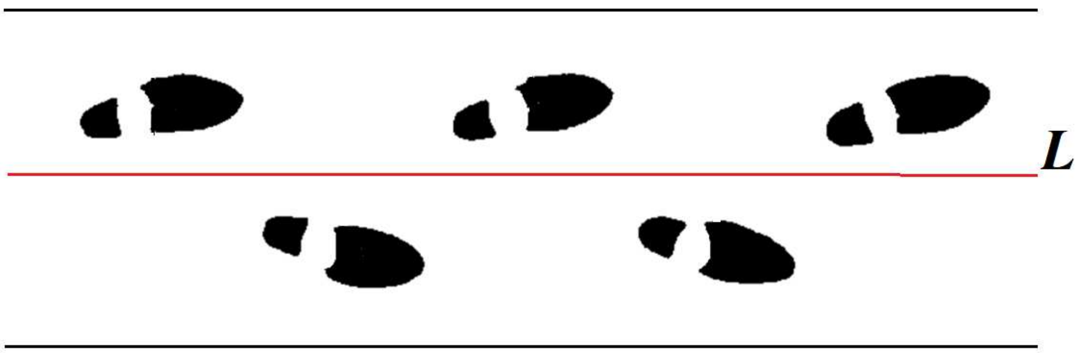
Postavlja se pitanje zašto je važno da postoji baš minimalni translacijski period. Promotrimo primjer ornamenta koji očito posjeduje simetrije, a ne posjeduje minimalni translacijski period.



Slika 2.6: Pravci

U uzorku pravca ne možemo pronaći minimalni translacijski period, stoga takve slučajeve nećemo razmatrati u ovom radu.
Dakle, od matematičkog interesa će nam biti ornamenti koje promatramo kao beskonačne ravninske uzorke omeđene prugom čija se struktura ponavlja u smjeru jedne osi u beskonačnost, a moguće im je odrediti minimalni translacijski period.

Više puta smo spomenuli os duž koje se uzorak ponavlja. Ta os je upravo simetrala pravaca koji određuju prugu kojom je omeđen uzorak ornamenta.
U daljnjem tekstu tu os zvat ćemo **horizontalna os** i označavat ćemo je sa L.



Slika 2.7: Horizontalna os

Poglavlje 3

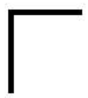
Izometrije u uzorku ornamenata

U prethodnom poglavlju smo se upoznali s ornamentima i spomenuli da posjeduju simetrije. Simetrije se dobivaju komponiranjem izometrija. Ovisno o izometrijama koje komponiramo dobivamo različite uzorke, a ovisno o tome razlikovat ćemo grupe ornamenata. Klasifikacija ornamenata po grupama temelji se na kompoziciji nekih od sljedećih izometrija: translacije, rotacije, osne simetrije s obzirom na horizontalnu os, osne simetrije s obzirom na vertikalnu os te klizne simetrije.
Iz definicije ornamenta jasno nam je da izometrija koja se nalazi u svakom uzorku mora biti translacija koja će preslikati osnovni uzorak duž osi L. Grupa translacija grupa ornamenata izomorfna je grupi $(\mathbb{Z}, +)$.
Prije nego klasificiramo različite grupe ravninskih simetrija, opisat ćemo izometrije koje čine te grupe.

Translacija

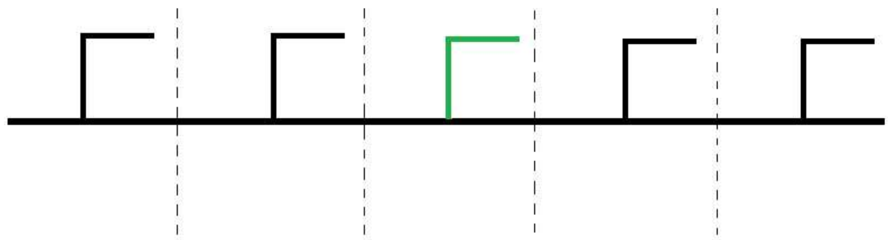
Translaciju smo definirali u definiciji 1.1.2. Translacija uzorka ornamenata je ona koja translatira figuru duž jednog fiksnog pravca. Fiksni pravac je simetrala pruge kojom je omeđen uzorak ornamenta, odnosno pravac *L*. Prisutnost translacije označavat ćemo s *t*.

Na sljedećoj figuri, odnosno uzorku, promotrit ćemo kako će izgledati nakon primjene pojedine izometrije.



Slika 3.1: Uzorak

Primjenom translacije duž osi *L* na dani uzorak dobivamo sljedeće.

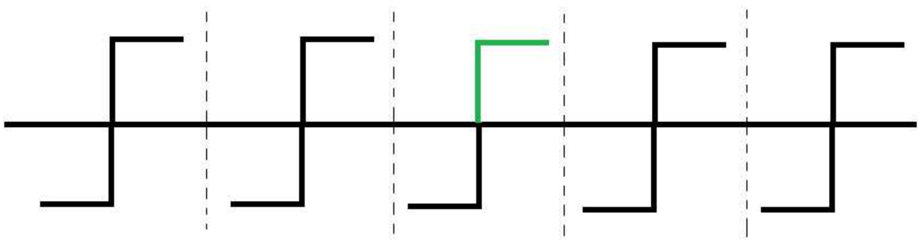


Slika 3.2: Uzorak nakon translacije

Uzorak od kojeg smo krenuli označili smo zelenom bojom. Vertikalnim isprekidanim linijama omeđeni su osnovni uzorci koje smo translatirali duž osi.

Rotacija

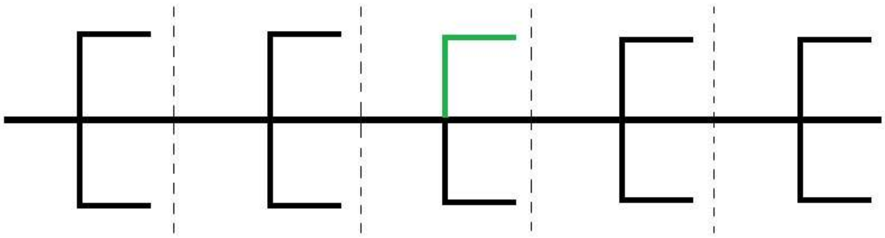
Rotaciju smo definirali (definicija 1.1.5) i promatramo ju samo za kutove od $0°$ do $360°$. Za uzorak ornamenta, jedina dopuštena rotacija je ona za $180°$. Iz definicije 1.1.18 znamo da je ta rotacija ekvivalentna centralnoj simetriji.
Rotaciju ćemo označavati sa r.
Uzmimo opet isti uzorak sa slike 3.1. Njega smo posebno istaknuli zelenom bojom.
Nakon što ga rotiramo oko točke na osi L, dobivamo osnovni uzorak. Translatiramo taj osnovni uzorak duž osi. Područje osnovnog uzorka istaknuli smo isprekidanim linijama.



Slika 3.3: Uzorak nakon rotacije

Osna simetrija s obzirom na horizontalnu os

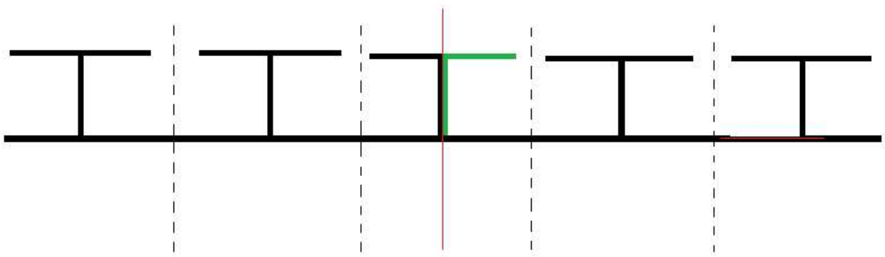
Kada govorimo o osnoj simetriji (definicija 1.1.3) s obzirom na horizontalnu os, podrazumijevamo da je ta os upravo pravac koji je simetrala pruge kojom je omeđen uzorak ornamenta. Tu os označavamo sa L, a preslikavanje osnu simetriju s obzirom na taj pravac označit ćemo sa h.
Zelenom bojom označili smo uzorak koji smo preslikali osnom simetrijom s obzirom na os L. Tako dobiven osnovni uzorak još smo translatirali.



Slika 3.4: Uzorak nakon osne simetrije h

Osna simetrija s obzirom na vertikalnu os

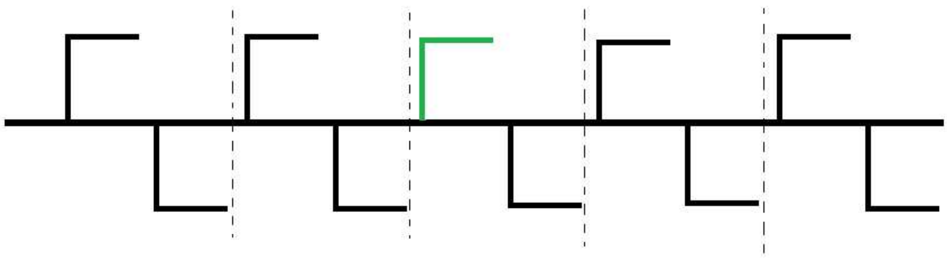
Za razliku od horizontalne osi simetrije koja je jedinstveni pravac, vertikalnih osi simetrije je beskonačno mnogo. Svaka od njih je razmaku od jednog temeljnog perioda u odnosu na drugu i okomita je na horizontalnu os.
Jedna takva vertikalna os simetrije naznačena je na slici 3.5 crvenom bojom. Zeleni uzorak od kojeg polazimo preslikali smo osnom simetrijom s obzirom na crvenu os. Tako dobiveni uzorak translatirali smo duž pruge.
Preslikavanje uzorka s obzirom na vertikalnu os označavat ćemo sa v.



Slika 3.5: Uzorak nakon osne simetrije v

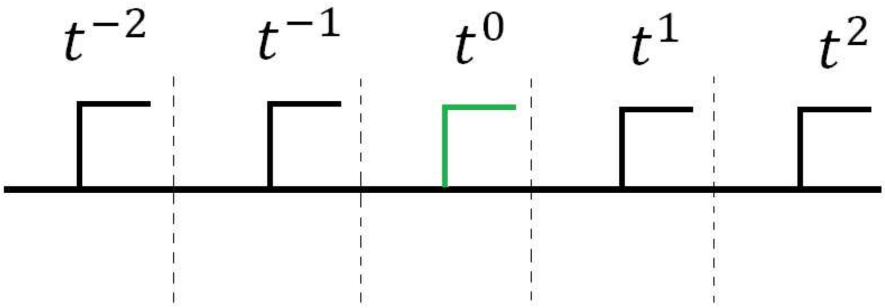
Klizna simetrija

Kliznu simetriju smo definirali (definicija 1.1.17). Njome se uzorak translatira za pola temeljnog perioda i zatim se preslika osnom simetrijom s obzirom na horizontalnu os. Ornamente u kojima je prisutna klizna simetrija označit ćemo sa g.



Slika 3.6: Uzorak nakon klizne simetrije

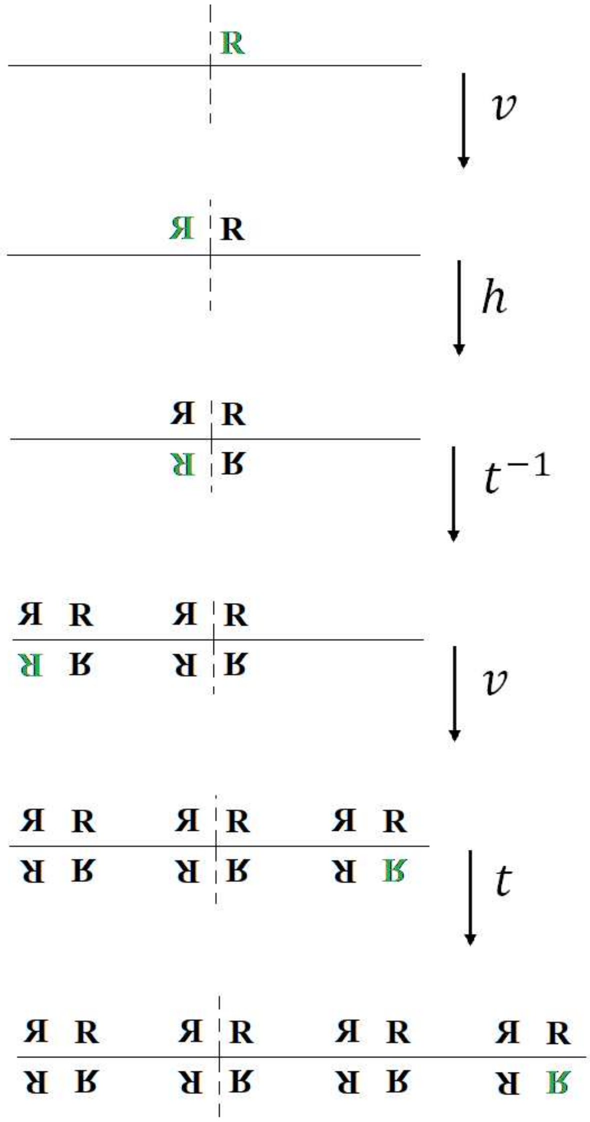
Nakon što smo pokazali kako se određeni uzorak preslikava navedenim izometrijama, još smo ga i translatirali duž pruge. Dakle, komponirali smo svaku od ovih izometrija s translacijom i isprekidanim vertikalnim osima označili smo područje osnovnog uzorka. Označimo li osnovni uzorak od kojeg smo krenuli sa t^0, prirodno je translaciju osnovnog uzorka ovisno o orijentaciji označavati sa $t^1, t^2, t^3, ...$, a one suprotne orijentacije sa $t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}...$
Upravo iz toga lako se vidi se izomorfizam sa $(\mathbb{Z}, +)$.



Slika 3.7: izomorfizam sa $(\mathbb{Z}, +)$

Pogledajmo sada kako komponiranjem t, r, h, g i v nastaje uzorak ornamenata.

Primjer 3.0.1. *Kreirat ćemo uzorak ornamenta koristeći sljedeće izometrije: t, v i h. Odredimo $x = tvt^{-1}hv$.*
Krenimo od osnovnog uzorka. Neka to bude slovo R koje smo izabrali jer samo po sebi ne posjeduje simetrije.
Na slici 3.8 zelenom bojom istaknut je uzorak od kojeg smo krenuli kako bi lakše pratili njegove transformacije. Svaka sljedeća izometrija u kompoziciji djeluje na čitavu sliku nastalu prethodnom kompozicijom preslikavanja.



Slika 3.8: Uzorak ornamenta x

Možemo uočiti kako konačni rezultat možemo zapisati još i kao $x = tvt^{-1}hv = t^2hv$. Upravo iz toga možemo zaključiti kako će se određene kompozicije moći zapisati jednostavnije ili će predstavljati ista preslikavanja.

Vođeni tom idejom u nastavku ćemo pregledati sve mogućnosti konstruiranja uzorka ornamenata pomoću t, r, h, g i v i pokazati zašto je samo sedam mogućih grupa ornamenata sastavljenih od navedenih izometrija.

Poglavlje 4

Dokazi sedam grupa ornamenata

Predstavit ćemo dokaz da postoji samo sedam različitih tipova grupa ornamenata koristeći teoriju grupa.

Definicija 4.0.1. *Grupa ornamenata je grupa simetrija beskonačne ravninske figure čija podgrupa translacija je beskonačna ciklička grupa.*

Teorem 4.0.2. *Neka su t, v, r, h i g izometrije i G grupa simetrija sastavljena od tih izometrija i operacije kompozicije. Tada postoji točno sedam različitih grupa ornamenata.*

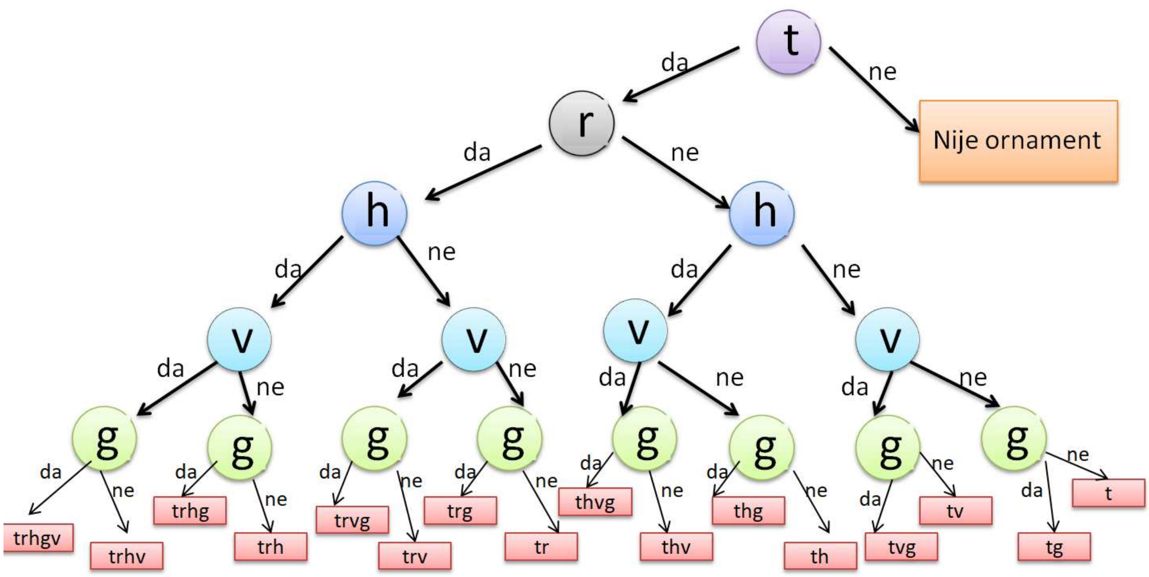
Za početak, predstavit ćemo notaciju korištenu u dokazu. U dokazivanju sedam mogućih grupa simetrija ornamenata pozivat ćemo se na grupe simetrija sastavljenih od izometrija: t, r, v, h i g. To znači da, ako smo ornament sastavili tako da je nastao translacijom i rotacijom osnovnog uzorka, grupu simetrija tog ornamenta označit ćemo sa tr.
Također, možemo koristiti izraz „primijeniti v", čime podrazumijevamo preslikavanje osne simetrije oko okomite osi na uzorak ornamenta. Analogno označavamo ostale izometrije.
Svaki uzorak nastaje translacijom osnovnog područja. Prema tome, najprije ispitujemo postojanje same translacije, a zatim simetrije osnovnog područja.

Odredimo sada mogući broj kombinacija uzoraka ornamenata sastavljenih od t, r, v, h i g.
Prisjetimo se, translacija je element svakog ornamenta jer njome preslikavamo osnovni uzorak duž osi L. Stoga uzmemo li određeni uzorak i samo ga translatiramo duž osi L za minimalni translacijski period, dobivamo uzorak ornamenata. To nam daje jednu mogućnost, to jest t je jedna od kombinacija.
Preostaje nam odrediti broj kombinacija od r, v, h i g.
Dvočlane kombinacije su tr, tv, th i tg. Drugim riječima, od 4 moguće izometrije izabrali smo jednu (uz translaciju). Broj dvočlanih kombinacija je $\binom{4}{1}$.

Analogno odredimo broj tročlanih i četveročlanih kombinacija. Imamo:

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$$
$$= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

Dakle, postoji 16 različitih grupa simetrija uzorka ornamenata. Sustavna lista prikazana je na slici 4.1.
To su: $t, tr, tv, th, tg, trv, trh, trg, tvh, tvg, thg, trvh, trvg, tvhg, trhg$ i $thrvg$.

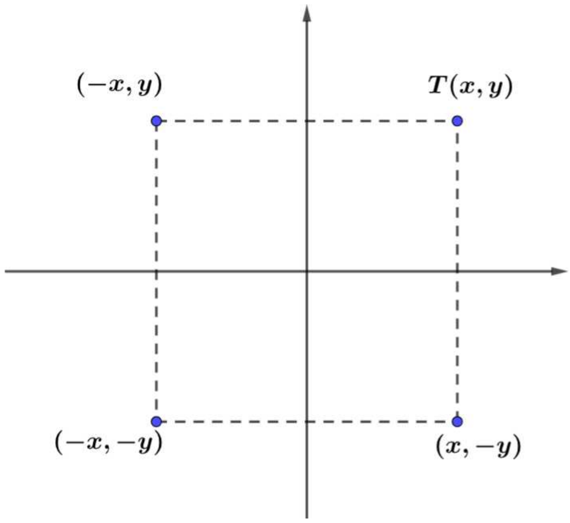


Slika 4.1: 16 grupa simetrija ornamenata

Pomoću sljedećih propozicija promatrat ćemo 16 navedenih kombinacija i ograničiti mogući broj grupa simetrija na 7.

Propozicija 4.0.3. *Ako grupa simetrija sadrži t, h i v, tada sadrži i r.*

Dokaz. Promotrimo točku koja je dio figure, odnosno uzorka ornamenta. Neka je to točka $T(x, y)$. Koordinatne osi su horizontalna os simetrije L i jedna vertikalna os. Pogledajmo što se događa s koordinatama točke T nakon primjene izometrija h, v i r.



Slika 4.2: Točka figure u koordinatnom sustavu

Osnom simetrijom s obzirom na horizontalnu os dobivamo

$$h(x, y) = (x, -y).$$

Osnom simetrijom s obzirom na vertikalnu os dobivamo

$$v(x, y) = (-x, y).$$

Rotacijom za 180° oko sjecišta tih dviju osi dobivamo

$$r(x, y) = (-x, -y).$$

Sada pogledajmo kompoziciju $h \circ v$. Imamo

$$(h \circ v)(x, y) = h(-x, y) = (-x, -y) = r(x, y),$$

Također,

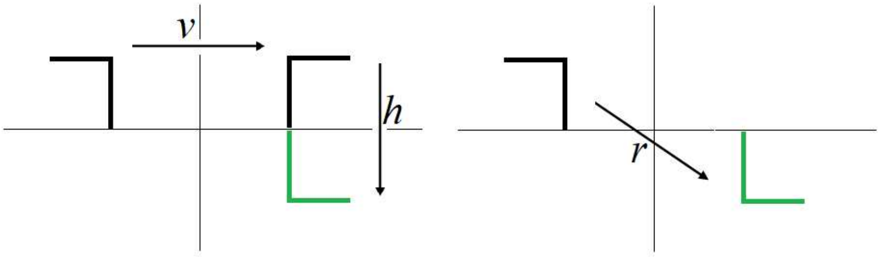
$$(v \circ h)(x, y) = v(x, -y) = (-x, -y) = r(x, y).$$

Dakle, primijenimo li v i h na uzorak, nužno dobivamo i r.

Drugi način na koji smo mogli provesti ovaj dokaz je koristeći činjenicu da je kompozicija dviju osnih simetrija čije su osi simetrije okomite ekvivalentna rotaciji za 180° s centrom rotacije u sjecištu tih osi.

Time možemo eliminirati one slučajeve koji sadrže v i h, a ne sadrže r.
To su thv i $thvg$.

Znamo da se u uzorku ornamenata pojavljuju osna simetrija s obzirom na horizontalnu os L i osna simetrija s obzirom na osi okomite na L. Drugim riječima, ako primijenimo v i h, dobivamo centralnu simetriju koja je ekvivalentna rotaciji za 180° koja je upravo rotacija dozvoljena u uzorku ornamenta, odnosno r.



Slika 4.3: $v \circ h = r$

□

Propozicija 4.0.4. *Ako grupa simetrija sadrži t i h, tada sadrži i g.*

Dokaz. Znamo iz definicije 1.1.17 klizne simetrije da je ona kompozicija translacije i osne simetrije s obzirom na os L.
Time direktno iz definicije dobivamo da vrijedi $t \circ h = h \circ t = g$.
Ovim pravilom eliminirali smo sve kombinacije koje sadrže t i h, a ne sadrže g.
To su th, thr i $thvr$. □

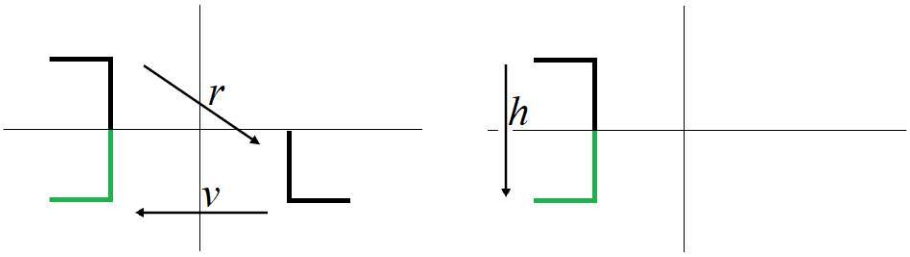
Propozicija 4.0.5. *Ako grupa simetrija sadrži t, v i r, tada sadrži i h.*

Dokaz. Pogledajmo kompoziciju $v \circ r$. Imamo

$$(v \circ r)(x, y) = v(-x, -y) = (x, -y) = h(x, y).$$

Također,

$$(r \circ v)(x, y) = r(-x, y) = (x, -y) = h(x, y).$$



Slika 4.4: $v \circ r = h$

Zaključujemo da sve kombinacije koje sadrže v i r sadrže i h.
Eliminiramo onu kombinaciju koja sadrži v i r, a ne sadrži h.
To je tvr. □

Propozicija 4.0.6. *Ako grupa simetrija sadrži t, v i g, tada sadrži i r.*

Dokaz. Pogledajmo kompoziciju $v \circ g$. Kliznom simetrijom točka (x, y) preslikava tako da se komponiraju t i h.
Translacijom točke za vektor $\vec{a}$ u smjeru osi L dobivamo

$$t(x, y) = (x + a, y),$$

a komponiranjem h i t dobivamo

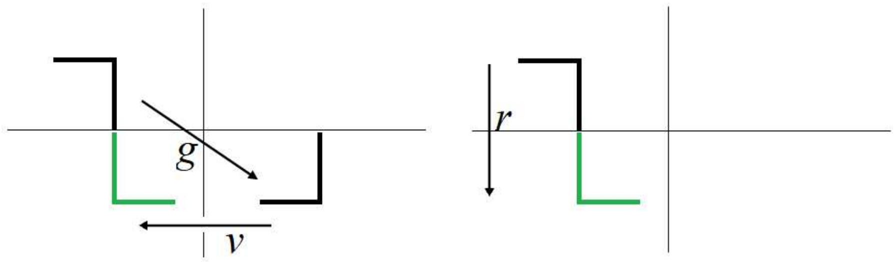
$$(h \circ t)(x, y) = h(x + a, y) = (x + a, -y) = g(x, y).$$

Imamo

$$(v \circ g)(x, y) = v(x + a, -y) = (-x - a, -y) = r(x + a, y).$$

Također,

$$(g \circ v)(x, y) = g(-x, y) = (-x - a, -y) = r(x + a, y).$$



Slika 4.5: $v \circ g = r$

Ovim pravilom eliminirali smo sve kombinaciju koja sadrži v i g, a ne sadrže r.
To je tvg. □

Propozicija 4.0.7. *Ako grupa simetrija sadrži t, r i g, tada sadrži i v.*

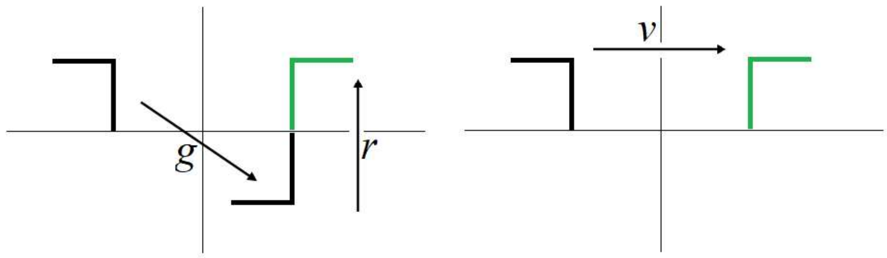
Dokaz. Pogledajmo kompoziciju r i g. Imamo

$$(r \circ g)(x, y) = r(x + a, -y) = (-x - a, y) = v(x + a, y).$$

Također,

$$(g \circ r)(x, y) = g(-x, -y) = (-x - a, y) = v(x + a, y).$$

Zaključujemo da sve kombinacije koje sadrže r i g sadrže i v.



Slika 4.6: $r \circ g = v$

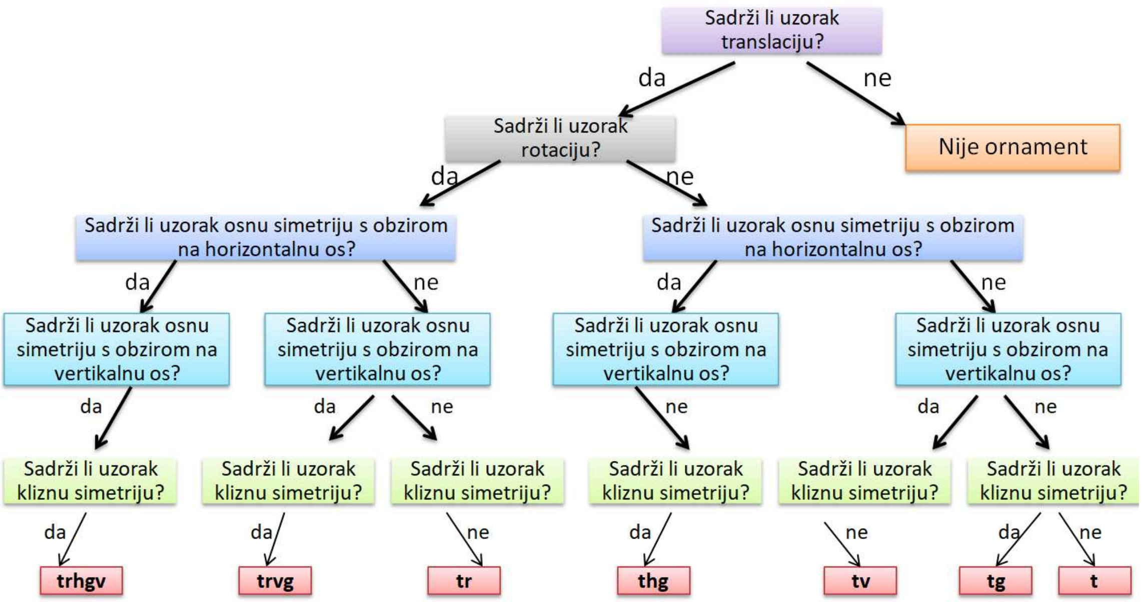
Eliminiramo one kombinacije koje sadrže r i g, a ne sadrže v.
To su trg i $trgh$. □

Dokazavši ove propozicije, pokazali smo da kombinacije koje možemo eliminirati su: $th, trv, trg, tvg, thv, thg, trvh, tvhg$ i $trhg$.
To znači da nam preostaju $t, tr, tv, tg, thg, trvg$ i $thvrg$ kao jedinih sedam različitih grupa simetrija ornamenata.
U nastavku ćemo pregledati svaku od njih.

Poglavlje 5

Sedam grupa ornamenata

Sada kada smo dokazali da postoji točno sedam grupa ornamenata i koje su to, prikazat ćemo shemu pomoću koje možemo u danom uzorku prepoznati o kojem tipu ornamenta se radi.

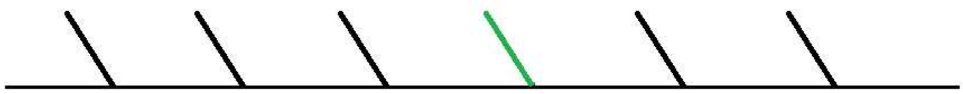


Slika 5.1: Shema za prepoznavanje uzorka ornamenta

Pogledajmo primjere za svaku od sedam grupa ornamenata.

5.1 t

Prva grupa ornamenata je ona koja se sastoji isključivo od translacije. Uzorak se translatira duž osi L. Pogledajmo to na sljedećim primjerima.
Na slici 5.2 zelenom bojom istaknut je uzorak koji smo zatim translatirali duž označene osi. Tako je nastao prikazani uzorak ornamenta.



Slika 5.2: Grupa t na uzorku

Promotrimo sada uzorak otiska stopala. Translacijom duž osi L dobivamo ornament sa slike 5.3.

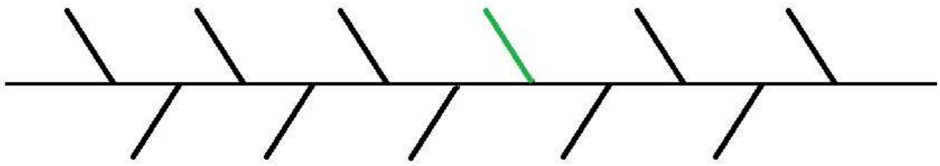
Slika 5.3: Grupa t na uzorku stopala

Isto tako, možemo pogledati primjer u kojem nam je uzorak slovo F (slika 5.4).

Slika 5.4: Grupa t na uzorku slova F

5.2 tg

Kompozicijom translacije i klizne simetrije dolazimo do grupe uzorka ornamenta *tg*.
Na slici 5.5 je uzorak istaknut zelenom bojom, zatim se preslikao kliznom simetrijom te tako dobiven osnovni uzorak translacijom daje ornament sa slike.

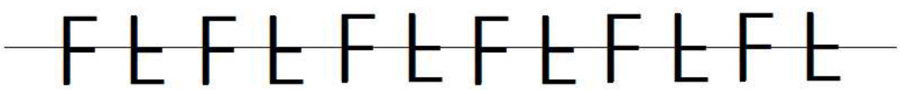


Slika 5.5: Grupa *tg* na uzorku

Isto preslikavanje primijenili smo na uzorku stopala kojeg možemo vidjeti na slici 5.6.

Slika 5.6: Grupa *tg* na uzorku stopala

Uzmemo li kao osnovni uzorak slovo F dobivamo ornament sa slike 5.7.



Slika 5.7: Grupa *tg* na uzorku slova F

5.3 tv

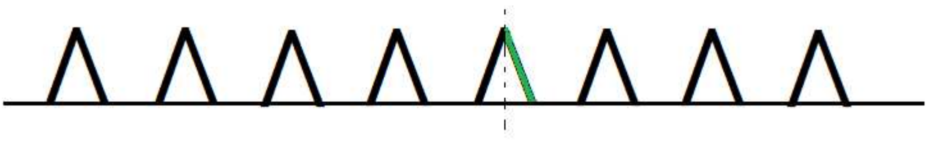
Kompozicijom translacije i osne simetrije s obzirom na vertikalnu os dolazimo do grupe ornamenata *tv*.
Zelenom bojom istaknut je uzorak koji smo preslikali osnom simetrijom s obzirom na vertikalnu os i dobili uzorak ornamenta sa slike 5.8.

Slika 5.8: Grupa *tv* na uzorku slova I

Uzmemo li kao uzorak otisak stopala dobivamo sliku 5.9.

Slika 5.9: Grupa *tv* na uzorku stopala

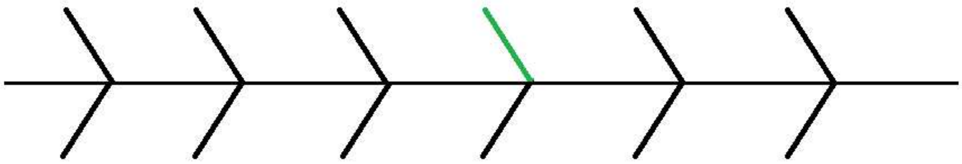
Na zeleno istaknuti uzorak sa slike 5.10 primijenimo osnu simetriju s obzirom na isprekidano istaknutu vertikalnu os i translaciju čime dolazimo do uzorka ornamenta.



Slika 5.10: Grupa *tv* na uzorku

5.4 thg

Kompozicijom translacije, osne simetrije s obzirom na os L i klizne simetrije dolazimo do grupe ornamenta *thg*.
Zeleno istaknuti uzorak preslikamo kompozicijom klizne simetrije i osne simetrije s obzirom na horizontalnu os. Dolazimo do slike 5.11.



Slika 5.11: Grupa *thg* na uzorku

Istim preslikavanjem dolazimo do uzorka stopala na slici 5.12.

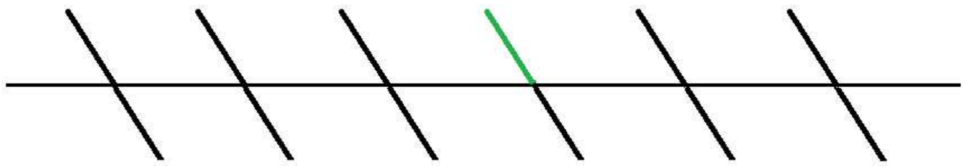
Slika 5.12: Grupa *thg* na uzorku stopala

Primjer grupe ornamenata *thg* na slovu možemo vidjeti preslikamo li slovo B kao na slici 5.13.

Slika 5.13: Grupa *thg* na uzorku slova B

5.5 tr

Kompozicijom translacije i rotacije dobivamo grupu ornamenata *tr*.
Primjenom rotacije na zeleno istaknuti uzorak i translacijom duž osi *L* dobivamo uzorak sa slike 5.14.

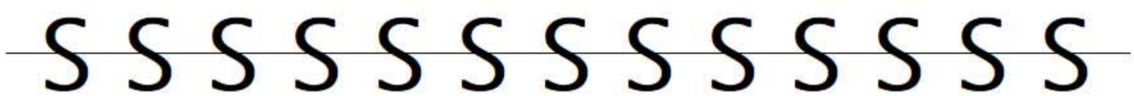


Slika 5.14: Grupa *tr* na uzorku

Primjenom rotacije i translacije na uzorak otiska stopala nastaje slika 5.15.

Slika 5.15: Grupa *tr* na uzorku stopala

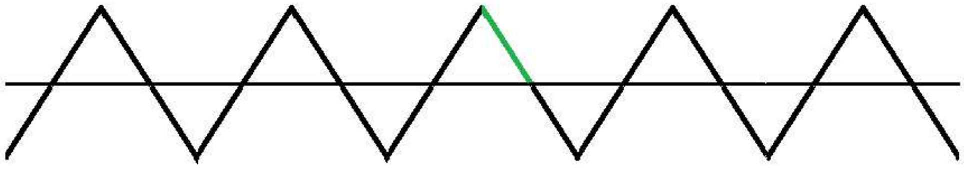
Primjer grupe *tr* možemo vidjeti na slici 5.16 na slovu S.



Slika 5.16: Grupa *tr* na uzorku slova S

5.6 trvg

Kompozicijom translacije, rotacije, osne simetrije s obzirom na vertikalnu os i klizne simetrije dobivamo grupu ornamenata *trvg*.
Primjer te grupe dobiven iz zeleno istaknutog uzorka možemo vidjeti na slici 5.17.



Slika 5.17: Grupa *trvg* na uzorku

Uzmemo li uzorak otiska stopala dobivamo ornament sa slike 5.18.

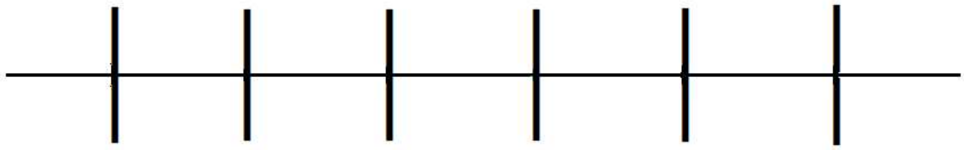
Slika 5.18: Grupa *trvg* na uzorku stopala

Promatranjem slova V koje već samo po sebi ima osnu simetriju s obzirom na vertikalnu os nastaje sljedeći uzorak sa slike 5.19.

Slika 5.19: Grupa *trvg* na uzorku slova V

5.7 trhvg

Sedmu grupu ornamenata čini uzorak u kojem možemo pronaći translaciju, rotaciju, osnu simetriju s obzirom na os L, osnu simetriju s obzirom na vertikalnu os i kliznu simetriju. Drugim riječima, sve dozvoljene izometrije nalaze se u ovom uzorku.
Primjer takvog uzorka nalazi se na slici 5.20.

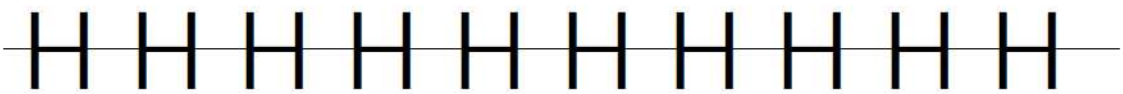


Slika 5.20: Grupa *trhvg* na uzorku

Ova preslikavanja primjenjena na uzorak otiska stopala daju ornament sa slike 5.21.

Slika 5.21: Grupa *trhvg* na uzorku stopala

Primjer slova koje zadovoljava preslikavanja grupe ornamenata *trhvg* je slovo H sa slike 5.22.



Slika 5.22: Grupa *trhvg* na uzorku slova H

5.8 Primjeri

Kroz sljedeće primjere pokazat ćemo kako korištenjem sheme sa slike 5.1 na objektima iz umjetnosti možemo odrediti kojoj grupi ornamenata pripadaju.

Primjer 5.8.1. *Na vazi koja datira još iz Antičke Grčke potrebno je klasificirati istaknute uzorke ornamenata.*

Slika 5.23: Vaza

a) Pogledajmo prvi istaknuti motiv na slici 5.24. U zelenom pravokutniku istaknut je osnovni uzorak koji se translatira u jednom smjeru. Također, u uzorku ne primjećujemo nikakve druge simetrije. Stoga ovaj uzorak pripada grupi ornamenata t.

Slika 5.24: 1. uzorak

b) Istaknut je motiv na slici 5.25. Uočavamo da je uzorak translatiran. Taj osnovni uzorak istaknuli smo zelenim pravokutnikom. Unutar samog osnovnog uzorka možemo uočiti *simetriju s obzirom na crveno istaknutu vertikalnu os. Dakle, zaključujemo da se radi o grupi ornamenata tv.*

Slika 5.25: 2. uzorak

Primjer 5.8.2. *Na slici 5.26 istaknuti su uzorci ornamenata koji su ušiveni u tradicionalne nošnje Hrvatskog zagorja. To su redom:* $thg, tg, tr, trhvg$ *i* $trvg$.

Slika 5.26: Ornamenti na narodnoj nošnji

Poglavlje 6

Aktivnosti u školi

Učenici se s izometrijama susreću u petom razredu osnovne škole i to s osnom i centralnom simetrijom. Kasnije, u osmom razredu, obrađuje se još i rotacija i translacija. Prema novom programu translacija će se obrađivati već u sedmom razredu.
Osim navedenih izometrija, prema HNOS-u sličnost i skuladnost trokuta obrađivala se u sedmom razredu osnovne škole i prvom razredu srednje škole. Nacionalnim okvirnim kurikulumom, u osnovnoj školi sličnost se pomaknula na osmi razred, dok je u srednjoj školi ostala u prvom razredu.
Osna simetrija, centralna simetrija i rotacija primjeri su izometrija u školi, to jest preslikavanja ravnine koja „čuvaju udaljenost". U školskoj matematici prilikom obrade navedenih transformacija ističe se kako su one funkcije, ali češće se za njih koristi izraz transformacija ili preslikavanje. Možemo primijetiti da osim navedenih preslikavanja problem može biti što ornamenti sadrže i kliznu simetriju koja nije dio redovnog školskog gradiva. Stoga tome možemo doskočiti tako da ne upotrebljavamo navedenu izometriju ili je uvedemo kao dio dodatnog sadržaja ili u sklopu dodatne nastave, večeri matematike i slično.
Uz obradu sličnosti dolazi i obrada sukladnosti. Neposredne posljedice su da je svaka izometrija ujedno i preslikavanje sličnosti, odnosno homotetija s koeficijentom $k = 1$.
U školi se govori o sličnosti i sukladnosti trokuta, dok se o drugim mnogokutima ili općenito likovima ne govori.
Ornamenti su upravo dobar primjer raznih likova za koje vrijedi da ih danim transformacijama preslikavamo u sukladne likove. Dakle, koristeći ornamente kod učenika možemo osvijestiti jednu generalizaciju sukladnosti trokuta, a to je sukladnost mnogokuta (konveksnih i nekonveksnih) u ravnini.
Kako nam je prilikom razmatranja uzoraka ornamenata bitno poznavati izometrije i sukladnost likova, u nastavku ćemo navesti neke aktivnosti koje je moguće provesti s učenicima u školi. Pri tome smo svjesni kako ornamenti sami po sebi nisu dio nastavnog sadržaja, ali mogu nam dobro poslužiti kako bi na određenom uzorku učenici primjenjivali presli-

kavanja izometrija ili sličnost. Dakle, uzorci ornamenata dobro mogu poslužiti u nastavi geometrije.
U tu svrhu koristit ćemo principe istraživačke nastave matematike. Istraživački usmjerena nastava matematike se odnosi na pristup nastavi matematike koji učenicima omogućuje da sudjeluju u aktivnosti koja ih navodi da prilagode svoje postojeće ili da steknu novo matematičko znanje. Pritom se naglasak stavlja na to da su učenici relativno samostalni prilikom rješavanja problema.
Do sad je uobičajeno bilo u razredu primjenjivati frontalni nastavni oblik u kojem je nastavnik predstavio nastavnu jedinicu, pojam ili poučke i riješio primjere, pri čemu je angažman učenika bio minimalan ili čak nepostojeći. Učenici zatim rješavaju standardizirane zadatke nakon čega slijedi i provjera naučenog.
Ideja za izvršavanje istraživačke nastave zasniva se na teoriji didaktičkih situacija. Teorija didaktičkih situacija predstavlja poučavanje koje uključuje zadaće istraživačke nastave u matematici te donosi nekoliko ideja i rezultata koji nastavnicima pomažu da proširuju i razvijaju svoje matematičko znanje dok rade na planiranju i osmišljavanju nastave. Ona se provodi kroz nekoliko faza:

Faza primopredaje
Označava prijenos i prilagodbu problema učenicima. Nastavnik predstavlja pravila koja će poslužiti učenicima kod rješavanja problema.

Faza djelovanja
Podrazumijeva samostalan učenički rad na problemu. Najčešće koriste svoja postojeća matematička znanja.

Faza formulacije
Učenici kroz raspravu u razredu predstavljaju svoje ideje i tijek razmišljanja.

Faza potvrđivanja
Učenici provjeravaju svoje radove i testiraju svoje pretpostavke bez da im nastavnik direktno ukazuje na ispravnost tih pretpostavki.

Faza institucionalizacije
Najčešće nastavnik sažima sve ideje i daje konačnu riječ i zaključak. Znanje se formulira precizno matematički.

Aktivnost 1 – „Kreiraj svoj ornament“

Cilj aktivnosti: Učenici će primijeniti izometrije na danom osnovnom uzorku.

Potrebni materijal: Nastavni listić, geometrijski pribor, olovka i bojice.

Oblik rada: U paru.

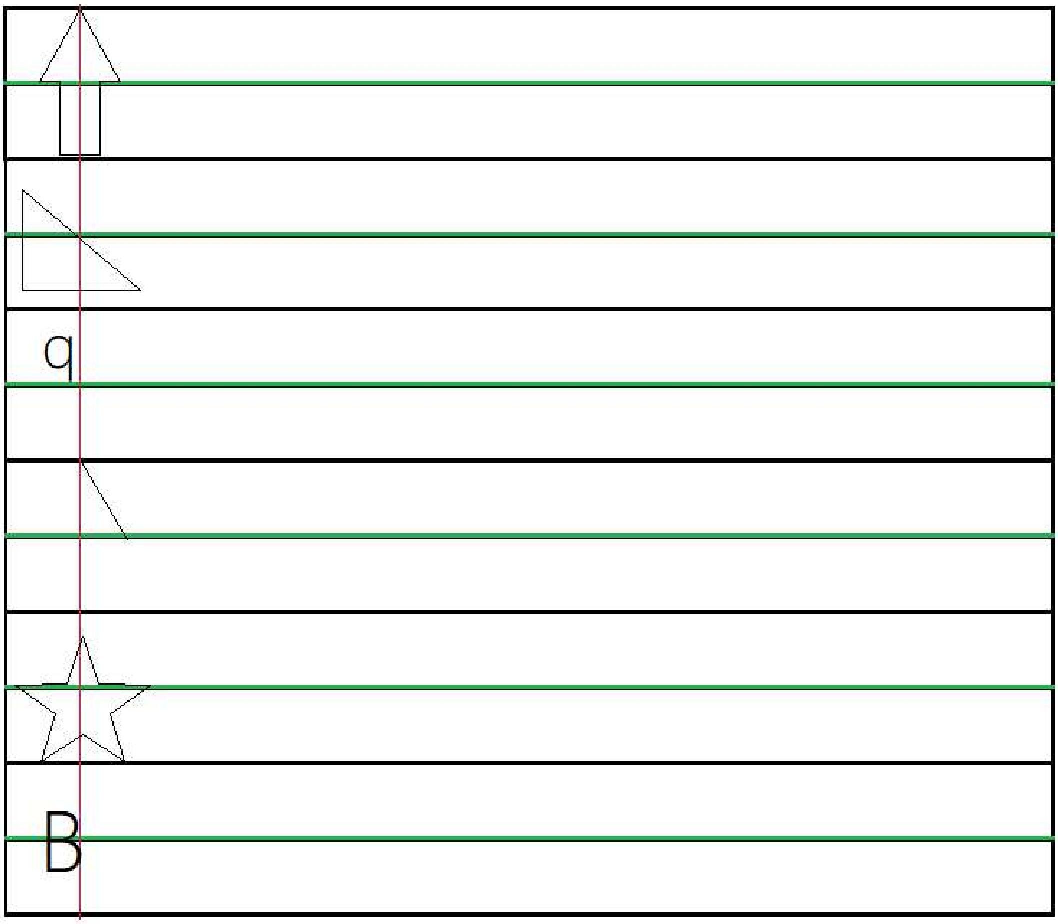
Opis aktivnosti: Učenici u paru dobivaju nastavni listić na kojem su dani osnovni uzorci unutar pruge. Iz kutije svaki od učenika u paru vadi nasumično papirić na kojem je navedena neka od izometrija: osna simetrija s obzirom na vertikalnu os, osna simetrija s obzirom na horizontalnu os, rotacija za 180°, klizna simetrija. Prvi učenik u paru preslika dani uzorak izometrijom koju je izvukao, a nakon njega drugi učenik u paru na tom preslikanom uzorku primijeni svoju izometriju. Zatim tako dobiveni uzorak translatiraju duž označene pruge, odnosno trake na nastavnom listiću dok ne dođu do ruba papira.

Vrijeme trajanja aktivnosti: 15 – 20 minuta.

Zadatak: Na nastavnom listiću zadani su osnovni oblici.
1. Odredite koji učenik u paru prvi vadi papirić iz kutije. Prvi učenik neka izvadi papirić iz kutije na kojem se nalazi jedno preslikavanje.
2. Drugi učenik u paru neka izvadi jedan od preostalih papirića iz kutije na kojem je preslikavanje.
3. Prvi učenik neka primijeni preslikavanje koje je izvukao na danom obliku.
4. Drugi učenik neka primijeni preslikavanje koje je izvukao na oblik koji je već preslikao prvi učenik.
5. Oblik dobiven nakon preslikavanja drugog učenika translatirajte duž označene trake.
Uzorak obojite po želji. Izradili ste svoj ornament!

Papirići: Rotacija, osna simetrija s obzirom na crvenu os, osna simetrija s obzirom na zelenu os, rotacija za 180° oko točke na zelenoj osi, klizna simetrija.

Izgled nekih osnovnih uzoraka s nastavnog listića možemo vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 6.1: Nastavni listić za aktivnost 1

Zaključak: Ova aktivnost korisna je zbog poticanja kreativnosti kod učenika, korelacije matematike s likovnom umjetnošću i učenja kroz zabavu i suradničkim radom. Učenici uvježbavaju izometrije i uočavaju njihovu primjenu u svakodnevnom životu i u umjetnosti.

Aktivnost 2 – „Od čega se sastoji ornament“

Cilj aktivnosti: Učenici će prepoznati prisutnost određene izometrije na danom uzorku ornamenta.

Potrebni materijal: Listići s uzorcima, kartice s izometrijama, geometrijski pribor, pribor za pisanje.

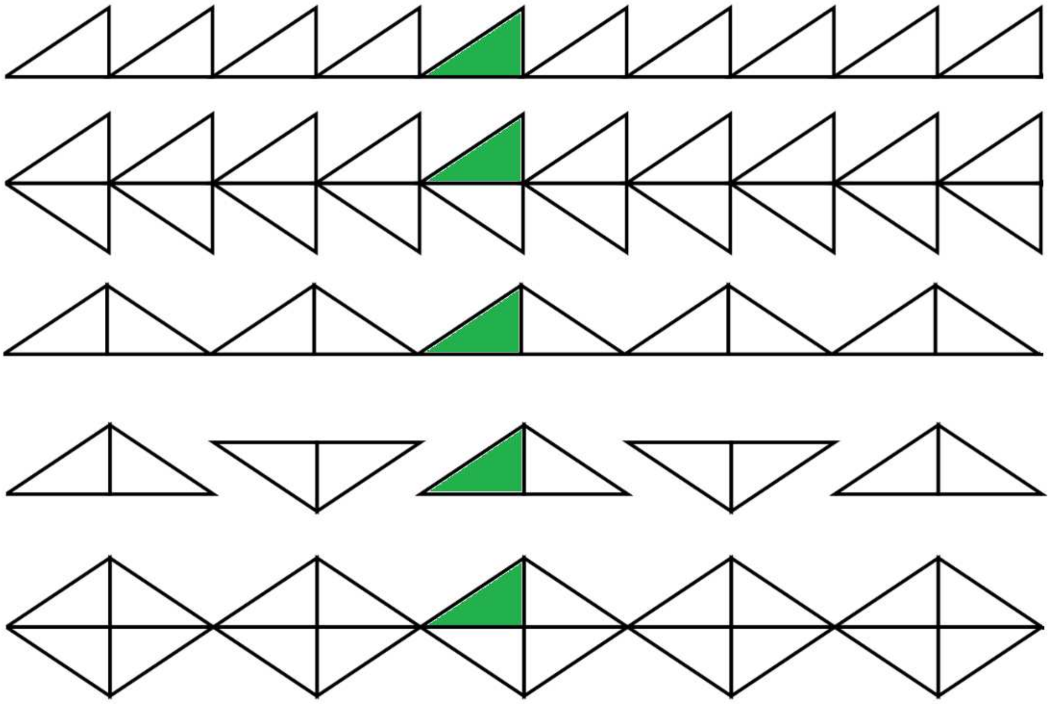
Oblik rada: U grupama po četvero učenika.

Opis aktivnosti: Učenici u grupi dobivaju nekoliko različitih uzoraka ornamenata gdje je posebno istaknut osnovni uzorak. Na njima moraju utvrditi kako je nastao ornament, odnosno od kojih izometrija se sastoji. Svakom ornamentu učenici pridružuju kartice izometrija od kojih misle da se sastoji. Na kraju zaključuju koja izometrija se pojavila u svim ornamentima, a to je translacija.

Vrijeme trajanja aktivnosti: 10 – 15 minuta.

Zadatak: Svakom od navedenih uzoraka pridruži kartice s preslikavanjima koje sadrži!
Pitanje: Koje preslikavanje se pojavljuje u svim uzorcima?

Primjer uzorka i pridruženih kartica možemo vidjeti u nastavku.



Slika 6.2: Nastavni listić za aktivnost 2

Rješenje: 1. uzorak: translacija
2. uzorak: translacija, osna simetrija s obzirom na horizontalnu os
3. uzorak: translacija, osna simetrija s obzirom na vertikalnu os
4. uzorak: translacija, osna simetrija s obzirom na horizontalnu os, klizna simetrija, centralna simetrija
5. uzorak: translacija, centralna simetrija, osna simetrija s obzirom na horizontalnu i vertikalnu os.

Zaključak: Kroz ovu aktivnost učenici uče prepoznavati izometrije u raznim uzorcima, induktivnim zaključivanjem stvaraju generalizacije i uočavaju zajednička svojstva objekata što je veoma korisno razmišljanje u matematici.

Aktivnost 3 – „Izbaci uljeza“

Cilj aktivnosti: Učenici će razlikovati uzorke ornamenata od onih koji to nisu.

Potrebni materijal: Listići s uzorcima, pribor za pisanje.

Oblik rada: U paru.

Opis aktivnosti: Učenicima je naveden opis uzorka ornamenta. U svakom retku potrebno je "izbaciti uljeza", odnosno označiti onaj uzorak koji ne zadovoljava svojstva koja tražimo kod ornamenta.

Vrijeme trajanja aktivnosti: $15 - 20$ minuta.

Zadatak: Ornamenti su simetrični oblici koji nastaju tako da na odabranu figuru primijenimo neku od sljedećih izometrija ili njihovih kompozicija: rotaciju za 180°, osnu simetriju s obzirom na horizontalnu os, osnu simetriju s obzirom na vertikalnu os i kliznu simetriju, a zatim oblik dobiven navedenim transformacijama translatiramo u jednom smjeru.
Među zadanim uzorcima izbacite onaj koji ne zadovoljava navedene uvjete, odnosno nije uzorak ornamenta. Svoj izbor obrazložite.
Nastavni listić možemo vidjeti na slici 6.3.

Rješenje: 1. redak- treća slika
2. redak- prva slika
3. redak- druga slika.

Zaključak: Aktivnost nam služi kako bi provjerili koliko dobro učenici razumiju definiciju i razlikuju simetrije.

Slika 6.3: Nastavni listić za aktivnost 3

Aktivnost 4 – „Bojanka“

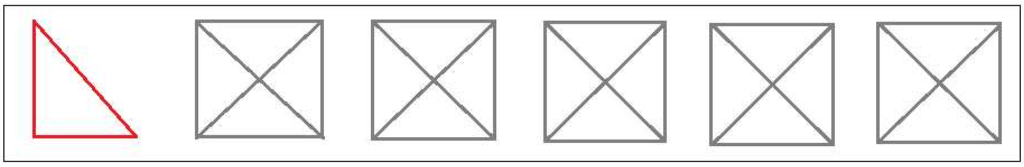
Cilj aktivnosti: Učenici će preslikavati osnovni uzorak pomoću danih izometrija.

Potrebni materijal: Listići s uzorcima, bojice.

Oblik rada: U paru.

Opis aktivnosti: Učenici dobivaju listić s osnovnim uzorkom koji je istaknut crvenom bojom. Na listiću su također iscrtani i oblici, no pomoću danih izometrija treba bojama označiti samo onaj dio koji odgovara uzorku kojeg dobijemo nakon primjene izometrija.

Primjer listića je na slici.

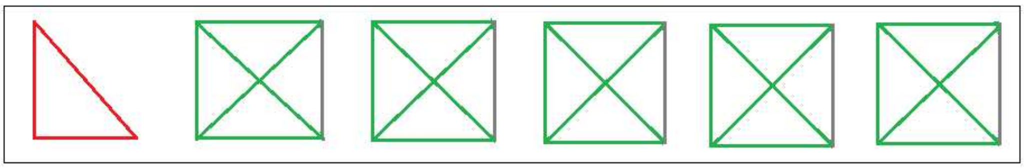


Slika 6.4: Nastavni listić za aktivnost 4

Vrijeme trajanja aktivnosti: 10 − 15 minuta.

Zadatak: Na listiću je osnovni oblik označen crvenom bojom. Izaberi jednu boju i s njom oboji dijelove sivih oblika koji odgovaraju transformaciji osnovnog oblika ako smo na njega primijenili:
a) osnu simetriju s obzirom na horizontalnu os i translaciju
b) osnu simetriju s obzirom na vertikalnu os i translaciju
c) rotaciju za 180° i translaciju.

Pogledajmo na sljedećoj slici primjer rješenja pod a).



Slika 6.5: Rješenje a)

Zaključak: Ova aktivnost može služiti kao uvježbavanje izometrija.

Bibliografija

[1] Berke, A.: *The Beauty of Symmetry*, The MIT Press, Massachusetts, London, England, 2020.

[2] Bombardelli, M.: Predavanja i vježbe iz kolegija *Konstruktivne metode u geometriji*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[3] Bombardelli, M.; Ilišević, D.: *Skripta iz kolegija Elementarna geometrija*, Zagreb, 2007.

[4] Brueckler, F. M.: *Grupe simetrija*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2008., `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bruckler/pdf/kristali-simetrije3.pdf`, pristupljeno 23.05.2020.

[5] Čuljak, M.: *Izometrije u Escherovim radovima*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2013., `https://hrcak.srce.hr/1142862018`, pristupljeno 23.05.2020.

[6] Dakić, B.; Elezović, N: *Matematika 1*, Element, Zagreb, 2009.

[7] Heffernan, R.: *Groups Symmetry*, `https://mathfiles.kfupm.edu.sa`, pristupljeno 31.10.2019.

[8] Jessen, B.; Doorman, M; Bos, R: *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*, Projekt MERIA, 2017., `https://meria-project.eu/sites/default/files/2017-11/MERIA`, pristupljeno 31.07.2020.

[9] Jensen, D.; Harvey, R.: *Plane symmetry groups*, United States Air Force Academy, Colorado Springs, 1988.

[10] Krešić-Jurić, S.: *Algebarske strukture skripta*, Split, 2013.

[11] Landau, T.: *Classifications of Frieze Groups and an Introduction to Crystallographic Groups*, 2019.

[12] Martin, G. E.: *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*, Springer, 1982.

[13] McGuire, M.: *Frieze Patterns: Approaches with Group Theory and Combinatorics*, 2017., https://issuu.com/idancarre/docs/mcguire_freizepatternresearchpaper, pristupljeno 02.05.2020.

[14] Pavković, B.;Veljan, D: *Elementarna matematika I.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[15] Širola, B.: *Algebarske strukture skripta*, Zagreb, 2017.

[16] *Frieze patterns*, https://www.youtube.com/watch?v=524gLKdaMZM, pristupljeno 17.07.2020.

[17] *Geometry 9.6a, Frieze Patterns and Translation Symmetry*, https://www.youtube.com/watch?v=td8JVOYpWfE, pristupljeno 17.07.2020.

[18] *7 Frieze Groups* , https://www.youtube.com/watch?v=RcoTKka7rxw, pristupljeno 17.07.2020.

Sažetak

Inspirirani očitom simetrijom i ljepotom uzoraka ornamenata koje pronalazimo na drevnim zgradama, tkaninama, nakitu, posuđu itd., u ovom diplomskom radu tražit ćemo načine kako klasificirati te uzorke s gledišta matematičara. Matematički gledano, ornamenti su geometrijski ravninski uzorci čija se struktura ponavlja beskonačno mnogo puta u jednom smjeru. Ovisno o izometrijama koje komponiramo dobivamo razlicite uzorke, a ovisno o tome razlikovat ćemo grupe ornamenata. Grupa simetrija ornamenata naziva se grupa ornamenata i pokaže se da postoji točno sedam grupa ornamenata. Klasifikacija ornamenata po grupama temelji se na kompoziciji nekih od sljedecih izometrija: translacije duž fiksne horizontalne osi L, rotacije za $180°$ oko točke na osi L, osne simetrije s obzirom na horizontalnu os, osne simetrije s obzirom na vertikalnu os te klizne simetrije. Svaka od sedam grupa ornamenata potkrijepljena je primjerima. Također, prikazan je i primjer prepoznavanja grupe ornamenata na uzorcima na vazi i tradicionalnoj narodnoj nošnji. U posljednjem poglavlju predstavljene su mogućnosti upotrebe ornamenata u modernoj nastavi matematike kroz razne aktivnosti.

Summary

Inspired by obvious symmetry and beauty of frieze patterns found on ancient buildings, fabrics, jewelry, pots etc., in this thesis we will look for possible ways for classification of those patterns from mathematical point of view. Mathematically speaking, friezes are geometrical planar patterns structured in such a way that they repeat themselves in one direction indefinitely. Depending on isometries combined we get various samples and based on that we discern frieze groups. The symmetry group of a frieze pattern is called a frieze group, and a proof that there are exactly seven types of frieze groups will be presented in the thesis. This classification is based on fact that the only possible motions for the frieze pattern are: translation along a fixed horizontal line L, 180° rotation about point on L, a horizontal mirror through L, vertical mirrors and glide symmetry. Examples will be provided for each of the seven groups. Further on, it will be shown how to recognize a type of group when one is presented with a pattern on an object such as a vase or a traditional Croatian dress. The final chapter considers the possibilities of various frieze-using activities in modern math class.

Životopis

Rođena sam 03.08.1994. u Zagrebu. Osnovnu školu pohađala sam u Područnoj školi Laz i Osnovnoj školi Marija Bistrica. Srednju školu završila sam u Zagrebu, nakon čega sam 2013. godine upisala Prirodoslovno- matematički fakultet u Zagrebu, Fizički odsjek; smjer: Fizika istraživački. Potom 2015. godine započinjem studij Matematike, smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno- matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon tri godine završila sam preddiplomski studij čime sam stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Svoje obrazovanje nastavila sam na diplomskom studiju, također na nastavničkom smjeru Matematike.