

# Analiza pouzdanosti paralaksi cefeida opažanih Gaia satelitom

---

**Novaković, Miljenko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:668223>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Miljenko Novaković

ANALIZA POUZDANOSTI PARALAKSI CEFEIDA  
OPAŽENIH GAIA SATELITOM

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Miljenko Novaković**

Diplomski rad

**Analiza pouzdanosti paralaksi cefeida  
opaženih Gaia satelitom**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Lovro Palaversa

Suvoditelj diplomskog rada: prof. dr .sc. Matko Milin

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem mentoru na stručnoj pomoći pri pisanju ovog rada.  
Zahvaljujem obitelji i prijateljima na podršci tijekom studiranja.

## Sažetak

Hubbleova konstanta ( $H_0$ ) je mjera trenutnog širenja svemira. Kako bi se odredila vrijednost  $H_0$ , potrebno je razviti i koristiti niz metoda određivanja udaljenosti na međuzvezdanim, međugalaktičkim i kozmološkim skalama. Često korišten skup metoda, čija osnova su metode bazirane na sjaju opažanih astrofizičkih objekata, je "ljestvica udaljenosti". Važnu stepenicu u ljestvici udaljenosti predstavljaju cefeide, periodički promjenjive zvijezde čiji sjaj je povezan s periodom pulsacija. Kako bi se točno odredio luminozitet cefeida i kalibrirala period-luminozitet relacija, potrebno je točno odrediti udaljenosti cefeida. Jedina čisto geometrijska metoda pomoću koje se mogu odrediti udaljenosti zvijezda u Mliječnom putu je metoda paralakse.

Paralakse zvijezda (osim Sunca) su vrlo male, manje od 785 kutnih milisekundi, a mjerljive su do reda veličine kutne mikrosekunde. Mjerenja su podložna raznim sistematskim pogreškama. Jedan od izvora pogrešaka mogu biti i promjene sjaja opažanih zvijezda. U ovom diplomskom radu provjerena je pouzdanost paralaksi cefeida određenih *Gaia* satelitom Europske svemirske agencije (ESA) usporedbom s paralaksama zvijezda konstantnog sjaja u blizini cefeida. S tim ciljem izvršena je potraga za cefeidama u otvorenim skupovima – gravitacijski povezanim skupinama zvijezda relativno malih prostornih dimenzija s obzirom na njihovu udaljenost od Zemlje.

Usporedbom paralaksi otvorenih skupova (određenih kao medijan paralakse zvijezda konstantnog sjaja pojedinog skupa) i cefeida ne može se odbaciti hipoteza da su paralakse cefeida i otvorenih skupova jednake. No, u promatranom uzorku je vidljiv trend većih vrijednosti paralaksi otvorenih skupova. U kontekstu određivanja Hubbleove konstante, ovakav rezultat bi dodatno povećao neslaganje među vrijednostima dobivenim izravnim mjerenjem  $H_0$  i vrijednostima predviđenim  $\Lambda$ CDM modelom na temelju mikrovalnog pozadinskog zračenja opaženog *Planck* satelitom ESA-e

Ključne riječi: Hubbleova konstanta, ljestvica udaljenosti, cefeida, paralaksa, otvoreni skup, Gaia

# An analysis of the uncertainty of the parallaxes obtained with the Gaia satellite

## Abstract

Hubble constant ( $H_0$ ) is the present rate of Universe expansion.  $H_0$  estimation methods critically rely upon distance estimation on interstellar, intergalactic and cosmological scales. A particularly common suite of distance measuring methods is the "distance ladder". Cepheid variable stars are a crucial rung in the distance ladder as they exhibit well-understood period-luminosity relations. However, to determine the luminosity of the cepheids, precise distances to them must be acquired. The only method free of astrophysical assumptions to determine distances to the stars (except to our Sun) is the stellar parallax method.

As parallaxes are typically very small: 785 milliarcseconds in case of Proxima Centauri and typically below milliarcsecond for stars in the Milky Way, their estimation can be affected by a number of systematic effects. One of the key effects may be the variability of the observed source.

With this in mind, in this work the Cepheid parallax reported by the European Space Agency's (ESA) *Gaia* spacecraft is compared to the parallaxes of the stars nearby the said Cepheids. In order to identify the nearby stars, Cepheids that are members of open clusters (gravitationally bound groups of stars) are identified. Then, the reported Cepheid parallax is compared to the median parallax of the constant stars in the corresponding open cluster.

Based on the analysis, the hypothesis that the Cepheid parallaxes and the median open cluster parallaxes are the same cannot be rejected. We do note that there exists an offset between the two samples indicating that the open cluster parallaxes are larger. In the context of the Hubble constant tension, this result would further increase the discrepancy between the results reported by the methods measuring the local  $H_0$  and the predictions of the  $H_0$  based on the  $\Lambda$ CDM and the ESA's Planck spacecraft.

Keywords: Hubble constant, distance ladder, cepheid, parallax, open cluster, Gaia

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metode određivanja <math>H_0</math></b>	<b>3</b>
2.1	Određivanje paralakse zvijezda . . . . .	3
2.2	Lokalna mjerenja pomoću standardnih svijeća . . . . .	4
2.2.1	Supernove tipa Ia . . . . .	5
2.3	Vrh grane crvenih divova . . . . .	6
2.4	Gravitacijske leće . . . . .	7
2.5	Određivanje udaljenosti temeljeno na maserima . . . . .	9
2.6	Vrijednosti predviđene $\Lambda$ CMD modelom . . . . .	10
2.7	Mjerenja kozmičkog pozadinskog mikrovalnog zračenja . . . . .	10
2.7.1	Veza standardnog modela kozmologije i kozmičkog pozadinskog zračenja . . . . .	12
2.8	Mjerenja barionskih akustičnih oscilacija . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Cefeide</b>	<b>15</b>
3.1	Opća slika cefeida . . . . .	15
3.2	Zvjezdana evolucija cefeida . . . . .	16
3.3	Period-luminozitet relacija . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Metode</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Rezultati</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>30</b>
7.1	Nastavna priprema : Određivanje paralakse zvijezda . . . . .	31
7.2	Uvodni dio . . . . .	32
7.3	Središnji dio . . . . .	33
7.4	Završni dio . . . . .	34
	<b>Literatura</b>	<b>38</b>

# 1 Uvod

Fizikalna veličina koja opisuje trenutnu brzinu širenja svemira naziva se Hubbleova konstanta  $H_0$  i izražava se u jedinici  $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ . Trenutni iznos Hubbleove konstante može se odrediti na više načina, ali postoje dva glavna pravca u njezinom određivanju. Prvi pravac je korištenje kozmoloških modela i mjerenja svemira na početku svog razvoja, dok drugi pravac koristi zvijezde i objekte čije udaljenosti i crveni pomak možemo izravno mjeriti. 2000-tih godina nepouzdanost  $H_0$  iznosila je oko 10%. Tokom godina ona se smanjivala te je tako krajem 2019. nepouzdanost bila manja od 2%. Danas postoji problem jer način određivanja Hubbleove konstante pomoću "ranog" i "kasnog" svemira odstupaju jedan od drugog više od  $4\sigma$ .

Trenutno postoji standardni model kozmologije, imena  $\Lambda\text{CDM}$  (Lambda cold dark matter), koji opisuje širok spektar pojava. Procjenjuje se da 95% svemira čine tamna tvar<sup>1</sup> i tamna energija<sup>2</sup>. Standardni model kozmologije i promatranje kozmičkog mikrovalnog pozadinskog (CMB) zračenja daju dva važna rezultata. To su starost svemira  $13.8 \pm 0.02$  milijardi godina i vrijednost Hubbleove konstante  $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$  [24]. Korištenje drugih metoda mjerenja "ranog" svemira daju slične rezultate. Takva procjena s opažanjima "ranog" svemira temelji se na tamnoj tvari i tamnoj energiji. Dobar test ispravnosti te procjene bio bi kad bi mjerenja "ranog" i "kasnog" svemira bile usporedive do na 1%.

Za lokalna mjerenja "kasnog" svemira treba odrediti ljestvicu udaljenosti. Korištenjem geometrije može se jednostavno doći do udaljenosti određenih vrsta zvijezda. Primjeri takvih zvijezda su cefeide<sup>3</sup> i supernove tipa Ia<sup>4</sup>, koje se zbog velikog sjaja mogu vidjeti na velikim udaljenostima. Supernove tipa Ia rijetko se opažaju i zbog udaljenosti im je teško geometrijski odrediti paralaksu.

Za lokalno mjerenje Hubbleove konstante korištene su metode koje su međusobno neovisne. Rezultati tih metoda su u rasponu od  $72.8 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$  do  $73.4 \pm 1.0 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$  [1], [24]. To daje rezultat napetosti od  $4.5\sigma$  do  $6.3\sigma$  s vrijednostima koje daju mjerenja "ranog" svemira. Na slici 1.1. dobro se vidi kakva je razlika u vrijednostima puteva koji daju mjerenja iz "kasnog" svemira i "ranog" svemira te kako se ti putevi, iako daju slične vrijednosti, ne preklapaju [1].

---

<sup>1</sup>Tvar koja ne reflektira ni emitira dovoljno zračenja da bi se mogla opaziti.

<sup>2</sup>Nevidljiv dio svemira koji ispunjava sav prostor i uzrokuje njegovo širenje.

<sup>3</sup>Vrsta pulsirajuće promjenjive zvijezde.

<sup>4</sup>Eksplodirajuća zvijezda u dobnom sustavu zvijezda.





Slika 1.1: Određivanje Hubbleove konstante pomoću ranog i kasnog svemira. Preuzeto sa The expansion of the Universe is faster than expected [1].

Jedna od metoda za određivanje Hubbleove konstante uključuje korištenje promjenjivih zvijezda cefeida. One su pogodne za određivanje ljestvice udaljenosti zbog poznate period-luminozitet relacije. No, postoji mogućnost da je zbog promjenjivosti u sjaju cefeida, došlo do pogreške u astrometriji. Zadatak ovog rada je pomoću nepromjenjivih zvijezda provjeriti jesu li mjerenja za cefeide pouzdana. Kad se odredi pouzdanost Gaia podataka za cefeide, određivanje Hubbleove konstante metodom cefeida bit će preciznije.

## 2 Metode određivanja $H_0$

Postoje dva glavna pravca određivanja Hubbleove konstante. Prvi način je promatranje "kasnog" svemira, stanje svemira kako se može vidjeti danas. Za te metode koriste se standardne svijeće. Najpoznatije standardne svijeće su cefeide i Supernove tipa Ia. Drugi način jest da se promatra stanje "ranog" svemira. Promatra se vrijeme 380000 godina od velikog praska. Smatra se da je u to doba svemir postao proziran te se pomoću različitih metoda određuje vrijednost Hubbleove konstante. Neke od tih metoda promatraju pozadinsko kozmičko zračenje (CMB<sup>5</sup>), akustične oscilacije bariona (BAO<sup>6</sup>).

### 2.1 Određivanje paralakse zvijezda

Jedna od metoda određivanja udaljenosti zvijezda je metoda paralakse. To je najstarija metoda koja se koristi i danas. Pogodna je za mjerenje zvijezda koje se ne nalaze na velikoj udaljenosti. Provodi se mjerenjem kutnog pomaka zvijezde u odnosu na fiksiranu, jako udaljenu, pozadinu zvijezda. Mjeri se s dvije nasuprotne točke na orbiti Zemlje oko Sunca, što znači da se mjeri kutni pomak zvijezde u odnosu na pozadinu u razmaku od pola godine. To je najveća moguća osnovica za mjerenje paralakse sa Zemlje i iznosi dvije astronomske jedinice (dvije udaljenosti Zemlje od Sunca). Ova metoda određivanja paralakse prikazana je na slici 2.1.

Paralaksa zvijezde  $\varpi$  jednaka je polovici kuta za koji se zvijezda prividno pomaknula. Paralaksa zvijezde i udaljenost do te zvijezde obrnuto su proporcionalni. To znači da udaljenije zvijezde imaju manju paralaksu. Uz tako definiranu paralaksu, prirodna jedinica za udaljenost je parsek. Jedan parsek definiran je kao udaljenost objekta koji ima paralaksu od jedne kutne sekunde, tj. kao udaljenost na kojoj se polumjer Zemljine orbite oko Sunca vidi pod kutem od jedne sekunde. Kad je poznata paralaksa udaljenost se određuje:

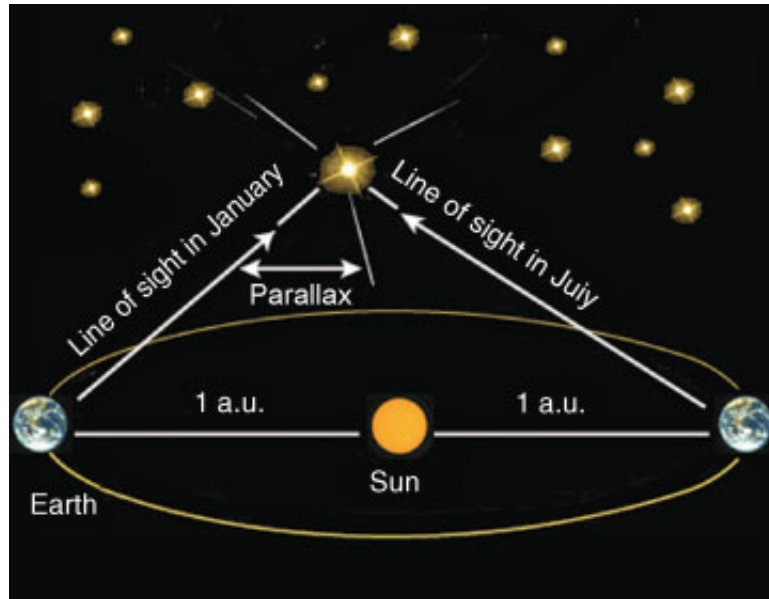
$$d = \frac{1}{\varpi} \quad (2.1)$$

Gdje je udaljenost  $d$  izražena u parsecima, a kut paralakse  $\varpi$  u kutnim sekundama. Vrijedi da jedan parsek iznosi:

---

<sup>5</sup>Cosmic microwave background, kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje.

<sup>6</sup>Baryon acoustic oscillations, akustične oscilacije bariona.



Slika 2.1: Prikaz određivanja paralakse zvijezda. Preuzeto sa An Introduction to Distance Measurement in Astronomy [2].

$$1\text{pc} = 3.086 \times 10^{16}\text{m} = 3.26\text{gs} \quad (2.2)$$

Sve zvijezde koje je moguće opaziti, osim Sunca, imaju paralaksu manju od jedne kutne sekunde, što znači da se nalaze na udaljenosti većoj od jednog parseka. Primjerice, druga najbliža zvijezda Proksima Kentaura ima paralaksu od 0.77 kutnih sekundi. U tablici 2.1 prikazani su podaci paralakse, udaljenosti zvijezda koje se nalaze na udaljenosti manjoj od 3 parseka [2].

## 2.2 Lokalna mjerenja pomoću standardnih svijeća

Za udaljenosti koje su prevelike da bi se odredila paralaksa koriste se standardne svijeće. Npr. nekoj galaksiji se može odrediti udaljenost ako u njoj možemo opaziti standardnu svijeću (pritom zanemarujući dimenzije galaksije). Standardna svijeća je objekt koji ima poznat luminozitet<sup>7</sup>. Poznati luminozitet zajedno s opaženom magnitudom objekta može dati udaljenost. Glavni problem sa standardnim svijećama je određivanje njihovog luminoziteta i udaljenosti. Za to je potrebno stvoriti ljestvicu udaljenosti. Počinje se sa najbližim standardnim svijećama čija je udaljenost poznata iz njihovih paralaksi te se ide prema standardnim svijećama nepoznatih paralaksi. Za

<sup>7</sup>Energija koju nebesko tijelo zrači u jedinici vremena. Najčešće se mjeri snaga zračenja elektromagnetskih valova određenih valnih duljina.

objekt	$\varpi$ [mas]	d [pc]
Proksima Centauri	0.77	1.3
$\alpha$ Cen A	0.75	1.3
$\alpha$ Cen B	0.75	1.3
Barnard's star	0.545	1.8
Wolf 359	0.421	2.4
BD +36° 2147	0.397	2.5
Luyten 726-8A	0.387	2.6
Luyten 726-8B	0.387	2.6
Sirius A	0.377	2.6
Sirius B	0.377	2.6
Ross 154	0.345	2.9

Tablica 2.1: Tablica s vrijednostima paralaksi i udaljenostima zvijezda od 3 parseka. Preuzeto sa An Introduction to Distance Measurement in Astronomy [2].

napraviti ljestvicu udaljenosti potrebno je najprije:

- 1.) Izmjeriti opaženu magnitudu dviju standardnih svijeća: jedne blizu, druge dalje.
- 2.) Iz paralakse bliže standardne svijeće odrediti njezinu udaljenost.
- 3.) Izračunati luminozitet bliže standardne svijeće, pomoću relacije:

$$L = 4\pi m d^2 \quad (2.3)$$

Gdje je  $L$  luminozitet,  $m$  opažena magnituda, i  $d$  udaljenost objekta.

Pretpostavlja se da udaljenija standardna svijeća ima isti luminozitet  $L$  kao i bliža standardna svijeća. Zatim se iz tih podataka izračuna udaljenost udaljenije standardne svijeće pomoću relacije:

$$d = \sqrt{\frac{L}{4\pi m}} \quad (2.4)$$

Zbog velikih luminoziteta najčešće se kao standardne svijeće koriste cefeide i supernove tipa Ia

### 2.2.1 Supernove tipa Ia

Supernove su se pokazale kao jak alat u astronomiji i određivanju udaljenosti. Zbog svog velikog luminoziteta mogu se vidjeti na puno većim udaljenostima nego cefeide. Za nastanak supernove tipa Ia potreban je sustav dvojnih zvijezda, od kojih je jedna

uvijek bijeli patuljak<sup>8</sup>, dok je druga zvijezda obično zvijezda s glavnog niza. Bijeli patuljci obično umiru tako da se urušavaju i zrače preostalu toplinu. Ugljik-kisik bijeli patuljci nastavljaju s fuzijom ako imaju dovoljno veliku temperaturu. Upravo su eksplozije tih bijelih patuljaka u sustavu dvojnih zvijezda uzrok supernove tipa Ia.

Kad se ne nalaze u blizini druge zvijezde, bijeli patuljci koji izgaraju ugljik i kisik polako se hlade i umiru. Međutim, kad se nalaze u orbiti neke veće zvijezde, tada počinju prikupljati materiju sa te zvijezde. Kad bijeli patuljak uspije prikupiti dovoljno materije da prijeđe Chandrasekharovu granicu mase, Chandrasekharova granica mase je masa od  $\sim 1.4$  mase Sunca, tada dolazi do jako velike eksplozije. Takva eksplozija naziva se supernova tipa Ia. Supernove tipa Ia imaju sjaj koji je otprilike  $10^9$  puta veći od sjaja Sunca. Mogu se opaziti na udaljenostima do 50 Mpc. Zbog toga služe kao standardne svijeće u određivanju ljestvice udaljenosti. Problem kod supernova tipa Ia je da se one rijetko opažaju, projsek je jedna supernova u 100 godina u prosječnoj galaksiji [1] [2].

### 2.3 Vrh grane crvenih divova

Divovske i superdivovske zvijezde imaju visok intrinzični sjaj te zbog toga imaju potencijala postati standardne svijeće. Poboljšanjem razumjevanja evolucije zvijezda i promatranjem HR dijagrama zaključilo se da se vrh grane crvenih divova može koristiti kao dobar indikator udaljenosti. Vrh grane crvenih divova je maksimum apsolutnog luminoziteta koji dostiže crveni div<sup>9</sup> u svom prvom usponu u HR dijagramu. To se najčešće događa kad su zvijezde stare  $\geq 1 - 2 \times 10^9$  godina. Ta točka predstavlja početak fuzije helija u jezgrama zvijezda.

S obzirom da se maksimum zračenja crvenih divova nalazi u crvenom dijelu spektra, koji je istovremeno manje osjetljiv i na prisustvo međuzvijezdane tvari i prašine, pri opažanjima se najčešće koristi *I-filtar* (700 – 900 nm). Ova metoda dobar je indikator udaljenosti za bliske galaksije s dobro razlučenim zvijezdama populacije II u haloima<sup>10</sup>. Važno je napomenuti da između modula udaljenosti dobivenih korištenjem cefeida kao standardnih svijeća i onih koje koriste vrh grane crvenih divova

<sup>8</sup>Mala zvijezda koja ima veliku površinsku temperaturu i veliku gustoću. Ima masu sličnu masi Sunca, a volumen sličan volumenu Zemlje.

<sup>9</sup>Zvijezde velikog promjera i relativno male mase, usporedive s masom Sunca. Nalaze se u završnoj fazi evolucije zvijezda i imaju nisku površinsku temperaturu, manju od 5000 K.

<sup>10</sup>Starije zvijezde s malim udjelom metala.

postoji sistemska pogreška od  $\sim 0.1$  mag.

Zahvaljujući tehnološkom napretku, nedavna opažanja bliskih galaksija i divova prebacila su svoj fokus na promatranje valnih duljina blizu infracrvenog spektra, jer je u tom dijelu lakše opaziti vrh grane crvenih divova i njihov diskontinuitet u funkciji luminoziteta. U bliskom infracrvenom dijelu spektra također je smanjeno i raspršenje na međuzvijezdanoj tvari.

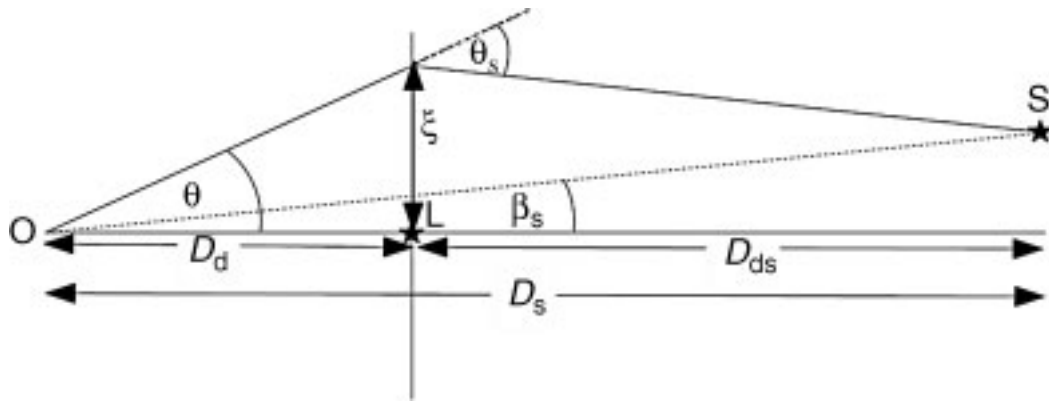
Najvažnije nepouzdanosti u promatranju kod ove metode za određivanje udaljenosti su: fotometrijske greške, veličina uzorka, rezolucija u područjima velike gustoće zvijezda i kontaminacija zvijezdama s grane asimptotskih divovskih zvijezda. Moguće probleme mogu predstavljati manjak zvijezda s vrha grane crvenih divova u ukupnoj populaciji promatranog objekta i u kratkom trajanju perioda kojeg zvijezda provodi na vrhu grane crvenih divova [2].

## 2.4 Gravitacijske leće

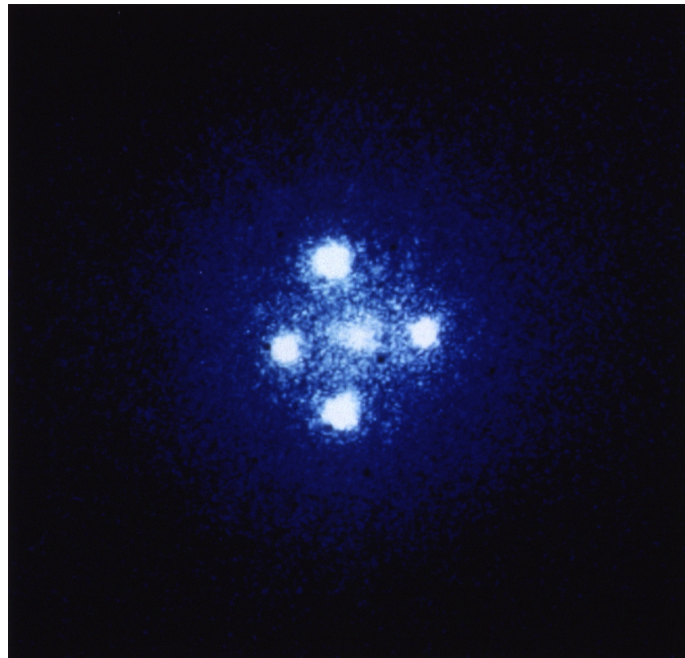
Jedna od metoda koja se koristi za određivanje Hubbleove konstante je upotreba gravitacijskih leća. 1915. godine Einstein je u općoj teoriji relativnosti objasnio gravitaciju kao deformaciju strukture prostorvremena s materijom. Predvidio je otklanjanje svjetlosti s udaljenih objekata kada prolazi blizinom masivnog objekta koji se nalazi ispred udaljenih objekata koji se promatraju. Takva gravitacijska leća multiplicira i povećava sliku objekta kojeg promatramo, primjerice zvijezde ili galaksije. Slika koju mi vidimo ovisi o geometrijskim svojstvima i masi tog objekta koji stvara sliku [2]. Princip rada gravitacijske leće prikazan je na slici 2.2.

Manji objekti, primjerice zvijezde, također se mogu ponašati kao gravitacijske leće onda kad prođu ispred udaljenijih objekata. Najjednostavniji primjer gravitacijske leće jest kad je tvar koncentrirana oko nekog središta kao na primjer središte galaksije. Svjetlost udaljene galaksije je preusmjerena oko središta galaksije koja se nalazi ispred i ta galaksija koja je ispred često stvara višestruke slike galaksije koja je iza. Primjer slike koja se dobije djelovanjem gravitacijske leće je Einsteinov križ, prikazan na slici 2.3. Kad je takva gravitacijska leća skoro savršeno simetrična, može se formirati potpuni ili djelomično potpuni prsten oko te gravitacijske leće koji se naziva Einsteinov prsten.

Slike koje nastaju djelovanjem gravitacijske leće puno puta imaju i ulogu u otkri-



Slika 2.2: Shematski princip rada gravitacijske leće. Centar gravitacijske leće je u  $L$ ,  $O$  je opažač,  $S$  je izvor svjetlosti koji se promatra,  $D_d$  je udaljenost opažača i leće,  $D_{ds}$  je udaljenost izvora svjetlosti i leće. Na kozmološkim skalama ne mora vrijediti da je  $D_s = D_d + D_{ds}$ . Preuzeto sa An Introduction to Distance Measurement in Astronomy [2].



Slika 2.3: Fotografija gravitacijske leće G2237 + 0305, koja je jedan od primjera Einsteinovog križa. Preuzeto sa Hubblesite.org [23].

vanju distribucije tvari u skupovima galaksija. Dobiveni rezultati govore da većina tvari koje se vide u galaksijama i skupovima galaksija nisu same galaksije i vrući plinovi oko njih nego tamna tvar. Iz slike nastale prolaskom kroz gravitacijsku leću se može rekonstruirati raspodjela barionske i tamne tvari u gravitacijskoj leći, za što su potrebni složeni modeli. Modeli također mogu pomoći u identificiranju više slika iste galaksije ili predvidjeti gdje bi se mogle pojaviti udaljenije galaksije u slikama skupova galaksija.

Gravitacijske leće mogu služiti i kao indikator udaljenosti. Naime, promatraju li se multiplicirane slike iste galaksije nastale prolaskom kroz leću može se opaziti da promjene signala (npr. promjena sjaja aktivne gal. jezgre) u svim slikama nisu istovremene. Taj pomak u fazi je posljedica različitih duljina putanja fotona od izvora, kroz leću sve do opažača. Poznaje li se dobro raspodjela mase leće, može se pretpostaviti kolika bi bila vremenska razlika u pristizanju signala iz istog izvora. Uzme li se u obzir da se tijekom putovanja fotona svemir proširio, iz razlike predviđenog i opaženog kašnjenja se može odrediti vrijednost Hubbleove konstante [1].

## 2.5 Određivanje udaljenosti temeljeno na maserima

Godinama je glavni način mjerenja paralaksi, galaktičke strukture, izvangalaktičkih vlastitih gibanja bila interferometrija malih radio izvora, reda veličine kutne milisekunde. To je omogućavalo geometrijsko određivanje udaljenosti galaksija u Lokalnoj skupini pa i udaljenosti od  $\sim 45 - 50$  Mpc [2].

Maseri (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation, mikrovalni ekvivalent lasera) su najčešće bili korišteni za ispitivanja vlastitih gibanja galaksija. U astrofizici se najčešće koristi molekula vode  $H_2O$ , ali u kontekstu masera promatrani su i hidroksidni ion  $OH$ , metanol  $CH_3OH$ , formaldehid  $CH_2O$  i silicijev monoksid  $SiO$ . Maseri nastaju u prostoru formiranja zvijezde kada više elektrona zauzme viša pobuđena energetska stanja nego što ih zauzmu niža energetska stanja. Taj fenomen se naziva inverzija populacije. To u spektru međuzvjezdanog prostora stvara jaku, ali usku, nekoliko km/s, vodenu liniju pri frekvenciji od 22.235 GHz. Izvori astrofizičkih masera relativno su male veličine  $\leq 10^{10}$  km.

Zahvaljujući emisiji u uskom području spektra, radijalnu brzinu astrofizičkih masera može se relativno jednostavno odrediti iz Dopplerova pomaka. S druge strane, vlastita gibanja masera se mogu odrediti radioastronomskim opažanjima. Pretpostavi li se da su maseri u kružnoj orbiti oko crne rupe u središtu galaksije, kombinacijom tih dvaju opažanja može se jednostavno odrediti polumjer orbite, i jednostavnom trigonometrijom odrediti udaljenost.

Hernstein et al.(1999) [22] su prvi primjenili ovaj pristup na orbitalna kretanja masera vode u plinu molekula diska koji okružuje aktivnu jezgru galaksije NGC 4258. Rezultat toga bio je procjena apsolutne udaljenosti od NGC 4258  $d = 7.2 \pm 0.3$  Mpc,



gdje nepouzdanost uključuje rezultate jednadžbi i sistemske te statističke nepouzdanosti [2].

## **2.6 Vrijednosti predviđene $\Lambda$ CMD modelom**

"Lambda cold dark matter" predstavlja standardni model u kozmologiji. Bavi se hladnom tamnom tvari, koja čini oko 25% svemira.  $\Lambda$  je kozmološka konstanta u Einsteinoj jednadžbi polja, a predstavlja tamnu energiju ili energiju vakuuma. Ovaj model pretpostavlja da opća teorija relativnosti vrijedi kao teorija gravitacije na kozmološkim skalama. Temelji se na izotropnosti i homogenosti svemira. Model predviđa širenje svemira i dobro se slaže s opažanjima crvenog pomaka udaljenih galaksija.

Tamna tvar postulirana je zato što je opažen velik broj gravitacijskih efekata (zakrivljenje prostora, gravitacijske leće, krivulje rotacije galaksija), koji nisu mogući zbog količine vidljive tvari. Pretpostavlja se da tamne tvari ima oko 5 puta više nego vidljive tvari. Svojstva tamne tvari:

Tamna tvar je hladna, brzina joj je puno manja od brzine svjetlosti. Tamna tvar nije sastavljena od bariona, znači da sadrži različite tvari od neutrona i protona. Tamna tvar se ne hladi zračenjem fotona. Čestice tamne tvari međusobno interagiraju jedino gravitacijskom (i možda slabom silom), nema elektromagnetske interakcije.

## **2.7 Mjerenja kozmičkog pozadinskog mikrovalnog zračenja**

Kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje (CMB, Cosmic microwave background) smatra se ostatkom zračenja Velikog Praska, ono ispunjava svemir s ostacima zračenja nakon Velikog Praska. U vrijeme kada je nastao, prije otprilike 14 milijardi godina, svemir je bio ispunjen vrućom plazmom čestica, većinom protona, neutrona, elektrona i fotona. Posebno je važno da su prvih  $\sim 380000$  godina fotoni stalno sudarali sa slobodnim elektronima i nisu mogli daleko putovati. U to vrijeme svemir nije bio proziran.

Kako se s vremenom svemir širio, tako se hladila njegova temperatura. Nakon 380000 godina od Velikog Praska, temperatura svemira bila je oko 3000 K. Elektroni su se sada mogli spajati s protonima, a temperatura nije više bila dovoljno velika da ih razdvoji. Kad više nije bilo slobodnih elektrona, fotoni su se mogli nesmetano gibati te je svemir postao proziran.

Tijekom milijardi godina svemir se jako ohladio. Zbog njegovog širenja valne duljine tih fotona su se jako povećale te je došlo do crvenog pomaka, na oko 1 mm, zbog čega se i smanjila temperatura svemira na 2.725 K. Svemir je i danans ispunjen tim fotonima. Ima ih približno 400 po kubičnom centimetru. Pozadinski sjaj koji oni daju može se detektirati infracrvenim i radio teleskopima.

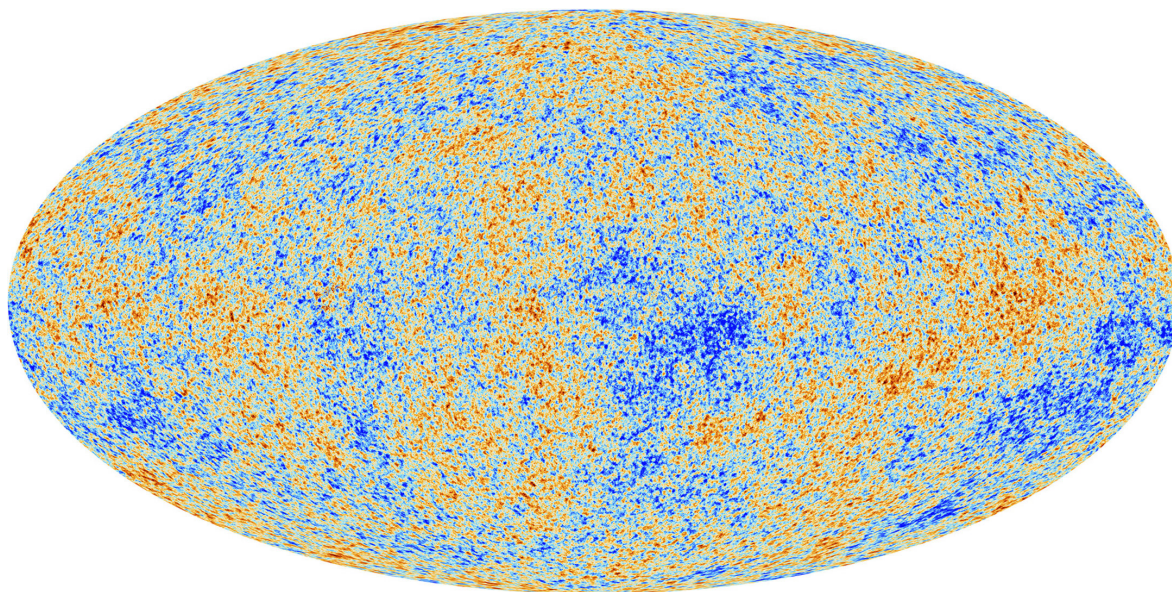
Postojanje kozmičkog pozadinskog zračenja kasnih 1940-ih godina prvi su postulirali George Gamow, Ralph Alpher i Robert Herman. Oni su proučavali posljedice nukleosinteze lakih elemenata kao što su vodik, helij i litij u ranom svemiru. Da bi došlo do sinteze tih elemenata, rani svemir trebao je biti jako vruć. Ostaci tog ranog svemira još su i danas prisutni kao kozmičko pozadinsko zračenje. Zbog širenja svemira temperatura tog zračenja postaje sve niža. Njihova procjena te temperature bila je najviše 5 K, s pripadajućim valnim duljinama. Arno Penzias i Robert Wilson prvi su otkrili kozmičko pozadinsko zračenje 1964. godine. Za to otkriće kasnije su dobili Nobelovu nagradu.

Kozmičko pozadinsko zračenje detektirano je na nebu u svim smjerovima i pojavljuje se na mikrovalnim teleskopima kao gotovo uniformna pozadina. Izmjereno je da je temperatura kozmičkog pozadinskog zračenja 2.726 K, gotovo po cijelom nebu. Postoje male fluktuacije u temperaturi koje predstavljaju razlike u gustoći materije koje su bile prisutne odmah nakon formiranja svemira. To su mjesta u kojima postoji mogućnost formiranja galaksija. Na slici 2.4 prikazana je karta kozmičkog pozadinskog mikrovalnog zračenja, na kojoj se prema bojama mogu vidjeti fluktuacije u temperaturi [10] [20].

Širenje svemira opisuje prva Friedmannova jednadžba; njeno rješenje je Hubbleov parametar.

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.5)$$

Gdje je  $a$  faktor skale,  $\dot{a}$  je vremenska derivacija  $a$ ,  $\rho$  je gustoća svemira,  $G$  gravitacijska konstanta,  $k$  zakrivljenost,  $c$  brzina svjetlosti i  $\Lambda$  tamna energija. S tim podacima i poznavanjem parametra gustoće svemira moguće je odrediti Hubbleovu konstantu  $H_0$ .



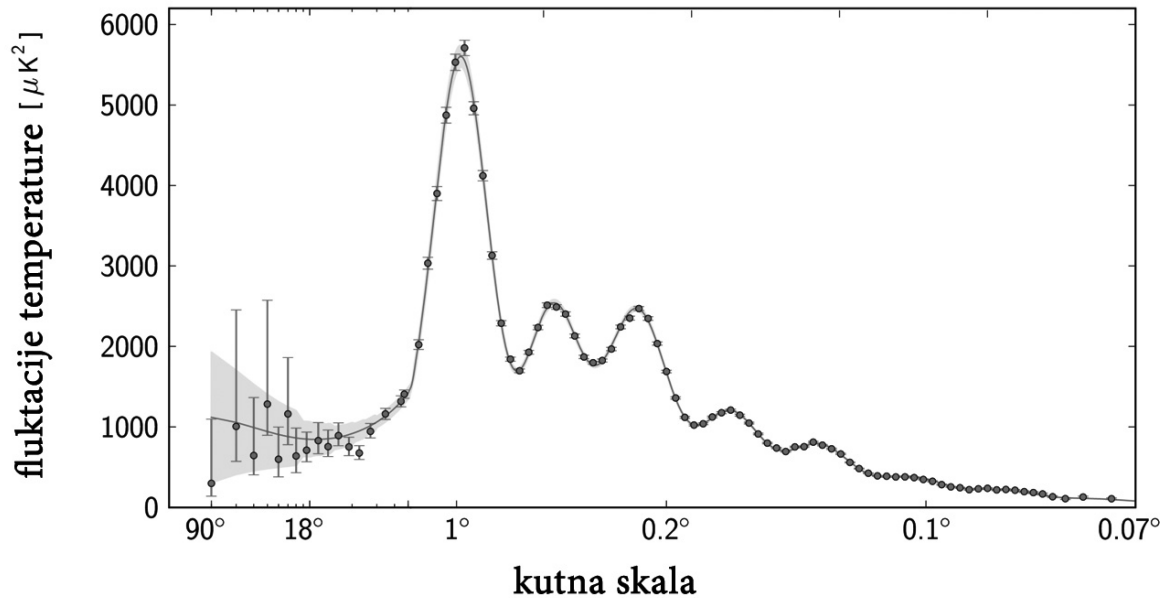
Slika 2.4: Karta mjerenja kozmičkog pozadinskog zračenja snimljena Planck satelitom. Preuzeto sa Planck and the cosmic microwave background [20].

### 2.7.1 Veza standardnog modela kozmologije i kozmičkog pozadinskog zračenja

Standardni model kozmologije temelji se na pretpostavci da je na jako velikim skalama svemir homogen i izotropan, ima slična svojstva u svakoj točki i nema povlaštenih smjerova u prostoru. Prema ovom modelu svemir je nastao prije 14 milijardi godina, a u to vrijeme temperatura i gustoća bile su iznimno visoke. Takvo stanje naziva se vrući Veliki Prasak. Od tada svemir se širio.

Standardni model kozmologije izveden je iz mnogobrojnih različitih astronomskih opažanja koji se temelje na različitim procesima. Kako bi pomirili podatke i teoriju, kozmolozi su odlučili dodati dvije komponente za koje nema eksperimentalne potvrde. Tamna tvar, nevidljiva komponenta tvari čiji raspored upućuje na formiranje galaksija. Tamna energija, komponenta koja prožima cijeli svemir i čiji je rezultat ubrzano širenje svemira. Standardni model kozmologije može biti opisan relativno malim brojem parametara, uključujući gustoću obične tvari, tamne tvari i tamne energije, trenutnu brzinu širenja svemira (Hubbleova konstanta), geometriju svemira i relativnu količinu prvih fluktuacija. Na slici 2.5 se vide vrijednosti koje se dobiju iz mjerenja kozmičkog pozadinskog zračenja. Prvi vrh odgovara zakrivljenosti svemira i govori da je svemir ravan. Drugi vrh predstavlja količinu vidljive tvari, koje ima 5% u svemiru. Treći vrh mjeri fizikalnu gustoću tamne tvari, koja ima udio od

26% u svemiru, ostatak svemira čini tamna energija.



Slika 2.5: Spektar temperaturnih fluktuacija kozmičkog pozadinskog zračenja. Preuzeto sa Najnovija mjerenja kozmičkog pozadinskog zračenja [10].

## 2.8 Mjerenja barionskih akustičnih oscilacija

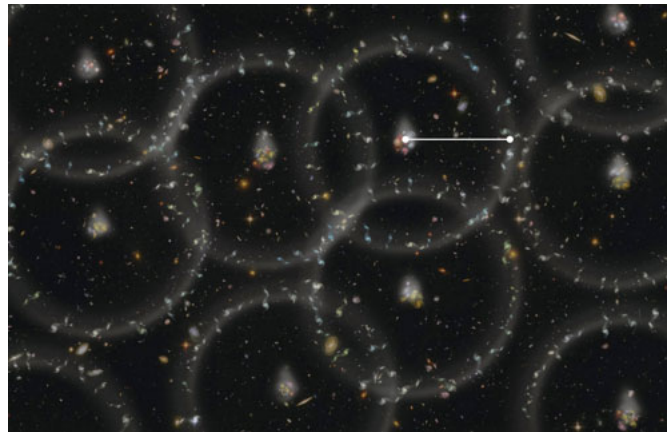
Akustične oscilacije bariona ostaci su prvih zvučnih valova u svemiru. Mogu se vidjeti iz distribucije galaksija na nebu. U tim uzorcima može se iščitati povijest širenja svemira. Prvih 380000 godina u svemiru su bile velike temperature te nije bilo moguće formiranje atoma. Fotoni su neprestano interagirali s elektronima, svemir nije bio proziran te se takvo stanje naziva plazma bariona i fotona. Svemir se sastojao i od tamne tvari, koje je bilo 5 puta više nego bariona, no ona nije imala interakcije sa svjetlošću.

U toj epohi događale su se fluktuacije u gustoći. Događalo se da tamna tvar gravitacijskom silom privlači fotone, elektrone i protone k sebi. Tada se tlak zračenja poput opruge protivi kompresiji te dolazi do titranja cijelog sustava. To rezultira zvučnim valovima [10]. Ti valovi su u to vrijeme imali brzinu veću od  $0.5 c$ .

U tom trenutku su i valovi fluktuacije gustoće ostali smrznuti. Radijus tih ljustaka bio je stopa širenja svemira. Veličina ljustake za vrijeme rekombinacije bila je oko 500000 svjetlosnih godina. Danas bi ti prsteni trebali biti na udaljenosti 150 Mpc i 500 milijuna svjetlosnih godina.

Ljuske akustičnih oscilacija preklapaju se u kompleksnoj mreži. Te mreže su s vremenom postale galaksije i skupovi galaksija. Iako se na prvi pogled čini da su galaksije na nebu nasumično raspoređene, ipak postoji nekakav uzorak koji se može promatrati. Bitno je i uračunati crveni pomak. Ukoliko je pomak veći, znači da je galaksija udaljenija, a svjetlost je duže putovala.

Na karti svemira promatraju se sve udaljenosti parova galaksija. Može se vidjeti da je najviše galaksija na udaljenosti od 150 Mpc. To su parovi galaksija od kojih je jedna na maksimalnoj gustoći tamne tvari, dok je druga na prstenu koji ju okružuje. Na slici 2.6 je vidljiv način određivanja udaljenosti galaksija pomoću ljuski akustičnih oscilacija.



Slika 2.6: Prikaz galaksija i određivanja međusobne udaljenosti galaksija. Preuzeto sa Listening for the Size of the Universe [21].

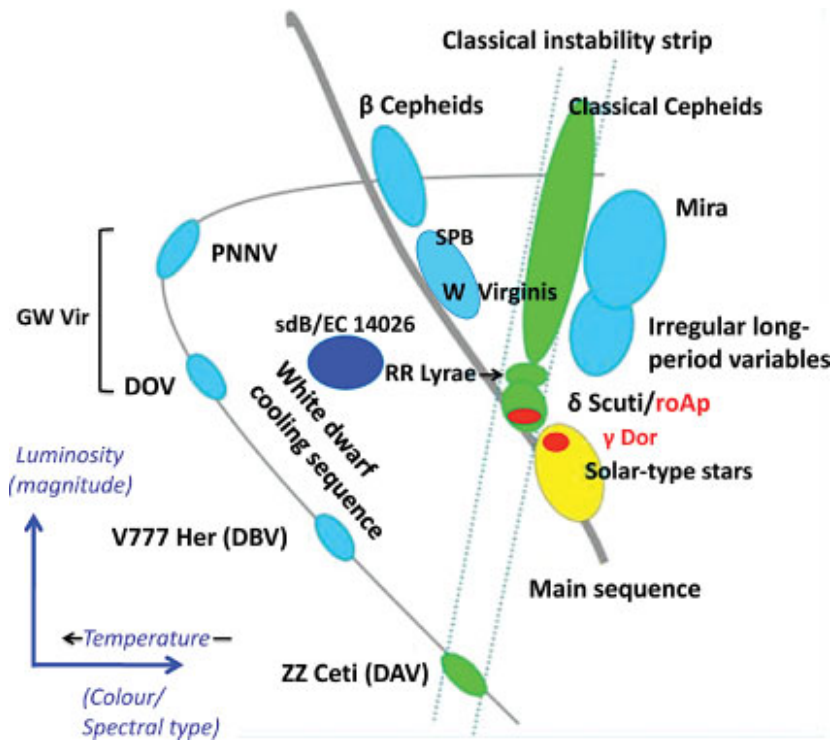
## 3 Cefeide

Cefeide su vrste promjenjivih zvijezda nazvane po zvijezdi Delta Cephei. Prva ih je otkrila Henrietta Swan Leavitt 1912. godine. Cefeide se danas koriste kako standardne svijeće za mjerenje udaljenosti u svemiru. Cefeide su poznate po linearnoj ovisnosti luminoziteta o periodu pulsiranja. Moguće im je odrediti ovisnost sjaja o periodu, period-luminozitet relaciju. Dobro kalibrirana period-luminozitet relacija može dati udaljenost cefeide i pomoći pri stvaranju ljestvice udaljenosti. Sjajnije cefeide imaju duži period pulsiranja dok su cefeide koje imaju kraći period pulsiranja manje sjajne. Postoji više vrsta cefeida od kojih su najzanimljivije za promatranje klasične cefeide, poznatije i kao  $\delta$  cefeide. Cefeide su među prvim otkrivenim klasama promjenjivih zvijezda i imale su ključnu ulogu u astronomiji i astrofizici.

Osim u kozmologiji, cefeide imaju važnu ulogu i u evoluciji zvijezda. One se nalaze u posebnoj fazi evolucije zvijezda. Nakon što iskoriste sav vodik kao gorivo silaze s glavnog niza. Na HR dijagramu cefeide se nalaze u posebnom dijelu koji se naziva "pojas nestabilnosti". Taj pojas vidljiv je na slici 3.1. Unutar pojasa cefeide putuju s jednog mjesta na drugo, primjerice s viših temperatura na niže. Tokom evolucije cefeide koje imaju dovoljnu veliku masu prolaze više puta kroz taj pojas [2].

### 3.1 Opća slika cefeida

Cefeide su mlade zvijezde, starosti  $50 \times 10^6 - 300 \times 10^6$  godina. Srednje su mase, 4–10 mase Sunca, prema njihovom masama može se zaključiti da su to mlade zvijezde. One su bijelo-žuti superdivovi Populacije I čije pulsiranje uzrokuje periodične promjene u radijusu, temperaturi i sjaju. Period pulsiranja cefeida iznosi od  $\sim 1.5$  dana do  $\sim 100$  dana. Zanimljivo je da je prva otkrivena cefeida zapravo Eta Aquilae, a Delta Cephei je druga, iako se Delta Cephei smatra prototipom cefeida. Trenutno postoji više od 800 poznatih klasičnih cefeida u našoj galaksi i više od 1000 izvan nje. U astronomiji su cefeide čest predmet istraživanja te se velik broj istraživačkih radova bavi upravo njima.



Slika 3.1: Shemastki prikaz HR dijagrama. Na x osi je označena temperatura, na y osi luminozitet. Označen je pojas nestabilnosti klasičnih cefeida, glavni niz i još neke vrste zvijezda koje se mogu pronaći na određenim mjestima u HR dijagramu. Preuzeto sa An Introduction to Distance Measurement in Astronomy [2].

### 3.2 Zvezdana evolucija cefeida

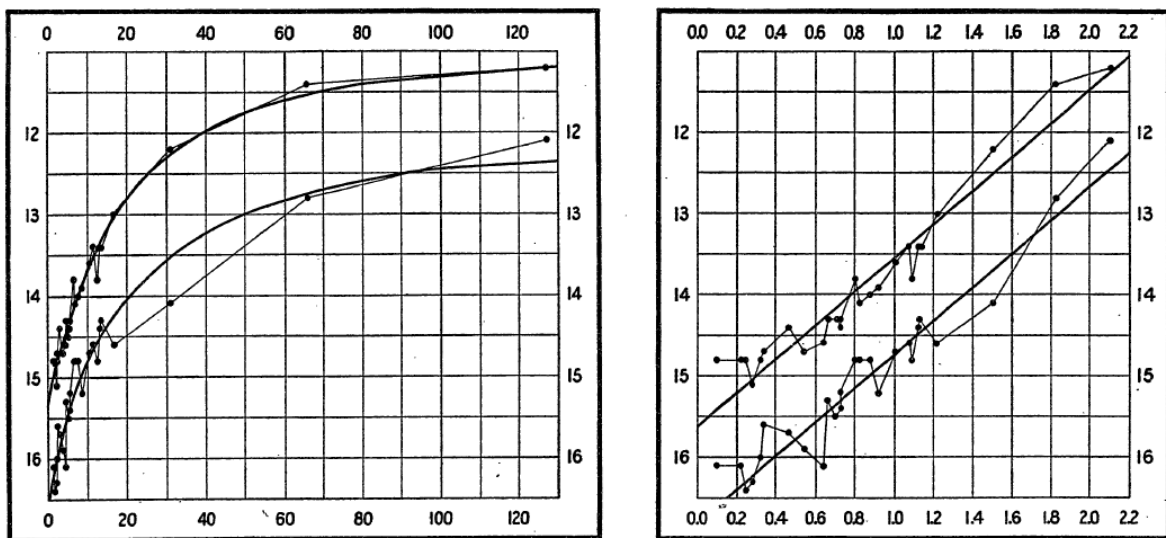
Cefeide su zvijezde koje su sišle s glavnog niza i nalaze se u pojasu nestabilnosti. Zvijezde mogu ući u taj pojas više od jedanput nakon dijela života na glavnom nizu. Osim za najmasivnije cefeide, prvi prelazak pojasa nestabilnosti događa se kad više nema vodika u jezgri zvijezde. Za to vrijeme zvijezda se širi, izdiže se iz glavnog niza i pomiče se prema desno u HR dijagramu, prema području niže površinske temperature, odnosno prema području crvenih divova. Prvi prolaz kroz pojas nestabilnosti događa se kada se površina zvijezde hladi i događa se jako brzo, a traje većinom  $10^3 - 10^4$  godina. Nakon prvog prolaska pojasom nestabilnosti zvijezda napušta pojas pri crvenom rubu i penje se na HR dijagramu prema vrhu grane crvenih divova nakon čega dolazi do gorenja helija u jezgri.

Kad započne s izgaranjem helija, zvijezda se smanji i zagrije. Spušta se s dijela crvenih divova u HR dijagramu i ide prema lijevo, prema plavoj boji i većim temperaturama. To može dovesti zvijezdu u drugi prolaz pojasom nestabilnosti. Zvijezda sad prolazi kroz nešto što se naziva plava petlja. Isti opseg plave petlje može izazvati dva različita prolaska kroz pojas nestabilnosti ili može uzrokovati da zvijezda uđe u pojas

nestabilnosti kroz crveni rub, okrene se dok je još uvijek u petlji i opet evoluira kroz crveni rub. U oba slučaja plavi dio puta cefeide se odnosi na drugi prolazak, dok je crveni dio puta treći prolazak. Specifičnosti plavih petlji je stalno ponavljanje. Plave petlje većinom ovise o količini i strukturi zvijezde kao rezultat prethodnih stupnjeva evolucije zvijezde. Generalno, opseg plave petlje ovisi o masi zvijezde. To znači da za zvijezde premale mase opseg neće biti dovoljan da uđe na crveni rub pojasa nestabilnosti. Zvijezde malih masa neće moći prijeći pojas nestabilnosti više od jednog puta [8].

### 3.3 Period-luminozitet relacija

Povezanost perioda cefeida i njihovog luminoziteta prva je otkrila Henrietta Leavitt. Njezin rad iz 1912. godine temeljen je na istraživanju Cefeida u Malom Magellanovom oblaku. To joj je omogućilo da u svom uzorku koristi opažene magnitudo cefeida zbog pretpostavke da se sve nalaze na istoj udaljenosti. Na slici 3.2 prikazane su originalne period-luminozitet relacije za cefeide koje je promatrala Henrietta Leavitt.



Slika 3.2: Period-luminozitet relacije za cefeide iz Malog Magellanovog oblaka koje je koristila Henrietta Leavitt. Na obje slike su na y osima opažene magnitudo cefeida, Na x osi lijeve slike je period pulsiranja cefeida u danima, a na x osi desne slike je logaritam perioda pulsiranja u danima. Preuzeto sa *The secret lives of Cepheids* [8].

Originalna relacija imala je ograničenja i mogla je biti primijenjena samo na cefeide u Malom Magellanovom Oblaku, zato jer koristi opažene magnitudo. No, to



je potaknulo na razmišljanje o apsolutnoj povezanosti perioda i luminotiteta cefeida. Mnogi poznati astronomi, Hubble, Shapley, Baade i dr. shvatili su važnost tog zakona i radili na njegovom poboljšanju. Današnja formulacija period-luminozitet relacije glasi:

$$\langle M \rangle = \alpha + \beta \log P \quad (3.1)$$

Gdje je  $M$  srednja apsolutna magnituda cefeide, promatrana na određenoj valnoj duljini,  $\alpha$  odsječak na osi  $x$ ,  $P$  je period pulsiranja u danima i  $\beta$  je nagib pravca. Iako se koriste najtočniji podaci, uvijek postoji nekakvo raspršenje luminoziteta. To je posljedica toga što pojas nestabilnosti cefeida ima određenu širinu. Kako bi period-luminozitet relacija bila potpuna, mora postojati točan  $\alpha$ . Ta preciznost se može dobiti korištenjem paralaksi cefeida sa različitim periodom pulsiranja [8].

## 4 Metode

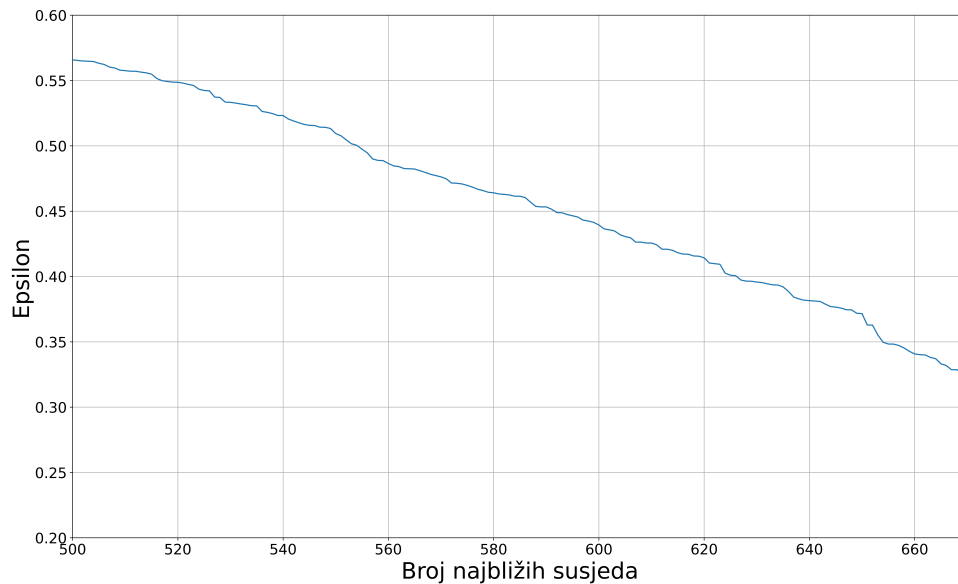
Otvoreni skupovi vrlo su važni iz mnogih razloga, najvažniji od njih je da su zvijezde u njima iste starosti jer su nastale iz istog oblaka plina. U našoj galaksiji postoji mnogo takvih skupova. Ovdje su posebno važni otvoreni skupovi u kojima se nalaze cefeide. Pretpostavlja se da je udaljenost otvorenog skupa puno veća od njegovih dimenzija. Tipični radijus otvorenih skupova iznosi 4.7 pc [15], a udaljenosti su u rasponu od 98.72 pc do  $\sim 10$  kpc [15]. Zbog toga što je prostorna dimenzija otvorenih skupova relativno mala u odnosu na njihovu udaljenost možemo provjeriti točnost paralaksi cefeida iz Gaia DR2<sup>11</sup> usporedbom s udaljenosti otvorenih skupova. Računamo medijan udaljenosti svih zvijezda konstantnog sjaja u otvorenim skupovima u kojima nalazimo cefeide i uspoređujemo ga s Gaia DR2 paralaksama. Cefeida koja se nalazi u tom skupu tada bi trebala imati paralaksu koja značajnije ne odstupa od paralakse otvorenog skupa.

Najprije su pronađeni podaci za cefeide i otvorene skupove u kojima se one nalaze. Podaci su dobiveni pregledavanjem i unijom skupova koje su prethodno našli [12], [17] i [15]. Uzeti su podaci za cefeide za koje su oni sigurni da se nalaze u nekom skupu. Kako bi odredili koje sve zvijezde čine otvoreni skup uzeti su podaci o koordinatama skupa, deklinaciji i rektascenziji. Iz Gaia DR2 [19] uzete su sve zvijezde koje se nalaze unutar pola stupnja. Najprije su primijenjeni filteri vezani za luminozitet zvijezda. Na taj su način odbačene presvijetle  $G < 8$  mag ili pretamne zvijezde  $G > 16$  mag. Odbačene su i zvijezde koje nemaju dobru fotometriju i čiji je renormalizirani jedinični težinski faktor (RUWE)<sup>12</sup> veći od 1.4. Također su odbačene zvijezde čija je relativna pogreška veća od 20%. U razmatranje su ušle zvijezde koje nisu promjenjive, čime su i cefeide iz tih skupova isključene i ne pridonose paralaksi skupa. Kasnije su iz razmatranja, zbog nepotpunih podataka o paralaksama i periodima te različitim koordinatama deklinacije i rektascenzije, isključeni V367 Sct iz skupa NGC 6649, TW Nor iz skupa Lynga, ASAS J182714-1507.1 iz skupa Kharchenko 3, CV Mon iz skupa VdBerg 1, RU Sct iz skupa Trumpler 35, SX Car iz skupa ASCC 61 i S Mus iz skupa ASCC 69.

---

<sup>11</sup>Gaia data release 2.

<sup>12</sup>Izračunati renormalizirani jedinični težinski faktor za svaki element u Gaia DR2. Koristi se za određivanje koje zvijezde su dobro opažene, a koje nisu dobro opažene. Očekivana vrijednost je 1 za zvijezde koje su dobro opažene. Za zvijezde kojima je izračunati faktor veći od 1.4 smatra se da nisu dobro opažene.



Slika 4.1: Graf najbližih susjeda za otvoreni skup IC 4725. Na x osi je prikazan broj najbližih susjeda koji se ne nalaze u detektiranom skupu (točke za koje se može reći da predstavljaju šum), dok je na y osi prikaza "epsilon" koji ovisi o broju najbližih susjeda.

Na preostale zvijezde primjenjen je algoritam strojnog učenja `scikit-learn` DB-Scan iz programskog jezika Python, koji se nakon testiranja mnoštva dostupnih algoritama pokazao kao najbolji za otkrivanje skupova. Ono na što je ovdje bilo posebno za pripaziti su parametri koji su potrebni da bi algoritam DBScan radio kako treba. To su "epsilon", koji predstavlja najveću udaljenost na kojoj se može reći jesu li dvije točke susjedi ili nisu, a druga je broj točaka koje čine skup. Poseban zadatak bio je odrediti "epsilon" jer je on osjetljiv i na najmanje promjene te ukoliko se krivo odredi algoritam može prepoznati neki drugi skup što na kraju može dati netočne rezultate. "Epsilon" je normiran broj između 0 i 1 i ovisi o količini seta podataka koji se koriste za određivanje otvorenog skupa. Za veće vrijednosti "epsilona" algoritam DBScan može detektirati manji broj skupova s velikim brojem članova, dok za manji "epsilon" algoritam može odrediti veći broj skupova s manjim brojem članova skupa. Određuje se za svaki skup ručno iz grafa. Na grafu broja nablížih susjeda "epsilon" se određuje tako što se gleda točka u kojoj krivulja ima najstrmiji pad. Primjer takve krivulje vidi se na slici 4.1 koja pomaže pri određivanju "epsilona" za otvoreni skup IC 4725. Ovdje se vrlo lako vidi da je najstrmiji pad pri 0.37, tako da se za izvršavanje programa uzima upravo ta vrijednost epsilona. Za otvorene skupove je određeno da moraju imati minimalno 10 članova kako bi se mogli smatrati skupom i primjeniti statistiku na skup.

## 5 Rezultati

Zvijezdama za koje je određeno da se nalaze u skupu određena je paralaksa skupa, kao medijan<sup>13</sup> paralakse svih zvijezda u skupu. Podaci koji su dobiveni za otvorene skupove uspoređeni su s podacima paralaksi otvorenih skupova iz kataloga [15] i sa paralaksama cefeida iz Gaie, kako bi se uvjerali da korištena metoda daje smislene rezultate.

Nakon što su izračunati medijani paralaksi otvorenih skupova, napravljena je usporedba dobivenih vrijednosti s vrijednostima iz kataloga [15]. Na slici 5.1 je vidljivo da je razlika dobivenih vrijednosti unutar pogreške za sve skupove iz tablice 5.1.

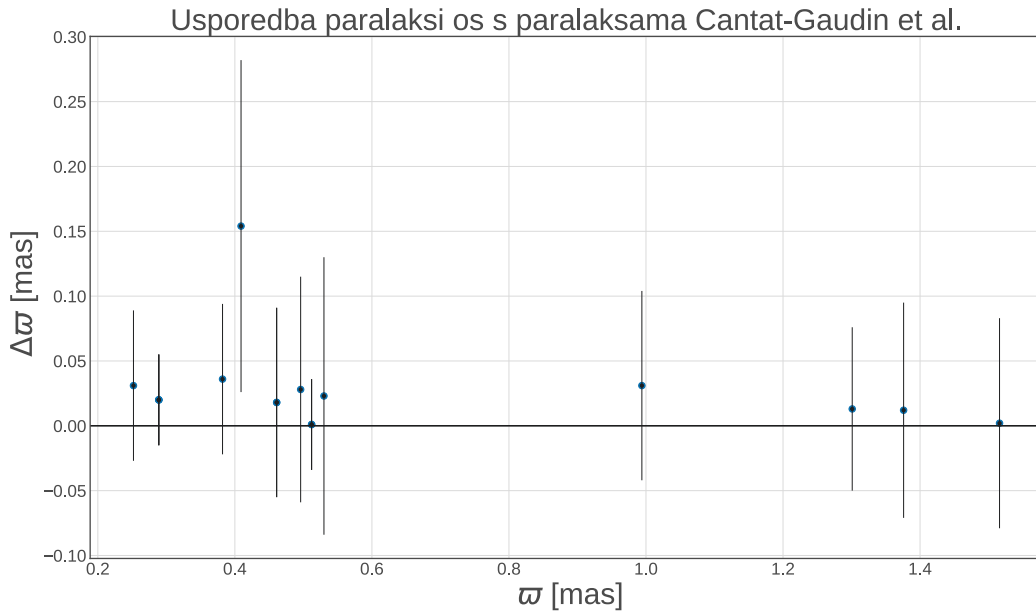
Skup	Cefeida	Medijan paralakse otvorenog skupa [mas]	Gaia DR2 paralakse cefeide [mas]	Paralaksa otvorenog skupa Cantat-Gaudin [mas]
Collinder 220	UW Car	0.380	0.263	0.346
Collinder 394	BB Sgr	1.378	1.248	1.388
FSR 0951	RS Ori	0.515	0.530	0.553
IC 4725	U Sgr	1.507	1.460	1.514
NGC 129	DL Cas	0.505	0.422	0.511
NGC 129	V379 Cas	0.505	0.509	0.511
NGC 5662	V Cen	1.295	1.340	1.228
NGC 6067	V340 Nor	0.453	0.487	0.443
NGC 6067	QZ Nor	0.453	0.474	0.443
NGC 6087	S Nor	0.998	1.062	1.025
NGC 6664	EV Sct	0.501	0.497	0.468
NGC 7790	CF Cas	0.283	0.287	0.269
NGC 7790	CE Cas B	0.283	0.233	0.269
NGC 7790	CE Cas A	0.283	0.288	0.269
Ruprecht 79	CS Vel	0.226	0.165	0.221
Turner 9	SU Cyg	0.425	1.170	0.563

Tablica 5.1: Vrijednosti medijana paralaksi otvorenog skupa, paralaksi cefeida iz Gaia DR2 i paralaksi otvorenih skupova iz kataloga [15].

Jedini otvoreni skup za koji je razlika veća od greške paralakse je skup Turner 9 u kojem se nalazi Cefeida SU Cyg. Za taj skup se može vidjeti da se izračunata paralaksa i paralaksa iz kataloga Cantat-Gaudin et al. [15] jako razlikuje od paralakse same cefeide. Crtanjem i promatranjem HR dijagrama nije se sa sigurnošću moglo reći da je Turner 9 dobro identificiran te je kasnije izbačen iz razmatranja. Određena je i paralaksa otvorenog skupa Turner 2 koji se ne nalazi u katalogu [15] i nema

<sup>13</sup>Srednja vrijednost u nizu elemenata skupa poredanih od najmanjeg do najvećeg. Dijeli skup na dva dijela, tako da se pola skupa nalzi ispod, a pola skupa izdan medijana.

izračunatu paralaksu, no u drugoj literaturi (Anderson et al. [12]) se spominje kao otvoreni skup koji sadrži cefeidu WZ Sgr.



Slika 5.1: Grafička usporedba vrijednosti izračunatih paralaksi otvorenih skupova s paralaksama iz [15] kataloga. Na x osi su medijani paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima. Na y osi je apsolutna vrijednost razlike medijana paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima s paralaksama otvorenih skupova iz kataloga [15].

Kako bi minimizirali utjecaj raspršenja na međuzvjezdanoj tvari, koristimo opažanja u bliskom infracrvenom području iz 2MASS kataloga ( $J$  i  $K_S$  filtri) i "Groenewegen" [16] kataloga, gdje su za cefeide u korištenom skupu modelirane srednje magnitude u  $J$  i  $K_S$  filtrima. Opažene magnitude moraju se pretvoriti u apsolutne magnitude. Za to se općenito koristi relacija:

$$M = m - 5 \cdot \log_{10}(d) + 5 \quad (5.1)$$

Gdje je  $M$  apsolutna magnituda,  $m$  je opažena magnituda, a  $d$  je udaljenost izražena u parsecima.

Period-luminozitet relacija određena je:

$$M = \alpha + \beta \cdot \log_{10}(P) \quad (5.2)$$

Gdje je  $M$  apsolutna magnituda, općenito,  $\alpha$  odsječak na osi x,  $\beta$  nagib pravca, a  $P$  je period cefeida izražen u danima. Kako periodi cefeida u GDR2 nisu određeni ni točni za sve cefeide, kao referentni katalog perioda uzeti su rezultati iz [9]. Pro-

Skup	Cefeida	Medijan paralakse u otvorenom skupu [mas]	$K_S$ [mag]	$J$ [mag]	$P$ [dan]
Berkley 58	CG Cas	0.335	8.136	8.832	4.365
Collinder 220	UW Car	0.382	6.672	7.285	NaN
Collinder 394	BB Sgr	1.376	4.572	5.230	NaN
FSR 0951	RS Ori	0.530	5.801	6.270	7.567
IC 4725	U Sgr	1.516	3.930	4.477	6.745
NGC 129	DL Cas	0.512	5.857	6.536	8.001
NGC 129	V379 Cas	0.512	6.217	6.816	NaN
NGC 5662	V Cen	1.301	4.644	5.179	5.495
NGC 6067	V340 Nor	0.461	5.526	6.156	11.288
NGC 6067	QZ Nor	0.461	6.544	7.004	5.401
NGC 6087	S Nor	0.994	4.216	4.868	9.754
NGC 6664	EV Sct	0.496	6.956	7.550	4.396
NGC 7790	CF Cas	0.289	7.973	8.695	4.875
NGC 7790	CE Cas B	0.289	7.174	7.780	NaN
NGC 7790	CE Cas A	0.289	7.174	7.780	NaN
Ruprecht 79	CS Vel	0.252	8.071	8.786	5.905
Turner 2	WZ Sgr	0.516	4.781	5.573	NaN

Tablica 5.2: Tablica s vrijednostima medijana paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima i vrijednostima magnituda  $K_S$  i  $J$  filtra iz 2MASS kataloga.

učavane cefeide pulsiraju frekvencijom fundamentalnog moda i prvog harmonika. U tablici koja se koristi, periodi cefeida koje titraju kao prvi harmonik preračunate su u osnovni mod kao [9]:

$$P_F = 1.4459P_{FO} - 0.0736 \quad (5.3)$$

Gdje je  $P_F$  period osnovnog moda, a  $P_{FO}$  je period prvog harmonika.

Podaci potrebni za crtanje period-luminozitet grafova i kalibriranje period-luminozitet relacija nalaze se u tablicama. Tablica 5.2 ima vrijednosti magnituda  $K_S$  i  $J$  filtra iz kataloga 2MASS, a tablica 5.3 ima podatke iz kataloga [16], u obje tablice se nalaze izračunate vrijednosti paralaksi skupova. Sjaj zvijezda mjeren je kroz 2 filtra 2MASS fotometrijskog sustava,  $J$  i  $K_S$ , kako bi se umanjio efekt zatamnjivanja zbog raspršivanja na međuzvjezdanoj tvari. Radi dodatnog smanjenja utjecaja raspršenja na međuzvjezdanoj tvari koristimo tzv. Wesenheit funkciju:

$$W = V - R(B - V) \quad (5.4)$$

$W$  je Wesenheit funkcija,  $V$  i  $B$  su filteri kroz koje se mjeri sjaj zvijezda,  $R$  je

Skup	Cefeida	Medijan paralakse u otvorenom skupu [mas]	$K_S$ [mag]	$J$ [mag]	$P$ [dan]
Berkley 58	CG Cas	0.335	8.109	8.903	4.365
Collinder 220	UW Car	0.382	NaN	NaN	NaN
Collinder 394	BB Sgr	1.376	NaN	NaN	NaN
FSR 0951	RS Ori	0.530	5.860	6.398	7.567
IC 4725	U Sgr	1.516	3.912	4.506	6.745
NGC 129	DL Cas	0.512	5.892	6.550	8.001
NGC 129	V379 Cas	0.512	NaN	NaN	NaN
NGC 5662	V Cen	1.301	4.498	5.019	5.495
NGC 6067	V340 Nor	0.461	5.573	6.211	11.288
NGC 6067	QZ Nor	0.461	6.614	7.085	5.401
NGC 6087	S Nor	0.994	4.149	4.674	9.754
NGC 6664	EV Sct	0.496	7.018	7.608	4.396
NGC 7790	CF Cas	0.289	7.900	8.590	4.875
NGC 7790	CE Cas B	0.289	NaN	NaN	NaN
NGC 7790	CE Cas A	0.289	NaN	NaN	NaN
Ruprecht 79	CS Vel	0.252	8.011	8.771	5.905
Turner 2	WZ Sgr	0.516	NaN	NaN	NaN

Tablica 5.3: Tablica s vrijednostima medijana paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima i vrijednostima magnituda  $K_S$  i  $J$  filtra iz [16].

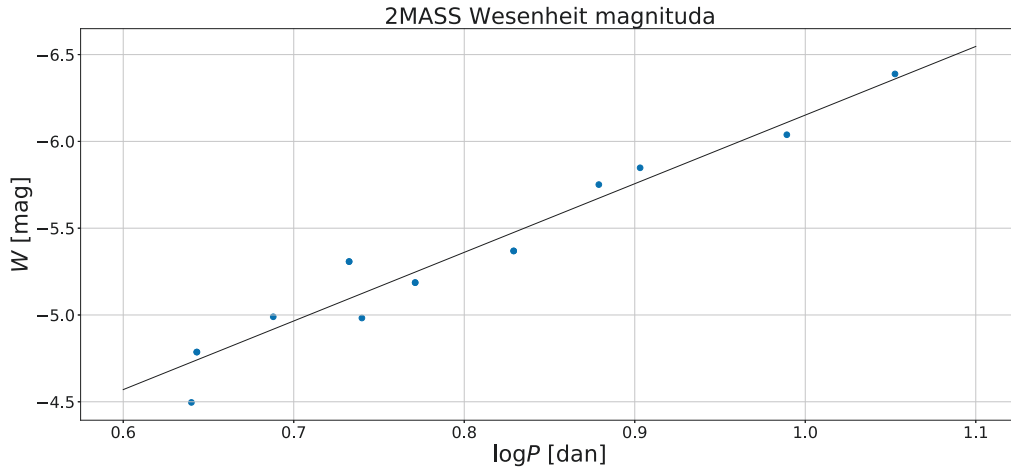
omjer ukupne i selektivne apsorpcije. Wesenheit funkcija je linearna kombinacija magnitude i astrofizičke boje. Koeficijent  $R$  ovisi o svojstvima međuzvezdane tvari i odabran je tako da anulira njene efekte [18]. U ovom slučaju koristi se Wesenheit magnituda koja se dobije kombinacijom magnituda iz  $K_S$  filtra i  $J$  filtra. Računa se kao [9]:

$$m_W = K_S - 0.37(J - K_S) \quad (5.5)$$

Kasnije se pomoću jednadžbe 5.1 pretvori u apsolutne magnitude koje su potrebne za određivanje preiod luminozitet relacije. Magnitude se zatim crtaju zajedno s logaritmom perioda. Parametre period-luminozitet relacije određujemo metodom najmanjih kvadrata. Za računanje koeficijenta smjera i nagiba pravca koristi se funkcija `curve-fit` iz Python biblioteke `scipy`.

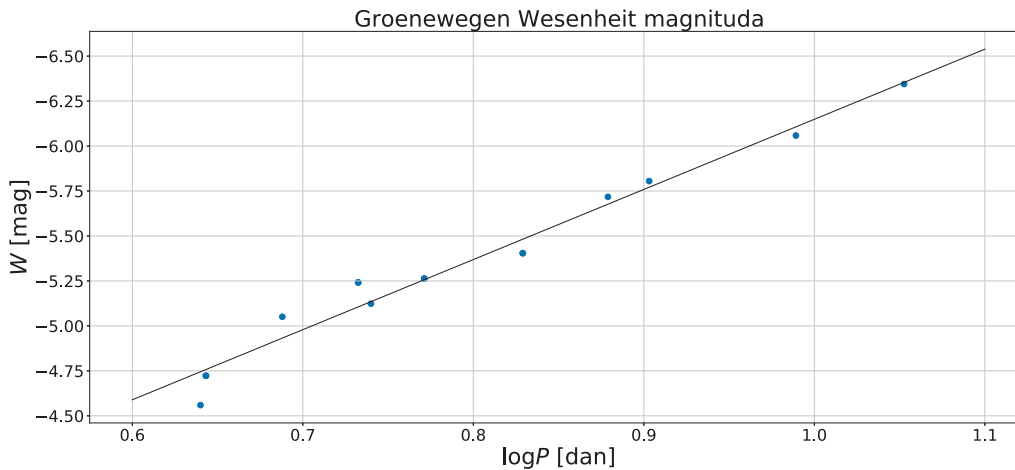
Za vrijednosti iz 2MASS kataloga, period-luminozitet relacija prikazana je na slici 5.2.

$$M_W = (-4.0 \pm 0.3) \cdot \log_{10}(P) - (2.2 \pm 0.2) \quad (5.6)$$



Slika 5.2: Period-luminozitet relacija s vrijednostima iz 2MASS kataloga. Na x osi su logaritmi perioda u danima, na y osi je Wesenheit magnituda.

Za vrijednosti iz "Groenewegen" kataloga [15], period-luminozitet relacija prikazana je na slici 5.3.



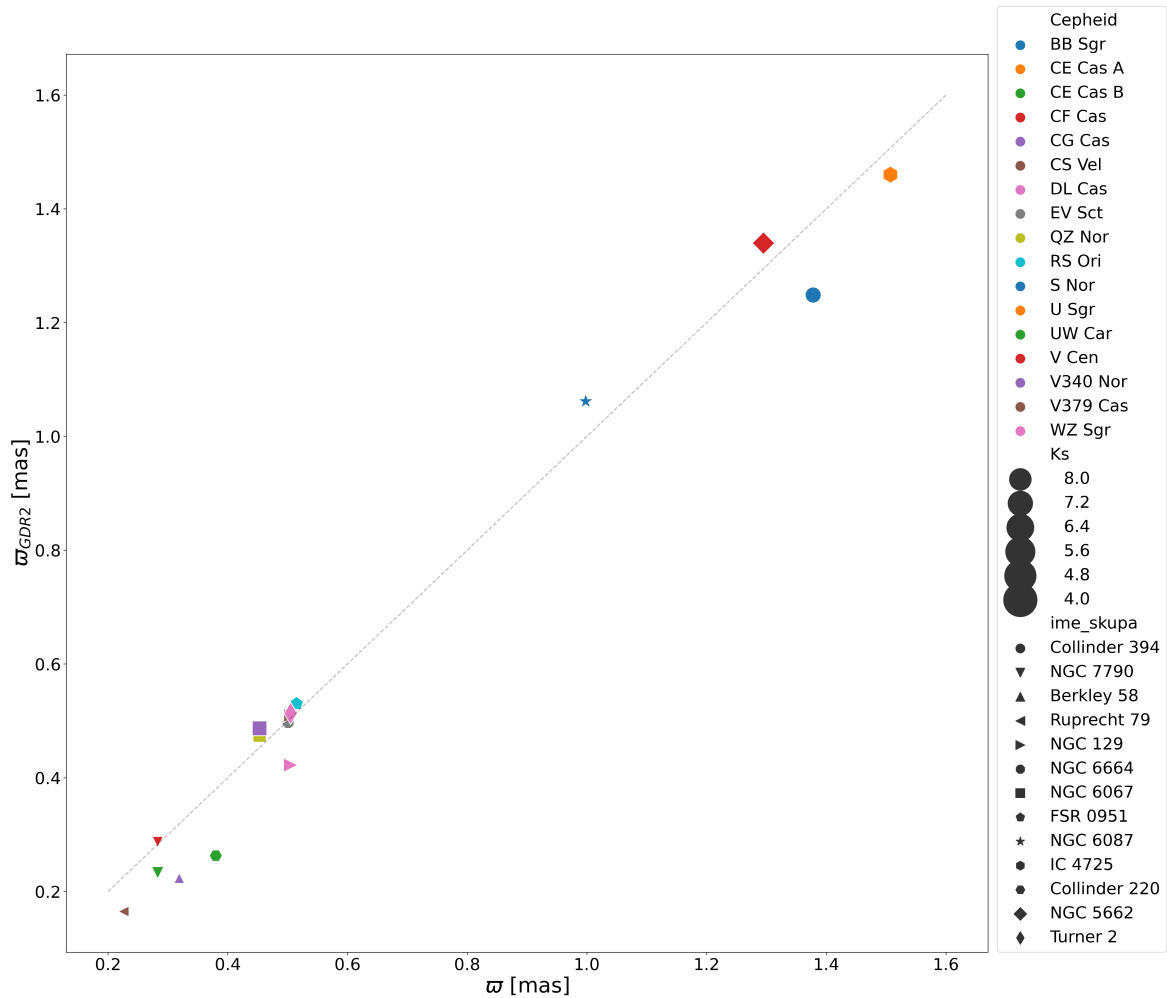
Slika 5.3: Period-luminozitet relacija s vrijednostima iz Groenewegen [16] kataloga. Na x osi su logaritmi perioda u danima, na y osi je Wesenheit magnituda.

$$M_W = (-3.9 \pm 0.2) \cdot \log_{10}(P) - (2.3 \pm 0.2) \quad (5.7)$$

Na kraju je bilo potrebno odrediti kakav je odnos paralaksi skupova i paralaksi cefeida te jesu li pouzdane paralakse cefeida koje je opazio Gaia satelit. Grafički je na slici 5.4 napravljena usporedba paralaksi cefeida i paralaksi otvorenih skupova u kojima se nalaze te cefeide. Pravac kroz ishodište predstavlja savršeno slaganje izračunate paralakse skupa i Gaia paralakse cefeida.

Sa slike 5.4 se može vidjeti da se paralakse cefeida opaženih Gaia satelitom ne



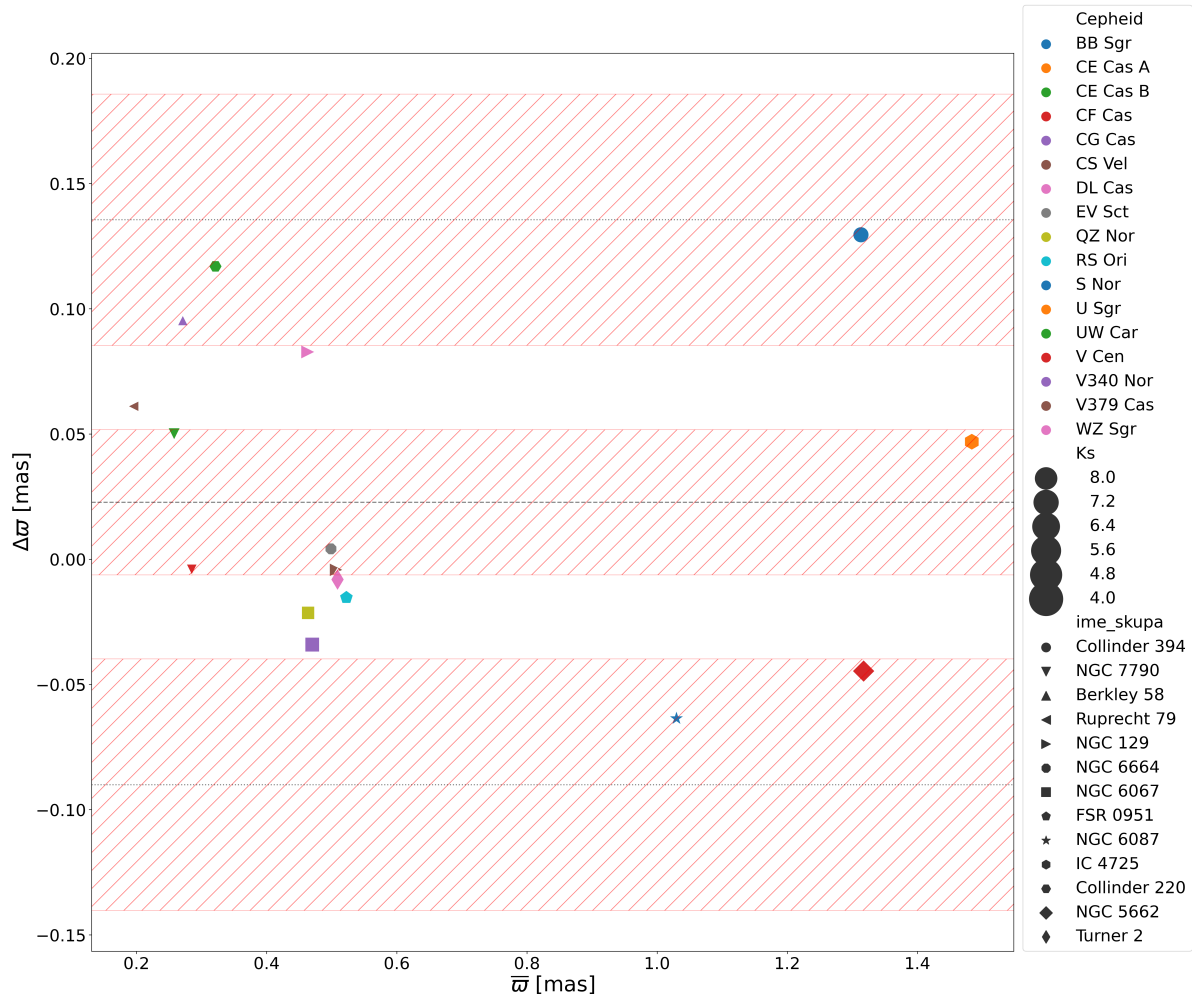


Slika 5.4: Usporedba paralaksi cefeida iz Gaie i izračunatih paralaksi otvorenih skupova. Na x osi su medijani paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima, na y osi su paralakse cefeida iz Gaia DR2. Pravac kroz ishodište predstavlja savršeno slaganje paralaksi cefeida iz Gaie i medijana paralaksi zvijezda u otvorenom skupu. Cefeide su označene različitim bojama. Svaki otvoreni skup označen je drugim geometrijskim oblikom. Na slici su prikazane magnitude cefeida, tako da su sjajnije cefeide prikazane kao da su veće.

razlikuju puno od paralaksi otvorenih skupova. Sjaj cefeida označen je veličinom točke.

Za određivanje slaganje dviju metoda mjerenja koristi se *Bland-Altman* metoda opisana u članku [14]. Oni koriste tu metodu za ispitivanje sličnosti dvaju različitih kliničkih mjerenja. Ovdje se ta metoda koristi da bi se vidjela sličnost dvaju neovisnih metoda određivanja paralaksi cefeida: izravno iz Gaia DR2 kataloga, mjerenjem paralakse cefeida, i posrednim određivanjem paralakse prema pripadnosti otvorenom skupu. Prvi dio usporedbe vidljiv je sa slike 5.4. Izračunate su srednje vrijednosti,  $\mu = 0.02$  i standardna devijacija  $s = 0.06$ . Slika 5.5 prikazuje medijan paralakse zvi-

jezda u otvorenim skupovima u usporedbi s razlikom medijana paralakse zvijezda u otvorenim skupovima s paralaksom cefeida iz Gaia DR2.



Slika 5.5: Usporedba paralaksi cefeida iz Gaie i izračunatih paralaksi otvorenih skupova. Na x osi je medijan paralakse zvijezda u otvorenom skupu, na y osi je razlika medijana paralakse zvijezda u otvorenom skupu i paralakse cefeide. Cefeide su označene različitim bojama. Svaki otvoreni skup označen je drugim geometrijskim oblikom. Na slici su prikazane magnitude cefeida, tako da su sjajnije cefeide prikazane kao da su veće. Horizontalna linija na  $\sim 0.02$  prikazuje srednju vrijednost razlike medijana paralakse otvorenog skupa i paralakse cefeide. Druge dvije horizontalne linije predstavljaju vrijednost razlike plus i minus dvije standardne devijacije.

Sa slike 5.5 se može vidjeti da su paralakse otvorenih skupova veće u odnosu na paralakse cefeida te da su sve razlike unutar granica slaganja. Pod pretpostavkom da razlike slijede normalnu raspodjelu očekivali bi da će se 95% razlika nalaziti unutar "granica slaganja" definiranih u [14]. Granice slaganja određene su intervalom  $\mu \pm 1.96 \cdot s$ . No, kako je ovdje relativno mali broj mjerenja može se primjeniti aproksimacija  $\mu \pm 2 \cdot s$ .

Na ovim podacima radi se Shapiro-Wilk test koji testira nul hipotezu. Nul hipoteza u ovom slučaju je da raspodjela razlika paralaksi slijedi normalnu raspodjelu. Ako je  $p$  vrijednost manja od faktora  $\alpha$  tada se nul hipoteza odbija i to je pokazatelj da razlike paralakse ne slijede normalnu raspodjelu. S druge strane, ako je  $p$  vrijednost veća od  $\alpha = 0.05$ , tada nul hipoteza ne može biti obačena. Shapiro-Wilk test se radi pomoću funkcije `shapiro()` iz biblioteke `scipy.stats` programskog jezika Python. Dobije se vrijednost  $p = 0.24$  što znači da je  $p > \alpha$  pa se ne može odbaciti nul hipoteza da raspodjela razlika paralaksi slijedi normalnu raspodjelu. Koliko su precizne srednja razlika  $\mu$  i granice slaganja može se odrediti pomoću intervala pouzdanosti. Intervali su široki, što je posljedica malog broja mjerenja i relativno velike varijacije razlika.

Drugi test koji se koristi za testiranje nul hipoteze je Kolmogorov-Smirnov test. Kolmogorov-Smirnov testom testira se razlika između kumulativne distribucije i empirijske distribucije. Nul hipoteza u ovom slučaju je da su paralakse cefeida i paralakse otvorenih skupova uzete iz istog uzorka. Što bi značilo da paralakse cefeida značajnije ne odstupaju od medijana paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima te se može reći da su paralakse cefeida i medijan paralaksi zvijezda u otvorenim skupovima isti. Vrijednost  $\alpha = 0.05$  u ovom slučaju je ista kao i kod Shapiro-Wilk testa i vrijedi slijedeće: ako je  $p$  vrijednost veća od  $\alpha$ , tada nul hipoteza ne može biti obačena. Kolmogorov-Smirnov test radi se pomoću funkcije `ks_2samp()` iz biblioteke `scipy.stats` programskog jezika Python. Dobije se rezultat  $p = 0.96$  što znači da je  $p > \alpha$  te se ne može odbaciti nul hipoteza da su paralakse cefeida i paralakse otvorenih skupova uzete iz istog uzorka.

## 6 Zaključak

Cefeide kao standardne svijeće u prošlosti, a i danas imaju ključnu ulogu u određivanju udaljenosti na galaktičkim i kozmološkim (preko ljestvice udaljenosti) skalama. Dobra kalibracija period-luminozitet relacije stoga je važna i kod određivanja Hubbleove konstante. Kako cefeide mijenjaju svoj sjaj u određenom periodu tako se zbog relativno velike amplitude promjene sjaja pri određivanju paralaksi cefeida mogu pojaviti sistematske greške. Postojanje sistematskih grešaka paralaksama cefeida objavljenih u sklopu Gaia kolaboracije se u ovom radu istraživalo usporedbom s otvorenim skupovima koji sadrže cefeide među svojim članovima.

Pomoću Shapiro-Wilk testa pokazano je da se ne može odbaciti nul hipoteza koja govori da raspodjela razlika paralaksi otvorenih skupova i paralaksi cefeida slijedi normalnu raspodjelu. Komolgorov-Smirnov test pokazao je da se ne može odbaciti nul hipoteza koja govori da su paralakse cefeida i paralakse otvorenih skupova uzete iz istog uzorka. Bland-Altman metodom je testirano globalno slaganje vrijednosti paralakse cefeida iz Gaia kataloga s medijanom paralaksi otvorenih skupova kojih su te cefeide članovi.

Pretpostavimo li da je medijan paralaksi otvorenog skupa bolja mjera udaljenosti od Gaia DR2 paralaksi cefeida, rezultat ovog rada bio bi sistemski pomak ljestvice udaljenosti "usidrene" pomoću paralaksi otvorenih skupova u odnosu na ljestvicu udaljenosti određenu pomoću cefeida. S obzirom na pozitivan pomak, paralakse otvorenih skupova veće su od paralaksi cefeida, očekivali bi da se vrijednost  $H_0$  poveća u usporedbi s ljestvicom udaljenosti baziranom samo na cefeidama iz Gaia DR2.

## 7 Metodički dio

Određivanje paralakse zvijezda i paralakse općenito ne nalazi se u programu fizike za osnovne ni za srednje škole. Predmet na kojem se obrađuje ta tematika je astronomija. Tema određivanje udaljenosti zvijezda pomoću paralakse obrađuje se u astronomiji 1. u cjelini Godišnje gibanje neba.

Određivanje udaljenosti zvijezda pomoću paralakse danas je jedini neposredan način određivanja udaljenosti objekata izvan Sunčevog sustava. Princip paralakse koristio se kroz povijest i bio je važan u određivanju udaljenosti do Mjeseca i do Sunca. Način određivanja paralakse vrlo je jednostavan i može se opisati pomoću jednostavne trigonometrije. Paralaksa se može odrediti i za bilo koji predmet, bitno je da postoji opažanje s dva različita mjesta. Zbog toga je način mjerenja paralakse moguće predstaviti kroz istraživački usmjerenu nastavu. Istraživački usmjerena nastava dobra je jer postoji velika interakcija između učenika i nastavnika. Učenici su aktivno uključeni u nastavu te mogu na najjednostavniji način, kroz mjerenja, pokuse, hipoteze i dr. vidjeti kako funkcionira istraživački rad iz astrofizike kao znanstvene discipline. Istraživački usmjerena nastava zahtjeva dobro strukturirana učenička istraživanja. U istraživanju nastavnik vodi učenike, ali im istovremeno omogućava samostalno razmišljanje, zaključivanje, osmišljavanje pokusa i hipoteza. Važno je naglasiti da je istraživački usmjerena nastava usmjerena prema procesu istraživanja i formiranja znanja, prilikom čega se kod učenika razvija samostalno razmišljanje i zaključivanje.

Kod istraživački usmjerene nastave fizike ili astronomije sat ima tri glavna dijela. U prvom, uvodnom dijelu sata, pred učenike se postavlja neki problem koji je vezan za svakodnevni život. Može se napraviti i opservacijski pokus gdje učenici upoznaju novu pojavu. Središnji dio sata bavi se istraživanjem nove pojave i započinje postavljanjem istraživačkog pitanja. Može se izvesti na više načina: jedan je da nastavnik radi pokus frontalno, a učenici aktivno sudjeluju, a drugi je da učenici samostalno ili u grupama rade pokus. Bitno je da nastavnik vodi i usmjerava učenike kroz istraživanje, ali oni samostalno pri tome daju hipoteze, kontroliraju varijable i dolaze do zaključaka. Nakon što provedu istraživanje, učenici na temelju rezultata pokusa daju odgovor na istraživačko pitanje. Nakon toga se obično konstruira matematički model nove pojave. U završnom dijelu sata obično se primjenjuje stečeno znanje u novim

situacijama. Prikazuju se aplikacijski pokusi, odgovara se na konceptualna pitanja ili se rješavaju zadaci [7].

Za astronomiju nema službenog kurikuluma, izvodi se u osnovnoj školi kao izvan-nastavna aktivnost, a u srednjoj školi kao fakultativna nastava.

## **7.1 Nastavna priprema : Određivanje paralakse zvijezda**

### **Predmetni ishodi**

- Opisuje načine mjerenja udaljenosti zvijezda - pomoću paralakse
- Razlikuje dnevnu i godišnju paralaksu
- Određuje paralaksu bliskih i udaljenih objekata
- Povezuje paralaksu i udaljenost
- Koristi se parsecima

### **Međupredmetni isohdi**

uku B.4/5.1

#### 1. Planiranje

- Učenik samostalno određuje ciljeve učenja, odabire pristup učenju te planira učenje.

uku A.4/5.2

#### 2. Primjena strategija učenja i rješavanje problema

- Učenik se koristi različitim strategijama učenja i samostalno ih primjenjuje u ostvarivanju ciljeva učenja i rješavanju problema u svim područjima učenja.

uku D.4/5.2

#### 2. Suradnja s drugima

- Učenik ostvaruje dobru komunikaciju s drugima, uspješno surađuje u različitim situacijama i spreman je zatražiti i ponuditi pomoć.

Za ostvarenje ovih ishoda predviđena su 2 nastavna sata, a nastavne metode koje se koriste su : razredna rasprava, metoda pisanja i crtanja, učeničko izvođenje pokusa i mjerenja u skupinama i kooperativno rješavanje zadataka u skupinama.

## 7.2 *Uvodni dio*

### **Opservacijski pokus : Gledanje prsta s jednim pa drugim okom.**

Izvodi se pokus u kojem svatko od učenika digne ruku u visini očiju i ispruži palac. Učenici gledaju palac najprije jednim, a zatim drugim okom.

### **Pitanje : Što opažate?**

Učenici odgovaraju da palac nije na istom mjestu, mjenja mu se položaj u odnosu na pozadinu, ovisno s kojim okom se promatra.

### **Pitanje : Kako bi izmjerili udaljenost nekog dalekog objekta, na primjer Mjeseca, a da nemamo tehnologiju s kojom možemo do Mjeseca?**

Raspravlja se o učeničkim idejama. Cilj rasprave je navesti učenike da povežu promatranje prsta. Kad se prst gleda istovremeno s oba oka, vidi se da je prst ravno, prst je postavljen okomito u odnosu na ravninu očiju. Kad se gleda s jednim okom, prst se vidi pod određenim kutom u odnosu na to kad se prst gleda s oba oka. Mjeri se kut koji je između prsta kada se gleda s oba oka i kad se gleda samo s jednim okom. Isto tako se mjeri kut pod kojim se vidi Mjesec.

### **Pitanje : Je li za mjerenje kuta dovoljno mjerenje s jednog mjesta ili treba postojati razmak među točkama odakle se promatra Mjesec?**

Cilj pitanja je da se kroz raspravu i poveznicu s opservacijskim pokusom dođe do zaključka kako je potrebno promatrati Mjesec s dva udaljena mjesta jer se oči, iako su blizu ne nalaze na istom mjestu.

Na ploči crtam princip paralakse i određivanja udaljenosti kad znamo kut i udaljenost oba mjesta s kojih smo gledali kut. Pomoću jednostavne trigonometrijske relacije može se odrediti udaljenost.

Na ploču zapisujem naslov : Određivanje paralakse zvijezda

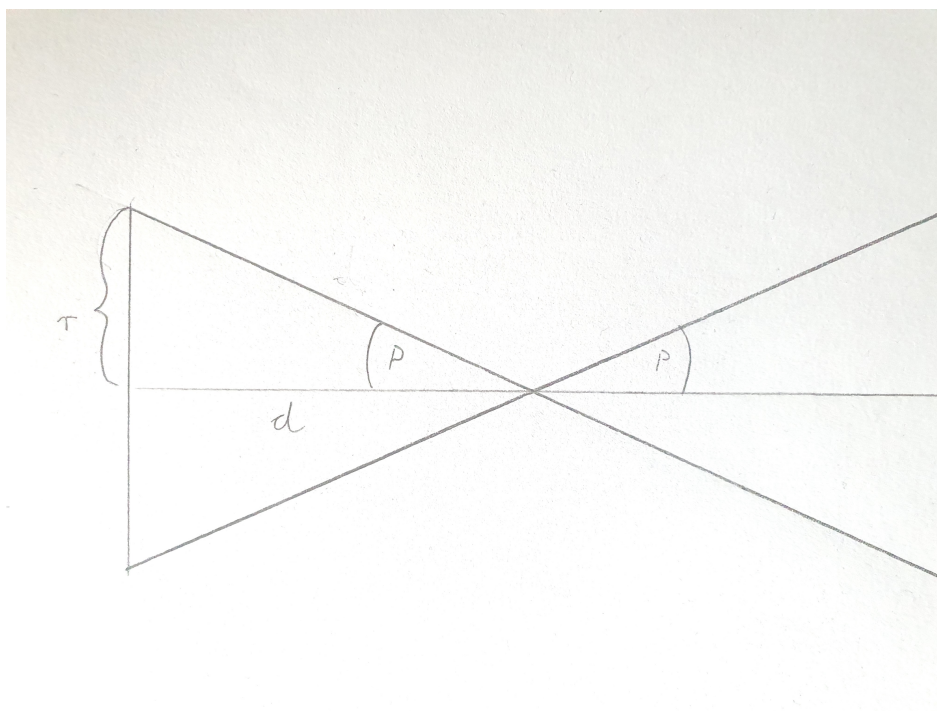
Uvodim pojam paralakse. Paralaksa je kut pod kojim bi se sa predmeta na nekoj udaljenosti, okomito vidjela dva različita mjesta promatranja tog istog predmeta.

### 7.3 Središnji dio

#### Istraživačko pitanje : Kako paralaksa ovisi o udaljenosti predmeta?

Učenici su podijeljeni u 5 grupa, pri čemu svaka grupa određuje paralaksu predmeta na udaljenosti od 5cm, 10cm, 15cm, 20cm i 25cm. Pribor koji se koristi u ovom istraživanju je : papir, ravnalo, označena iglica, kutomjer, karton, slika pozadine.

Učenici ubodu iglicu na zadanu udaljenost. Zatim stave oči u razinu papira i gledaju kako se vidi iglica jednim pa drugim okom. Izmjere udaljenost između očiju, što posluži kao promatranje s dva različita mjesta. Izvadi se iglica i povuče se pravac kroz točku koja označava jedno oko i mjesta gdje je bila iglica te se zatim ponovi postupak za drugo oko. Učenici zatim spoje mjesta koja označavaju oba oka i tako se dobije trokut. Zatim se taj trokut prepolovi, polovicom linije koja spaja oči, na dva pravokutna trokuta. Učenici tada mogu odrediti paralaksu uz pomoć kutomjera i provjeriti pomoću relacije poklapaju li im se vrijednosti paralaksi.



Slika 7.1: Prikaz određivanja paralakse.

koristi se relacija

$$\operatorname{tg}(p) = \frac{r}{d} \quad (7.1)$$

$$p = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{r}{d} \right) \quad (7.2)$$



Gdje je  $d$  udaljenost predmeta od očiju,  $r$  polovica udaljenosti očiju, a  $p$  kut paralakse.

Rješenja paralaksi koje učenici trebaju dobiti (ako je udaljenost između očiju 8cm) su : za  $r = 5\text{cm}, p = 38.66^\circ$ ;  $r = 10\text{cm}, p = 21.80^\circ$ ;  $r = 15\text{cm}, p = 14.93^\circ$ ;  $r = 20\text{cm}, p = 11.31^\circ$ ;  $r = 25\text{cm}, p = 9.09^\circ$ .

Nakon što su učenici izvršili mjerenje, svaka grupa predstavlja svoje rezultate. Rezultati se pišu na ploču, a učenici ih zapisuju u bilježnice.

**Odgovor na istraživačko pitanje : Za veće udaljenosti paralaksa je manja.**

**Pitanje : Primjećujete li vezu između udaljenosti i njegove paralakse?**

Očekujem da učenici primijete da je paralaksa veća ako je udaljenost manja. Paralaksa i udaljenost su obrnuto proporcionalne.

Izvodim relaciju za paralaksu udaljenih zvijezda, ako je kut paralakse jako mali, puno manji od 1, onda je tangens paralakse jednak paralaksi.

$$\operatorname{tg}(p) = p = \frac{r}{d} \quad (7.3)$$

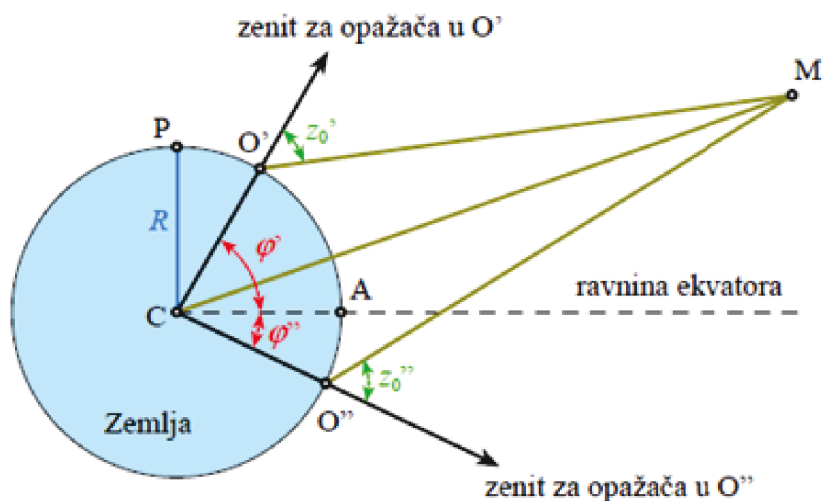
## 7.4 Završni dio

U završnom dijelu sata najprije se provjerava aplikacija znanja na stvarni problem, udaljenije zvijezde. Učenici zatim rješavaju zadatke u kojima se provjerava odnos udaljenosti i paralakse. Učenici rješavaju zadatke u bilježnicu, zatim netko od njih rješi zadatak na ploči.

**Pitanje : Može li se sa Zemlje tako izmjeriti paralaksa udaljenih zvijezda?**

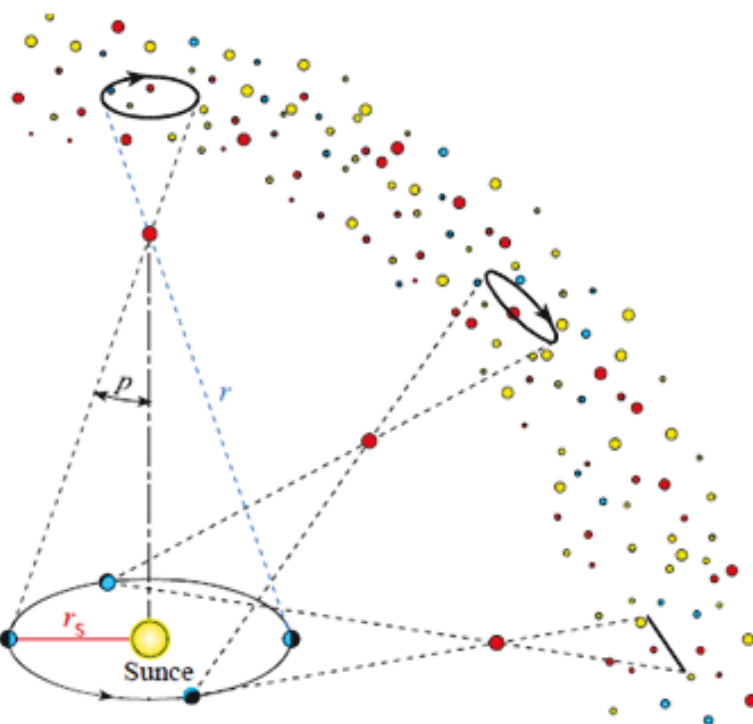
Očekujem različite odgovore, ako ne idu u dobrom smjeru navodim ih pitanjima o udaljenosti opažača i kako ona utječe na paralaksu primjerice bližeg predmeta. Za predmet na istoj udaljenosti je veća paralaksa ako je udaljenost između opažača veća.

Uvodim pojam dnevne paralakse. Dnevna paralaksa je paralaksa koja se može izmjeriti u jednom danu. Jednaka je kutu pod kojim se vidi Zemljin polumjer. Udaljenost opažača koji mjere dnevnu paralaksu jednaka je Zemljinom polumjeru na ekvatoru.



Slika 7.2: Prikaz načina mjerenja dnevne paralakse. Preuzeto sa Astronomija 1 web izdanje [6].

S druge strane postoji i godišnja paralaksa. Ona se mjeri u jednoj godini i jednaka je kutu pod kojim se vidi polumjer orbite elipse Zemlje oko Sunca koji maksimalno može biti jednak velikoj poluosi elipse. Udaljenost opažača koji mjere godišnju paralaksu jednaka je polumjeru elipse po kojoj Zemlja kruži oko Sunca.



Slika 7.3: Prikaz načina mjerenja godišnje paralakse. Preuzeto sa Astronomija 1 web izdanje [6].

Kako su promatrane zvijezde na jako velikim udaljenostima, njihove paralakse su jako male, mjere se u jedinicama kutne sekunde i manje. Kad se to pretvori u udaljenost u metrima dobiju se veliki brojevi. Zato je došlo do potrebe uvođenja nove njerne jedinice za udaljenost, parseka.

**Parsek je udaljenost na kojoj bi paralaksa zvijezde iznosila jednu kutnu sekundu.** Lako se izračuna koliko metara iznosi 1 parsek, oznaka za parsek je pc.

$$1\text{pc} = \frac{1.496 \times 10^{11}\text{m}}{\sin 1''} = 3.08 \times 10^{16}\text{m}$$

Iz izraza se vidi da je 1 parsek jednak  $3.08 \times 10^{16}\text{m}$ . Ako znamo da svjetlosna godina, put koji svjetlost prođe za 1 godinu iznosi  $9.46 \times 10^{15}\text{m}$ . Dobijemo da je 1 parsek jednak 3.26 svjetlosnih godina. Veza između paralakse neke zvijezde u kutnim sekundama i njezine udaljenosti u parsecima dana je :

$$p'' = \frac{1}{r_{pc}} \quad (7.4)$$

1. Najbliža zvijezda (ne uključujući Sunce) Proksima Kentaura ima paralaksu od 0.769". Kolika je njena udaljenost u parsecima, svjetlosnim godinama, astronomskim jedinicama i metrima?

Rješenje :

Za udaljenost u parsecima koristi se relacija

$$p = \frac{r}{r}$$

Što daje

$$r = \frac{1}{p}$$

Zatim se pretvara u ostale mjerne jedinice.

$$1\text{pc} = 3.26\text{gs}, 1\text{pc} = 3.08 \times 10^{16}\text{m}, 1\text{aj} = 1.50 \times 10^{11}\text{m}$$

$$r = 1.3\text{pc} = 4.24\text{gs} = 267650.87\text{aj} = 4.004 \times 10^{16}\text{m}$$

2. Paralaksa zvijezda 71 Cyg iznosi 150 marcsec, a  $\alpha$  Centauri 380 marcsec. Koja

je to udaljenost?

Rješenje :

Koristi se relacija

$$p = \frac{1}{r}$$

$$71Cyg : r = 6.68pc$$

$$\alpha Cen : r = 2.63pc$$

3. Zanimljivo bi bilo saznati koliko je potrebno usavršiti mjerenje kutova da se utvrdi dnevna paralaksa najbližih zvijezda. Uzmimo  $\alpha$  Kentaura na udaljenosti  $r = 4.3gs$ ,  $R_{Zemlje} = 6379km$

Rješenje :

Svjetlosne godine pretvore se u kilometre

$$1gs = 9.46 \times 10^{15}m$$

Što daje

$$r = 40.68 \times 10^{12}km$$

Zbog malog kuta paralaksa se računa

$$p = \frac{R_{Zemlje}}{r}$$

Dobije se rezultat  $p = (1.57 \times 10^{-10})^\circ$

## Literatura

- [1] Riess, A. G. Nature Reviews Physics : The expansion of the Universe is faster than expected.
- [2] De Grijs, R. An Introduction to Distance Measurement in Astronomy. Peking : Wiley, 2011.
- [3] Vujnović, V. Astronomija 1 : osnove astronomije i planetski sustavi. Zagreb : Školska knjiga, 1989.
- [4] Vujnović, V. Astronomija 2 : metode astrofizike, Sunce, zvijezde i galaktike. Zagreb : Školska knjiga, 1994.
- [5] Roša, D. Metode astronomskih istraživanja. Zagreb : Alfa, 2010.
- [6] Roša, D., Valečić, A., Drvar, Z., Hržina, D., Romštajn, I., Maričić, D., Bašić, M. Astronomija 1 (web izdanje). Zagreb : Zvezdarnica Zagreb - Zagrebački astronomski savez, 2016.
- [7] Jeličić, K., Planinić, M., Sušac, A., Matejak Cveniće, K. Oblikovanje i priprema istraživački usmjerenog nastavnog sata, Zbornik radova XIV. hrvatskog simpozija o nastavi fizike, Hrvatsko fizikalno društvo, 2019.
- [8] Engle, S. G. The secret lives of Cepheids. Doktorski rad. Australia : James Cook University, 2014.
- [9] Breuval, L. et al. The Milky Way Cepheid Leavitt law based on Gaia DR2 parallaxes of companion stars and host open clusters populations. // Astronomy & Astrophysics, 2020.
- [10] Kumerički, K. Najnovija mjerenja kozmičkog pozadinskog zračenja // Matematičko-fizički list, LXIII, str. 250-255.
- [11] Gaia DR2 primer <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/data-release-2>
- [12] Anderson, R. I., Eyer, L., Molawi, N. Cepheids in open clusters: an 8D all-sky census. // Royal Astronomical Society, 2012.

- [13] Madore, B. F., Freedman, W. L., Moak, S. A Method for Improving Galactic Cepheid Reddenings and Distances. // The Astrophysical Journal, 2017.
- [14] Bland, J. M., Altman, D. G. Statistical methods assessing agreement between two method of clinical measurement. // Lancet, 1986.
- [15] Cantat-Gaudin, T. et al. A Gaia DR2 view of the Open Cluster population in the Milky Way. // Astronomy & Astrophysics, 2018.
- [16] Groenewegen, M. A. T. The Cepheid period-luminosity-metallicity relation based on Gaia DR2 data. // Astronomy & Astrophysics, 2018.
- [17] Ripepi, V. et al. Reclassification of Cepheids in the Gaia Data Release 2 Period-luminosity and period-Wesenheit relations in the Gaia passbands. // Astronomy & Astrophysics, 2019.
- [18] Madore, B. F. The period-luminosity relation. IV. Intrinsic relations and reddening for the Large Magellanic cloud cepheids. // The astrophysical journal, 1982.
- [19] Gaia Archive <https://gea.esac.esa.int/archive/>
- [20] Planck and the cosmic microwave background [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Planck/Planck\\_and\\_the\\_cosmic\\_microwave\\_background](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_and_the_cosmic_microwave_background)
- [21] Listening for the Size of the Universe <http://www.astro.ucla.edu/~wright/BA0-cosmology.html>
- [22] Herrnstein, J. R. et al. A geometric distance to the galaxy NGC4258 from orbital motions in a nuclear gas disk. // Nature, 1999.
- [23] First ESA faint object camera science images the gravitational lens G2237 + 0305 <https://hubblesite.org/contents/news-releases/1990/news-1990-20.html>
- [24] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. // Astronomy & Astrophysics, 2020.