

# Teorijski opis eksperimenta s dvije pukotine u supravodiču i veza s Bohmovom mehanikom

---

**Atelj, Josip**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:979218>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Josip Atelj

TEORIJSKI OPIS EKSPERIMENTA S DVIJE  
PUKOTINE U SUPRAVODIČU I VEZA S  
BOHMOVOM MEHANIKOM

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Josip Atelj**

Diplomski rad

**Teorijski opis eksperimenta s dvije  
pukotine u supravodiču i veza s  
Bohmovom mehanikom**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Hrvoje Nikolić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem se svome mentoru dr. sc. Hrvoju Nikoliću na svim korisnim savjetima, strpljenju te srdačnosti.

## Sažetak

U ovom radu teorijski ćemo opisati struju u supravodiču temeljem fenomenološke Ginzburg-Landauove jednažbe. Pokazat ćemo da silnice struje u određenoj aproksimaciji imaju istu formu kao i Bohmove putanje čestica koje nose struju. Premda nam Heisenbergove nejednakosti ne dopuštaju neposredno mjerenje tih putanja, ovim putem možemo Hallovom probom mjeriti struju u supravodiču te dobiti svojevrсно usrednjenje preko ogromnog broja čestica. Eksperiment je zamišljen na pločastom supravodiču koji ima barijeru i dvije pukotine. U tom slučaju jasno su prisutna svojstva vala, tj. interferencija koja se preslikava na putanju čestica. Mjerenjem navedenih veličina pokazali bismo valnočestična svojstva makroskopske struje te dobili dodatnu potvrdu da koncept Bohmovih putanja nije čisto hipotetski već da su one na neki način mjerljive u laboratoriju.

Ključne riječi: supravodljivost, Ginzburg-Landauova teorija, Bohmova mehanika

# Theoretical description of the two-slit experiment in a superconductor and the relation with Bohmian mechanics

## Abstract

In this thesis we will describe theoretically a current in a superconductor on the basis of phenomenological Ginzburg-Landau equation. We will show that, in a suitable approximation, current streamlines have the same form as the Bohmian trajectories of the point-like current-carriers. Although Heisenberg inequalities prevents us from directly measuring these trajectories, we can use a Hall probe to measure a current in a superconductor and arrive at the measurements which are, in a way, averaged over a large number of particles. The experiment is envisioned on a planar superconductor having a barrier and two slits. In this case both wave and particle properties are clearly present, i.e. interference which is manifested in particle trajectories. By measuring these quantities it would be seen how a macroscopic current exhibits wave-particle properties and we would thus acquire an additional confirmation that the concept of Bohmian trajectories is not merely a hypothetical one, but that they are, in some sense, measurable in a laboratory.

Keywords: superconductivity, Ginzburg-Landau Theory, Bohmian Mechanics

# Sadržaj

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Problem mjerenja u kvantnoj mehanici</b>                                 | <b>3</b>  |
| 2.1      | Standardni formalizam kvantne mehanike . . . . .                            | 3         |
| 2.2      | Osnove teorije mjerenja . . . . .   | 5         |
| 2.3      | Schrödingerova mačka . . . . .  | 6         |
| 2.4      | Klasifikacija interpretacija . . . . .                                      | 7         |
| 2.4.1    | C. ne vrijedi. . . . .  | 8         |
| 2.4.2    | B. ne vrijedi. . . . .  | 8         |
| 2.4.3    | A. ne vrijedi. . . . .  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Bornovo pravilo u bazi položaja</b>                                      | <b>10</b> |
| 3.0.1    | Što mjerimo? . . . . .  | 10        |
| 3.1      | POVM formalizam . . . . .   | 11        |
| 3.1.1    | Naimarkov teorem . . . . .  | 12        |
| 3.2      | Izvod općenitog Bornovog pravila . . . . .                                  | 13        |
| 3.2.1    | PVM mjerenje . . . . .  | 15        |
| 3.2.2    | POVM mjerenje . . . . .   | 16        |
| 3.2.3    | Najopćenitiji slučaj . . . . .  | 17        |
| 3.3      | Komentar . . . . .  | 19        |
| <b>4</b> | <b>Bohmova mehanika</b>   | <b>19</b> |
| 4.1      | Postulati teorije . . . . .   | 20        |
| 4.2      | Polja $S$ i $R$ . . . . .   | 21        |
| 4.3      | Kvantni potencijal . . . . .  | 22        |
| 4.4      | Raspodjela čestica . . . . .  | 23        |
| 4.5      | Višečestični sustavi . . . . .  | 24        |
| 4.6      | Konzistentnost Bohmove mehanike sa standardnom kvantnom mehanikom . . . . . | 26        |
| 4.7      | Kritika Bohmove mehanike . . . . .  | 28        |
| <b>5</b> | <b>Supravodljivost</b>  | <b>29</b> |
| 5.1      | Meissnerov efekt . . . . .  | 30        |



|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.2      | Termodinamička svojstva . . . . .                      | 31        |
| 5.3      | Ginzburg-Landauova teorija . . . . .                   | 33        |
| 5.4      | SQUID . . . . .  | 37        |
| <b>6</b> | <b>Silnice suprastruje i veza s Bohmovom mehanikom</b> | <b>39</b> |
| 6.1      | Suprastruja . . . . .                                  | 40        |
| 6.2      | Veza s Bohmovom mehanikom . . . . .                    | 41        |
| 6.3      | Modeliranje valne funkcije . . . . .                   | 44        |
| 6.4      | Izračun silnica struje . . . . .                       | 48        |
| 6.4.1    | Klasične struje . . . . .                              | 49        |
| 6.5      | Kvantni potencijal . . . . .                           | 50        |
| 6.6      | Ka eksperimentu . . . . .                              | 52        |
| <b>7</b> | <b>Zaključak</b>                                       | <b>54</b> |
|          | <b>Dodaci</b>  | <b>55</b> |
| <b>A</b> | <b>Veza BCS i GL teorije</b>                           | <b>55</b> |
| <b>B</b> | <b>Funkcionalna derivacija</b>                         | <b>60</b> |
| <b>C</b> | <b>Primjer POVM mjerenja</b>                           | <b>62</b> |
|          | <b>Literatura</b>                                      | <b>64</b> |

# 1 Uvod

Jedan od naistaknutijih rezultata u kvantnoj mehanici zasigurno je Heisenbergovo načelo neodređenosti. U najpopularnijem obliku ono se izražava kao  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ . Prema standardnom pristupu kvantnoj mehanici ovaj rezultat jasno ukazuje na nemogućnost istovremenog određivanja položaja i impulsa čestice - sve veća preciznost u određivanju jedne veličine rezultira u odgovarajućoj nepreciznosti druge veličine tako da je Heisenbergova nejednakost stalno zadovoljena. Štoviše, ne samo da nam informacija o putanji čestice  $x(t)$  nije dostupna, nego o tako nečemu uopće nema smisla govoriti; česticama uopće ne možemo smisljeno pripisati sva svojstva.

No ovaj zaključak nije nužna logička posljedica navedene nejednakosti - upravo zato naglašavamo da je riječ o *standardnom pristupu kvantnoj mehanici*. Jedan primjer teorije u kojoj je pojam dobro definirane putanje čestice kompatibilan s Heisenbergovim načelom je Bohmova mehanika.

Premda u Bohmovo mehanici također vrijedi načelo neodređenosti, ono ima potpuno drugi status nego u standardnom pristupu. Ovdje neodređenost nije fundamentalan princip već odraz naših praktičnih, tj. eksperimentalnih nemogućnosti utvrđivanja dobro definiranih veličina koje objektivno postoje neovisno o promatraču.

Spomenutu nemogućnost mjerenja putanja ipak možemo donekle zaobići eksperimentima koji posredno mjere nešto što ima smisla interpretirati kao putanje čestica. Primjer takvih mjerenja su tzv. *slaba mjerenja* [37] kod kojih vršimo mjerenje koje unosi što manji poremećaj u sistem te naposljetku uprosječujemo preko velikog ansambla sistema. Time dobivamo takoreći *operativnu* definiciju brzine čestice koja odgovara upravo brzini čestice u Bohmovo mehanici [38].

Ovdje iznosimo novu metodu preko koje možemo *vidjeti* Bohmove putanje u praksi. Ideja je donekle slična slabim mjerenjima utoliko što su mjerenja indirektna i svojevrsna uprosječenja, no određeni konceptualni problemi koji su prisutni kod slabih mjerenja su premošćeni.

Navedeno možemo u praksi izvesti iskorištavanjem svojstava supravodiča. Fenomene supravodljivosti možemo opisati fenomenološkom Ginzburg-Landauovom teorijom, a osnovna veličina od interesa nam je suprastruja koju odatle možemo izračunati. Izvest ćemo izraz za suprastruju pločastog supravodiča čija svojstva će

nam najviše biti od interesa u slučaju barijere s dvije pukotine.

Veza s Bohmovom mehanikom bit će vidljiva kada izračunamo putanje nosioca suprastruje - one će zapravo imati istu formu kao i silnice suprastruje. Mjerenjem struje  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  preko magnetskog polja koje ona stvara dobivamo spomenute silnice i njihovu formu. Naše mjerenje je makroskopskog karaktera u smislu da proba kojom mjerimo zapravo mjeri magnetsko polje ogromnog broja čestica koje u tom području čine struju. To naše mjerenje čini indirektnim te ne odgovara neposrednom mjerenju putanje jedne čestice. No svakako, ta interpretacija se čini smislenom, o čemu će nešto ozbiljnije biti rečeno u tekstu.

Indirektnim mjerenjima, kako je kazano gore, tako uspijevamo *zaobići* Heisenbergove nejednakosti. One dakako nisu i ne mogu biti narušene ovim mjerenjima no konačni rezultat daje, metaforički rečeno, obrise onoga što nam nejednakosti ne dopuštaju da čisto vidimo.

Ovi teorijski rezultati, a i možebitni eksperiment, neće dati završnu riječ po pitanju koju interpretaciju odabrati - to zapravo neće dati ni jedan eksperiment kao što ćemo vidjeti u kasnijim poglavljima. Osnovna ideja je osnažiti koncept Bohmovih putanja te pokazati da one nisu isključivo hipotetske - a ovime to možemo i opravdati - već da su u nekom smislu mjerljive. Koncept Bohmovih putanja tako dobiva i eksperimentalno uporište pored već postojećeg teorijskog.

Putanje ćemo gledati u svojevrsnom eksperimentu s dvije pukotine. Putanje su tada posebno zanimljive budući nam ukazuju na dualnost prirode - postojanje čestica skupa s valovima.

U radu ćemo prvo u poglavlju 2 prokomentirati standardni formalizam kvantne mehanike te probleme koje sa sobom nosi gdje središnje mjesto zauzima problem mjerenja. Komentirat ćemo na koji način se takvi problemi općenito mogu riješiti te zašto uobičajeni pristup nije posve zadovoljavajuć. Teoriju mjerenja ćemo u trećem poglavlju iskoristiti te pokazati da je Bornovo pravilo dovoljno postulirati u bazi položaja budući da ono implicira općenito Bornovo pravilo. U poglavlju 4 iznijet ćemo osnovne crte Bohmove mehanike te pokazati kako se ona nosi sa spomenutim konceptualnim problemima. Posebno ćemo u potpoglavlju 4.6 pokazati kako Bohmova mehanika i standardna kvantna mehanika daju ista eksperimentalna predviđanja. Poglavlje 5 govorit će o osnovnim fenomenima supravodljivosti te će biti iznijeta fenomenološka teorija kojom oni mogu biti opisani - Ginzburg-Landauova

teorija. Veza tako razrađene teorije supravodljivosti i Bohmove mehanike bit će prokomentirana u poglavlju 6. Konačno ćemo u potglavlju 6.4 izračunati silnice supras-truje na primjeru eksperimenta s dvije pukotine te ih dovesti u vezu s bohmovim putanjama.

## 2 Problem mjerenja u kvantnoj mehanici

### 2.1 Standardni formalizam kvantne mehanike

U ovom dijelu ćemo ukratko izložiti osnovne aksiome kvantne mehanike te njihovo značenje.

Stanje kvantnomehantičkog sustava predstavljeno je vektorom  $|\psi\rangle$  u Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$  (koji može biti beskonačno dimenzionalan). Vektor stanja je normaliziran, tj.

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (2.1)$$

Kvantnomehantičke opservable predstavljene su hermitskim operatorima na Hilbertovom prostoru koji sadrži vektore stanja. Mogući ishodi mjerenja neke opservable  $\hat{R}$  dani su njenim svojstvenim vrijednostima  $r$  koje su određene jednadžbom

$$\hat{R}|r\rangle = r|r\rangle, \quad (2.2)$$

gdje je  $|r\rangle$  odgovarajući svojstveni vektor. Konkretno, operator položaja označavamo sa  $\hat{X}$  te njegove svojstvene vektore sa  $|\mathbf{x}\rangle$ . Operator impulsa  $\hat{P}$  u bazi položaja poprima oblik

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla. \quad (2.3)$$

Vektor stanja  $|\psi\rangle$  može se razviti u bazi položaja

$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle. \quad (2.4)$$

Komponente u razvoju,  $\psi(\mathbf{x})$ , zovemo valnom funkcijom. Ona se dovodi u vezu s eksperimentom: u slučaju da imamo česticu opisanu valnom funkcijom  $\psi(\mathbf{x})$ , vjero-

jatnost da ju u vremenu  $t$  nađemo u volumenu  $d^3x$  oko točke  $\mathbf{x}$  dana je sa

$$P(\mathbf{x}, t) d^3x = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x. \quad (2.5)$$

Ova interpretacija valne funkcije naziva se Bornovo pravilo [1] te se može poopćiti za proizvoljnu bazu<sup>1</sup>: prilikom mjerenja opservable  $\hat{R}$  na sistemu opisanom vektorom stanja  $|\psi\rangle$  rezultati eksperimenta su dani svojstvenim vrijednostima danog operatora sa sljedećom vjerojatnošću

$$p_r = |\langle r|\psi\rangle|^2. \quad (2.6)$$

Koristeći Bornovo pravilo za očekivanu vrijednost operatora  $\hat{R}$  u stanju  $|\psi\rangle$  imamo

$$\langle \hat{R} \rangle = \langle \psi | \hat{R} | \psi \rangle. \quad (2.7)$$

Evolucija vektora stanja  $|\psi(t)\rangle$  dana je Schrödingerovom jednađbom

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.8)$$

Zamijenimo li klasični hamiltonijan hermitskim operatorom, Schrödingerova jednađbu možemo pisati u bazi položaja kao

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

Iz gornje jednađbe direktno slijedi princip superpozicije: neka su  $\psi_1(\mathbf{x}, t)$  i  $\psi_2(\mathbf{x}, t)$  rješenja Schrödingerove jednađbe - tada je bilo koja linearna superpozicija tih dvaju rješenja

$$\psi(\mathbf{x}, t) = c_1\psi_1(\mathbf{x}, t) + c_2\psi_2(\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

također rješenje Schrödingerove jednađbe.

Jedna od naistaknutijih posljedica ove teorije je tzv. relacija neodređenosti. Uzimimo neka dva hermitska operatora  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$ . Tada za neko stanje  $|\psi\rangle$  vrijedi

$$\Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|, \quad (2.11)$$

gdje je  $\Delta \hat{A} = [\langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle]^{1/2}$  te analogno i za opservablu  $\hat{B}$ . Kao poseban

<sup>1</sup>No, kao što ćemo vidjeti u poglavlju 3, dovoljno je postulirati Bornovo pravilo u obliku (2.5).

slučaj ove relacije, za impuls i položaj čestice u jednoj dimenziji, putem  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{I}$  dobivamo

$$\Delta\hat{x} \cdot \Delta\hat{p}_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.12)$$

Iz potonjeg izraza slijedi<sup>2</sup> - a to je posebno zanimljivo za temu ovoga rada - da položaj i impuls čestice ne mogu istovremeno biti oštro definirani, tj. da kvantnomehaničke čestice nemaju dobro definirane putanje kao što to imaju klasične čestice (jer da imaju, znali bismo npr.  $x(t)$  odakle bismo našli brzinu te konačno i impuls, što bi proturječilo jednadžbi (2.12)).

## 2.2 Osnove teorije mjerenja

Premda u klasičnoj mehanici teorija mjerenja praktički ne postoji, ona u kvantnoj mehanici zauzima središnje mjesto te je, kao što ćemo vidjeti na Schrödingerovom primjeru, jedan od glavnih izvora konceptualnih poteškoća.

Za kvantni opis mjerenja potrebno je eksplicitno uvesti i kvantnomehanički opisati mjerni uređaj. O različitim rezultatima koje mjerni uređaj pokazuje govorit ćemo, donekle simbolički, kao o različitim stanjima kazaljke. Stanja kazaljke bit će predstavljena skupom vektora  $\{|A_i\rangle\}$ , a različita stanja su promatraču, razumljivo, makroskopski raspoznatljiva.

U slučaju kazaljke koja je u početnom trenutku opisana vektorom  $|A_0\rangle$  te mikroskopskog sistema opisanog vektorom  $|r\rangle$ , mi mjerenjem opservable  $\hat{R} = \sum_r r |r\rangle \langle r|$  želimo dobiti sljedeću evoluciju

$$\hat{U} |r\rangle \otimes |A_0\rangle = |r\rangle \otimes |A_r\rangle, \quad (2.13)$$

gdje je  $\hat{U}$  unitarni operator evolucije izgrađen preko Hamiltonijana interakcije mjernog uređaja i sistema. Ovom jednadžbom ostvarena je jednoznačna veza između stanja kazaljke i stanja sistema, a to je upravo ono što eksperimentom želimo postići.

Dobivena jednadžba se zbog linearnosti Schrödingerove jednadžbe lako poopći na slučaj kada je sistem u početku u proizvoljnom početnom stanju  $|\psi\rangle = \sum_r c_r |r\rangle$ , tj.

$$\hat{U} |\psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \sum_r c_r |r\rangle \otimes |A_r\rangle. \quad (2.14)$$

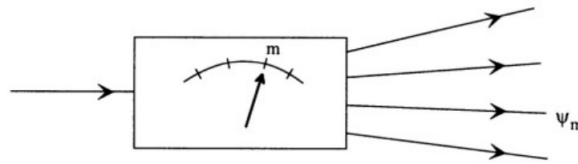
---

<sup>2</sup>Zapravo ne slijedi nužno, ali držimo se okvira standardnog formalizma.

Gornju jednadžbu ipak treba malo preinačiti budući je zahtjev da mikrosistem ostane u svojstvenom stanju operatora prestrog. Jednadžbu (2.14) možemo poopćiti

$$\hat{U} |\Psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle \otimes |A_m\rangle, \quad (2.15)$$

uz razliku da skup vektora  $|\psi_m\rangle$  općenito nije ortogonalan. Evoluciju (2.15) simbolički možemo prikazati kao na slici 2.1: imamo početno stanje  $|\Phi\rangle$  koje evoluira u stanje  $|\psi\rangle$  prilikom čega makroskopski mjerni uređaj (kazaljka) zabilježava rezultat  $m$  prikazan vektorom stanja  $|A_m\rangle$ .



Slika 2.1: Shematski prikaz mjernog uređaja. Slika preuzeta iz [28].

### 2.3 Schrödingerova mačka

Izložimo sada ukratko neke konceptualne probleme koji izranjaju iz gornjeg formalizma, a koji su usko vezani za probleme iznesene u slavnom Schrödingerovom primjeru s mačkom [2].

Osvrnimo se prvo na slučaj kod kojega je sustav u početnom stanju jedan od svojstvenih vektora opservable koju mjerimo. Ta situacija je prikazana jednadžbom (2.13) i ona ima relativno jednostavnu interpretaciju: mjereni sistem interagira s mjernim uređajem tako da dobivamo željenu korelaciju kod kojega nam mjerni uređaj otkriva informaciju o sistemu.

No pogledajmo sada općenitiju situaciju opisanu jednadžbom (2.14). Mjerenjem zabilježavamo samo jedan od rezultata, tj. ostvaruje se samo jedno od skupa stanja  $|A_r\rangle$  koje predstavlja rezultat  $r$ . Prilikom mjerenja mjereni sustav onda doživljava sljedeću promjenu <sup>3</sup>

$$|\psi\rangle \rightarrow |r\rangle, \quad (2.16)$$

<sup>3</sup>Ovdje pretpostavljamo tzv. mjerenja prve vrste no problem na koji se ovdje želi ukazati - neunitarna evolucija - prisutan je i kod mjerenja druge vrste.

ili općenitije prema jednadžbi (2.15)

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\psi_m\rangle, \quad (2.17)$$

što u nijednom slučaju nije unitarno! Ovo iziskuje odgovor na pitanje kakv tip prijelaza je (2.16) budući da takva evolucija ne može biti predstavljena Schrödingerovom jednadžbom.

Schrödinger se svojim primjerom s mačkom okomio zapravo na jednadžbu (2.14) čija se problematičnost najočitije vidi iz samog njegovog primjera. Neka u početku imamo živu mačku te neraspadnuti radioaktivni materijal; tada evoluciom (2.14) dobivamo sljedeće stanje<sup>4</sup>

$$|\text{živa mačka}\rangle |\text{neraspadnuti atom}\rangle + |\text{mrtva mačka}\rangle |\text{raspadnuti atom}\rangle. \quad (2.18)$$

Nije jasno čemu bi u stvarnosti odgovaralo dobiveno stanje. Riječima Schrödingera:

The  $\psi$ -function of the entire system would express this by having in it the living and dead cat (pardon the expression) mixed or smeared out in equal parts.

U sljedećem potpoglavlju pogledat ćemo na koji način se sljedeće poteškoće mogu riješiti.

## 2.4 Klasifikacija interpretacija

Da bismo na gornja i slična pitanja pokušali odgovoriti zgodno je uvesti sljedeću klasifikaciju (prema Maudlinu [3], a koju slijedi također Dürr i Lazarovici [4]).

Sljedeće tri tvrdnje su međusobno isključive:

A. Stanje fizikalnog sistema potpuno je opisano valnom funkcijom, tj. valna funkcija određuje sva fizikalna svojstva sustava.

B. Evolucija valne funkcije uvijek evoluirá prema Schrödingerovoj jednadžbi.

C. Mjerenja imaju jasne rezultate, tj. nakon mjerenja mjerni uređaj se nalazi u točno određenom stanju.

Pogledajmo nakratko nekonzistentnost iznesenih tvrdnji na primjeru Schrödingerove mačke.

---

<sup>4</sup>Radi jednostavnosti izostavljamo normalizaciju.



U slučaju da je tvrdnja B. točna, tada slijedi da mačka i atom evoluiraju u stanje kao ono u (2.18). Ovo naravno vodi na pitanje kakvo je onda stanje mjernog uređaja.

Ako je A. točno tada valna funkcija mora odrediti fizikalno stanje mjernog uređaja. No valna funkcija (2.18) ne može jasno odgovoriti na to pitanje, tj. ne može jasno reći je li mačka živa ili mrtva.

Dakle, ako su A. i B. točni, moramo napustiti tvrdnju C. U tom slučaju nakon mjerenja nemamo jasne rezultate. Ovo znači da ne možemo istovremeno zadržati sve tri tvrdnje, a to pak znači da bilo koja konzistentna interpretacija kvantne mehanike mora odbaciti jednu od tih tvrdnji. Počevši od zadnje, pogledajmo čemu vodi odbacivanje svake pojedine tvrdnje.

#### **2.4.1 C. ne vrijedi.**

Ovo je najrjeđe razmatrana opcija te vodi na pomalo egzotične teorije. Glavna teorija u ovoj skupini je tzv. *teorija mnoštva svijetova* čiju je izgradnju započeo Everett [5]. U ovom pristupu valna funkcija ostaje u stanju superpozicije te uvijek evoluirava prema Schrödingerovoj jednadžbi. Teorija uvodi cijepanje na više svijetova u smislu da svaka komponenta valne funkcije živi u određenom svijetu. Tada je naše iskustvo dobivanja jasnog rezultata posljedica toga što smo se našli u određenom svijetu u kojem se ostvarila ta komponenta valne funkcije.

Pored metafizičkih problema, ovaj pristup teško objašnjava valjanost Bornovog pravila te pati od problema preferirane baze [6].

#### **2.4.2 B. ne vrijedi.**

Ovaj pristup, često implicitno prisutan, je dio standardnog tumačenja kvantne mehanike, a teorije koje pripadaju ovoj klasi općenito se mogu nazivati *teorijama kolapsa*. U ovim interpretacijama valna funkcija ne evoluirava uvijek prema Schrödingerovoj jednadžbi već je evolucija ponekad nelinearna.

Spomenimo prvo da ćemo ovdje sintagmu *standardni pristup kvantnoj mehanici* koristiti za tzv. kopenhašku ili ortodoksnu interpretaciju kvantne mehanike. Nažalost, nije potpuno jasno što ova interpretacija točno govori u određenim okolnostima te postoji više varijanti iste. Ona je više skup raznih ideja koje su kroz povijest bile najprihvaćenije u znanstvenoj zajednici te su u fakultetskom učenju kvantne fizike

postale dominantne<sup>5</sup>. Temeljne ideje su zasigurno zacrtali Bohr i Heisenberg no ni oni sami se nisu slagali po svim pitanjima, dok je posebice Bohrovo pisanje često općenito i neegzaktno. Pored spomenutog dvojca Dirac i von Neumann su također dali znatan doprinos u oblikovanju tumačenja. Kao tri osnovne ideje ovog tumačenja mogli bismo navesti [28] i) tezu o potpunosti kvantne mehanike (tvrdnja A), ii) princip korespondencije te iii) princip komplementarnosti.

Princip komplementarnosti smo zapravo već gore spomenuli a tiče se nemogućnosti poznavanja putanje čestice i istovremenog prisustva interferencijskih efekata. Možemo reći da se on tiče istovremenog mjerenja nekompatibilnih opservabli te je ovdje Bohrov utjecaj posebno snažan u stvaranju ideje da ne samo da određena svojstva čestice ne možemo u određenom eksperimentalnom postavu mjeriti, nego ona uopće nisu definirana i o njima nema smisla govoriti.

Što se tiče odbacivanja tvrdnje B., u standardnom pristupu se tako *ad hoc* postuliira da valna funkcija, prilikom mjerenja, naglo prelazi (kolabira) u jedno odgovarajuće svojstveno stanje (jednadžba (2.16)) s vjerojatnošću danom Bronovim pravilom. Ovaj proces naziva se *von Neumannov postulat projekcije* [7]. No to ograničenje je, kao što je prije bilo rečeno, prestrog te se rijetko ostvaruje u eksperimentalnoj praksi<sup>6</sup> [28]. Općenitije kolaps možemo prikazati evolucijom (2.17) no, kakogod, pristup je jednako problematičan.

Ovdje u teoriju eksplicitno uvodimo, štoviše postuliramo, mjerenje i opažanje kao fundamentalne koncepte. Postavljaju se pitanja po čemu je mjerenje posebno te ne bi li se kolaps trebao događati stalno u prirodi, u kojem trenutku se događa kolaps, jesu li opažači samo svjesna bića, itd. Također se sasvim razumno postavlja pitanje o čemu govori kvantna mehanika<sup>7</sup>. Govori li kvantna mehanika naprosto o rezultatima mjerenja i ničemu više? Zaustavit ćemo se ovdje riječima Bella [10]

To restrict quantum mechanics to be exclusively about piddling laboratory operations is to betray the great enterprise. A serious formulation will not exclude the big world outside the laboratory.

---

<sup>5</sup>Upravo zbog ovakvog nejasnog pristupa u razjašnjavanju konceptualnih problema, te s druge strane odbacivanja razrješavanja istih problema pod izlikom da ne spadaju u domenu fizike, se kaže da se djelujući fizičari uglavnom vode geslom *šuti i računaj*.

<sup>6</sup>Primjeri mjerenja u kojima postulat projekcija nije zadovoljen bi bila mjerenja položaja ili impulsa čestice gdje opservable imaju kontinuirani spektar te stoga nenormalizabilne vektore stanja. Također, fotonski detektor je zgodan primjer za čije funkcioniranje je nužno da se foton apsorbira tako da je konačno stanje EM polja vakuumsko stanje.

<sup>7</sup>Mogli bismo reći: kakva je ontologija standardne kvantne mehanike?

Pored spomenute interpretacije, postoje određene preciznije teorije kolapsa. Primjer toga bi zasigurno bila GRW teorija [8]. S druge strane postoji npr. Pearlova teorija [9] kod koje je evolucija uvijek nelinearna.

Svi spomenuti pristupi i dalje pate od konceptualnih poteškoća koje slijede iz prihvaćanja monizma valne funkcije.<sup>8</sup>

### 2.4.3 A. ne vrijedi.

Odbacivanjem prve tvrdnje odbacujemo princip potpunosti te tvrdimo da opis fizikalne realnosti nije dan isključivo preko valne funkcije. Ovdje u teoriju unosimo nove elemente fizikalne realnosti te se ove teorije nazivaju *teorijama skrivenih varijabli*. Pridjev *skriven* je pomalo nespretan i nesretan budući da dodatne varijable ne moraju u nikakvom smislu biti skrivene.

Upravo ovdje pripada teorija<sup>9</sup> koja će biti osnovom ovoga rada - Bohmova mehanika<sup>10</sup> [11] [12]. Nju zasebno izlažemo u poglavlju 4.

## 3 Bornovo pravilo u bazi položaja

Osnovni aksiom kvantne mehanike koji daje vezu između eksperimenta i teorije je Bornovo pravilo. Ono smo već izložili u potpoglavlju 2.1 te ga možemo sažeto ponoviti: u bazi hilbertovih stanja  $\{|r\rangle\}$  vjerojatnost dobivanja rezultata  $r$  je  $p_r = |\langle r|\psi\rangle|^2$ . Iz ove formulacije je vidljivo da je pravilo postulirano da vrijedi za proizvoljnu bazu izvjesnog Hilbertovog prostora.

Radi općenitosti, a nasuprot von Neumannovom postulatu projekcije, vodit ćemo pretpostavkom da sistem, nakon interakcije s mjernim uređajem, ostaje u nekoj općenitoj superpoziciji kao što govori jdbn. (2.15).

### 3.0.1 Što mjerimo?

Valja nam se zapitati što mi zapravo mjerimo kada provodimo eksperiment. Budući je kvantni svijet mikrosvijet, a svijet dostupan promatraču makrosvijet, nužno je imati premosnicu između ta dva svijeta. Premosnica je upravo mjerni uređaj na kojemu

---

<sup>8</sup>Granice ovoga rada ne dopuštaju ozbiljno raspravljanje konceptualnih poteškoća, o čemu se naširoko pisalo.

<sup>9</sup>Postoje, dakako, i druge alternative koje negiraju tvrdnju A. no o tome ovdje neće biti riječi.

<sup>10</sup>Poznata i kao *pilot-wave* teorija ili de Broglie-Bohmova teorija.

se događa interakcija s mjerenim sistemom te posljedično zabilježava makroskopski rezultat. Bitno je ovdje naglasiti da saznanja o mikrosvijetu dobivamo posredno, tj. zaključujemo preko teorijske veze kazaljke makroskopskog uređaja te mikrosistema - preko jednadžbe (2.15).

Ovo nas navodi na razmatranje sljedećeg pojma - *perceptible* [30]. Pod tim pojmom razumijevat ćemo one stvari ili pojave koje su ljudskim osjetilima dostupne neposrednim putem. Odavde slijedi da niti jedan mikroskopski objekt nije perceptibilan. S druge strane perceptibilan nužno odgovara nečemu makroskopskom, ali obrat ne vrijedi s obzirom da neki makroskopski objekti nisu perceptibilni. Primjeri perceptibilni su svakidašnji objekti kao što su stol, mjesec itd., ali isto tako zvuk i ostali osjeti.

Za razliku od *perceptible* postoje i *nonperceptible* - npr. elektron, atom, EM polje itd. Smisao *nonperceptible* je u tome da one objašnjavaju ponašanje perceptibilnog. Svaki eksperiment se svodi na opažanje perceptibilnog koje se onda pojašnjavaju *nonperceptible* objektima.

Glavna odlika perceptibilnog bitna za izvod u ovom radu je u tome što se sve mogu svesti na razliku u njihovim makroskopskim položajima [10], [30]. Tako se npr. klik u detektoru može svesti na oscilacije izvjesne membrane; kod digitalnog ekrana perceptibilni su makroskopski različite znamenke na ekranu, itd. Općenito rečeno svi različiti osjetni podražaji su posljedica makroskopske raspoznavljivosti nečega.

### 3.1 POVM formalizam

POVM (*eng.* Positive Operator Valued Measures) formalizam [29] uveden je relativno kasno te poopćuje uobičajeni formalizam teorije mjerenja (točnije rečeno, ovaj formalizam je poopćenje standardnog formalizma uopće).

Obično opservablu opisujemo hermitskim operatorom  $\mathcal{O}$  koji se pomoću spektralne dekompozicije može pisati kao

$$\mathcal{O} = \sum_r \lambda_r \hat{P}_r, \quad (3.19)$$

gdje projektori zadovoljavaju  $\hat{P}_r \hat{P}_l = \hat{P}_r \delta_{rl}$  te  $\sum_r \hat{P}_r = I$ . Tada mjerenje opservable  $\mathcal{O}$

na stanju  $|\psi\rangle$  kao rezultat daje vrijednost  $\lambda_r$  s vjerojatnošću

$$p_r = \langle \psi | \hat{P}_r | \psi \rangle. \quad (3.20)$$

Ovo je zapravo Bornovo pravilo (2.6).

Opservable (3.19) nazivat ćemo PVM (*eng.* Projector Valued Measure), a mjerenja predstavljena takvim operatorom PVM mjerenja.

Kao što je već rečeno u uvodu, ovome se još nadodaje tvrdnja da nakon mjerenja, stanje  $|\psi\rangle$  prelazi u

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_r |\psi\rangle}{\sqrt{p_r}}. \quad (3.21)$$

Iz ovog razmatranja je jasnije zašto se takva mjerenja nazivaju projektivnim. Kao što smo već rekli, mi se nećemo držati ovog principa.

Jednadžbu (3.20) također možemo poopćiti na

$$p_r = \langle \psi | \hat{E}_r | \psi \rangle, \quad (3.22)$$

gdje su  $\hat{E}_r$  operatori koji zadovoljavaju sljedeća svojstva

- $\hat{E}_r^\dagger = \hat{E}_r$
- $\sum_r \hat{E}_r = I$
- $\langle \psi | \hat{E}_r | \psi \rangle \geq 0$  za svaki vektor  $|\psi\rangle$ .

Sva ova svojstva zadovoljavaju i projektori  $P_r$  no operatori  $E_r$  općenito ne moraju biti projektori. Odavde slijedi da su projektivna (PVM) mjerenja poseban slučaj POVM mjerenja. Važno je još napomenuti da broj operatora  $E_r$  ne mora biti jednak dimenziji Hilbertovog prostora na kojemu djeluju već može biti i veći.

Ovako izložen, formalizam je poprilično apstraktan te je stoga jedna primjena formalizma dana u Dodatku C.

### 3.1.1 Naimarkov teorem

Neka je  $\hat{E}_r$  POVM na prostoru  $\mathcal{H}$ . Tada postoji Hilbertov prostor  $\mathcal{H}'$ , PVM  $\hat{M}'_r$  na prostoru  $\mathcal{H}'$  te ortogonalni operator projekcije  $\hat{P}$  takav da  $\hat{P}\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ , za koje vrijedi

$$\hat{E}_r = \hat{P}\hat{M}'_r\hat{P}. \quad (3.23)$$

Dokaz Naimarkovog teorema može se naći u npr. [28]. Ovo znači da svako POVM mjerenje može biti svedeno na PVM mjerenje u nekom većem Hilbertovom prostoru.

### 3.2 Izvod općenitog Bornovog pravila

U ovom odjeljku izvodimo Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi postulirajući ga samo u bazi položaja [30].

Ključni uvid za provedbu izvoda je činjenica da nama trebaju samo vjerojatnosti određenih perceptibla jer je to ono što u eksperimentu opažamo. Budući da perceptible razlikujemo njihovim makroskopskim položajima, njihove vjerojatnosti moramo izračunati u prostoru položaja. Također, budući da granica između perceptibla i ne-perceptibla nije oštra, čini se vjerodostojnim računati sve vjerojatnosti u prostoru položaja.

U našem slučaju perceptibla će biti predstavljena kazaljkom mjernog uređaja te ćemo mikroskopsko stanje kazaljke označiti sa  $|A_{i,j}\rangle$ . Nadalje, želimo mjeriti neku dinamičku varijablu  $\mathcal{R}$  koja je predstavljena operatorom  $R$  te vrijedi

$$\hat{R}|r\rangle = r|r\rangle. \quad (3.24)$$

Neka je kazaljka u početnom trenutku u stanju  $|A_0\rangle$ , te objekt u stanju  $|r\rangle$ . Tada je ukupno stanje na prostoru  $\mathcal{H}_{\text{objekt}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kazaljka}}$  jednako (odavde pa nadalje ispuštamo oznaku tenzorskog produkta)

$$|r\rangle|A_0\rangle. \quad (3.25)$$

Slično kao kod jednadžbe (2.15), ali malo općenitije, nakon interakcije objekta i mjernog uređaja stanje unitarno evoluirá

$$\hat{U}|r\rangle|A_0\rangle = \sum_{r'} a_{r'}|r'\rangle \sum_m b_m|A_{r,m}\rangle \equiv |\alpha_r\rangle, \quad (3.26)$$

gdje zbog unitarnosti vrijedi

$$\sum_{r'} |a_{r'}|^2 = \sum_m |b_m|^2 = 1. \quad (3.27)$$

Dobiveni vektor nije svojstveno stanje niti operatora  $\hat{R}$  niti operatora kazaljke.

Gore smo pretpostavili da je početno stanje objekta svojstveni vektor operatora

$\hat{R}$ , ali općenitije moramo uzeti da je ono  $|\psi\rangle = \sum_r c_r |r\rangle$ . U tom slučaju jednažba (3.26) prelazi u

$$\hat{U} |\psi\rangle |A_0\rangle = \sum_r c_r |\alpha_r\rangle. \quad (3.28)$$

Ova jednažba se može i dodatno poopćiti. Budući da sustav mjerni uređaj + objekt nije savršeno izoliran, korisno je u jednažbu ubaciti i okolinu. Nju ćemo označiti vektorom  $|O_i\rangle$ , a početno stanje okoline sa  $|O_0\rangle$ . Izraz (3.28) tada prelazi u

$$\hat{U} |\psi\rangle |A_0\rangle |O_0\rangle = \sum_r c_r |\alpha_r\rangle |O_r\rangle \equiv |\Psi_f\rangle. \quad (3.29)$$

Dobiveni izraz se može dodatno srediti

$$|\Psi_f\rangle = \sum_{r,m} c_r b_m |A_{r,m}\rangle |S_r\rangle, \quad (3.30)$$

gdje je uvedena pokrata  $|S_r\rangle \equiv |O_r\rangle \sum_{r'} a_{r'} |r'\rangle$  (S kao Sve ostalo). Ovu jednažbu možemo zapisati u prostoru položaja kao

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{r,m} c_r b_m A_{r,m}(\mathbf{x}) S_r(\mathbf{y}), \quad (3.31)$$

gdje je uvedena notacija  $A_{r,m}(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | A_{r,m} \rangle$  te  $S_r(\mathbf{y}) \equiv \langle \mathbf{y} | S_r \rangle$ ; ovdje  $\mathbf{x}$  označava položaje čestica koje sačinjavaju mjerni uređaj, tj.  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  gdje  $n$  označava broj čestica koje sačinjavaju uređaj. Isto tako  $\mathbf{y}$  označava položaje svih ostalih čestica.

Sada postulirajmo Bornovo pravilo u bazi položaja

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2. \quad (3.32)$$

Nadalje nametnimo zahtjev

$$A_{r_1,m}(\mathbf{x}) A_{r_2,m}(\mathbf{x}) \simeq 0 \quad \text{za} \quad r_1 \neq r_2, \quad (3.33)$$

motivacija kojega je mogućnost makroskopskog razlikovanja dvaju rezultata  $r_1$  i  $r_2$ . Izvod se dalje dijeli na dva osnovna slučaja. Uzmimo da je  $m_\alpha \neq m_\beta$  te da su  $r$ -ovi isti; tada u prvom slučaju vrijedi

$$A_{r,m_\alpha}(\mathbf{x}) A_{r,m_\beta}(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (3.34)$$

a u drugom

$$A_{r,m_\alpha}(\mathbf{x})A_{r,m_\beta}(\mathbf{x}) \simeq 0. \quad (3.35)$$

### 3.2.1 PVM mjerenje

Pogledajmo najprije prvi slučaj, tj. situaciju kada vrijedi jednadžba (3.34). Ta jednadžba nam govori da funkcije  $A_{r,m_\beta}$  i  $A_{r,m_\alpha}$  nisu makroskopski različite za različite  $m$ -ove. Makroskopska nerazpoznatljivost znači da obje funkcije predstavljaju jedan te isti rezultat mjerenja, naime,  $r$ .

Budući da nas zanimaju vjerojatnosti perceptibla, treba nam samo gustoća vjerojatnosti za čestice mjernog uređaja; - nju dobivamo integracijom po varijabli  $\mathbf{y}$

$$\rho^{\text{uredaj}}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.36)$$

To vodi na (radi preglednosti ispuštene su ovisnosti o  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ )

$$\begin{aligned} \rho^{\text{uredaj}}(\mathbf{x}) &= \sum_{r,m,k,l} c_r c_k^* b_m b_l^* A_{r,m} A_{k,l}^* \int d\mathbf{y} S_r S_k^* \\ &= \sum_r |c_r|^2 \sum_{m,l} b_m b_l^* A_{r,m} A_{r,l}^*, \end{aligned} \quad (3.37)$$

gdje je iskorištena ortonormiranost baze  $|S_i\rangle$

$$\int d\mathbf{y} S_i(\mathbf{y}) S_j^*(\mathbf{y}) = \delta_{ij}. \quad (3.38)$$

Sada nas zanima područje  $\mathbf{x}$  prostora - nazovimo ga  $\sigma_r$  - na kojemu su funkcije  $A_{r,m}(\mathbf{x})$  s istim  $r$  nezanemarive. Onda, da bismo dobili vjerojatnost nalaska rezultata  $r$ , izraz (3.37) moramo integrirati na tom dijelu prostora

$$\begin{aligned} p_r^{\text{uredaj}} &= \int_{\sigma_r} d\mathbf{x} \rho^{\text{uredaj}}(\mathbf{x}) \simeq \\ &|c_r|^2 \sum_{m,l} b_m b_l^* \int_{\sigma_r} d\mathbf{x} A_{r,m} A_{r,l}^*. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Potonji izraz se preko ortogonalnosti funkcija  $A_{i,j}$  svodi na

$$p_r \simeq |c_r|^2 \sum_m |b_m|^2 = |c_r|^2, \quad (3.40)$$



pri čemu je iskorišteno (3.27).

Dobivena vjerojatnost je identična vjerojatnosti kod općenitog Bornovog pravila - izraz (2.6). Time je za ovaj slučaj pokazano kako postuliranje Bornovog pravila u bazi prostora vodi na Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi.

### 3.2.2 POVM mjerenje

Sada pretpostavljamo da vrijedi jednadžba (3.35). To pak znači da su funkcije  $A_{r,m\beta}$  i  $A_{r,m\alpha}$  s istim  $r$ -om makroskopski različite - dakle predstavljaju dva različita ishoda mjerenja. U ovom slučaju mjerenje nikako ne možemo interpretirati kao mjerenje opservable  $\hat{R}$  budući da za jedan  $r$  imamo više mogućih ishoda mjerenja.

Dok smo u prethodnom slučaju imali  $n_r$  rezultata mjerenja (gdje je  $n_r$  dimenzija prostora  $\mathcal{H}_{objekt}$ ) u ovom slučaju ih imamo  $n_r \times n_m$ . Veći broj makroskopski različitih rezultata nas navodi da svaki rezultat predstavimo jednim indeksom  $l$  za razliku od dvaju indeksa  $r$  i  $m$  kako je u gornjem izvodu. Tada uz notaciju

$$(r, m) \equiv l, \quad c_r b_m \equiv \tilde{c}_l, \quad |S_r\rangle \equiv |S_l\rangle \quad (3.41)$$

jednadžbu (3.31) možemo zapisati kao

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_l \tilde{c}_l A_l(\mathbf{x}) S_l(\mathbf{y}), \quad (3.42)$$

gdje vrijedi

$$\sum_l |\tilde{c}_l|^2 = 1. \quad (3.43)$$

Ovakva mjerenja mogu biti opisana POVM elementima na prostoru objekta -  $\mathcal{H}_{objekt}$ , kako je opisano u poglavlju 3.

No, Naimarkov teorem nam garantira da se POVM mjerenje svodi na PVM mjerenje u nekom većem Hilbertovom prostoru. Budući da je Hilbertov prostor uređaja  $\mathcal{H}_u$  tada uvijek možemo naći dovoljno veliki Hilbertov prostor  $\mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_{ostalo}$  na kojemu možemo naći skup projektora koji predstavljaju mjerenje. Odgovarajući skup možemo predstaviti sa  $|A_l\rangle \langle A_l| \otimes 1$  te se mjerenje tako opisuje kao mjerenje opservable perceptible

$$L = \sum_l l |A_l\rangle \langle A_l|. \quad (3.44)$$

Na taj način opet radimo postupak kao u prethodnom potpoglavlju

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \simeq \sum_l |\tilde{c}_l|^2 |A_l(\mathbf{x})|^2 |S_l(\mathbf{y})|^2, \quad (3.45)$$

gdje je ponovno iskorištena makroskopska raspoznatljivost različitih ishoda

$$A_l(\mathbf{x})A_k(\mathbf{x}) \simeq 0 \quad \text{za} \quad l \neq k. \quad (3.46)$$

Onda putem

$$\rho^{\text{uredaj}}(\mathbf{x}) = \int_{\sigma_l} d\mathbf{y} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \simeq \sum_l |\tilde{c}_l|^2 |A_l(\mathbf{x})|^2 \quad (3.47)$$

ponovno za vjerojatnost nalaska čestica uređaja u području  $A_l(\mathbf{x})$  dobivamo

$$p_l^{\text{uredaj}} = \int_{\sigma_l} d\mathbf{x} \rho^{\text{uredaj}}(\mathbf{x}) \simeq |\tilde{c}_l|^2. \quad (3.48)$$

Vidimo da i za ovaj slučaj ponovno dobivamo Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi.

### 3.2.3 Najopćenitiji slučaj

Poopćimo sada gornje slučajeve potpuno tako da ukupnu valnu funkciju napišemo kao

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_N} c_{i_1 \dots i_N} |i_1, \dots, i_N\rangle, \quad (3.49)$$

gdje je  $N \gg 1$  ogroman broj stupnjeva slobode uzevši sve sisteme u obzir. Sume  $\sum_{i_m}$  označavaju ili diskretnu sumu ili kontinuirani integral po skupu  $\mathcal{S}_m$  te stoga možemo pisati  $i_m \in \mathcal{S}_m$ .

Kao i prije, uvest ćemo zgodniju notaciju za stanje (3.49). Neka  $L$  označava stanja mjernog uređaja te  $Q$  sva ostala stanja. Tada imamo

$$|\Psi\rangle = \sum_L \sum_Q c_{LQ} |\Psi_{LQ}\rangle = \sum_L \sum_Q c_{LQ} |A_L\rangle |R_Q\rangle, \quad (3.50)$$

što opet možemo zapisati u bazi položaja

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_L \sum_Q c_{LQ} A_L(\mathbf{x}) R_Q(\mathbf{y}). \quad (3.51)$$

Slično kao kod slučajeve (3.34) i (3.35) sada nas zanima za koje  $L$ -ove funkcija  $A_L(\mathbf{x})$

predstavlja makroskopski različit rezultat.

Neka je  $\mathcal{L}$  skup svih mogućih vrijednosti koji može poprimiti  $L$  tako da  $L \in \mathcal{L}$ . Skup  $\mathcal{L}$  dakako možemo rastaviti na uniju podskupova - uzmimo konačan broj  $n$  disjunktnih skupova  $\mathcal{L}_l$  tako da

$$\mathcal{L} = \bigcup_{l=1}^n \mathcal{L}_l = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n. \quad (3.52)$$

Podskupove  $\mathcal{L}_l$  smo izabrali na način tako da svaki od njih sadrži elemente  $L$  koji predstavljaju jedan makroskopski rezultat. Točnije rečeno, valne funkcije  $A_L(\mathbf{x})$  i  $A_{L'}(\mathbf{x})$  su makroskopski raspoznavljive ako i samo ako  $L$  i  $L'$  pripadaju istom skupu  $\mathcal{L}_l$ . Ovo znači da imamo  $n$  različitih makroskopskih rezultata te ih možemo označiti sa  $l = 1, \dots, n$ .

Ideja je ukupno stanje napisati preko stanja u kojemu su jasno naznačena različita makroskopska stanja. U tu svrhu oznaku  $L$  dalje rastavljamo na  $(l, Y_l)$  gdje je  $l$  prije objašnjen, a  $Y_l$  naprosto razlikuje sva makroskopski neraspoznavljiva stanja koja imaju isti  $l$ .

Sada ukupno stanje (3.50) možemo zapisati kao

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{Y_l} \sum_Q c_{lY_lQ} |\Psi_{lY_lQ}\rangle = \sum_{l=1}^n \sum_P c_{lP} |\Psi_{lP}\rangle, \quad (3.53)$$

gdje smo opet uveli novu kolektivnu oznaku  $P \equiv (Y_l, Q)$ . Ovom zadnjom oznakom je naš posao zgodnog označivanja različitih stanja manje-više gotov budući da sad imamo stanje u kojemu jedna oznaka predstavlja makroskopski rezultat, a druga definira sve ostalo.

Ostaje još samo napisati ukupnu valnu funkciju kao

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=1}^n \tilde{c}_l |\Psi_l\rangle, \quad (3.54)$$

te nametnuti odgovarajuće normalizacijske uvjete. Izvod tada slijedi po analogiji s prošlim potpoglavljima te u konačnici opet rekonstruiramo općenito Bornovo pravilo.

### 3.3 Komentari

Standardni formalizam kvantne mehanike i dalje potrebuje kolaps valne funkcije da bi razmatranje imalo smisla. Problem kolapsa dakle nije nestao nego nije eksplicitno spomenut u gornjim izvodima - jednačbe koje slijede iz Bornovog pravila (3.20) i dalje opisuju superpoziciju makroskopskih stanja uređaja<sup>11</sup>.

Dobiveni rezultati ukazuju na činjenicu da neka druga teorija koja zadovoljava Bornov aksiom u bazi položaja daje ista eksperimentalna predviđanja kao i standardna kvantna mehanika. Ovaj rezultat ima bitne posljedice za odnos Bohmove mehanike i standardnog pristupa te će detaljnije biti raspravljeno u potpoglavlju 4.6.

## 4 Bohmova mehanika

Neke od osnovnih ideja Bohmove mehanike - postojanje čestica pored vala - razvija relativno rano Louis de Broglie. On ju je predložio na Solvayskoj konferenciji 1927. godine no tada nije dobila punu pažnju, a i sam de Broglie ju je ubrzo nakon toga napustio [13]. Usljedilo je vrijeme potpune dominacije kopenhavske škole te autoriteta određenih fizičara te je spomenuta teorija tek 1952. David Bohm razradio i predstavio kao zaokruženu cjelinu.

Osnovna odlike teorije je kauzalnost te jasna slika mikroskopskih događaja u kojima čestice imaju dobro definirane putanje te su vođene valom (*pilot-wave*) koji se propagira u prostoru. Bohmova mehanika se može gledati kao inačica poopćene Hamilton-Jacobijeve teorije, no nipošto kao određeni povratak klasičnoj mehanici. Teorija uvodi neke potpuno neklasične elemente kao što je npr. kvantni potencijal te klasična mehanika može služiti kao zgodan predložak za izgradnju teorije (te njen limes), a ne kao okvir u koji se pokušavaju strpati kvantni fenomeni prirode. Riječ je, dakle, o potpuno novom poimanju prirode i fizikalnih fenomena.

U nastavku ćemo detaljnije izložiti njene koncepte i aksiome te vidjeti u kakvoj vezi ona stoji naspram standardne kvantne mehanike.

---

<sup>11</sup>Ovdje se efektivno želi reći da dekoherencija ne rješava problem mjerenja [34].

## 4.1 Postulati teorije

Ovdje ćemo iznijeti postulate za jednočestični sustav radi jednostavnosti, a naknadno ćemo komentirati proširenje na višestestične sustave i dodatne fenomene koji odatle proizlaze.

Imamo četiri osnovna postulata [12]:

1. Individualni fizikalni sustav sastoji se od vala koji se propagira u prostoru i vremenu te pridruženu mu točkastu česticu koja se kontinuirano giba *pod vodstvom* vala.

2. Val je opisan funkcijom  $\psi(\mathbf{x}, t)$  koja zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu (2.9).

3. Jednadžba gibanja čestice  $\mathbf{x}(t)$  rješenje je jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}, \quad (4.1)$$

gdje je  $S$  faza vala  $\psi$ . Rješenje ove jednadžbe zahtjeva specificiranje početnih uvjeta  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

4. Vjerojatnost da čestica iz ansambla leži između točaka  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  u vremenu  $t$  dana je sa

$$R^2(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}, \quad (4.2)$$

gdje je  $R^2 = |\psi|^2$ .

Teorija je konzistentna i bez zadnjeg postulata no njega izvanjski nameću rezultati eksperimenta s kojima teorija mora biti u suglasju. Pored svih mogućih putanja dopuštenih zakonom gibanja (4.1) četvrti postulat kaže da su dopuštene samo one kompatibilne s početnom raspodjelom vjerojatnosti  $R^2(\mathbf{x}, 0)$ .

Još par riječi valja domentuti glede zadnjeg postulata. Potonji je prividno istovjetan Bornovom pravilu (koje također ima status postulata) u standardnom formalizmu, (2.6). No Bornovo pravilo govori o vjerojatnosti nalaska čestice prilikom mjerenja, a postulat (3.20) s druge strane govori o vjerojatnosti da čestica zaista jest na tome mjestu, neovisno o ikakvom mjerenju. Ovdje dakle pridjeljujemo česticama svojstva koje imaju neovisno o našem mjerenju istih te nemamo potrebu pridavati mjerenju poseban status - mjerenje je *obična* interakcija koja nam otkriva svojstvo (položaj) koje čestica zaista posjeduje.

## 4.2 Polja $S$ i $R$

Napišimo valnu funkciju u polarnom obliku

$$\psi = Re^{iS/\hbar}, \quad (4.3)$$

gdje su  $R = R(\mathbf{x}, t)$  i  $S = S(\mathbf{x}, t)$  realne funkcije koje zadovoljavaju određena svojstva koja nameće  $\psi$  funkcija.

Ubacimo li ovako napisanu valnu funkciju u Schrödingerovu jednadžbu (2.9) dobivamo sljedeće dvije jednadžbe (za realni i imaginarni dio)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{R^2 \nabla S}{m} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Ove dvije jednadžbe su ekvivalentne Schrödingerovoj jednadžbi ako *preslikamo* uvjete koje zadovoljava  $\psi$  u uvjete na  $R$  i  $S$ . Tako npr. s obzirom da rješenje Schr. jednadžbe za svaki  $t$  zahtijeva nametanje početne valne funkcije  $\psi(\mathbf{x}, 0)$  za rješenja gornjih jednadžbi moramo nametnuti početne uvjete za  $R$  i  $S$  polje, tj.  $R_0(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}, 0)$  te  $S_0(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, 0)$ . Također se uvjeti na kontinuiranost  $\psi$  i  $\nabla\psi$  prenose na polja  $S$  i  $R$ . S druge strane, jednoznačnost funkcije  $\psi$  nameće jednoznačnost funkcije  $R$  no ne i  $S$ . Iz jdbn. (4.3) vidimo da bilo koje dvije funkcije  $S$  i  $S'$  čija je razlika cjelobrojni višekratnik ( $n$ ) od  $2\pi\hbar = h$  daju isti  $\psi$ :  $S' = S + nh$ . Spomenutu višeznačnost možemo napisati kao integral po pomacima

$$\oint_C dS = \oint_C \nabla S \cdot d\mathbf{x} = nh, \quad (4.6)$$

gdje je  $C$  zatvorena petlja u prostoru te  $n$  cjelobrojan. Vidimo da funkcija  $S$  može biti diskontinuirana u slučaju  $n \neq 0$ . S obzirom da je  $\psi$  glatka funkcija ovi diskontinuiteti se mogu dogoditi samo na čvorovima funkcije  $\psi$ , tj. na mjestima  $\psi = 0$ .

### 4.3 Kvantni potencijal

Jednadžba (4.4) ima formu klasične Hamilton-Jacobijeve jednadžbe izuzev predzadnjeg člana koji možemo interpretirati kao kvantnu potencijalnu energiju

$$Q(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (4.7)$$

Tada za jednadžbu (4.4) možemo reći da zadovoljava poopćenu Hamilton-Jacobijevu jednadžbu u kojoj pored klasičnog potencijala  $V$  imamo dodatni potencijal  $Q$  koji ovisi o ukupnom kvantnom stanju.

Po analogiji s klasičnom Hamilton-Jacobijevom teorijom za vektorsko polje impulsa možemo pisati  $\mathbf{p} = \nabla S$  te posljedično  $\mathbf{v} = (1/m)\mathbf{p}$ . Ovo nam za određenu putanju  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  daje postulat (4.1).

Što se tiče čestice i upravo spomenutog njenog zakona gibanja, potencijal  $Q$  igra newtonsku ulogu. To najbolje vidimo ako djelujemo nabra operatorom na jednadžbu (4.4) te korištenjem izraza (4.1). Tada dobivamo

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) = -\nabla(V + Q). \quad (4.8)$$

Dobivena jednadžba ima formu II. Newtonovog zakona u kojem nemamo samo klasični potencijal  $V$  već imamo efektivni potencijal  $V + Q$ . Drugim riječima, pored klasične sile  $-\nabla V$  imamo i *kvantnu silu*  $-\nabla Q$ .

Komentirajmo u vidu ove jednadžbe slučaj  $V = 0$ . Znamo da u klasičnoj mehanici to odgovara uniformnom gibanju, no u Bohmovojoj teoriji tome očito nije tako jer u odsustvu klasične sile i dalje imamo kvantnu silu. I. Newtonov zakon dakle općenito ne vrijedi. Iz same ove činjenice vidimo da je klasični svijet i klasična intuicija na klimavim nogama kad je riječ o mikrosvijetu.

Kakva je veza energije čestice i potencijala  $Q$ ? Jdbn. (4.4) možemo interpretirati kao jednadžbu za ukupnu energiju čestice, tj.

$$E(\mathbf{x}(t), t) = -\left. \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \quad (4.9)$$

Uz ovakvu definiciju slijedi da je ukupna energija dana zbrojem kinetičke energije

$$\left. \frac{(\nabla S)^2}{2m} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \quad (4.10)$$

te ukupne potencijalne energije

$$V(\mathbf{x}(t), t) + Q(\mathbf{x}(t), t), \quad (4.11)$$

što naravno opravda izraz "kvantna potencijalna energija" budući je  $Q$  sastavni dio energije čestice.

Nadalje, u Schr. jednadžbu potencijal  $V$  ulazi neposredno - interakcija vala je dakle vezana s njim direktno te uvjetuje moguća rješenja.  $\psi$  tako odgovara na nametnuti potencijal, a informacija o potencijalu  $V$  se posljedično prenosi i na kvantni potencijal  $Q$  preko (4.7). Odavde slijedi da kvantna sila  $-\nabla Q$  općenito ovisi o  $V$  što je izuzetno bitno za objašnjenje kvantnih fenomena. Jedna zanimljiva posljedica ove veze jest da  $Q$  može *nositi informaciju* o potencijalu  $V$  i na mjestima na kojima je  $V = 0$  te utjecati na gibanje čestice. Možemo reći da je upravo kvantni potencijal odgovoran za neklasične efekte koji nastaju u situacijama kada imamo klasičan potencijal  $V$ . Kvantni potencijal je takoreći isprepleten s klasičnim te gibanje čestice ovisi o ukupnoj sili  $-\nabla(V + Q)$ .

#### 4.4 Raspodjela čestica

Vidimo da uz četvrti postulat - interpretaciju veličine  $R^2$  kao distribuciju vjerojatnosti - jednadžba (4.5) zapravo predstavlja jednadžbu kontinuiteta. Jednom kad smo specificirali početnu funkciju  $R^2(\mathbf{x}, 0)$ , jednadžba kontinuiteta određuje evoluciju funkcije  $R^2(\mathbf{x}, t)$  uz odgovarajuće polje brzine  $\mathbf{v} = \nabla S/m$ .

Iskoristimo sada tu jednadžbu kontinuiteta da bismo pokazali

$$\frac{d}{dt} \int R^2(\mathbf{x}, t) d^3x = - \int \nabla \cdot \frac{R^2 \nabla S}{m} d^3x = - \oint \frac{R^2 \nabla S}{m} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (4.12)$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili Greenov teorem, a u zadnjoj jednakosti postavku da  $R \rightarrow 0$  u beskonačnosti.



Nametnemo li sada početnoj raspodjeli  $R_0(\mathbf{x})$  uvjet normaliziranosti

$$\int R_0^2(\mathbf{x}) d^3x = 1, \quad (4.13)$$

tada iz (4.12) slijedi da je uvjet zadovoljen za bilo koje vrijeme  $t$

$$\int R^2(\mathbf{x}, t) d^3x = 1. \quad (4.14)$$

Možemo reći da  $R_0^2(\mathbf{x})$  predstavlja ansambl čestica - zamišljamo postojanje beskonačnog broja čestica koje istovremeno, nezavisno i deterministički evoluiraju u vremenu. No iz pojma ansambla lako možemo doći do pojma vjerojatnosti - imamo li slijed čestica u kojem svaka čestica ima točno određeni početni položaj, tada je  $R_0^2(\mathbf{x})$  proporcionalan vjerojatnosti da određena čestica leži unutar volumena  $d^3x$  oko točke  $\mathbf{x}$ .

Oдавde vidimo da premda je četvrti postulat takoreći naknadno ubačen, sama teorija je sugestivna po pitanju interpretacije budući da funkcija  $R^2$  zadovoljava sva svojstva koja očekujemo od neke funkcije vjerojatnosti.

Čestice ne mogu prolaziti kroz čvorove  $\psi = 0$  budući na tom mjestu  $\nabla S$  nije definiran. Jednadžba kontinuiteta nam to garantira uz uvjet  $R_0^2(\mathbf{x}_0) \neq 0$  budući da iz nje direktno slijedi evolucija raspodjele vjerojatnosti duž putanje  $\mathbf{x}(t)$

$$R^2(\mathbf{x}(t), t) = R_0^2(\mathbf{x}_0) e^{-\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) dt}. \quad (4.15)$$

Polje  $R$  dakle igra dvostruku ulogu - ujedno je stvarno prisutno u prostoru te nam s druge strane govori s kolikom pouzdanošću znamo trenutno stanje sistema. Ova druga uloga nije *a priori* nužna - moguće su dakako i drugačije raspodjele čestica nego one ovdje postulirane, no isključivo ovaj postulat garantira suglasje s eksperimentalnim činjenicama.

## 4.5 Višečestični sustavi

Proširenje Bohmove mehanike na sustav više tijela je neposredan: moramo samo proširiti postulate gore iznesene za jednu česticu da obuhvate sve čestice u pitanju. Iako je proširenje relativno jednostavno ono nosi neke zanimljive fizikalne posljedice

koje ne postoje kod sustava s jednom česticom.

Prva stvar koju činimo jest da valnu funkciju smještamo u  $3n$ -dimenzionalni konfiguracijski prostor:  $\psi = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)$ . Ovdje  $n$  označava broj čestica, a svaka od njih se giba po dobro definiranoj putanji  $\mathbf{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . I dalje je riječ o samo jednom valu  $\psi$  no broj čestica je potpuno proizvoljan.

Slično kao i kod jednočestičnog slučaja, funkciju  $\psi$  možemo pisati kao  $\psi = Re^{iS/\hbar}$  tako da su  $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)$  i  $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)$  realne funkcije u konfiguracijskom prostoru. Uvjete na valnu funkciju ponovno možemo preslikati na uvjete na ova dva polja te, kao i prije, preko višečestične Schrödingerove jednadžbe dobiti dvije jednadžbe koje određuju  $R$  i  $S$ . Ovim postupkom ponovno dobivamo generaliziranu Hamilton-Jacobijevu jednadžbu s tim da je kvantni potencijal dan sa

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{-\hbar^2 \nabla_i^2 R}{2m_i R}. \quad (4.16)$$

Zakon gibanja za čestice dobiva sljedeću formu:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \nabla_i S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)|_{\mathbf{x}_j=\mathbf{x}_j(t)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.17)$$

Gornji sustav od  $n$  diferencijalnih jednadžbi zahtjeva specificiranje  $n$  početnih uvjeta  $\mathbf{x}_{i_0}$  za sve čestice.

Dakle da bismo našli samo jednu putanju moramo znati početne uvjete svih čestica. Informacija o početnoj raspodjeli čestica je ponovno sadržana u polju  $R$ :  $R^2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) d^3x_1 \dots d^3x_n$  daje vjerojatnost da se u trenutku  $t$  određena čestica  $i$  nalazi unutar volumena  $d^3x_i$  oko točke  $\mathbf{x}_i$  za  $i = 1, \dots, n$ .

Već smo rekli kako dinamika čestica ovisi o ukupnom stanju sustava što je izraženo činjenicom da valna funkcija prebiva u konfiguracijskom prostoru te ovisi o samo jednom evolucijskom parametru,  $t$ . No što to znači u slučaju više čestica? Pogledajmo na primjer zakon gibanja (4.17) u kojem vidimo da brzina čestice ovisi o svim drugim česticama u danom trenutku! Poremetimo li dakle sistem u jednom lokaliziranom dijelu prostora informacija o tome će smjesta dospjeti do svih drugih čestica. Ovo je očit potpis nelokalnosti teorije.

Nelokalnost teorije možemo gledati i preko kvantnog potencijala  $Q$  danog u (4.16). On ne opada nužno s udaljenošću čestica te gibanje jedne ( $i$ -te) čestice tako, preko

kvantne sile  $-\nabla_i Q$ , ovisi o položaju svih drugih čestica ma koliko one bile udaljene. Iznimka su faktorizabilne valne funkcije budući se kvantni potencijal može napisati kao suma potencijala od kojih svaki ovisi o položaju samo jedne čestice: ako bismo imali dvije čestice te faktorizabilnu valnu funkciju  $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi_1(\mathbf{x}_1)\psi_2(\mathbf{x}_2)$  tada bismo ukupni kvantni potencijal mogli zapisati kao  $Q = Q_1(\mathbf{x}_1) + Q_2(\mathbf{x}_2)$ .

Bohmova teorija je dakle eksplicitno nelokalna. Poznato je da Bellov teorem [35] isključuje mogućnost lokalne teorije skrivenih varijabli; Bohmova mehanika dakle nije obuhvaćena teoremom<sup>12</sup> te je u skladu s eksperimentalnim činjenicama, tj. predviđa narušavanje Bellovih nejednakosti.

#### 4.6 Konzistentnost Bohmove mehanike sa standardnom kvantnom mehanikom

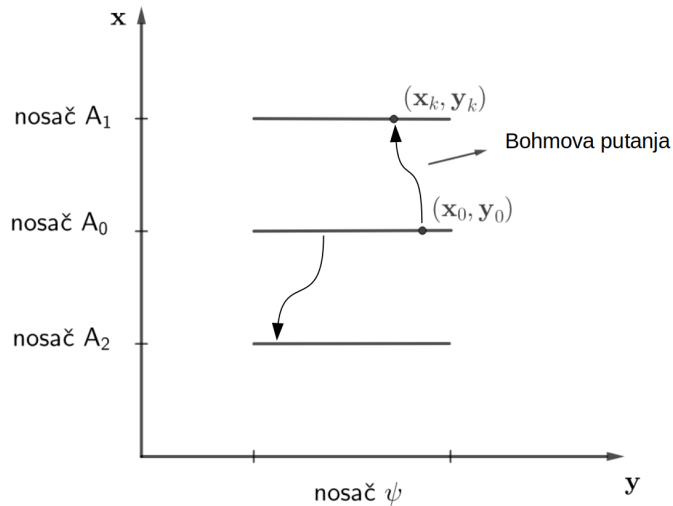
Četvrti postulat (4.2) u prije iznesenoj aksiomatskoj cjelini Bohmove mehanike je upravo Bornovo pravilo u bazi položaja te stoga, prema rezultatima iz poglavlja 3, zadovoljava i Bornovo pravilo u općenitoj bazi. Odavde slijedi da Bohmova mehanika ima ista eksperimentalna predviđanja kao i standardna (nerelativistička) kvantna mehanika.

Nešto drugačije rečeno: iz činjenice da standardna kvantna mehanika zadovoljava istu distribuciju čestica kao i Bohmova mehanika slijedi da obje teorije imaju ista predviđanja glede distribucije položaja čestica. S druge strane, s obzirom kako se sva mjerenja mogu svesti na mjerenje položaja čestica *nečega*, slijedi da te dvije teorije općenito imaju ista eksperimentalna predviđanja.

Kako Bohmova mehanika rješava problem kolapsa? Ovdje zapravo imamo posla s *efektivnim* kolapsom, tj. kolaps nije neki fundamentalni proces u mjerenju već praktičan način razmatranja stvari. Evolucija sistema je deterministička, a ishod ovisi isključivo o početnom položaju  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  čestica. No budući da mi početno stanje ne znamo, izgleda kao da sistem *izabire* jedan od sumanada (npr. u jdbn. (3.47)) s vjerojatnošću danu Bornovim pravilom. Ostali sumandi i dalje postoje, tj. nije bilo nikakvog kolapsa, no potpuno su nebitni za daljnju evoluciju sistema budući da evoluciju sistema određuje samo realizirani val. Kada bismo imali samo dva moguća

<sup>12</sup>Možda je nepošteno ovako uokviriti ovu tvrdnju jer ispada kao se Bohmova teorija, zahvaljujući nelokalnosti, uspjela *izvući*. Možemo reći da, s obzirom da ju nije opovrgnuo, Bellov teorem zapravo potvrdio valjanost Bohmove mehanike.

rezultata mjerenja opisana sa  $A_1$  i  $A_2$  (te početno stanje kazaljke  $A_0$ ), ovu situaciju bismo mogli slikovito prikazati kao na slici 4.1. Slika prikazuje putanju sistema u konfiguracijskom prostoru; u prikazanom slučaju ostvaren je rezultat opisan funkcijom  $A_1$ <sup>13</sup>.



Slika 4.1: Putanja sistema u konfiguracijskom prostoru. Slika po uzoru na sličnu iz [34].

Nasumičnost - koja je fundamentalna u standardnom pristupu - je u Bohmovoju mehanici posljedica nepoznavanja početnog stanja sistema. Ovime zapravo izravno dobivamo i prikladno rješenje Schrödingerovog paradoksa: sudbina uboge mačke ovisi isključivo o početnim položajima svih čestica!

Iz svega rečenog i dalje možda nije potpuno jasno otkud Heisenbergove neodređenosti u Bohmovoju mehanici. Mogli bismo reći da se neodređenosti također moraju nekako eksperimentalno testirati, a s obzirom da su eksperimentalni testovi kompatibilni s obje interpretacije, i jedna i druga potvrđuju spomenute nejednakosti. No ovo nije zadovoljavajuć odgovor te ne govori ništa o interpretaciji neodređenosti; pogledajmo stoga kvalitativno otkud dolaze neodređenosti u okviru Bohmove mehanike.

Pogledajmo prvo što je s mjerenjem položaja. Imamo li ansambl sistema svih pripremljenih u istom stanju  $\psi$  možemo im, jedan po jedan, mjeriti položaj. Mjerenje položaja je, u idealnom slučaju, mjerenje jedne točke na putanji čestice koja je dobro definirana. No putanja ovisi o početnom položaju koji je pak dan raspodjelom čestica  $|\psi|^2$  u početnom trenutku. Mjerenjem položaja dakle otkrivamo stvarni položaj čestice koji je imala i prije mjerenja no na nizu mjerenja će se rezultati razliko-

<sup>13</sup>Nosač (*eng.support*) funkcije označava domenu funkciju na kojoj je ona različita od nule - to je zapravo područje  $\sigma$  u gornjim integralima.

vati zbog početne raspodjele. Razmatrajući stvar na ovaj način, dobivanje fluktuacija oko srednje vrijednosti  $\langle x \rangle$  nije nimalo čudno.

Slična stvar je s mjerenjem impulsa čestice. Nepoznavanje početnih položaja odražava se na nepoznavanje impulsa.

Kada je riječ o individualnoj čestici, situacija je slična kao u standardnom pristupu. Vršanjem mjerenja na čestici mi nužno mijenjamo njenu valnu funkciju s tim da je ovaj proces u Bohmovo mehanici kontinuiran i deterministički. Mjerenjem dakle nužno remetimo sistem koji mjerimo, tj. ne možemo ma kako finim mjerenjem izbaci iz igre utjecaj mjernog uređaja na sistem. Naknadnim mjerenjem onda naravno nemamo posla s istim sistemom s kojim smo krenuli pa nam ni mjerenje neće otkriti stvarne vrijednosti koje je čestica imala prije mjerenja.

#### 4.7 *Kritika Bohmove mehanike*

Teorija ovdje iznesena se čini izrazito konceptualno čista, matematički ne toliko zahtjevna i, povrh svega, u suglasju s eksperimentima kao i standardna nerelativistička kvantna mehanika. Prirodno je zapitati se zašto se ovakvoj slici prirode ne daje prednost i zašto ovaj pristup ne uživa makar jednaku popularnost kao i standardni.

Odgovor na ovo pitanje u manjoj ili možda pak većoj mjeri pripada historijsko-sociološkim<sup>14</sup> razmatranjima. Njih se dakako mi ovdje nećemo doticati već ćemo samo spomenuti neke osnovne kritike upućene teoriji koje su, kolikogod tako nešto bilo ponekad maglovito, *znanstvene* prirode.

Dobar dio kritike bio je *netehničke* prirode na način da nipošto nisu argumenti protiv teorije u ozbiljnom, strogom smislu. Takav tip bi na primjer bilo predbacivanje Bohmovo teoriji da je reakcionarna, tj. da se želi vratiti nekim temeljnim konceptima klasične fizike. Bohmova mehanika sigurno sadrži neke temeljne klasične koncepte kao što su determinizam i putanje čestica, ali s druge strane unosi radikalno odstupanje od klasičnog svijeta uvođenjem valne funkcije, kvantnog potencijala itd. Ovakav argument je zapravo promašen ne samo zbog toga što Bohmova mehanika nije nikakav povratak klasičnoj mehanici već i zbog toga što bi se takvim argumentom *a priori* protivili teoriji koja je bliska klasičnoj, a obuhvaća kvantne fenomene što se ne čini razumnim.

---

<sup>14</sup>Za alternativnu povijest kvantne mehanike koja se čini razumnim slijedom događaja vidi [36].

Slična primjeba je ona koja govori da je Bohmova mehanika kompliciranija od standardne kvantne mehanike. Ovo "kompliciranija" se zasigurno odnosi na potrebne račune koje treba provesti da se dođe do određenih rezultata s obzirom da je teško poreći da je standardna kvantna mehanika konceptualno kompliciranija od Bohmove mehanike. Zastupanjem ovoga argumenta prihvaćamo praktičnost teorije kao načelo koje je primarnije od konceptualno jasne teorije što zapravo vodi na prihvaćanje ideje znanosti koja većini fizičara nije draga.

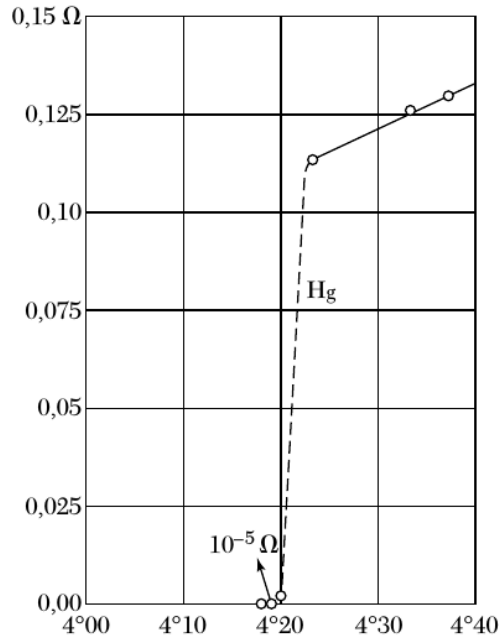
Također se često govori da je koncept putanja čestica beskoristan s obzirom da se iste ne mogu mjeriti. Ovime se ponovno udara u neku ruku na praktičnost teorije budući je koncept putanje nužno apstraktan. Premda putanje zaista nisu mjerljive, one su izrazito korisni konceptualni alati koji nam daju čistu sliku mikroskopskih događaja. Također je bitno naglasiti da Bohmova mehanika jednako jasno objašnjava zašto te putanje nisu mjerljive. S druge strane, što i jest tema ovoga rada, putanje jesu indirektno mjerljive te tim više imaju smisla.

Pored ovih postoje slične primjedbe koje ne spadaju u kategoriju *ozbiljnih* primjedbi pa ni nema smisla pridavati ovdje previše pažnje.

Temeljna primjedba Bohmovo mehanici je zasigurno pitanje relativističke generalizacije. Nije potpuno jasno kako pomiriti nelokalnost teorije s Lorentzovom invarijantnošću. Ova dva zahtjeva, iako na prvi pogled jesu, nisu nužno međusobno isključivi [39]. Slična je situacija s odnosom Bohmove teorije i kvantne teorije polja. Premda postoje razne generalizacije Bohmove teorije sigurno je da unutar fizikalne zajednice zasad nema konsenzusa kako bi ona točno trebala izgledati. Kakogod bilo, poopćena Bohmova teorija i dalje nije potpuno zrela u pogledu navedenih problema te oni zasigurno ostaju njen najveći izazov.

## 5 Supravodljivost

Povijest supravodljivosti započela je 1911. godine kada je Heike Kamerlingh Onnes uočio da električni otpor žive pada praktički na nulu za temperature ispod 4.2 K (slika 5.2). Danas je teorija supravodljivost dobro razvijena, a najpotpuniji opis dali su Bardeen, Cooper i Schrieffer (BCS teorija).



Slika 5.2: Otpor uzorka žive u ovisnosti o temperaturi u blizini temperature prijelaza. Slika preuzeta iz [14].

## 5.1 Meissnerov efekt

Iščezavajući otpor je jedno od glavnih svojstava supravodiča no supravodljivo stanje nije naprosto savršen vodič, tj. vodič u kojemu elektroni imaju beskonačan srednji slobodni put. Pored iščezavajuće otpornosti, glavna odlika supravodiča - što možemo uzeti i kao njegovu definiciju [15] - je prisustvo Meissnerovog efekta<sup>15</sup>.

Meissnerovim efektom se naziva odsustvo magnetskog polja unutar supravodiča. Iz Ohmovog zakona  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$  vidimo da prisutnost konačne struje uz  $\rho = 0$  zahtjeva  $\mathbf{E} = 0$ , što znači da električno polje također iščezava unutar supravodiča. Recimo da imamo supravodljivi uzorak ohlađen ispod kritične temperature  $T_c$  te isključeno vanjsko magnetsko polje. Uključimo li sada postupno valjnsko magnetsko polje  $\mathbf{B}_{ext}$ , tada iz Maxwelllove jednadžbe

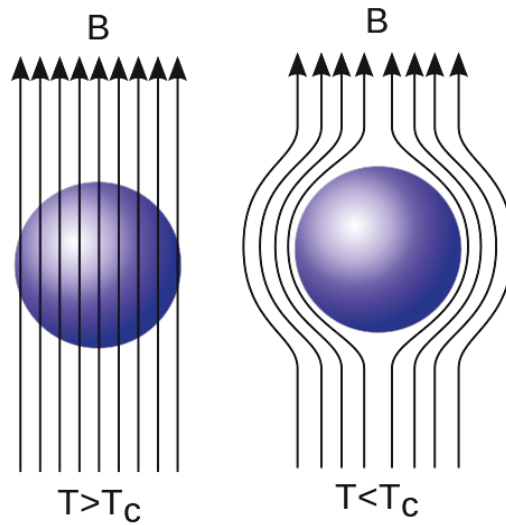
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.18)$$

te uvjeta  $\mathbf{E} = 0$  slijedi

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (5.19)$$

<sup>15</sup>Znan i kao Meissner-Ochsenfeldov efekt.

Dakle, s obzirom da smo na početku imali ohlađeni uzorak te  $\mathbf{B}_{ext} = 0$ , slijedi da uključivanjem polja  $\mathbf{B}_{ext}$  mora ostati jednak nuli unutar supravodiča.



Slika 5.3: Skica Meissnerovog efekta. Slika preuzeta iz [16].

Krenimo sada obrnutim redoslijedom: recimo da imamo konačno magnetsko polje  $\mathbf{B}_{ext}$  te uzorak na temperaturi većoj od kritične,  $T > T_c$ . U ovoj situaciji magnetsko polje također je prisutno unutar uzorka. Ohladimo li sada uzorak na temperaturu manju od kritične ( $T < T_c$ ), uviđamo sljedeće: prilikom faznog prijelaza uzorka iz normalnog u supravodljivo stanje magnetsko polje biva izbijeno iz uzorka te se tako ponovno uspostavlja  $\mathbf{B}_{ext} = 0$ . Ovu činjenicu ne možemo objasniti jednostavnom analizom kao što je to bilo moguće prijašnju. Vidimo da supravodljivo stanje ne možemo tretirati naprosto kao ono u kojemu je  $\rho = 0$  već kao jedno posebno termodinamičko stanje.

## 5.2 Termodinamička svojstva

Pogledajmo neka termodinamička svojstva supravodljivog prijelaza [15]. Relevantni par termodinamičkih varijabli u slučaju supravodljivosti jest  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{M}$ .

Zanima nas koliki je *magnetski rad* obavljen na uzorku supravodiča. Za njega se može pokazati da je po jedinici volumena dan sa  $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ . Tada za prvi zakon termodinamike imamo

$$dU = TdS + \mu_0 V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \quad (5.20)$$

Budući da su  $\mathbf{H}$  i  $T$  termodinamičke veličine koje direktno kontroliramo u laborato-



riju, zgodno je uvesti termodinamički potencijal koji je funkcija tih varijabli. To je moguće pomoću Gibbsove slobodne energije koja je dana sa

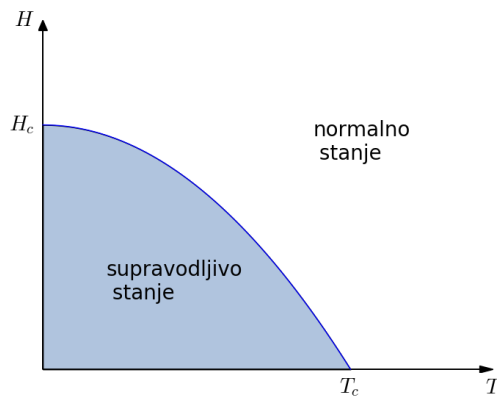
$$G(T, \mathbf{H}) = U - TS - \mu_0 V \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (5.21)$$

Pogledamo li diferencijal Gibbsove slobodne energije

$$dG = -SdT - \mu_0 V \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}, \quad (5.22)$$

vidimo kako su  $\mathbf{H}$  i  $T$  zaista prirodne varijable ove funkcije.

Pogledajmo sada razliku Gibbsove energije kod normalnog i supravodljivog stanja. Poslužimo se grafom koji prikazuje ovisnost kritičnog polja  $H_c$  o temperaturi. Tamnoplava linija na grafu označava granicu supravodljivog i normalnog stanja.



Slika 5.4: Ovisnost kritičnog polja  $H_c$  o temperaturi.

Izračunajmo prvo razliku Gibbsove slobodne energije koju možemo dobiti integrirajući duž vertikalne linije na grafu sa slike 5.4. S obzirom da je za vertikalnu liniju temperatura fiksna, imamo  $dT = 0$  te za promjenu dobivamo

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = \int dG = -\mu_0 V \int_0^{H_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}, \quad (5.23)$$

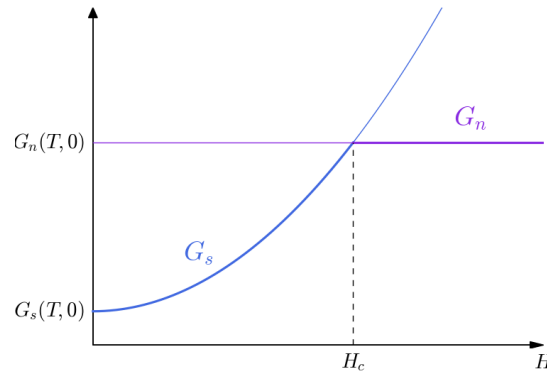
gdje s indeksom  $s$  naznačavamo da je riječ o supravodljivom stanju. U slučaju supravodiča tipa I Meissnerov efekt  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M} = 0$  nam govori da je  $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$  čime trivijalnom integracijom slijedi

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 V. \quad (5.24)$$

Uočimo nadalje da na granici ovih dvaju stanja imamo termodinamičku ravnotežu, tj.  $G_s(T, H_c) = G_n(T, H_c)$  (ovdje  $n$  označava normalno stanje). Budući da je u normalnom stanju  $M \approx 0$  slijedi  $G_n(T, H_c) - G_n(T, 0) \approx 0$ . Kombinirajući potonje izraze s jednačbom (5.24) imamo

$$G_s(T, 0) - G_n(T, 0) = -\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2 V. \quad (5.25)$$

S obzirom da je izraz na desnoj strani jednačbe negativan, Gibbsova energija u supravodljivom stanju je niža što onda pak znači da je supravodljivo stanje stabilnije od normalnog stanja. Gibbsova slobodna energija prikazana je na slici 5.5.



Slika 5.5: Ovisnost Gibbsove slobodne energije o polju  $H$ .

### 5.3 Ginzburg-Landauova teorija

Ginzburg-Landauovu (GL) teoriju [20] možemo započeti razmatranjem uređenosti sustava. Svaka uređena faza - kao što je supravodljivost - posjeduje određena fizikalna svojstva koja uvelike ovise o temperaturi sustava.

Osnovna veličina u GL-ovoj teoriji je tzv. *parametar uređenja* koji će biti svojevrsni pokazatelj uređenosti faze: za  $T > T_c$  on je nula dok je za  $T < T_c$  različit od nule. GL su postulirali postojanje parametra uređenja  $\psi$  za supravodljivo stanje<sup>16</sup> koji zadovoljava prije spomenuta svojstva, tj.

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{za } T > T_c, \\ \psi(T) \neq 0 & \text{za } T < T_c. \end{cases} \quad (5.26)$$

<sup>16</sup>U feromagnetskim sustavima ovaj parametar je magnetizacija, u feroelektričnim sustavima polarizacija, itd.

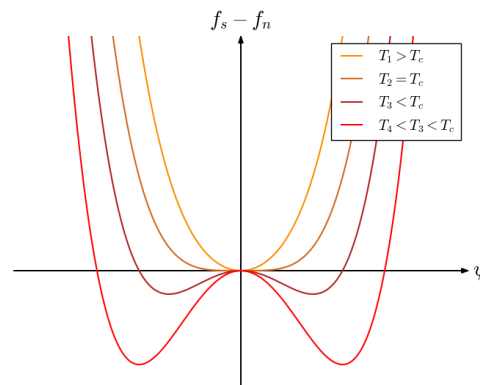
Parametar  $\psi$  je u GL-ovoj teoriji fenomenološki no za  $|\psi|^2$  se može pokazati da odgovara gustoći Cooperovih parova u BCS teoriji (veza GL i BCS teorije razmotrena je u Dodatku A).

Središnja ideja GL teorije je razvoj slobodne energije preko parametra uređenja. U našem slučaju je  $\psi$  kompleksna funkcija pa u razvoj slobodne energije mora ući kao  $|\psi|^2$  budući ona mora biti realna. U blizini temperature prijelaza  $T_c$  parametar uređenja je mali te se možemo zadržati na prvih nekoliko članova u Taylorovom razvoju

$$f_s(T) = f_n(T) - a(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi|^4 + \dots, \quad (5.27)$$

gdje je  $f$  slobodna energija po jedinici volumena,  $f = F/V$ .

$a$  i  $b$  su fenomenološke konstante za koje pretpostavljamo da su glatke funkcije temperature. Zadržimo li se na kvartičnom članu u razvoju,  $b$  mora biti veći od nule<sup>17</sup> da bi funkcija imala minimum. Nadalje, da bismo uključili fazne prijelaze  $a(T)$  mora mijenjati predznak na temperaturi prijelaza  $T_c$ . Na slici 5.6 prikazano je ponašanje slobodne energije u ovisnosti o parametru uređenja za različite temperature.



Slika 5.6: Ovisnost Gibbsove slobodne energije o polju  $H$ .

Na grafu je vidljivo kako za  $T > T_c$  slobodna energija ima minimum za  $\psi = 0$ , a to je upravo ono što očekujemo od parametra uređenja. S druge strane, snižavanjem temperature ispod kritične vrijednosti dobivamo nove lokalne minimume za koje je parametar uređenja različit od nule. Položaj minimuma slobodne energije - koji odgovara vrijednosti parametra uređenja na toj temperaturi - se pomiče udesno

<sup>17</sup>Negativan kvartični član bi odgovarao faznom prijelazu I. reda što nije ispravno kod supravodljivosti (kontinuiranost entropije na temperaturi prijelaza ukazuje da je riječ o faznom prijelazu II. reda).

povećanjem temperature. Iz jednadžbe (5.27) jednostavno možemo naći položaje minimuma - oni se nalaze na mjestima gdje vrijedi  $|\psi|^2 = -a(T)/b(T)$ .

Funkcije  $a(T)$  i  $b(T)$  također možemo raspisati preko Taylorovog razvoja

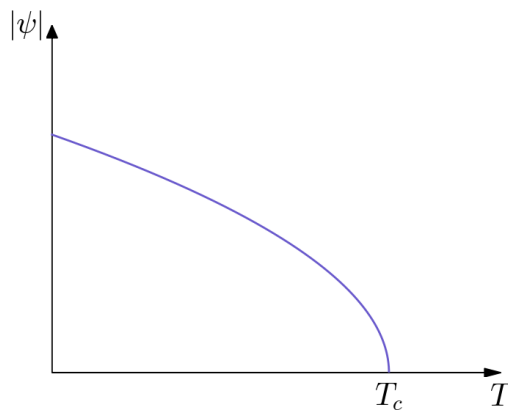
$$\begin{aligned} a(T) &\approx -\dot{a} \times (T - T_c) + \dots \\ b(T) &\approx b + \dots, \end{aligned} \quad (5.28)$$

gdje smo uveli nove konstante  $\dot{a}$  i  $b$ . Gornji izraz za  $a(T)$  zadovoljava uvjet da ta funkcija mijenja predznak upravo na kritičnoj temperaturi.

Sada možemo izraz (5.26) napisati u nešto eksplicitnijem obliku koji uključujući tri (fenomenološke) nezavisne konstante

$$|\psi| = \begin{cases} 0 & \text{za } T > T_c, \\ \left(\frac{\dot{a}}{b}\right)^{1/2} (T_c - T)^{1/2} & \text{za } T < T_c. \end{cases} \quad (5.29)$$

Dobiveni izraz shematski je prikazan na slici 5.7.



Slika 5.7: Ovisnost parametra uređenja o temperaturi.

Dosad smo pretpostavljali da je parametar uređenja prostorno neovisan no sada se možemo osloboditi te pretpostavke. Nadalje ćemo dakle držati  $\psi$  kao prostorno ovisnu veličinu,  $\psi(\mathbf{r})$ . Ovime malo kompliciramo matematiku no dobivamo potpuniju teoriju.

Poopćimo izraz za slobodnu energiju 5.27 postulirajući ju u sljedećem obliku

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 - a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4. \quad (5.30)$$

Ovdje smo se eksplicitno zadržali na kvartičnom članu u razvoju što je za naše potrebe zadovoljavajuća aproksimacija. Jedina razlika naspram prethodne slobodne energije je član s gradijentom koji predstavlja povećane energije uzrokovane prostornim varijacijama parametra uređenja (član dolazi s pozitivnim predznakom tako da sistem ne može spontano postati jako nehomogen).

Ukupna slobodna energija je dana sa

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left( \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 - a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r. \quad (5.31)$$

Primjetimo da je slobodna energija u gornjem izrazu funkcional funkcije  $\psi(\mathbf{r})$ . Da bismo našli minimum funkcionala trebamo naći funkciju  $\psi(\mathbf{r})$  koja zadovoljava

$$\frac{\delta F_s[\psi]}{\delta\psi(\mathbf{r})} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\delta F_s[\psi]}{\delta\psi^*(\mathbf{r})} = 0, \quad (5.32)$$

gdje dani izrazi predstavljaju funkcionalne derivacije. U našem slučaju se funkcionalne derivacije svode na (vidi Dodatak B)

$$\frac{\delta F_s[\psi]}{\delta\psi(\mathbf{r})} = \frac{\partial F_s}{\partial\psi} - \nabla \frac{\partial F_s}{\partial\nabla\psi}. \quad (5.33)$$

Tako dobivamo

$$\frac{\delta F_s[\psi]}{\delta\psi(\mathbf{r})} = -a(T)\psi^* + b(T)|\psi|^2\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi^*, \quad (5.34)$$

što izjednačavanjem s nulom vodi na

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi(\mathbf{r}) + (-a + b|\psi(\mathbf{r})|^2)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.35)$$

Potonja jednadžba uvelike podsjeća na Schrödingerovu jednadžbu. Tome dakako doprinosi namjerno označivanje parametra uređenja sa  $\psi(\mathbf{r})$  te uporaba konstante u obliku  $-\frac{\hbar^2}{2m}$  no vidjet ćemo da sličnost nije umjetna već da ima fizikalnu podlogu i prikladno tumačenje.

Da bi naša teorija bila cjelovita možemo dodati još jedan član koji će predstavljati

magnetsko polje. To je najlakše napraviti standardnom zamjenom<sup>18</sup>

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}, \quad (5.36)$$

gdje smo uveli naboj  $q$ , brzinu svjetlosti  $c$  te vektorski magnetski potencijal  $\mathbf{A}$  odgovarajućeg vanjskog magnetskog polja  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Slobodnoj energiji također treba dodati energiju magnetskog polja  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ; sveukupno imamo<sup>19</sup>

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left( \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left( \nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 - a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r + \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{r})^2 d^3r. \quad (5.37)$$

Tada za Ginzburg-Landauovu jednadžbu dobivamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + (-a + b|\psi(\mathbf{r})|^2)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.38)$$

Ovdje  $m^* = 2m_e$  predstavlja efektivnu masu, a  $q = -2e$  efektivni naboj Cooperovog para.

## 5.4 SQUID

Prije nego što komentiramo interferencijske efekte koje možemo dobiti u supravodičima pogledajmo jedan već postojeći, koji je relativno star i dobro istražen - tzv. SQUID (*eng.* Superconducting Quantum Interference Device).

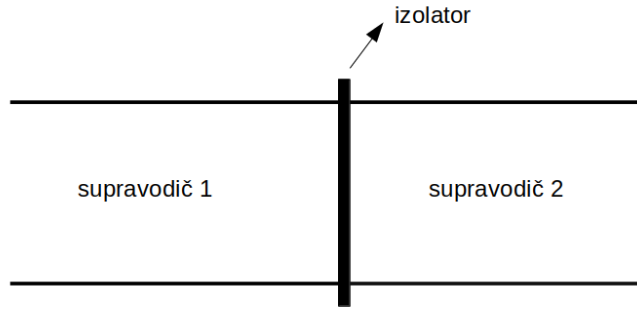
SQUID koristi efekte koji proizlaze iz tzv. *Josephsonovog spoja* pa ćemo njega prvo prokomentirati.

Josephsonovim spojem se naziva spoj dvaju supravodiča između kojih je tanki izolator kao što je prikazano na slici 5.8. Izolator na spoju treba biti dovoljno tanak tako da postoji određena vjerojatnost tuneliranja elektrona kroz barijeru.

Neka je makroskopska valna funkcija supravodiča 1 dana sa  $\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}$  te supravodiča 2 sa  $\psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}$ . Josephson je uspio preko BCS teorije pokazati da na

<sup>18</sup>Mi ovdje zapravo pretpostavljamo da je  $\psi(\mathbf{r})$  valna funkcija nabijenih čestica - samo u tom smislu je ova zamjena opravdana.

<sup>19</sup>Kada bi nosioci struje imali i spin trebali bi dodati još jedan član tipa  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$  no u slučaju svih supravodiča nosioci nemaju spin.



Slika 5.8: Josephsonov spoj.

spoju teče struja dana sa [18]

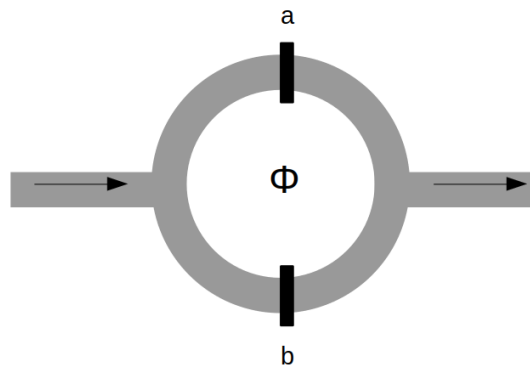
$$J = J_0 \sin \delta, \quad (5.39)$$

gdje je  $\delta = \theta_2 - \theta_1$  razlika faza, a  $J_0$  karakteristika spoja te ujedno i maksimalna struja koja može teći bez disipacije.

U prisustvu vektorskog potencijala  $\mathbf{A}$  jednadžba (5.39) dobiva oblik (u jedinicama  $c = 1$ )

$$J = J_0 \sin \left( \delta_0 + \frac{2q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right). \quad (5.40)$$

Potonja jednadžba nam otvara put prema stvaranju interferencijskih efekata u supravodiču. Uzmimo supravodljivi prsten s dva Josephsonova spoja kako je prikazano na slici 5.9



Slika 5.9: Josephsonovi spojevi u paraleli - SQUID prsten.

Ukupna struja  $J_u$  je u ovome slučaju zbroj struja iz dvaju spojeva

$$J_u = J_a + J_b = J_{a0} \sin \delta_a + J_{b0} \sin \delta_b, \quad (5.41)$$

gdje smo sa  $\delta_a$  ( $\delta_b$ ) označili razliku faza na spoju  $a$  ( $b$ ).

U slučaju kada nemamo tok magnetskog polja unutar prstena očekujemo simetričnu situaciju kod koje su amplitude i faze jednake na obama spojevima,  $J_{a0} = J_{b0} = J_0$  te  $\delta_a = \delta_b = \delta$ . No jako zanimljiva stvar se dogodi kada uključimo magnetsko polje što možemo vidjeti raspisivanjem izraza za magnetsko polje:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{\hbar}{2q} \oint \nabla\delta \cdot d\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2q}(\delta_a - \delta_b).\end{aligned}\quad (5.42)$$

Odavde vidimo da uspostavljanjem konačnog magnetskog toka dobivamo faznu razliku. Da bismo lakše vidjeli interferencijske efekte zapišimo još

$$\delta_a = \delta_0 + \frac{q}{\hbar}\Phi \quad \text{te} \quad \delta_b = \delta_0 - \frac{q}{\hbar}\Phi \quad (5.43)$$

tako da trivijalnom algebrom dobijemo

$$J_u = 2J_0 \sin \delta_0 \cos \frac{q\Phi}{\hbar}. \quad (5.44)$$

Amplituda struje je tako modulirana tokom magnetskog polja kroz prsten

$$J_{max}(\Phi) = 2J_0 \left| \cos \frac{q}{\hbar}\Phi \right|. \quad (5.45)$$

Interferencijski efekti su dakle očiti te su posljedica razlike u fazi struja koje dolaze preko različitih spojeva. Po analogiji s eksperimentom s dvije pukotine, ovdje bi spojevi igrali ulogu pukotina dok bi iznos magnetskog toka igrao ulogu udaljenosti od središta zaslona.

## 6 Silnice suprastruje i veza s Bohmovom mehanikom

U ovom poglavlju pogledat ćemo kako se kvazičestice odgovorne za suprastruju uklapaju u Bohmovu mehaniku izloženu u poglavlju 4. Napisat ćemo valnu funkciju koja je rješenja aproksimativne Ginzburg-Landauove jednadžbe te pomoću nje izraziti struju u supravodiču. Jednom kad smo našli odgovarajući izraz za polje struje pogledat ćemo kako izgledaju putanje kvazičestica u supravodiču. Kvantni efekti i interpretacija preko kvantnog potencijala doći će do izražaja razmatranjem eksperimen-



menta s dvije pukotine u supravodiču [17].

## 6.1 Suprastruja

Suprastruja se može naći minimizirajući funkcional slobodne energije s obzirom na vektorski potencijal

$$\frac{\delta F_s[\psi]}{\delta \mathbf{A}} = 0. \quad (6.1)$$

Koristeći Ampereov zakon

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.2)$$

za suprastruju u konačnici dobivamo

$$\mathbf{j} = -i \frac{q\hbar}{2m} [\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi] - \frac{q^2}{mc} \psi^* \psi \mathbf{A}. \quad (6.3)$$

Nosioci ove struje su kvazičestice (Cooperovi parovi)<sup>20</sup> te je njihova koncentracija dana sa

$$\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \equiv n(\mathbf{r}). \quad (6.4)$$

Za uniformni  $|\psi|$  ova jednadžba se svodi na

$$\mathbf{j} = -\frac{q^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (6.5)$$

što je uz normalizaciju  $|\psi|^2 = n$  jednadžba koja je osnovna pretpostavka Londonove teorije supravodljivosti. Odavde slijedi da je ta teorija poseban slučaj GL teorije.

Pomnožimo jednadžbu (5.38) sa  $\psi^*$  te pripadnu kompleksno konjugiranu jednadžbu sa  $\psi$  da bismo dobili sustav jednadžbi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi^*(\mathbf{r}) \left( \nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + (-a + b|\psi(\mathbf{r})|^2) \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}) = 0; \quad (6.6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(\mathbf{r}) \left( \nabla + \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi^*(\mathbf{r}) + (-a + b|\psi(\mathbf{r})|^2) \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.7)$$

Oduzimajući ove dvije jednadžbe, uz malo algebre, dobivamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot [\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi] + \frac{iq\hbar}{mc} \nabla \cdot (\mathbf{A}\psi\psi^*) = 0. \quad (6.8)$$

<sup>20</sup>U originalnom članku Ginzburg i Landau  $|\psi|^2$  nazivaju gustoćom "supravodljivih elektrona".

Množeći ovu jednadžbu sa  $iq/\hbar$  direktno slijedi lokalni zakon sačuvanja  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

Iz struje i koncentracije također slijedi da je lokalna brzina nosioca struje

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{qn(\mathbf{r})}. \quad (6.9)$$

Napišemo li  $\psi$  u polarnom obliku

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (6.10)$$

za struju dobivamo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{q}{m} \left( \hbar\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\nabla\varphi - \frac{q}{c}\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right), \quad (6.11)$$

iz čega za brzinu slijedi

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m} \left( \hbar\nabla\varphi(\mathbf{r}) - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right). \quad (6.12)$$

Ovdje treba spomenuti neke konceptualne razlike između funkcije  $\psi(\mathbf{r})$  iz ovog poglavlja i valne funkcije definirane i interpretirane u potpoglavlju 2.1. Za razliku od uobičajene probabilističke interpretacije, kvadrat modula funkcije  $\psi(\mathbf{r})$  u ovdje razvijenoj GL teoriji predstavlja makroskopsku gustoću kvazičestica (Cooperovih parova) te stoga ne povlači za sobom tradicionalne probleme kolapsa valne funkcije.

## 6.2 Veza s Bohmovom mehanikom

Poslužimo se Feynmanovim pristupom [18] u razmatranju supravodljivosti - napišimo prvo jednočestičnu Schrödingerovu jednadžbu kada imamo vektorski potencijal  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi, \quad (6.13)$$

gdje  $\phi$  predstavlja električni potencijal ( $q\phi$  je slijedom toga električna potencijalna energija). U slučaju kada je ogroman broj čestica u istom stanju - dakle u slučaju supravodljivosti -  $\psi\psi^*$  možemo razmatrati kao gustoću čestica ili, ako konstantu naboja uključimo u definiciju valne funkcije, kao gustoću naboja. Takva interpretacija valne funkcije je opravdana na sljedeći način:  $\psi\psi^*$  za svaku pojedinu česticu pred-

stavlja tek vjerojatnost nalaženja iste na određenom mjestu, no imamo li ogroman broj takvih čestica s istim takvim vjerojatnostima, onda ćemo u nekom volumenu  $dV$  pronaći broj čestica približno jednak  $\psi\psi^*dV$ . Tvrdnjom da u volumenu  $dV$  imamo broj čestica jednak  $\psi\psi^*dV$  zapravo govorimo da  $\psi\psi^*$  predstavlja gustoću čestica<sup>21</sup>.

Ubacimo sada u jdbn. (6.13) valnu funkciju (6.10). Uzmemo li Coulombovo baždarenje  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$  dobivamo

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} - \hbar |\psi\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla^2 |\psi\rangle + 2i \nabla \varphi \nabla |\psi\rangle + i |\psi\rangle \nabla^2 \varphi - |\psi\rangle \nabla^2 \varphi - \frac{2iq}{\hbar c} \mathbf{A} \nabla |\psi\rangle \right. \\ & \left. + \frac{2q}{\hbar c} \mathbf{A} |\psi\rangle \nabla \varphi - \frac{q^2}{\hbar^2 c^2} \mathbf{A}^2 |\psi\rangle \right] + q\phi |\psi\rangle \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ova jednadžba se može rastaviti na realnu i imaginarnu jednažbu. Nas zanima realni dio jednadžbe; za njega dobivamo

$$-\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\nabla^2 |\psi\rangle}{|\psi\rangle} - \left( \nabla \varphi - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \right] + q\phi, \quad (6.15)$$

što korištenjem jdbn. (6.12) daje

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{m}{2} v^2 - q\phi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\psi\rangle}{|\psi\rangle}. \quad (6.16)$$

Puni značaj ove jednadžbe možemo vidjeti eliminiramo li  $\varphi$  preko jdbn. (6.12) u korist  $\mathbf{v}$  te interpretiramo sve članove. Uzmemo li gradijent jednadžbe (6.16) te iskoristimo vektorski identitet

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \quad (6.17)$$

dobivamo

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - m \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - m(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\psi\rangle}{|\psi\rangle}. \quad (6.18)$$

Prva zagrada na desnoj strani jednadžbe je jednaka električnom polju budući da vri-

<sup>21</sup>Iako se čini da je ovime pitanje kolapsa valne funkcije zaobiđeno, tome nije tako. U argumentu smo prešutno iz govora o vjerojatnosti da nešto negdje nađemo prešli do govora da nešto stvarno jest negdje. Stoga je pitanje kolapsa i dalje otvoreno kao i prije.

jedi

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6.19)$$

Drugi član na desnoj strani možemo drugačije zapisati pogledamo li rotaciju jednadžbe (6.12):

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times (\nabla\varphi) - \frac{q}{mc} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (6.20)$$

što daje

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{q}{mc} \mathbf{B}. \quad (6.21)$$

Ovdje smo iskoristili činjenicu da je rotacija gradijenta jednaka nuli te da  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Koristeći ove rezultate slijedi da se prva dva člana na desnoj strani jednadžbe (6.18) mogu zapisati kao

$$q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (6.22)$$

što nije ništa drugo doli ukupna sila na naboj  $q$  u prisustvu električnog polja  $\mathbf{E}$  i magnetskog polja  $\mathbf{B}$ .

Pogledajmo sada parcijalnu derivaciju na lijevoj strani jednadžbe (6.18) - ona je povezana s ukupnom derivacijom na sljedeći način:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (6.23)$$

Uzmemo li sve gore navedeno u obzir, jednadžbu (6.18) konačno možemo zapisati kao

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{el} - \nabla Q, \quad (6.24)$$

gdje je  $\mathbf{F}_{el}$  klasična elektromagnetska sila te

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\psi|}{|\psi|}. \quad (6.25)$$

Za razliku od sile  $\mathbf{F}_{el}$ , sila  $-\nabla Q$  je manje jasna te ju možemo zvati kvantna sila. Njeno postojanje ima prikladnu interpretaciju unutar Bohmove mehanike - potencijal  $Q$  ima identičnu formu kao kvantni potencijal koji smo uveli u potpoglavlju (4.2), tj. jdbn. (4.7) (uz notaciju  $R \equiv |\psi|$ ).

### 6.3 Modeliranje valne funkcije

Da bi gornja razmatranja bila podložna eksperimentu moramo naći realističnu valnu funkciju  $\psi(\mathbf{r})$ . Razmatrat ćemo slučaj supravodiča kod kojega nema vanjskog magnetskog polja, tj.  $\mathbf{A} = 0$ . Tada se jdbn. (5.38) pojednostavljuje i prelazi u

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \kappa^2(1 - \beta|\psi(\mathbf{r})|^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.26)$$

gdje smo uveli pokrate

$$\kappa^2 = \frac{2ma}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{b}{a}. \quad (6.27)$$

Razmatrat ćemo pločasti uzorak supravodiča položen u  $x$ - $y$  ravninu.

Pogledajmo prvo rješenja jednadžbe (6.26) koja predstavljaju struju koja teče u  $x$ -smjeru slijeva nadesno. Takvo rješenje možemo predstaviti ravnim valom

$$\psi(x) = \sqrt{n_0} e^{ikx}, \quad (6.28)$$

gdje je  $n_0$  konstantna koncentracija dok je  $k$  pozitivan i realan. Jdbn. (6.28) je rješenje jdbn. (6.26) uz uvjet

$$k^2 = \kappa^2(1 - \beta n_0). \quad (6.29)$$

S obzirom da je  $\beta n_0 > 0$  vidimo da je maksimalna vrijednost za  $k$ :  $k_{max} = \kappa$ . Možemo provjeriti da naše rješenje predstavlja struju koja ide nadesno: ubacimo (6.28) u izraz za brzinu (6.12)

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar k}{m} \hat{\mathbf{x}}, \quad (6.30)$$

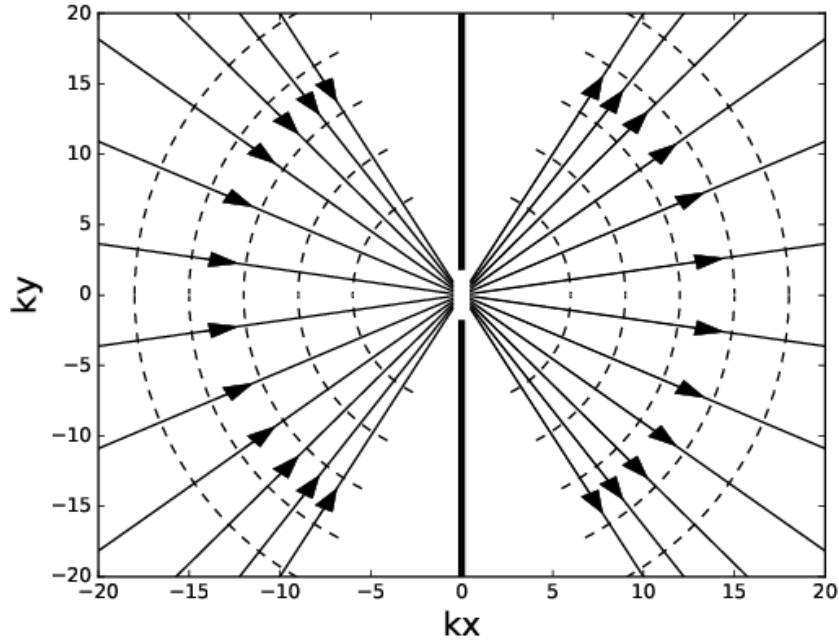
odakle vidimo da je maksimalna brzina  $v_{max} = \hbar k/m$ . Nadalje možemo nelinearni član iz jdbn. (6.26),  $\beta|\psi|^2 = \beta n_0$ , izraziti kao

$$\beta n_0 = \frac{\kappa^2 - k^2}{\kappa^2} = \frac{v_{max}^2 - v^2}{v_{max}^2}, \quad (6.31)$$

što bi značilo da je taj član zanemariv kad je brzina čestica bliska maksimalnoj ( $v \approx v_{max}$ ).

No nama je ovo rješenje nezanimljivo te služi samo da lakše pristupimo zanimljivijem slučaju - pogledajmo što se događa kada paralelno s  $y$ -osi umetnemo barijeru s

malim otvorom na jednom mjestu. Bez smanjenja općenitosti uzimamo da je barijera duž pravca  $x = 0$  te rupa na mjestu  $x = y = 0$ . Opisani postav je prikazan na slici 6.1.



Slika 6.1: Silnice suprapstruje i pridružene valne fronte u slučaju barijere s jednom pukotinom.

Kao što je prikazano na slici, val se sažima kako iz  $x = -\infty$  dolazi do pukotine te onda opet naizgled izvire u  $x = y = 0$  i širi se prema  $x = +\infty$ . Nas zanima ponašanje vala i silnica daleko od pukotine pa ćemo razmatrati aproksimaciju u kojoj se val za  $x < 0$  skuplja, a za  $x > 0$  širi u koncentričnim kružnicama. Budući da smo pukotinu postavili u ishodište, to znači da naša valna funkcija ovisi samo o odaljenosti od ishodišta, tj.  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ . Prirodan izbor za takvu situaciju su cilindrične koordinate  $(r, \varphi, z)$  te možemo pisati  $\psi(\mathbf{r}) = \psi(r)$ . Koristeći izraz za laplasijan u cilindričnim koordinatama

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (6.32)$$

jdbn. (6.26) se svodi na

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \kappa^2 (1 - \beta |\psi|^2) \psi = 0. \quad (6.33)$$

Gornju jednadžbu možemo pokušati riješiti sljedećim *ansatzom*

$$\psi(r) = f(r) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (6.34)$$

Time iz jdbn. (6.33) dobivamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{r}^2} + 2i \frac{\partial f}{\partial \tilde{r}} + \left( \frac{1}{4\tilde{r}^2} + \frac{\kappa^2 - k^2}{k^2} - \frac{\kappa^2}{k} \frac{\beta |f|^2}{\tilde{r}} \right) f = 0, \quad (6.35)$$

gdje smo uveli bezdimenzionalnu radijalnu koordinatu  $\tilde{r} = kr$ .

Dobili smo kompliciranu diferencijalnu jednadžbu za  $f$  no probajmo pogledati je li moguće naći neko jednostavno rješenje bez numeričkih izračuna. Jednadžba je trivijalno zadovoljena za  $f = 0$ . Sljedeći najjednostavniji slučaj je  $f(r) = f_0 =$  konstanta. Tada imamo

$$\left( \frac{1}{4\tilde{r}^2} + \frac{\kappa^2 - k^2}{k^2} - \frac{\kappa^2}{k} \frac{\beta |f_0|^2}{\tilde{r}} \right) f_0 = 0, \quad (6.36)$$

što bi bilo zadovoljeno kada bi izraz u zagradi iščezavao. Iako zagrada nije egzaktno jednaka nuli ona je zanemariva u slučaju (i) da smo daleko od ishodišta ( $1/\tilde{r}^2 \approx 1/\tilde{r} \approx 0$ ) te (ii) da je  $k$  blizu maksimalne vrijednosti  $k_{max} = \kappa$  (tako da  $(\kappa^2 - k^2)/k^2 \approx 0$ ). Ovakva aproksimacija će za naše potrebe biti dovoljna, a za konkretnu vrijednost  $f_0$  možemo uzeti  $f_0 = 1$  budući ta vrijednost neće utjecati na izračun silnica struje. Jdbn. (6.34) tada postaje

$$\psi(r) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (6.37)$$

S obzirom da smo  $k$  definirali kao pozitivan faza  $kr$  predstavlja radijalno izlazni val; utoliko je jdbn. (6.34) rješenje samo za područje  $x > 0$  dok za  $x < 0$  moramo promijeniti predznak faze da bismo dobili radijalni ulazni val. U konačnici onda potpuno rješenje možemo zapisati kao

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} & \text{za } x > 0, \\ \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} & \text{za } x < 0. \end{cases} \quad (6.38)$$

Sada dolazimo do okosnice ovoga rada - pogledajmo slučaj kada imamo dvije

pukotine na barijeri. Postavimo jednu pukotinu na  $y = d/2$  te drugu na  $y = -d/2$  tako da je razmak između pukotina jednak  $d$ . Kada je otvorena samo jedna od pukotina imamo situaciju istu kao na slici 6.1 s izuzetkom da je pukotina pomaknuta na  $y$ -osi. Valnu funkciju tada možemo pisati kao  $\psi(r_1)$  za otvorenu donju, tj.  $\psi(r_2)$  za otvorenu gornju pukotinu, gdje je  $\psi(r)$  dan u jdbn. (6.38) te

$$r_1(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - d/2)^2}, \quad (6.39)$$

$$r_2(x, y) = \sqrt{x^2 + (y + d/2)^2}. \quad (6.40)$$

Sada smo na korak od rješenja s obje otvorene pukotine. Uočimo samo da smo gornjim aproksimacijama diferencijalnu jednadžbu sveli na linernu pa se možemo poslužiti principom superpozicije: bilo koja linerna kombinacija rješenja je također rješenje jednadžbe te možemo pisati (uz prigodnu normalizaciju)

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(r_1) + \psi(r_2)), \quad (6.41)$$

gdje je  $\psi(r)$  opet zadan jednadžbom (5.26).

Pogledajmo prvo što očekujemo od rješenja tipa (6.41) u vidu Bohmove teorije. Zapišemo li općenito  $\psi(r_1) = R_1 e^{iS_1/\hbar}$  te  $\psi(r_2) = R_2 e^{iS_2/\hbar}$  za ukupnu amplitudu dobivamo

$$R^2(\mathbf{x}) = R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2 \cos[(S_1 - S_2)/\hbar]. \quad (6.42)$$

Kvadrat ukupne amplitude dakle nije naprosto zbroj pojedinačnih kvadrata amplitude već imamo interferenciju - za nju je odgovoran zadnji član na desnoj strani gornje jednadžbe.

Interferencijski član ovisi o produktu  $R_1 R_2$ , a vrijednost tog produkta je to veća što se pojedini valovi više preklapaju.

Nađimo još utjecaj interferencije na gibanje čestica. Faznu  $S/\hbar$  možemo jednostavno naći

$$S/\hbar = \tan^{-1} \frac{R_1 \sin(S_1/\hbar) + R_2 \sin(S_2/\hbar)}{R_1 \cos(S_1/\hbar) + R_2 \cos(S_2/\hbar)}, \quad (6.43)$$



odakle direktnim računom za vektorsko polje  $\mathbf{p} = \nabla S$  slijedi [12]

$$\nabla S = R^{-2} \left\{ R_1^2 \nabla S_1 + R_2^2 \nabla S_2 + R_1 R_2 \nabla (S_1 + S_2) \cdot \cos[(S_1 - S_2)/\hbar] \right. \\ \left. + \hbar [R_1 \nabla R_2 - R_2 \nabla R_1] \cdot \sin[(S_1 - S_2)/\hbar] \right\}. \quad (6.44)$$

Odavde vidimo da zakon gibanja poprima poprilično kompliciranu formu. Očito je da efekti interferencije bitno mijenjaju ponašanje čestice te se ono ne može naprosto gledati kao nekakv zbroj gibanja koja su posljedica jednog i drugog vala. Dakako, daleko od preklapanja čestica *sluša* samo jedan val, tj.  $\nabla S \approx \nabla S_1$  odnosno  $\nabla S \approx \nabla S_2$  ovisno o tome je li riječ o, respektivno, području  $R_2 \approx 0$  ili  $R_1 \approx 0$ .

## 6.4 Izračun silnica struje

Ubacimo sada ukupnu valnu funkciju (6.41) u izraz za struju u supravodiču (6.3) uz uvjet  $A(\mathbf{r}) = 0$

$$\mathbf{j} = -i[\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi]. \quad (6.45)$$

(Ovdje smo ispustili konstantu koja množi desnu stranu jednadžbe budući ona ne utječe na račun.) Umetanjem valne funkcije (6.41) u ovaj izraz za struju dobivamo

$$\mathbf{j} = \frac{\text{sign}(x)k}{\sqrt{r_1 r_2}} (g_1 \nabla r_1 + g_2 \nabla r_2), \quad (6.46)$$

gdje smo uveli

$$g_1 = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} + \cos \varphi_{21} + \frac{\sin \varphi_{21}}{2kr_1}, \quad (6.47)$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + \cos \varphi_{21} - \frac{\sin \varphi_{21}}{2kr_2}, \quad (6.48)$$

$$\varphi_{21} = k(r_2 - r_1), \quad (6.49)$$

$$\nabla r_1 = \hat{\mathbf{x}} \frac{x}{r_1} + \hat{\mathbf{y}} \frac{y - d/2}{r_1}, \quad (6.50)$$

$$\nabla r_2 = \hat{\mathbf{x}} \frac{x}{r_2} + \hat{\mathbf{y}} \frac{y + d/2}{r_2}, \quad (6.51)$$

te  $\text{sign}(x) = +1$  za  $x > 0$ , tj.  $\text{sign}(x) = -1$  za  $x < 0$ . Silnice u  $x$ - $y$  ravnini možemo izračunati preko

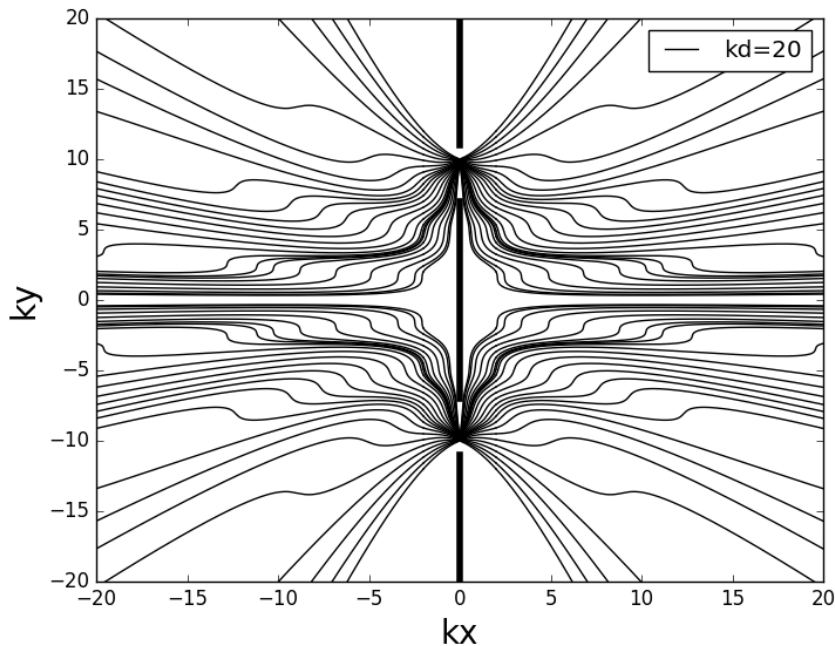
$$\frac{dy}{dx} = \frac{j_y}{j_x}, \quad (6.52)$$

što možemo zapisati i kao

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_y}{m_x}, \quad (6.53)$$

gdje je  $\mathbf{m} \equiv g_1 \nabla r_1 + g_2 \nabla r_2$ .

Gornju jednadžbu možemo riješiti numerički (kôd u Dodatku xx) ponovno koristeći bezdimenzionalne koordinate  $\tilde{x} = kx$  i  $\tilde{y} = ky$ . Za slučaj  $kd = 20$  rezultat je prikazan na slici 6.2.



Slika 6.2: Silnice u slučaju barijere s dvije pukotine za  $kd = 20$ .

Na slici možemo vidjeti da silnice struje imaju istu formu kao i karakteristične krivudave bohmolike putanje kod eksperimenta s dvije pukotine [12] [19]. Putanje ovih čestica mogu se pobliže kvalitativno razmotriti uz pomoć kvantnog potencijala što je zadatak potpoglavlja 6.5.

#### 6.4.1 Klasične struje

Da bismo bolje dočarali kvantne efekte, razmotrimo na kratko slučaj *klasičnih struja*.<sup>22</sup>

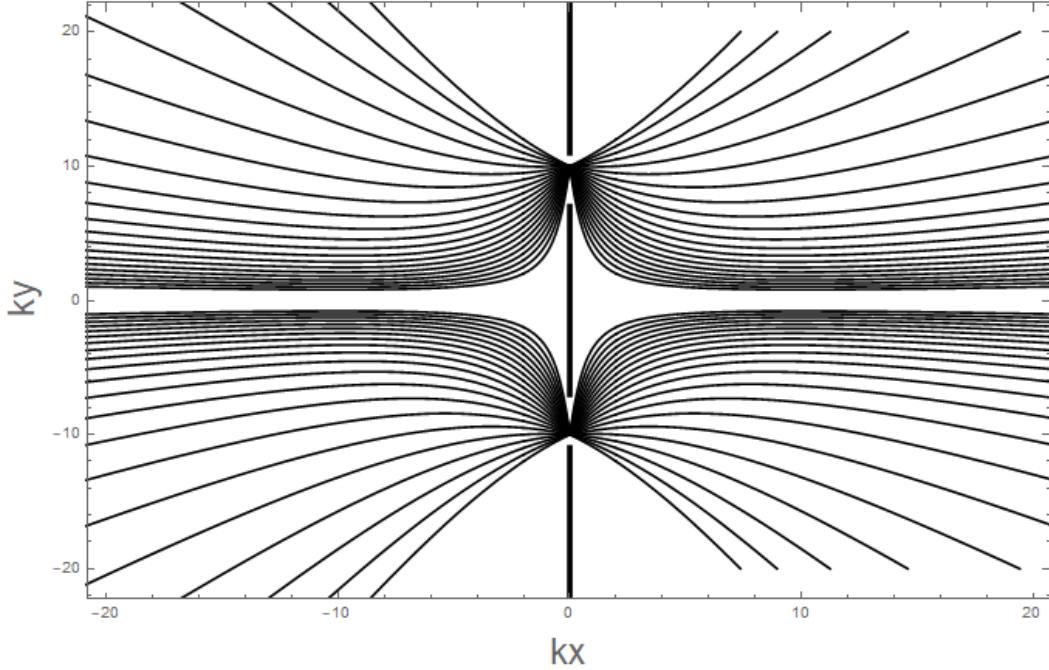
Ovdje bismo za svaku pojedinu valnu funkciju (6.38) izračunali pripadnu struju za gornju i donju pukotinu, tj.  $j_1$  i  $j_2$ . Ukupnu struju ne bismo dobili iz ukupne valne funkcije (6.41) koja je superpozicija pojedinih valnih funkcija već naprosto iz

<sup>22</sup>Suprastruja je, razumljivo, isključivo kvantni efekt. Ovdje se samo želi ukazati na nepostojanje principa superpozicije u klasičnom svijetu.

vektorskog zbroja

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2). \quad (6.54)$$

Kvalitativne razlike na ovoj slici (6.3) i slici 6.2 su očite - u klasičnom slučaju ne vide se efekti kvantnog potencijala kojega ćemo sada pobliže izložiti.



Slika 6.3: Silnice klasične struje u slučaju barijere s dvije pukotine za  $kd = 20$ .

## 6.5 Kvantni potencijal

Pogledajmo sada kako se dane putnje mogu pobliže objasniti predočavanjem kvantnog potencijala. Ubacimo sada modul valne funkcije (6.41)

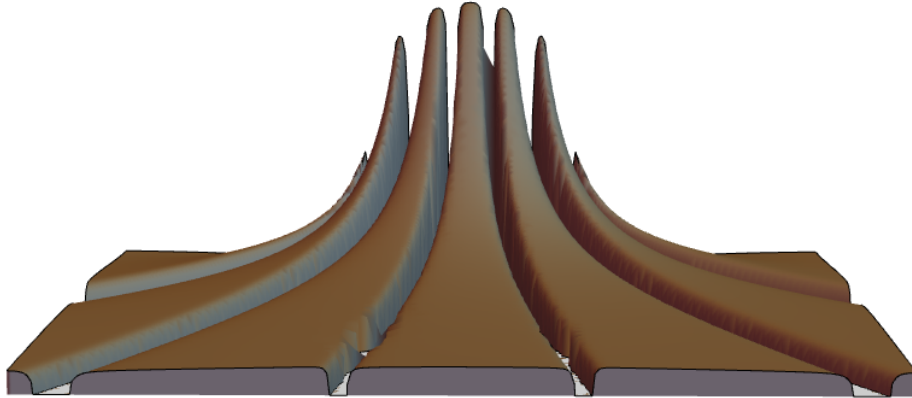
$$|\Psi| = \sqrt{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{1}{\tilde{r}_1} + \frac{1}{\tilde{r}_2} + \frac{2 \cos(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)}{\sqrt{\tilde{r}_1 \tilde{r}_2}}} \quad (6.55)$$

u izraz za kvantni potencijal

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\psi|}{|\psi|}.$$

Egzaktni izraz za kvantni potencijala  $Q(\tilde{x}, \tilde{y})$  nije toliko bitan, a trodimenzionalni prikaz dan je na slici 6.4.

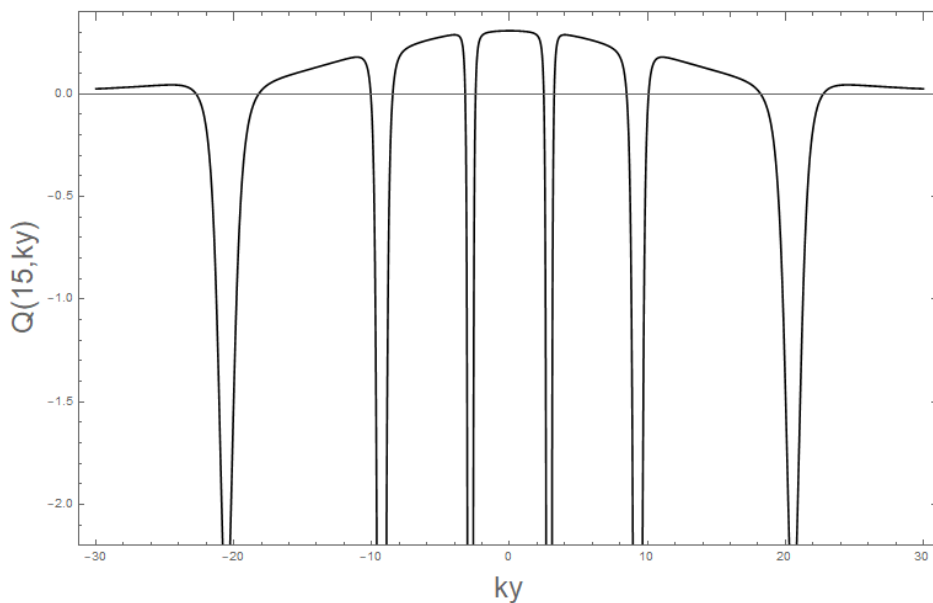
Općenita karakteristika ovoga potencijala - kao i onoga kod uobičajenog eksperimen-



Slika 6.4: Prikaz kvantnog potencijala za  $kd = 20$  uz  $0 < x < 50$  te  $-30 < y < 30$  gledano iz perspektive zaslona.

menta s dvije pukotine - jest da ima izražene *platoe* i *brazde*. Sa slike 6.2 vidimo da su putanje manje-više uniformne izuzev određenih *lomova* - upravo ti lomovi govore da je čestica naišla na brazdu u Q-potencijalu u kojem osjeća ogromnu silu.

Na slici 6.5 je dan poprečni presjek kvantnog potencijala za  $\tilde{x} = 15$ .



Slika 6.5: Poprečni presjek kvantnog potencijala na udaljenosti  $kx = 15$ .

Vidimo da je promjena potencijala u brazdama velika, tj. sila  $-\nabla Q$  je velika. Čestica nailaskom na brazdu akcelerira te potom decelerira i stiže na novi plato gdje je sila relativno slaba.<sup>23</sup> Iz rečenog slijedi, a i sa slike 6.2 je vidljivo, da se većina čestica *giba po platou* te su platoi odgovorni za svijetle pruge dok brazde odgovaraju

<sup>23</sup>Ako bismo pogledali konkretne iznose kvantne potencijalne energije vidjeli bismo da čestica ne može ostati zarobljena u potencijalnoj jami zbog svoje znatno veće kinetičke energije.

tamnim prugama na zaslonu. Također valja uočiti da se dubina brazdi smanjuje kako  $|y|$  raste što je odgovorno za specifičan interferencijski uzorak.

## 6.6 Ka eksperimentu

Razmotrimo neke osnovne elemente eksperimenta u kojemu bi se mjerile silnice kao na slici 6.2.

Struja na pločastom vodiču stvorit će magnetsko polje iznad svoje površine prema Biot-Savartovom zakonu [31]

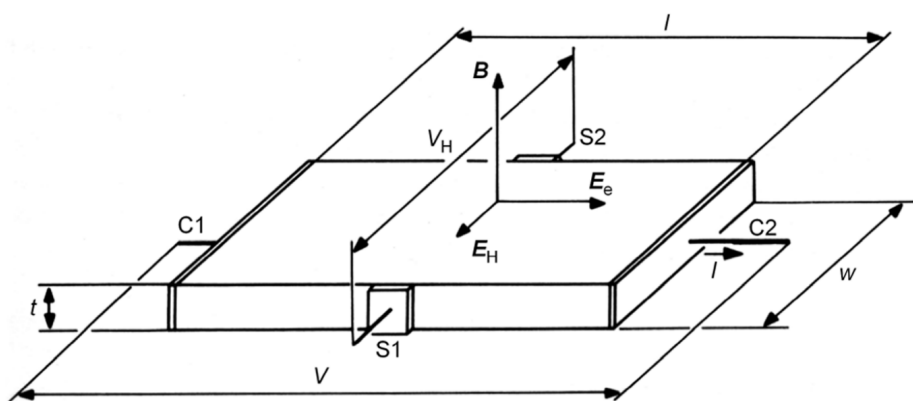
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \hat{\eta}}{\eta^2} d\tau', \quad (6.56)$$

gdje je  $\eta = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$  vektor od promatrane točke na uzorku  $(x', y', z')$  do točke u prostoru  $(x, y, z)$  te  $d\tau'$  volumni element uzorka.

Ako bismo mogli mjeriti ovo magnetsko polje, tada bismo iz Ampèreovog zakona  $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  mogli rekonstruirati struju  $\mathbf{j}$  te shodno tome putanje čestica.

Magnetsko polje možemo lokalno i precizno mjeriti tzv. *Hallovom probom*. Kako i samo ime nagovješta, ona radi na principu Hallovog efekta kojega ovdje ukratko iznosimo.

Pogledajmo pločasti vodič na slici 6.6 širine  $w$ , dužine  $l$  i debljine  $t$ . Struja  $I$  teče kroz vodič preko kontakata  $C1$  i  $C2$  kao posljedica električnog polja  $\mathbf{E}_e$ .



Slika 6.6: Pločasti vodič - aktivni dio Hallove probe. Preuzeto iz [32].

Što će se dogoditi ako na ovakvu konfiguraciju dodamo magnetsko polje  $\mathbf{B}$  okomito na površinu vodiča? Elektroni (pretpostavljamo da oni vode struju) će dakako

osjećati dodatnu silu zbog magnetskog polja te će ukupna biti dana sa

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (6.57)$$

Za razliku od slučaja bez magnetskog polja  $\mathbf{B}$ , elektronske putanje će sada biti zakrenute te će se elektroni gomilati na jednom rubu vodiča. No višak elektrona na jednoj strani će stvoriti električnu silu koja će djelovati u smjeru suprotnom od magnetske. Ovaj proces se odvija vrlo brzo te se u konačnici uspostavlja polje  $\mathbf{E}_H$  koje je okomito na  $\mathbf{E}_e$  i  $\mathbf{B}$  kako je prikazano na slici.

Između rubova vodiča je tako uspostavljen tzv. *Hallovo napon* koji je mjerljiv preko kontakata  $S_1$  i  $S_2$  te je dan sa

$$V_H = \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{E}_H d\mathbf{w}. \quad (6.58)$$

Opisana pločica je ono što se zove aktivni dio Hallove probe koji može biti izuzetno malen - velični mogu biti i npr.  $t = 10\mu m$ ,  $w = 100\mu m$  i  $l = 200\mu m$  [32]. Pored mikroskopskih veličina, bitna odlika ovakvih mjerenja je beskontaktnost što omogućuje mjerenje bez većih perturbacija.

U praksi su aktivni dijelovi poluvodički elementi te postoji širok raspon različitih vrsta ne samo što se tiče materijala nego i glede oblika. Pločaste Hallove probe su pogodne za mjerenje homogenog magnetskog polja, dok se za nehomogena magnetska polja - kao u našem primjeru - možemo poslužiti trodimenzionalnim strukturama [33].

Naravno, konkretni eksperimentalni postav - od izbora supravodiča, Hallove probe itd. - premašuje okvire ovoga rada te je potencijalna provedba eksperimenta ostavljena profesionalnim eksperimentalnim fizičarima.

## 7 Zaključak

U ovome radu razmotrili smo osnovne crte standardnog pristupa kvantnoj mehanici. Zbog problema mjerenja smo objasnili zašto on nije potpuno zadovoljavajuće te kako se navedeni problemi mogu riješiti. Razmotrili smo osnovne postulate Bohmove mehanike te pokazali ne samo da je ona u skladu sa svim eksperimentalnim predviđanjima kao i standardna kvantna mehanika, nego i da se problem mjerenja može elegantno riješiti u okvirima ove teorije. Nadalje, izložili smo osnove supravodljivosti te pokazali kako se fenomeni mogu opisati fenomenološkim pristupom, tj. Ginzburg-Landauovom teorijom. Jedan od temeljnih izračuna bio je izračun silnica suprastruje u pločastom supravodiču s barijerom koja ima dvije pukotine. Pokazali smo da ove silnice daleko od pukotina imaju istu formu kao što bi ih imale Bohmove putanje čestica koje nose struju. Silnice pokazuju krivudanja koja su karakteristična za bohmove putanje u slučaju interferencije. Konkretna mjerenja struje mogla bi se izvršiti Hallovom probom kako je skicirano u radu.

# Dodaci

## Dodatak A Veza BCS i GL teorije

Ginzburg-Landauova teorija je fenomenološka teorija, tj. lišena je mikroskopske slike. Mikroskopski opis supravodljivosti dali su J. Bardeen, L. Cooper i J.R. Schrieffer 1957. godine [21] te po njima tu teoriju nazivamo BCS teorija supravodljivosti.

Gor'kov [22] je već 1959. godine uspio izvesti GL teoriju iz BCS teorije pokazujući tako mikroskopsku pozadinu fenomenoloških veličina u GL teoriji.

Ovdje ćemo također pokazati vezu GL i BCS teorije no nećemo se služiti Gor'kovljevim izvodom već onim koji su razradili Xu *et al.* u [23], ali svakako ćemo u konačnici rekonstruirati rezultat koji je dobio i Gor'kov.

Izvod ćemo započeti od izraza za slobodnu energiju<sup>24</sup> u BCS teoriji koji je dan sa [24]

$$f_s = f_n - \frac{1}{2}N(0)\Delta^2 - N(0)\Delta^2 \ln \frac{\Delta_0}{\Delta} - 4N(0)kT \int_0^{\hbar\omega_D} \ln(1 + e^{-\beta E})d\xi + \frac{1}{3}\pi^2 N(0)(kT)^2, \quad (\text{A.1})$$

gdje su  $F_s$  i  $F_n$  slobodne energije supravodljivog, tj. normalnog stanja;  $\Delta = \Delta(T)$  je BCS parametar procjepa ovisan o temperaturi te  $\Delta_0 = \Delta(0)$ ;  $N(0)$  je gustoća stanja pri 0 K;  $\xi_k = \epsilon_k - \mu$  je elektronska energija mjerena od Fermijeve površine, a  $\mu$  je kemijski potencijal;  $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2(t)}$  je ukupna energija dvočestičnog stanja;  $\omega_D$  je Debeyeva frekvencija,  $k$  Boltzmannova konstanta te  $\beta = 1/kT$ .

Najviše ćemo se morati pozabaviti integralom u jdbn. (A.1) te ćemo ga označiti sa  $I$ :

$$I = -4N(0)kT \int_0^{\hbar\omega_D} \ln(1 + e^{-\beta E})d\xi. \quad (\text{A.2})$$

Gornji integral jednostavnom supstitucijom  $d\xi = E/\xi dE$  možemo integrirati po  $E$ ; donja granica integrala je tada  $\Delta$  dok gornju možemo radi jednostavnosti pustiti u

---

<sup>24</sup>Ovdje ćemo radi jednostavnosti govoriti *slobodna energija* premda je zapravo riječ o gustoći slobodne energije  $f = F/V$ .



$+\infty$  te razviti po potencijama budući  $0 \leq e^{-\beta E} < 1$ . Koristeći

$$\ln x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1+x)^n}{n}, \quad (\text{A.3})$$

dobivamo

$$I = -4N(0)kT \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{\Delta}^{\infty} dE \frac{E e^{-n\beta E}}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Rješenje integrala u uglatim zagradama uključuje modificiranu Besselovu funkciju prve vrste  $K_1$ . Uz pokratu  $x = \beta\Delta$  izraz (A.4) možemo zapisati kao

$$I = -4N(0)kT\Delta f(x), \quad (\text{A.5})$$

gdje je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{K_1(nx)}{n}. \quad (\text{A.6})$$

Razmatranje dalje nastavljamo za slučajeve  $\beta\Delta > 1$  i  $\beta\Delta < 1$ .

• Slučaj  $\beta\Delta > 1$

U ovom slučaju razvit ćemo funkciju  $K_1$

$$K_1(nx) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2nx}} e^{-nx} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \left( \frac{1}{2nx} \right)^k \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(-k+3/2)} + \mathcal{O}((nx)^{-m}) \right], \quad (\text{A.7})$$

gdje je  $\Gamma$  gama funkcija.

Za  $x \gg 1$  (režim  $T \ll T_c$ ) možemo se u gornjoj sumi zadržati na  $k = 1$  te u sumi u izrazu (A.6) na  $n = 1$ . Tada imamo

$$I = -4N(0)kT \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2\beta}} e^{-\beta\Delta} \left( 1 + \frac{3}{8\beta\Delta} \right). \quad (\text{A.8})$$

• Slučaj  $\beta\Delta < 1$

U ovom slučaju se ne možemo poslužiti razvojem (A.7) te ćemo se morati poslužiti svojstvima modificiranih Besselovih funkcija.

Općenito vrijedi [25]

$$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} K_n(x) \quad (\text{A.9})$$

$$K'_n(x) = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x). \quad (\text{A.10})$$

Uzimajući  $n = 1$  i oduzimajući ove dvije jednačbe dobivamo

$$-K_1'(x)x = K_1(x) + K_0(x)x, \quad (\text{A.11})$$

odakle slijedi

$$\frac{d}{dx}(xf(x)) = xg(x), \quad (\text{A.12})$$

gdje smo uveli

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(nx). \quad (\text{A.13})$$

Uz supstituciju  $xf(x) = u(x)$  i integraciju iz jdbn. (A.12) dobivamo

$$u(x) = \int xg(x)dx + C, \quad (\text{A.14})$$

gdje ćemo konstantu integracije  $C$  fiksirati kasnije.

Ovaj integral se svodi na tablične iskoristimo li [25]

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(nx) \cos(nxt) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\gamma x}{4\pi}\right) \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + [(2l-1)\pi - tx]^2}} - \frac{1}{2\pi l} \right] \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + [(2l-1)\pi + tx]^2}} - \frac{1}{2\pi l} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

gdje je  $\gamma$  Eulerova konstanta; da bismo dobili  $g(x)$  u gornjem izrazu postavljamo  $t = 0$ .

Ovime lako možemo dobiti  $u(x)$  te podijeliti s  $x$  da bismo dobili

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x \left( \gamma - \frac{1}{2} + \ln \frac{x}{4\pi} \right) \\ &+ \frac{\pi}{x} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (2l-1)\pi \sqrt{1 + \left( \frac{x}{(2l-1)\pi} \right)^2} - \frac{x^2}{4l\pi} \right\} + \frac{C}{x} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Sada možemo razviti korijen po kvadriranom članu preko

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, \quad (\text{A.17})$$

te ćemo se riješiti  $\gamma$  pomoću konstante [24]  $\Delta_0/kT_c = \pi e^{-\gamma}$ .

Raspisujući sve skupa pojavit će se sume od kojih jednu možemo egzaktno izračunati

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(2l-1)} = 2 \ln 2, \quad (\text{A.18})$$

dok drugu možemo kompaktnije zapisati koristeći definiciju Riemannove zeta funkcije  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  tako da

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^{2n-1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n-1), \quad (\text{A.19})$$

gdje je konvergencija Riemannove zeta osigurana jer je  $2n-1 \geq 0$  za  $n \geq 2$ .

Koristeći sve navedeno cijeli izraz možemo zapisati kao

$$I = N(0)\Delta^2 \ln \frac{T}{T_c} - N(0)\Delta^2 \ln \frac{\Delta}{4\Delta_0} + N(0)\frac{\Delta^2}{2} - 4N(0)(kT)^2 \left[ C + \pi^2 \sum (2l-1) \right] - 2N(0)\Delta^2 \ln 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} B_n(T) \Delta^{2n}, \quad (\text{A.20})$$

gdje smo uveli koeficijente

$$B_n(T) = \frac{N(0)}{(k\pi T)^{2n-2}} \frac{(-1)^n (2n-2)!}{2^{2n-3} [(n-1)!]^2} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n-1) \quad \text{za } n \geq 2. \quad (\text{A.21})$$

Koristeći gornji izraz za (A.1) dobivamo

$$f_s = f_n + N(0)\Delta^2 \ln \frac{T}{T_c} - 4N(0)(kT)^2 \left[ C + \pi^2 \sum (2l-1) - \frac{1}{12} \pi^2 \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} B_n(T) \Delta^{2n}. \quad (\text{A.22})$$

Preostalo je još fiksirati konstantu C - nju dobivamo zahtjevom da je  $F_s = F_n$  za  $T = T_c$ . Imajući u vidu  $\Delta(T_c) = 0$  dobivamo

$$C = \pi^2 \left[ \frac{1}{12} - \sum (2l-1) \right]. \quad (\text{A.23})$$

Ovime, te uz pokratu

$$B_1(T) = N(0) \ln \frac{T}{T_c}, \quad (\text{A.24})$$

za slobodnu energiju naposljetku dobivamo

$$f_s = f_n + B_1(T)\Delta^2(T) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} B_n(T)\Delta^{2n}. \quad (\text{A.25})$$

Za oba gore navedena slučaja smo sada našli razvoj u ovisnost o  $\Delta(T)$  te su svi koeficijenti ovisni o  $T$  i  $N(0)$ . Minimizirajući dobivene slobodne energije s obzirom na  $\Delta$  možemo dobiti ovisnost BCS procjepa u ovisnosti o temperaturi no budući da nam ovdje ti rezultati nisu od primarnog interesa nećemo ih eksplicitno ispisivati već samo reći da se dobiju BCS-ovi rezultati s malim korekcijama.

Okrenimo se sada izrazu za slobodnu energiju u okviru GL teorije - jdbn. (5.27). Tamo smo razmatrali razvoj u blizini  $T_c$  no isti izraz možemo poopćiti i pisati (i dalje se zadržavamo samo na parnim potencijama)

$$f_s = f_n + a(T)|\psi|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \beta_n(T)|\psi|^{2n}. \quad (\text{A.26})$$

Ovdje smo radi usporedbe koja slijedi, za razliku od prvotnog razvoja (5.27), modificirali koeficijent uz  $|\psi|^4$  no time na općenitosti ne gubimo.

Sada manje-više imamo sve: slobodnu energiju u BCS teoriji te slobodnu energiju u GL teoriji; ostaje samo nametnuti uvjet da te dvije energije moraju biti jednake!

Usporedbom (A.25) i (A.26) vidimo da vrijedi

$$B_1(T)\Delta^2 = a(T)|\psi|^2; \quad (\text{A.27})$$

$$B_n(T)\Delta^{2n}(T) = \beta_n(T)|\psi|^{2n}(T). \quad (\text{A.28})$$

Razvijmo sada  $\Delta^2$  i  $|\psi|^2$ . Za  $\Delta^2$  aproksimativno imamo [24]

$$\Delta^2(T) \approx (kT\pi)^2 \frac{8}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right), \quad (\text{A.29})$$

dok za  $|\psi|^2 = n_s^2$ , zadržavajući se na linearnom članu u Taylorovom razvoju, preko (6.28) imamo

$$|\psi|^2 \approx -\frac{n_s(0)}{T_c}. \quad (\text{A.30})$$

Koristeći ova dva rezultata iz (A.27) slijedi

$$a(T) = \frac{8(kT\pi)^2 N(0)}{7\zeta(3)n_s(0)} \ln \frac{T}{T_c}. \quad (\text{A.31})$$

Koristeći ovu dobivenu korespondenciju također lako možemo naći

$$|\psi|^2(T) = \frac{7\zeta(3)n_s(0)}{8(kT\pi)^2} \Delta^2(T). \quad (\text{A.32})$$

Za  $T = T_c$  ovaj izraz je jednak Gor'kovljevom [22].

Vidimo da smo fenomenološke veličine uspjeli u potpunosti izraziti preko odgovarajućih mikroskopskih veličina. Korespondencija se može napraviti i za koeficijente višeg reda no ne nosi neke nove spoznaje.

Napomenimo još da je ovaj izvod napravljen za homogeni sistem, tj.  $|\psi|$  i  $\Delta$  su prostorno neovisne veličine, no ovim rezultatima se lako može pokriti i taj slučaj.

## Dodatak B Funkcionalna derivacija

U trećem poglavlju smo se dotaknuli pojma funkcionala i funkcionalne derivacije. Pogledajmo pobliže njihovo značenje.

Promotrimo npr. funkcional  $\Phi$  funkcije  $h(x)$  [26] koji označavamo sa  $\Phi[h]$ .  $\Phi[h]$  je preslikavanje s normiranog linearnog prostora funkcija  $M = \{h(x) : x \in \mathbb{R}\}$  na polje realnih ili kompleksnih brojeva, tj.  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ .

Razmotrimo sada situaciju u  $d$  dimenzija te podijelimo prostor na malene ćelije volumena  $\Delta V_\alpha$ . Pridjelimo svakoj ćeliji srednju vrijednost funkcije  $h(\mathbf{x})$ :

$$h_\alpha := \frac{1}{\Delta_\alpha} \int_{\Delta_\alpha} d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x}). \quad (\text{B.1})$$

Tada možemo funkcional  $\Phi$  dobiti kao granični slučaj neke funkcije  $\tilde{\Phi}$  koja ovisi o prebrojivom skupu varijabli  $h_\alpha$ . Dakle  $\tilde{\Phi}$  je funkcija, a ne funkcional od  $h_\alpha$  te ima Taylorov razvoj

$$\tilde{\Phi}(h_\alpha + \delta h_\alpha) = \tilde{\Phi}(h_\alpha) + \sum_\alpha \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial h_\alpha} \delta h_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial h_\alpha \partial h_\beta} \delta h_\alpha \delta h_\beta + \dots, \quad (\text{B.2})$$

gdje je

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial h_\alpha} = \lim_{\delta h_\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Phi}(h_1, \dots, h_\alpha + \delta h_\alpha, \dots) - \tilde{\Phi}(h_1, \dots, h_\alpha, \dots)}{\delta h_\alpha}. \quad (\text{B.3})$$

Da bismo sada dobili funkcional  $\Phi$  iz funkcije  $\tilde{\Phi}$  trebamo pogledati limes  $\Delta V \rightarrow 0$  i načiniti zamjenu  $\sum_\alpha \Delta V \rightarrow \int d\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \Phi[h(\mathbf{x}) + \delta h_\alpha] &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \tilde{\Phi}(h_\alpha + \delta h_\alpha) = \\ \Phi[h(\mathbf{x})] + \sum_\alpha \Delta V \frac{1}{\Delta V} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial h_\alpha} \delta h_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\Delta V)^2 \frac{1}{(\Delta V)^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial h_\alpha \partial h_\beta} \delta h_\alpha \delta h_\beta \\ &= \Phi[h(\mathbf{x})] + \int d^d x \frac{\delta \Phi}{\delta h(\mathbf{x})} + \frac{1}{2} \int d^d x d^d x' \frac{\delta^2 \Phi}{\delta h(\mathbf{x}) \delta h(\mathbf{x}')} \delta h(\mathbf{x}) \delta h(\mathbf{x}') + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

gdje smo, donekle neformalno, uveli

$$\frac{\delta \Phi}{\delta h(\mathbf{x})} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \lim_{\delta h_\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Phi}(h_1, \dots, h_\alpha + \delta h_\alpha, \dots) - \tilde{\Phi}(h_1, \dots, h_\alpha, \dots)}{\Delta V \delta h_\alpha}, \quad (\text{B.5})$$

gdje je  $\mathbf{x}$  u ćeliji  $\Delta V_\alpha$ .

Za funkcionalnu derivaciju vrijedi

$$\frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h(\mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{B.6})$$

Ako pak imamo funkciju od  $h(\mathbf{x})$  onda vrijedi

$$\frac{\delta f(h(\mathbf{x}))}{\delta h(\mathbf{y})} = f' \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h(\mathbf{y})} = f' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{B.7})$$

Pogledajmo sada slučaj kada funkcional možemo napisati kao volumni integral preko funkcije gustoće  $f$

$$F[h(\mathbf{x})] = \int d\mathbf{x} f(h(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x})). \quad (\text{B.8})$$

Za funkcionalnu derivaciju imamo

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta h(\mathbf{y})} &= \int d^d \mathbf{x} \frac{\delta f}{\delta h(\mathbf{y})} \\ &= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{\partial f}{\partial h(\mathbf{x})} \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h(\mathbf{y})} + \frac{\partial f}{\partial \nabla h(\mathbf{x})} \frac{\delta \nabla h(\mathbf{x})}{\delta h(\mathbf{y})} \right] \\ &= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{\partial f}{\partial h(\mathbf{x})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial f}{\partial \nabla h(\mathbf{x})} \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Iz zadnje jednakosti se lako dobije

$$\frac{\delta F}{\delta h(\mathbf{y})} = \frac{\partial f}{\partial h(\mathbf{y})} - \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla h(\mathbf{x})}. \quad (\text{B.10})$$

U slučaju  $F[h, \dot{h}]$  uz ovu jednadžbu bismo imali i izraz za  $\frac{\delta F}{\delta h(\mathbf{x})}$  te bi  $F$  tada odgovarao lagranžijanu, a  $f$  gustoći lagranžijana u teoriji polja [27].

## Dodatak C Primjer POVM mjerenja

U ovom dodatku primjenit ćemo POVM formalizam uveden u poglavlju 3 te pokazati praktičnu korisnost POVM mjerenja [29].

Recimo da Alice šalje Bobu *qubit* pripremljen u jednom od dvaju neortogonalnih stanja  $|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$  ili  $|\psi_2\rangle = |\rightarrow\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ . Bobov zadatak je saznati koji *qubit* mu je dan te provodi eksperiment da to sazna. Ako bi bila riječ o projektivnim mjerenjima Bob bi mogao uzeti projektore  $P_0 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$  i  $P_1 = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ . Na ovaj način dobivanje rezultata  $P_1$  otkriva nam sa sigurnošću da nam je poslano stanje  $|\psi_1\rangle$ , dok dobivanje rezultata  $P_0$  ne donosi nikakve nove informacije, tj. ne možemo reći koje stanje nam je bilo dano.

S druge strane, poopćenim mjerenjem imamo mogućnost razaznavanja koje stanje smo dobili. Uzmimo POVM koji sadrži tri elementa

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|; \\ E_2 &= \frac{1}{2} |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|; \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$E_3 = I - E_1 - E_2.$$

U slučaju da je Bobu poslano stanje  $|\psi_1\rangle$ , vjerojatnost dobivanja rezultata  $E_1$  je  $\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$ . Dakle, ako je  $E_1$  registriran, Bobu je sigurno bilo dato stanje  $|\psi_2\rangle$ . Isto tako, u slučaju da Bob registrira  $E_2$  može zaključiti da je dobio stanje  $|\psi_1\rangle$ . U trećem mogućem ishodu - kada je registriran rezultat  $E_3$  - Bob ne dobiva uvid u to kakvo stanje mu je dano.

U konačnici, za razliku od projektivnog mjerenja, poopćenim mjerenjima Bob može dobiti više informacija te, u slučaju da mu je dan veći broj *qubita*, sa sigurnošću otkriti koje stanje mu je dano za veći broj *qubita*.



## Bibliography

- [1] Born, Max. "Quantenmechanik der stoßvorgänge." *Zeitschrift für Physik* 38.11-12 (1926): 803-827.
- [2] Schrödinger, Erwin. "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik." *Naturwissenschaften* 23.50 (1935): 844-849.
- [3] Maudlin, Tim. "Three measurement problems." *topoi* 14.1 (1995): 7-15.
- [4] Dürr, Detlef, and Dustin Lazarovici. *Verständliche Quantenmechanik: Drei mögliche Weltbilder der Quantenphysik*. Springer-Verlag, 2018.
- [5] Everett III, Hugh. ""Relative state" formulation of quantum mechanics." *Reviews of modern physics* 29.3 (1957): 454.
- [6] Nikolić, Hrvoje. "Interpretation miniatures." *International Journal of Quantum Information* 15.08 (2017): 1740001.
- [7] Von Neumann, John. *Mathematical foundations of quantum mechanics: New edition*. Princeton university press, 2018.
- [8] Ghirardi, Gian Carlo, Alberto Rimini, and Tullio Weber. "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems." *Physical review D* 34.2 (1986): 470.
- [9] Pearle, Philip. "Toward a relativistic theory of statevector reduction." *Sixty-two years of uncertainty*. Springer, Boston, MA, 1990. 193-214.
- [10] Bell, John. "Against 'measurement'." *Physics world* 3.8 (1990): 33.
- [11] Bohm, David. "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I." *Physical review* 85.2 (1952): 166.
- [12] Holland, Peter R. *The quantum theory of motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*. Cambridge university press, 1995.
- [13] Holland, Peter. "A quantum of history." *Contemporary Physics* 52.4 (2011): 355-358.
- [14] Kittel, Charles. *Introduction to solid state physics*. New York: Wiley, 1976.

- [15] Annett, James F. Superconductivity, superfluids and condensates. Oxford University Press, 2004.
- [16] Meissner effect. Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Meissner\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Meissner_effect)
- [17] Nikolic, Hrvoje, and Josip Atelj. "Proposed measurement of simultaneous particle and wave properties of electric current in a superconductor." arXiv preprint, accepted for publication in Mod. Phys. Lett. A., arXiv:2003.14049 (2020).
- [18] Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands. "The Feynman Lectures on Physics" Vol III, chap. 21. (1965).
- [19] Philippidis, Chris, Chris Dewdney, and Basil J. Hiley. "Quantum interference and the quantum potential." Il Nuovo Cimento B (1971-1996) 52.1 (1979): 15-28.
- [20] Ginzburg, Vitaly L., and Lev D. Landau. "On the theory of superconductivity." On Superconductivity and Superfluidity. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. 113-137.
- [21] Bardeen, John, Leon N. Cooper, and J. Robert Schrieffer. "Microscopic theory of superconductivity." Physical Review 106.1 (1957): 162.
- [22] Gor'kov, Lev Petrovich. "Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity." Sov. Phys. JETP 9.6 (1959): 1364-1367.
- [23] Xu, Longdao, Zhenghuang Shu, and Sihui Wang. "From BCS theory for isotropic homogeneous systems to the complete Ginzburg-Landau equations for anisotropic inhomogeneous systems." Physical Review B 57.18 (1998): 11654.
- [24] Fetter, Alexander L., and John Dirk Walecka. "Quantum theory of many-particle systems." qtmp (1971)., str. 451.
- [25] Magnus, Wilhelm, and Fritz Oberhettinger. "Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik." (1948)., str. 29 i str. 62.
- [26] Chaikin, Paul M., Tom C. Lubensky, and Thomas A. Witten. Principles of condensed matter physics. Cambridge: Cambridge university press, 1995.

- [27] Greiner, Walter, and Joachim Reinhardt. Field quantization. Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] De Muynck, Willem M. Foundations of quantum mechanics, an empiricist approach. Springer Science & Business Media, 2006.
- [29] Tong, D. Lectures on Applications of Quantum Mechanics, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/aqm/aqmnine.pdf>.
- [30] Nikolić, Hrvoje. "Bohmian mechanics for instrumentalists." *International Journal of Quantum Information* 17.08 (2019): 1950029.
- [31] Griffiths, David J. "Introduction to electrodynamics." (2005): 574-574.
- [32] R. S. Popovic, Hall Effect Devices, second edition (Institute of Physics Publishing, Bristol, 2004).
- [33] Sanfilippo, S. Hall probes: physics and application to magnetometry. In *CERN Accelerator School: Course on Magnets*, pages 423–462, 3 2011.
- [34] Dürr, Detlef, and Stefan Teufel. "Bohmian mechanics." *Bohmian Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. 145-171.
- [35] Bell, John S. "On the einstein podolsky rosen paradox." *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964): 195.
- [36] Nikolić, Hrvoje. "Would Bohr be born if Bohm were born before Born?." *American Journal of Physics* 76.2 (2008): 143-146.
- [37] Wiseman, H. M. "Grounding Bohmian mechanics in weak values and bayesianism." *New Journal of Physics* 9.6 (2007): 165.
- [38] S. Kocsis et al, *Science* 332, 1170 (2011).
- [39] Passon, Oliver. "Why isn't every physicist a Bohmian?." arXiv preprint [quant-ph/0412119](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0412119) (2004).