Geometrijske nejednakosti u općoj teoriji relativnosti

Picukarić, Mate

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Mate Picukarić

GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI U OPĆOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Mate Picukarić

Diplomski rad

Geometrijske nejednakosti u općoj teoriji relativnosti

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem se prijateljima i kolegama koje sam stekao kroz ovih pet godina, obitelji i bližnjima na podršci te svojem mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Smoliću na strpljenju, savjetima i prenesenom znanju prilikom izrade ovog rada i tijekom trajanja studija.

Sažetak

Kod Kerr-Newmanovog rješenja Einsteinove jednadžbe masa, angularni moment i naboj zadovoljavaju određene nejednakosti. Dotične nejednakosti usko su povezane s pretpostavkom kozmičke cenzure te ih je moguće primjeniti i na dinamičke crne rupe zbog čega je njihovo proučavanje toliko interesantno. Jedna od takvih nejednakosti je teorem o pozitivnosti mase. U ovom radu izložit ćemo Wittenov dokaz teorema o pozitivnosti mase i uvesti alate potrebne za njegovo razumijevanje. Osim toga, pobliže ćemo objasniti pojam geometrijskih nejednakosti, navesti primjere i motivaciju iza proučavanja takvih nejednakosti kao i suvremene rezultate te neriješene probleme.

Ključne riječi: opća teorija relativnosti, geometrijske nejednakosti, izoperimetrijska nejednakost, hipoteza kozmičke cenzure, energijski uvjeti, ADM masa, spinori, Wittenov dokaz

Geometric inequalities in general relativity

Abstract

In Kerr-Newman's solution of Einstein's equation, mass, angular momentum and charge satisfy certain inequalities. These inequalities are closly related with the cosmic censorship conjecture which makes them particularly interesting to study. One such inequality is the positive mass theorem. In this work we will study Witten's proof of the positive mass theorem and introduce tools required for it's understanding. We will also explain the meaning of geometric inequalities, present examples and motivation behind their studying, and list some current results and open problems in this subject.

Keywords: general relativity, geometric inequalities, isoperimetric inequality, cosmic censorship conjecture, energy conditions, ADM mass, spinors, Witten's proof

Sadržaj

1 Uvod

Glavni matematički alat opisa fizikalnih sustava su jednakosti. To nije ništa neobično jer nam jednakosti omogućuju povezivanje različitih konstrukcija te točno određivanje nepoznatih veličina. To je od velike koristi u teorijama u kojima je rješavanje pripadnih jednadžbi jednostavno. U kompliciranijim slučajevima korisne znaju biti i nejednakosti koje odražavaju svojstva nekih ograničenja. Primjer jedne takve nalazimo u kapacitorima:

$$Q < Q_0 \tag{1.0.1}$$

gdje je Q naboj na pločama kapacitora, a Q_0 vrijednost naboja izboja promatranog kapacitorskog sustava (ovisi o oblicima ploča, dielektriku između i slično). Naravno, ova nejednakost nije pretjerano komplicirana, ali nam daje uvid u fizikalna ograničenja sustava. Ako želimo postići konfiguraciju kapacitora tj. dvije suprotno nabijene ploče naboj na tim pločama mora biti manji od Q_0. U suprotnom, desit će se izboj što će takvu konfiguraciju učiniti neodrživom. Dakle, izbor relevantnih parametara koji opisuju sustav nije potpuno proizvoljan, već mora poštovati neke nejednakosti. Sličnu situaciju susrećemo u općoj teoriji relativnosti (OTR u nastavku) gdje fizikalni parametri crnih rupa nisu potpuno proizvoljni, već neke nejednakosti moraju biti zadovoljene kako bi se formirala crna rupa. Razlika između OTR-a i primjera je u tom što je nejednakost (1.0.1) čisto restriktivne prirode, dok interesantne nejednakosti OTR-a posjeduju i instruktivni karakter. Iz tog razloga navodimo sljedeći primjer.

1.1 Izoperimetrijska nejednakost

Teorem 1.1. *Neka je S omeđen podskup od $\mathbb{R}^n$ površine $per(S)$ i volumena $vol(S)$. Tada vrijedi:*

$$per(S) \geq n\, vol(S)^{\frac{n-1}{n}} vol(B_1)^{\frac{1}{n}} \tag{1.1.1}$$

gdje je $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ jedinična kugla. Jednakost vrijedi kada je S kugla u $\mathbb{R}^n$.

U $\mathbb{R}^2$ ova nejednakost nam kaže da ako je C neka glatka Jordanova krivulja duljine L, koja omeđuje dio površine A vrijedi:

$$L^2 \geq 4\pi A \tag{1.1.2}$$

gdje je nejednakost zadovoljena ako je krivulja kružnica. Interesantno je koliko je kod ove nejednakosti specifičan granični slučaj. Osim što vrijedi za bilo koju krivulju, kod zadovoljene jednakosti točno određuje geometriju krivulje. Zbog toga (1.1.2) spada u klasu tvrdnji koje se zovu geometrijske nejednakosti. Kako je OTR geometrijska teorija, a fizikalni parametri crnih rupa definirani su geometrijski, za očekivati je da će nejednakosti s kojima se susretnemo prirodno upadati u istu kategoriju.

Dokaz koji ćemo prezentirati napravio je Hurwitz 1902. godine.

Dokaz. Neka je krivulja C parametrizirana tako da $t \longmapsto (x(t), y(t))$ "prijeđe" preko C konstantnom brzinom u "vremenu" 2π. To povlači:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = L \tag{1.1.3}$$

Zbog toga što je brzina konstantna:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = const. \Rightarrow \text{(1.1.3)} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \int_0^{2\pi} dt = L \tag{1.1.4}$$

iz čega vidimo da je $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$. Kako su x i y periodične funkcije, možemo ih razviti u Fourierov red:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-n\, a_n \sin(nt) + n\, b_n \cos(nt)) \\ y(t) &= \tfrac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos(nt) + b_n' \sin(nt)) \\ \Rightarrow \dot{y}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-n\, a_n' \sin(nt) + n\, b_n' \cos(nt)) \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Ako je C pozitivno orijentirana, površina A iznosi:

$$\begin{aligned} A &= -\int y dx = -\int_0^{2\pi} y\dot{x}\, dt = -\pi \langle y, \dot{x} \rangle = \\ &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-n\, a_n b_n' + n\, b_n a_n') = \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n b_n' - \; b_n a_n') \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Duljina krivulje tj. opseg površine zbog konstantnosti brzine iznosi:

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\right)^2 \\ &= \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^{\,2} \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt\right)^2 \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \dot{x}^2+\dot{y}^2\,dt \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+a'^2_n+b'^2_n) \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Koristeći (1.1.6) i (1.1.7) dobivamo:

$$\begin{aligned} & L^2 - 4\pi A = \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2(a_n^2+b_n^2+a'^2_n+b'^2_n) - 2n(\,a_n b'_n -\, b_n a'_n)\right] \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - b'_n)^2 + (nb_n + a'_n)^2 + (n^2-1)(a'^2_n + b'^2_n)] \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Očito je da je gornji izraz veći ili jednak nula. Jednakost je zadovoljena ako vrijedi:

$$na_n - b_n{}' = 0 \tag{1.1.9}$$

$$nb_n + a_n{}' = 0 \tag{1.1.10}$$

$$a_n{}' = 0 \tag{1.1.11}$$

$$b_n{}' = 0 \tag{1.1.12}$$

gdje jednadžbe (1.1.11) i (1.1.12) vrijede za $n > 1$. Za $n > 1$ stoga trivijalno vrijedi $a_n = b_n = a_n{}' = b_n{}' = 0$. Za $n = 1$ s druge strane imamo:

$$1 \cdot a_1 - b_1{}' = 0 \tag{1.1.13}$$

$$1 \cdot b_1 - a_1{}' = 0 \tag{1.1.14}$$

iz čega slijedi $b_1{}' = a_1$ te $a_1{}' = b_1$. Konačno rješenje stoga je:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{a_0}{2} + a_1\,\cos(t) + b_1\,\sin(t) \\ y(t) &= \tfrac{a_0{}'}{2} - b_1\,\cos(t) + a_1\,\sin(t) \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

što odgovara kružnici. Time smo dokazali izoperimetrijsku nejednakost za $\mathbb{R}^2$ slučaj.

□

1.2 *Kosa crnih rupa i kozmička cenzura*

U ovom poglavlju navodimo dvije ozbiljne hipoteze manje ozbiljnog naziva. Te hipoteze odigrat će bitnu ulogu u daljnjim razmatranjima dijelom kao temeljna pretpostavka, a dijelom kao podupiruće činjenice. **Hipoteza o ne postojanju kose crnih rupa** jedna je od motivacija koja stoji iza razmatranja geometrijskih nejednakosti u kontekstu OTR-a. Ovdje ćemo se samo dotaknuti njezinih glavni ideja, a za više detalja referiramo se na [4]. Ona kaže da je kranje stanje gravitacijskog kolapsa koji rješava Einstein-Maxwellove jednadžbe u potpunosti opisano klasičnim parametrima: masom, angularnim momentom te nabojem. S time na umu, nejednakosti koje bi se između tih parametara javile povezivale bi relevantne parametre za opis gravitacijskog kolapsa te time dale restrikcije na geometriju prostorvremena. Naravno, hipoteza o nepostojanju kose još uvijek je hipoteza u formalnom smislu. Nije dokazana za općeniti slučaj gravitacijskog kolapsa, iako je potvrđena za sve nama značajne slučajeve u obliku tzv. "no-hair" teorema za stacionarne crne rupe.

S druge strane **hipoteza o kozmičkoj cenzuri** govori nam o stukturi krajnjeg produkta gravitacijskog kolapsa. Gravitacijski kolaps nerijetko rezultira singularitetom. Pojednostavljeno, singularitet je točka u prostorvremenu u kojoj se pretpostavlja da je gravitacijska privlačnost beskonačna. Kako ne poznajemo fiziku u singularitetu (zbog toga što su to singularne točke u rješenjima Einsteinove jednadžbe) ne možemo odrediti što bi se desilo s promatračem (tijelom) koji bi do njega došao. Postojanje točke koju promatrač može doseći u kojoj se ne može predvidjeti njegova sudbina narušilo bi determinizam OTR-a. Zbog toga je Roger Penrose 1969. formulirao pojam kozmičke cenzure koji kaže da u svemiru ne postoje "goli" singulariteti tj. da je svaki singularitet sakriven iza horizonta događaja. Horizont događaja je ploha koja okružuje ("cenzurira") singularitet, koja, ako se prijeđe (tako da uđemo u nju), ne dopušta povratak natrag u ostali dio svemira. Horizonti događaja se prirodno javljaju u mnogim rješenjima Einsteinove jednadžbe. Time je determinizam OTR-a spašen činjenicom da je promatrač koji dosegne singularitet već u području iz kojeg nema povratka, tj. teorija je potpuno deterministička za područje van horizonta dok je nepoznato područje sakriveno iza horizonta te bez obzira na događaje unutar horizonta i ponašanje singulariteta ne može utjecati na ostatak "relevantnog" svemira. Kako bismo približili taj koncept, zamislimo da se nalazimo na nekom velikom trgu s mnoštvom ljudi i da posjedujemo čarobnu knjigu koja nam govori što su svi ti ljudi na trgu radili u prošlosti i što će raditi u budućnosti. S obzirom da možemo predvidjeti ponašanje svih ljudi na trgu, znamo kako će izgledati trg u svakom trenutku u vremenu. Tako izgleda deterministička teorija. Zamislimo sada da se na trgu pojavi jedna osoba koja nije upisana u knjigu (singularitet u kojemu ne znamo zakone fizike). Ta osoba nam ne predstavlja sama po sebi problem, ali ako slučajno dođe u dodir s osobom koja je zapisana u knjizi ne možemo više vjerovati zapisanim predviđanjima jer ne znamo kako je izgledala interakcija zapisane i nezapisane osobe. Takva situacija značila bi narušenje determinizma što je u analogiji s tijelom u prostorvremenu koje dolazi u kontakt sa singularitetom. Način na koji kozmička cenzura rješava taj problem je sljedeći: Zamislimo da je nepredviva osoba zatvorena u Toi-Toi koji je postavljen na istom tom trgu. Radi se o specifičnom novom modelu prijenosnih WC-a koji su savršeno izolirani tako da se iz njih ništa ne čuje van, uz dodatnu funkciju da ljudima ne omogućuju da iziđu iz WC-a ako u njega uđu. Što to znači za determinizam naše knjige? S obzirom da je nepredvidiva osoba zatočena u prijenosnom WC-u ne može međudjelovati s ljudima koji su izvan njega pa je determinizam van WC-a očuvan. S druge strane, ljudi koji stupe u kontakt s nepredvidivom osobom su oni koji uđu u Toi-Toi, ali, po konstrukciji te moderne naprave, ne mogu više izići pa ne predstavljaju opasnost za determinizam van njega. Tako Toi-Toi čuva determinizam u ostatku trga na isti način na koji i horizont događaja čuva determinizam u ostatku prostorvremena.

1.3 Schwarzschildovo rješenje

Einsteinova jednadžba za opću teoriju relativnosti glasi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.3.1}$$

Ona povezuje geometrijska svojstva prostorvremena s lijeve strane jednadžbe sa sadržajem prostorvremena s desne. Tako se s lijeve strane nalaze Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$ i Riccijev skalar R koji nose informaciju o zakrivljenosti prostorvremena, a s desne tenzor $T_{\mu\nu}$ koji nosi informaciju o sadržaju energije i impulsa i gravitacijska konstanta G. Znamo da je Riccijev tenzor dobiven kontrakcijom Riemannovog tenzora, preciznije:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{1.3.2}$$

dok je Riccijev skalar dobiven kontrakcijom Riccijevog tenzora:

$$R = R^{\lambda}{}_{\lambda} \tag{1.3.3}$$

Kako je Riemannov tenzor dan preko derivacija Christoffelovih simbola:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \tag{1.3.4}$$

gdje su Christoffelovi simboli definirani kao:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}}\right) \tag{1.3.5}$$

možemo vidjeti da se radi o sustavu vezanih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Einsteinovu jednadžbu je stoga iznimno netrivijalno riješiti. Dapače, postoji tek nekolicina rješenja ove jednadžbe.

Napomena: *Pod "rješenje jednadžbe" misli se pronaći metriku $g_{\mu\nu}$ (nekada oznake ds^2) koja će za neku zadanu raspodjelu energije u prostorvremenu $T_{\mu\nu}$ zadovoljavati jednadžbu* (1.3.1) *i adekvatne rubne uvjete.*

Najjednostavniji primjer rješenja je ono za sfernosimetrični (u prostornom smislu) prostorvremenski vakuum, također poznato i kao Schwarzschildovo rješenje:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega \tag{1.3.6}$$

gdje je $d\Omega^2$ standardna metrika na jediničnoj 2-sferi:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.3.7}$$

Birkhoffov teorem kaže nam da je Schwarzschildovo rješenje ujedno i jedinstveno sfernosimetrično vakuumsko rješenje. S obzirom da je jedini parametar koji opisuje ovakvo rješenje M, kojeg ćemo kasnije definirati kao masu, Birkhoffov teorem također spada u klasu "no-hair" teorema.

Primjetimo da u $r = 0$ i $r = 2GM =: R_s$ komponente metrike divergiraju. S obzirom da su komponente metrike koordinatno ovisne, moguće je da ćemo divergenciju moći otkloniti promjenom koordinatnog sustava ako ona nije koordinatno neovisna tj. topološka. To je moguće učiniti za $r = 2GM$ koji se još zove Schwarzschildov radijus korištenjem regularnih koordinata kao što su Kruskalove ili Eddington-Finkelsteinove, ali nije moguće za $r = 0$. Točka $r = 0$ je singularitet, a 2-sfera $r = 2GM$ točno horizont događaja o kojima smo pričali u poglavlju 1.2 što karakterizira crnu rupu. Tako je, sukladno s hipotezom o kozmičkoj cenzuri, singularitet sakriven iza horizonta događaja. Za više detalja o izvodu horizonta i geodezicima (putanjama) u Schwarzschildovom rješenju upućujemo u [5].

1.4 Parametri

S obzirom da smo u poglavlju 1.2 rekli kako su rješenja stacionarnih crnih rupa karakterizirana masom, angularnim momentom i nabojem, valjalo bi ih definirati prije nastavka diskusije. Ideja je da pronađemo kvazilokalne veličine koje su globalno očuvane i poklapaju se s parametrima koji karakteriziraju nadolazeća rješenja.

Sve ove veličine bit će zadane integralom nekog polja po prostornoj hiperplohi. Prostornu hiperplohu možemo zamisliti kao jedan "trenutak" prostorvremena za neku definiranu vremensku koordinatu. Dobru definiranost takve koordinate osigurava nam stacionarnost rješenja. Kako bismo definirali naboj krenut ćemo od od tenzora jakosti elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$. Maxwellove jednadžbe u kovarijantnom obliku govore nam da je četverovektor struje naboja:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J_e^\mu \tag{1.4.1}$$

Naboj koji prolazi tada kroz neku prostornu hiperplohu (sve točke na njoj povezane su prostornim putevima) dan je integralom po koordinatama x^i na hiperplohi:

$$Q = -\int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\, n_\mu J_e^\mu \tag{1.4.2}$$

gdje je h_{ij} inducirana metrika na hiperplohi, a n_μ vektor normale na hiperplohu. Koristeći (1.4.1) možemo pisati:

$$Q = -\int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\, n_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} \tag{1.4.3}$$

pa uz korištenje Stokesovog teorema dobivamo integral po rubu od Σ:

$$Q = -\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{h^{(2)}}\, n_\mu \sigma_\nu F^{\mu\nu} \tag{1.4.4}$$

gdje je $h^{(2)}_{ij}$ inducirana metrika na $\partial\Sigma$, a σ_ν pripadni vektor normale.

Energiju tj.masu definiramo novom strujom koristeći vremenski Killingov vektor K^μ:

$$J^\mu_R = K_\nu R^{\mu\nu} \tag{1.4.5}$$

gdje je $R^{\mu\nu}$ Riccijev tenzor. Ova struje može se napisati [5] kao:

$$J^\mu_R = \nabla_\nu(\nabla^\mu K^\nu) \tag{1.4.6}$$

pa se onda ukupna energija, definirana kao:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\, n_\mu J^\mu_R \tag{1.4.7}$$

može korištenjem (1.4.6) i Stokesovog teorema zapisati kao:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{h^{(2)}}\, n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu \tag{1.4.8}$$

U potpunoj analogiji sa slučajem energije/mase možemo definirati angularni moment. Zamislimo da imamo rotacijski Killingov vektor $R = \partial_\phi$. Tada u analogiji s (1.4.5) možemo definirati struju:

$$J^\mu_\phi = R_\nu R^{\mu\nu} \tag{1.4.9}$$

te je u analogiji s (1.4.8) (uz adekvatne popravke konstanti) konačni angularni moment:

$$J = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{h^{(2)}}\, n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu R^\nu \tag{1.4.10}$$

Korisno je definirati još jednu kvazilokalnu veličinu, a to je površina horizonta crne rupe A. Ona je definirana kao:

$$A = \int_H \sqrt{h^{(2)}} d^2x \tag{1.4.11}$$

gdje je $h_{ij}^{(2)}$ inducirana metrika na horizontu, a x^i pripadne koordinate. Za Schwarzschildovu crnu rupu, primjerice, površina A iznosi $A = 4\pi(2GM)^2$ što je i očekivano zbog sferne simetrije.

1.5 Energijski uvjeti

Jesu li u klasičnoj fizici sve trajektorije predmeta dopuštene? Zamislimo na trenutak lopticu negativne mase koja se giba po pravcu na koju djelujemo konstantnom silom F. Drugi Newtonov zakon govori nam da je $F = ma$ pa bi naša loptica ubrzavala u smjeru suprotnom od smjera sile koja na nju djeluje. Iako zadovoljavaju jednadžbe gibanja, ovakve trajektorije smatraju se nefizikalnima i odbacuju se uz obrazloženje da je $m \geq 0$. Energijski uvjeti su koordinatno invarijantne restrikcije na tenzor energije i impulsa koje funkcioniraju na sličan način kao gorespomenuta restrikcija na masu. Može li svaka metrika zadovoljavati Einsteinovu jednadžbu slično je pitanje kao pitanje trajektorija. Za svaku metriku možemo konstruirati Einsteinov tenzor $G_{\mu\nu}$ i zahtjevati da mu je $T_{\mu\nu}$ jednak. Nama je u interesu, na fizikalno razuman način, postaviti ograničenja na $T_{\mu\nu}$.

Korisno je razmišljati o slučaju idealnog fluida kao izvora. Za takav sustav tenzor energije i impulsa glasi:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{1.5.1}$$

To nam omogućuje intuitivnije sagledavanje restrikcija u terminima gustoće energije ρ i tlaka p. U^μ je četverovektor brzine normaliziran na $U^\mu U_\mu = -1$.

1. **Slabi energijski uvjet** (*Weak Energy Condition, WEC*)
   Za svaki vremenski vektor t^μ vrijedi:

   $$T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0 \tag{1.5.2}$$

   (1.5.2) implicira $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0$ jer je U^μ vremenski vektor te $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ za neki svjetlosni vektor. Kako bismo dokazali da druga tvrdnja vrijedi, pokažimo prvo da je suma vremenskog i svjetlosnog vektora opet vremenski vektor. Neka je $A = (a, ra)$ vektor vremenskog tipa gdje a označava vremenski, a ra prostorni dio vektora. Također, neka je $B = (b, qb)$ svjetlosni vektor gdje b označava vremenski, a qb prostorni dio vektora. Vrijedi $-a^2 + r^2a^2 < 0 \to 1 - r^2 > 0$

te $-b^2 + q^2b^2 = 0 \rightarrow 1 - q^2 = 0$. Ako pokušamo izračunati normu vektora $A + B = (a + b, ra + qb)$ dobivamo

$$-(a+b)^2 + (ra+qb)^2 = -a^2 - 2ab - b^2 + r^2a^2 + q^2b^2 + 2raqb$$

Zbog toga što je $-a^2 + r^2a^2 < 0$ te $-b^2 + q^2b^2 = 0$ slijedi

$$\begin{aligned} & -a^2 - 2ab - b^2 + r^2a^2 + q^2b^2 + 2raqb \leq -2ab + 2raqb \leq \\ & \leq -ab + raqb = -ab(1 - qb) \end{aligned}$$

Kako znamo da $q = \pm 1$ te $|r| < 1$ slijedi da je $A + B$ negativne norme tj. vremenskog tipa za dva vektora istog vremenskog usmjerenja ($a, b > 0$ ili $a, b < 0$). Stoga možemo konstruirati vremenski vektor $x^\mu = t^\mu + l^\mu$ koji po WEC također zadovoljava $T_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \geq 0$. To možemo napisati kao

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(t^\mu + l^\mu)(t^\nu + l^\nu) = \\ T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu + T_{\mu\nu}t^\mu l^\nu + T_{\mu\nu}l^\mu t^\nu = \\ T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu + 2T_{\mu\nu}t^\mu l^\nu + \geq 0 \end{aligned}$$

Ako ponovimo isto s vektorom $y^\mu = t^\mu - l^\mu$ dobivamo:

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu - 2T_{\mu\nu}t^\mu l^\nu \geq 0$$

pa zbrajanjem dviju nejednakosti dobivamo

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$$

S obzirom da komponente t^μ možemo učiniti proizvoljno malima slijedi da je $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$. U terminima idealnog fluida, spomenute kontrakcije iznose:

$$T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \rho, \quad T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = (\rho + p)(U_\mu l^\mu)^2 \tag{1.5.3}$$

pa nejednakosti prelaze u $\rho \geq 0$ i $\rho + p \geq 0$. Fizikalni argumenti iza ovih zahtjeva su potpuno razumljivi. WEC zahtjeva da gustoća energije bude nenegativna i da tlak ne bude prevelik u usporedbi s gustoćom energije.

2. **Svjetlosni energijski uvjet** (*Null Energy Condition, NEC*)

   Za svaki svjetlosni vektor l^μ vrijedi:

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \geq 0 \tag{1.5.4}$$

   Jasno je da WEC povlači NEC. U terminima idealnog fluida, $\rho + p \geq 0$ tj. gustoća energije može biti negativna uz uvjet da postoji dovoljan kompenzirajući pozitivni tlak.

3. **Dominantni energijski uvjet** (*Dominant Energy Condition, DEC*)

   Za svako kauzalno (vremensko ili svjetlosno) vektorsko polje c^μ usmjereno prema budućnosti, vektorsko polje $-T^{\mu\nu} c_\mu$ je također kauzalno i usmjereno prema budućnosti.

   Lako pokažemo da to implicira WEC. Neka su A i B kauzalni vektori definirani kao iznad. Znamo da vrijedi $-a^2 + a^2 r^2 \leq 0$ te $-b^2 + b^2 q^2 \leq 0$ pa za produkt vektora vrijedi $AB = -ab + abqr = -ab(1 - qr)$, a kako su $|r|, |q| \leq 0$ vrijedi da je $AB \leq 0$ ako su istog i $AB \geq 0$ ako su vektori različitog vremenskog usmjerenja. Stoga za produkt dva kauzalna vektora istog usmjerenja t^μ i $T^{\mu\nu} t_\mu$ vrijedi $-T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \leq 0$ tj. $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ po prethodnom razmatranju. Za gustoću energije i tlak to jasno povlači $\rho \geq 0$ i $\rho + p \geq 0$, ali i dodatan uvjet $\rho \geq |p|$. U to se možemo uvjeriti ako zapišemo uvjet za DEC kao $T^{\mu\nu} c_\mu T^\nu{}_\lambda c^\lambda \leq 0$ što vrijedi jer znamo da je $T^{\mu\nu} c_\mu$ kauzalno polje. Uvrštavanjem (1.5.1) u prethodnu nejednakost dobivamo:

$$\begin{aligned}
&[(\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}][(\rho + p) U^\nu U_\lambda + p g^\nu{}_\lambda] c^\mu c^\lambda = \\
&= (\rho + p)^2 U_\mu U_\nu U^\nu U_\lambda c^\mu c^\lambda + p(\rho + p) U_\mu U_\nu g^\nu{}_\lambda c^\mu c^\lambda + \\
&+ p(\rho + p) g_{\mu\nu} U^\nu U_\lambda c^\mu c^\lambda + p^2 g_{\mu\nu} g^\nu{}_\lambda c^\mu c^\lambda \leq 0
\end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $U_\mu U^\mu = -1$ dobivamo:

$$(U^\mu c^\mu)^2[-(\rho+p)^2 + 2p(\rho+p)] + p^2 c_\mu c^\mu \leq 0$$
$$(U^\mu c^\mu)^2[-\rho^2 - p^2 - 2\rho p + 2p\rho + 2p^2] + p^2 c_\mu c^\mu \leq 0$$
$$(U^\mu c^\mu)^2[p^2 - \rho^2] + p^2 c_\mu c^\mu \leq 0$$

Ako uvrstimo svjetlosni vektor kao c^μ (vrijedi $c_\mu c^\mu = 0$) imamo:

$$(U^\mu c^\mu)^2[p^2 - \rho^2] \leq 0 \tag{1.5.5}$$
$$p^2 - \rho^2 \leq 0 \tag{1.5.6}$$
$$p^2 \leq \rho^2 / \sqrt{} \tag{1.5.7}$$
$$|p| \leq |\rho| \tag{1.5.8}$$

a kako od prije znamo da je $\rho \geq 0$ slijedi tvrdnja $\rho \geq |p|$.

4. **Svjetlosni dominantni energijski uvjet** (*Null Dominant Energy Condition, NDEC*)
Za svako svjetlosno vektorsko polje l^μ usmjereno prema budućnosti, vektorsko polje $T^{\mu\nu}l_\mu$ je kauzalno i usmjereno prema budućnosti.

Jasno je da NDEC nije ništa drugo nego DEC ograničen na svjetlosne vektore. S obzirom da se bavimo samo kontrakcijama sa svjetlosnim vektorima, još uvijek vrijedi $\rho + p \geq 0$ kao i predzadnji korak u računu za DEC: $|p| \leq |\rho|$. U slučaju $\rho \geq 0$ imamo isti izraz kao i u DEC $\rho \geq |p|$. S druge strane NDEC ne isključuje postojanje negativne gustoće energije (jer je, prisjetimo se, taj uvjet dobiven kontrakcijama s vremenskim vektorima), ali nameće uvjet $p = -\rho$. To dobivamo kombiniranjem gornje dvije nejednakosti; ako vrijedi $\rho + p \geq 0$, a vrijedi i $|\rho| \geq |p|$ jedini način da gornja nejednakost bude zadovoljena u slučaju negativnog ρ je da $|\rho| = |p|$, tj. $p = -\rho$.

5. **Jaki energijski uvjet** (*Weak Energy Condition, SEC*)
Za svaki vremenski vektor t^μ vrijedi

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2} T^\mu{}_\nu t^\sigma t_\sigma \tag{1.5.9}$$

Iako se gornji uvjet na prvi pogled čini dosta proizvoljan, njegov izvor je zapravo posve logičan. Ako pogledamo izraz za gustoću zakrivljenosti koju mjeri neki promatrač s četvero-brzinom t^μ dobivamo $R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu$. Riccijev tenzor možemo drugačije zapisati koristeći Einsteinovu jednadžbu $R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ (uz $G, c = 1$) pa dobivamo:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu &= (8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \\ &= 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_\lambda{}^\lambda g_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \\ &= 8\pi(T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + \frac{1}{2}T_\lambda{}^\lambda) \end{aligned}$$

gdje smo u drugom redu iskoristili relaciju $R = -8\pi T_\lambda{}^\lambda$ dobivenu kontrakcijom Einsteinove jednadžbe, a u trećem činjenicu da je četverobrzina normalizirana na $t^\mu t_\mu = -1$. Vidimo stoga da je SEC ekvivalentan zahtjevu da je lokalna gustoća zakrivljenosti pozitivna. U jeziku idealnog fluida to je ekvivalentno ne previše instruktivnim nejednakostima $\rho + p \geq 0$ te $\rho + 3p \geq 0$ koje ćemo izvesti konzistentnosti radi. Ako uvrstimo $t^\mu = U^\mu$ s lijeve nejednakosti (1.5.9) dobivamo, isto kao (1.5.3), $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \rho$ dok s desne strane imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T^\lambda{}_\lambda U^\sigma U_\sigma &= \frac{1}{2}[(p+\rho)U^\lambda U_\lambda + pg^\lambda{}_\lambda] \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{2}(-p - \rho + 4p) \\ &= -\frac{1}{2}(3p - \rho) \end{aligned}$$

što u kombinaciji daje $\rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \geq 0$, tj., nakon malo sređivanja, $\rho + 3p \geq 0$. Do druge nejednakosti dolazimo ako uvrstimo općeniti vremenski vektor t^μ i iskoristimo prehodno dokazanu nejednakost:

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = (\rho + p)(U^\mu t_\mu)^2 + pt^\mu t_\mu \geq \frac{1}{2}T^\mu{}_\nu t^\sigma t_\sigma = \frac{1}{2}(3p - \rho)t^\sigma t_\sigma \geq \frac{1}{2}(-\rho - \rho) = -\rho$$

Ovo je ekvivalentno uvjetu

$$((U^\mu t_\mu)^2 + t^\mu t_\mu)(p + \rho) \geq 0 \tag{1.5.10}$$

Može se pokazati da je predfaktor uvijek nenegativan. Uzmimo kao primjer

$(1,1)$ prostor u kojem je $U^\mu = (a,b), \quad -a^2+b^2=-1$ te $t^\mu = (cx, cy), -c^2x^2 + c^2y^2 \leq 0$. Tada je $U^\mu t_\mu = -acx + bcy$ pa možemo izračunati predfaktor:

$$\begin{aligned}
(U^\mu t_\mu)^2 + t^\mu t_\mu &= (-acx+bcy)^2 + -c^2x^2 + c^2y^2 \\
&\sim (-ax+by)^2 + -x^2 + y^2 \\
&= a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy - x^2 + y^2 \\
&= x^2(a^2-1) + y^2(b^2+1) - 2abxy \\
&= x^2b^2 + y^2a^2 - 2abxy \\
&= (xb+ya)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjem redu iskoristili relaciju $-a^2+b^2=-1$. Poopćenje na više dimenzija slijedi analogno. Stoga, s obzirom da je predfaktor u nejednakosti (1.5.10) nenegativan, slijedi $p+\rho \geq 0$.

2 Nejednakosti

2.1 Kerr-Newmanove crne rupe

Za razliku od Schwarzschildovog rješenja Einsteinove jednadžbe koje je sfernosimetrično, Kerr-Newmanovo rješenje opisuje rotirajuću nabijenu crnu rupu. Mi ćemo se u ovom poglavlju zbog jednostavnosti zapisa zadržati na Kerrovom rješenju koje opisuje nenabijenu rotirajuću crnu rupu jer se za naše potrebe ne razlikuje previše od nabijenog poopćenja. Kerrova metrika u Boyer-Linquistovim koordinatama dana je s:

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1 - \tfrac{2MG}{\rho^2}\right) dt^2 - \tfrac{2GMar\sin^2\theta}{\rho^2}(dtd\theta + d\theta dt) \\ +\tfrac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \tfrac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right] d\phi^2 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

gdje su Δ i ρ pokrate za:

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \tag{2.1.2}$$

$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{2.1.3}$$

Ovdje je $a = J/M$ gdje su J i M točno parametri definirani jednadžbama (1.4.8) i (1.4.10). U Kerr-Newmanovo rješenje koje uključuje električni naboj Q i magnetski naboj P (jdb. (1.4.3) uz $F^{\mu\nu} \to *F^{\mu\nu}$) jednostavno prelazimo zamjenom $GMr \to 2GMr - G(Q^2 + P^2)$.

Kako bismo pronašli horizonte ovakve crne rupe moramo tražiti točke za koje je $g^{rr} = 0$. Vrijedi $g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}$ (zbog podizanja indeksa člana uz dr^2 iz (2.1.1)), a iz (2.1.3) znamo da je $\rho \geq 0$ pa zaključujemo da je $g^{rr} = 0$ kada:

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 = 0 \tag{2.1.4}$$

To nas dovodi do kvadratne jednadže u r koju moramo riješiti kako bismo pronašli položaje horizonta. Rješenja jednadžbe (2.1.4) su:

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} \tag{2.1.5}$$

Očito broj horizonata u opisanoj crnoj rupi ovisi o iznosu diskriminante u jednadžbi (2.1.4). Ako vrijedi $G^2M^2 > a^2$ imat ćemo dva horizonta dok ćemo za $G^2M^2 = a^2$

imati samo jedan. Crna rupa koja zadovoljava (2.1.1) i ima dva horizonta zove se Kerrova crna rupa, dok je ona s jednim horizontom ekstremalna Kerrova. Interesantno je pogledati slučaj kada:

$$G^2M^2 < a^2 \tag{2.1.6}$$

Ako je ta nejednakost zadovoljena, jednadžba (2.1.4) neće imati realnih rješenja tj. imat ćemo singularitet bez horizonta, a takvu smo mogućnost već odbacili u poglavlju 1.2. Iz tog se razloga zadnji slučaj odbacuje kao nefizikalan. Kako je $a = J/M$ slijedi da fizikalno rješenje mora zadovoljavati:

$$M \geq \sqrt{\frac{|J|}{G}} \text{ (=Ekstremalna Kerrova c.r.)} \tag{2.1.7}$$

Valja uočiti usku povezanost nejednakosti (2.1.7) s hipotezom kozmičke cenzure. Argument kozmičke cenzure koristio nam je kako bismo odbacili slučaj (2.1.6) kao nefizikalan što nas je i dovelo do ovog ograničenja. Ako još primjetimo da smo veličine M i J definirali potpuno geometrijski (u (1.4.10) i (1.4.8) koriste se samo Killingovi vektori i Riccijev tenzor što su sve svojstva geometrije prostora povezana s fizikalnim preko Einsteinove jednadžbe) možemo reći da smo slično kao u (1.1.2) došli do nejednakosti koja stavlja neka ograničenja na geometriju prostorvremena i ju opisuje u slučaju jednakosti — točnije, do prve relevantne geometrijske nejednakosti.

2.2 Geometrijske nejednakosti

Većina diskusije u ovom tekstu preuzeta je iz [7] i [8] zbog čega na njih upućujemo za više detalja. U nastavku ćemo raditi s konvencijom $G, c = 1$.

U prethodnom poglavlju susreli smo se s nejednakosti

$$M \geq \sqrt{|J|} \text{ (=Ekstremalna Kerrova c.r.)} \tag{2.2.1}$$

Za Kerrovu crnu rupu, koristeći jednadžbu (1.4.11), može se izračunati površina horizonta koja iznosi:

$$A = 8\pi \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^4} \right) \tag{2.2.2}$$

Iz toga je lako iščitati još jednu nejednakost:

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq M \text{ (=Swarzschild)} \tag{2.2.3}$$

pri čemu se koristimo činjenicom da Kerrovo rješenje teži u Schwarzschildovo za $J = 0$. Ako još kvadriramo (2.2.1) i upotrijebimo (2.2.2) dobit ćemo:

$$8\pi|J| \overset{(2.2.1)}{\leq} 8\pi M^2 \overset{(2.2.2)}{=} A - 8\pi\sqrt{M^4 - J^2} \leq A \tag{2.2.4}$$

gdje jednakost vrijedi u slučaju ekstremalne Kerrove crne rupe. Tako smo koristeći samo (2.2.1) i (2.2.2) dobili nejednakosti:

$$\sqrt{|J|} \leq M \text{ (=Ekstremalna Kerrova c.r.)} \tag{2.2.5}$$

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq M \text{ (=Schwarzschild)} \tag{2.2.6}$$

$$8\pi|J| \leq A \text{ (=Ekstremalna Kerrova c.r.)} \tag{2.2.7}$$

Ove nejednakosti interesantne su zbog toga što vrijede i u općenitijim slučajevima gravitacijskog kolapsa. Penrose je, primjerice, u svom poznatom članku [2] predložio fizikalne argumente koji povezuju globalna svojstva gravitacijskog kolapsa s geometrijskim nejednakostima na početne uvjete. Ti su argumenti doveli do poznate Penroseove nejednakosti (2.2.5) bez nametanja zahtjeva na simetrije prostorvremena! U nastavku ćemo sagledati njegove argumente uz pojednostavljenje kroz dva zahtjeva: osnu simetriju te pretpostavku da vrijedi (2.2.7). Za nastavak diskuje treba spomenuti Hawkingov teorem o površini crnih rupa. Ovdje ćemo ga navesti bez dokaza, a za više detalja referiramo se na [6]

Teorem 2.1. (Hawking, 1973. [19])
Uz slabi energijski uvjet i kozmičku cenzuru, površina horizonta događaja budućnosti u asimptotski ravnom prostorvremenu je nepadajuća

Bez previše ulazaka u detalje, ovaj teorem (uz neke tehničke pretpostavke) govori nam da površina horizonta nikada ne opada. Tehničke pretpostavke će, naravno, biti zadovoljene u slučaju koji razmatramo. Koristeći (2.2.2) možemo za dinamičke crne rupe kvazilokalno definirati masu. Ne koristimo se formulom (1.4.8) jer za dinamičke crne rupe ne postoji nužno vremenski Killingov vektor koji bi nam omogućio njezino korištenje. Tako je novodefinirana masa M_{bh} dana s:

$$M_{bh} = \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}} \tag{2.2.8}$$

Pretpostavit ćemo da sljedeće tvrdnje vrijede u gravitacijskom kolapsu:

1. Gravitacijski kolaps rezultira u crnom rupom (slaba kozmička cenzura).

2. Konačno stanje prostorvremena je stacionarno. Također, pretpostavit ćemo da je nakon nekog konačnog vremena sva materija upala u crnu rupu (prešla horizont događaja).

Teorem o jedinstvenosti crnih rupa kaže da je konačno stacionarno stanje koje se spominje u 1.2 dano točno Kerrovom crnom rupom (podsjetimo se da smo pretpostavili osnu simetriju).Neka su $M_0,\ J_0,$ i A_0 masa, angularni moment i površina konačne Kerrove crne rupe. Penroseov argument je sljedeći: uzmimo Cauchyjevu plohu Σ (ugrubo, kompletne "prostorne" početne uvjete u nekom trenutku) takvu da se gravitacijski kolaps već dogodio. Neka Φ označava presjek horizonta događaja s Σ te neka je A njegova površina. Neka su (M, J) ukupna masa i angularni moment u prostornoj beskonačnosti. Te veličine se sve mogu izračunati na plohi Σ. Prema teoremo o površini crne rupe početna površina može samo rasti tj.:

$$A_0 \geq A \tag{2.2.9}$$

Nadalje, s obzirom da gravitacijski valovi nose pozitivnu energiju [5], ukupna masa u prostorvremenu mora biti veća od konačne mase preostale crne rupe:

$$M \geq M_0 \tag{2.2.10}$$

U općenitom slučaju nije toliko jednostavno povezati J s konačnim J_0. Angularni moment generalno nije očuvan, ali u slučaju osne simetrije jest stoga vrijedi:

$$J = J_0 \tag{2.2.11}$$

Može se pokazati [7] da je nužno pretpostaviti (2.2.7) kako bi povećanje mase crne rupe pratilo povećanje njezine površine tj. $\delta A \geq 0 \rightarrow \delta M_{bh} \geq 0$. Prirodno je stoga bilo pretpostaviti da bi svaka osnosimetrična crna rupa trebala zadovoljavati (2.2.7). Postojanje crne rupe koja ne poštuje (2.2.7) ukazivala bi na to da M_{bh} definiran u (2.2.8) nema željeno fizikalno značenje. Stoga, s obzirom na pretpostavku, imamo povećanje mase crne rupe:

$$M_{bh} \leq M_0 \tag{2.2.12}$$

Koristeći (2.2.8), (2.2.10) i (2.2.12) imamo:

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}} = M_{bh} \leq M \tag{2.2.13}$$

Ova nejednadžba predstavlja poopćenje Penroseove nejednakosti na crne rupe s angularnim momentom. Također korištenjem (2.2.7) i prethodne jednadžbe dobivamo:

$$\sqrt{\tfrac{A}{16\pi} + \tfrac{4\pi J^2}{A}} \overset{(2.2.7)}{\geq} \sqrt{\tfrac{\cancel{8\pi}|J|}{\cancel{16}\pi_2} + \tfrac{\cancel{4\pi} J^{\cancel{2}}}{\cancel{8\pi}_2 \cancel{|J|}}} = \sqrt{|J|} \overset{(2.2.12)}{\leq} M \tag{2.2.14}$$

Iz svega ovoga možemo postaviti hipotezu:

Tri geometrijske nejednakosti (2.2.5)*,* (2.2.6) *i* (2.2.7) *koje vrijede za Kerrovu crnu rupu očekuje se da vrijede i za osnosimetričnu dinamičku crnu rupu.*

Penroseova nejednakost (2.2.6) vrijedi i bez zahtjeva osne simetrije. Primjetimo da bi protuprimjer nejednakosti (2.2.13) implicirao da kozmička cenzura ne vrijedi. S druge strane dokaz nejednakosti podupirao bi hipotezu kozmičke cenzure, s obzirom da je vrlo teško razumijeti zašto bi ova jako netrivijalna nejednakost vrijedila ako kozmička cenzura ne bi služila kao temeljno fizikalno obrazloženje.

3 Teoremi o pozitivnosti mase

Jedna od poznatijih geometrijskih nejednakosti ona je o pozitivnosti ukupne mase u prostorvremenu. Ona kaže da je za netrivijalni izolirani fizikalni sustav ukupna masa/energija, koja uključuje doprinose od materije i gravitacije, pozitivna. Dugo je postojala kao fizikalna hipoteza, a prvi je put dokazana 1979. godine. Dokaz su napravili Richard Schoen and Shing-Tung Yau koristeći varijacijske metode, a 1981. godine Edward Witten ponudio je svoju mnogo jednostavniju verziju dokaza koji koristi spinore kao glavni alat. U ovom poglavlju uvest ćemo spinore, a zatim se posvetiti Wittenovom dokazu PMT (*Positive Mass Theorem*). Koristit ćemo se $(+ - - -)$ signaturom kako bismo bili konzistentni s literaturom spinora.

3.1 Spinori

Unatoč naoko zastrašujućem nazivu, spinori su izgrađeni od vrlo jednostavnih i vrlo poznatih matematičkih struktura. Vektorski prostor S nad poljem kompleksnih brojeva zovemo **spinorski prostor** ako je dimenzije 2 i također opremljen simplektičkom strukturom. Simplektička struktura je nedegenerirana, bilinearna antisimetrična funkcija

$$[\,,\,] : S \times S \longrightarrow \mathbb{C}$$

Uređeni par $(S,[\,,\,])$ vektorskog prostora S i simplektičke strukture (ili forme zbog njezinih svojstava) zovemo simplektički prostor, pa je tako spinorski prostor jednostavno dvodimenzionalni simplektički prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Nedegeneriranost simplektičke strukture implicira da za svaki $\alpha \in S \neq 0$ postoji $\omega \in S$ takav da $[\alpha, \omega] \neq 0$.

Slično kovarijantnoj notaciji na koju smo se navikli, bitnu ulogu i ovdje odigrat će dualni prostori. Tako dualni spinorski prostor S^* definiramo kao skup svih linearnih funkcionala nad S tj. funkcija $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ takvih da za $\forall s, z \in S$ te $\forall a, b \in \mathbb{C}$ vrijedi $f(as+zb) = af(s)+bf(z)$. Također, kompleksno konjugirani spinorski prostor $\overline{S}^*$ definira se kao skup svih antilinernih funkcionala, tj. funkcija $\overline{f} \in \overline{S}^*$ koje zadovoljavaju $\overline{f}(as + bz) = a^*\overline{f}(s) + b^*\overline{f}(z)$ za $\forall s, z \in S$ te $\forall a, b \in \mathbb{C}$. Na poslijetku definiramo još i kompleksno konjugirani spinorski prostor $\overline{S}$ kao skup svih **linearnih** funkcionala na

dualnom spinorskom prostoru S^*. Moguće je definirati bijektivno preslikavanje:

$$\overline{\cdot} : S \longrightarrow \overline{S}$$

takvo da $s \in S$ i $\overline{s} \in \overline{S}$ zadovoljavaju $\psi(s) = \overline{s}(\psi)$ za $\forall \psi \in \overline{S}^*$. Primjetimo da se ovakva operacija ponaša kao obična kompleksna konjugacija. Pretpostavimo s i $\overline{s}$ zadovoljavaju $\psi(s) = \overline{s}(\psi)$ te da $\overline{as} = c\overline{s}$ za općeniti a i nepoznati $c \in \mathbb{C}$. Znamo da $\overline{as}$ i as zadovoljavaju $\psi(as) = \overline{as}(\psi)$ pa uvrštavanjem dobivamo $\psi(as) = c\overline{s}(\psi)$. Kako elementi iz $\overline{S}^*$ antilinearno djeluju na elemente S slijedi $a^*\psi(s) = c\overline{s}(\psi)$ pa mora slijediti $c = a^*$, kao što bi i očekivali od operacije kompleksne konjugacije.

Zbog linearnosti spomenute simplektičke strukture, njezine komponente možemo pisati indeksnom notacijom tj. $\epsilon \in S^* \times S^*$, $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$ te vrijedi $[\xi, \phi] = \epsilon(\xi, \phi) = \epsilon_{AB}\xi^A\phi^B$. Prirodno se nameće korespondencija spinora $\xi^A \in S$ i $\xi_B \in S^*$ korištenjem simplektičke strukture:

$$\xi_B = \epsilon_{AB}\xi^A \tag{3.1.1}$$

Ako simplektičku strukturu tretiramo kao antisimetrični skalarni produkt možemo se pozabaviti pronalaženjem "ortonormirane" spinske baze, tj. spinora $o, \imath \in S$ koji zadovoljavaju

$$[o, \imath] = 1 \tag{3.1.2}$$

Zbog antisimetričnosti produkta očito vrijedi $[o, o] = [\imath, \imath] = 0$.

> **Napomena:** Ako fiksiramo $o \in S$ vidimo da $\imath$ nije jedinstveno određen jer za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi $[o, \imath + \lambda o] = [o, \imath] + \lambda\cancelto{0}{[o, o]} = 1$

Svaki spinor ξ^A stoga možemo zapisati kao:

$$\xi^A = \xi^0 o^A + \xi^1 \imath^A \tag{3.1.3}$$

gdje su $\xi^0 = \epsilon_{AB}\xi^A\imath^B$ te $\xi^1 = -\epsilon_{AB}\xi^A o^B$ zbog antisimetričnosti produkta.

Kako se radi o antisimetričnom tenzoru s dva indeksa na dvodimenzionalnom prostoru, simplektička struktura ϵ_{AB} zadovoljava Jacobi identitet:

$$\epsilon_{[AB}\epsilon_{C]D} = 0 \tag{3.1.4}$$

Ako ovu jednadžbu kontrahiramo s $o^C \imath^D$ dobivamo (imajući na umu jednadžbu (4.1)):

$$(\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{BC}\epsilon_{AD} + \epsilon_{CA}\epsilon_{BD} - \epsilon_{BA}\epsilon_{CD} - \epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{CB}\epsilon_{AD})\, o^C \imath^D = 0$$

$$\overbrace{\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} o^C \imath^D}^{\epsilon_{AB}\times 1} + \overbrace{\epsilon_{BC}\epsilon_{AD} o^C \imath^D}^{(-o_B)(-\imath_A)} + \overbrace{\epsilon_{CA}\epsilon_{BD} o^C \imath^D}^{(o_A)(-\imath_B)} -$$

$$\overbrace{\epsilon_{BA}\epsilon_{CD} o^C \imath^D}^{\epsilon_{BA}\times 1 = -\epsilon_{AB}} - \overbrace{\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} o^C \imath^D}^{(-o_A)(-\imath_B)} + \overbrace{\epsilon_{CB}\epsilon_{AD} o^C \imath^D}^{(o_B)(-\imath_A)} = 0 / : 2$$

$$\epsilon_{AB} + o_B \imath_A - o_A \imath_B = 0$$

$$\implies \quad \epsilon_{AB} = o_A \imath_B - o_B \imath_A \tag{3.1.5}$$

Istom logikom dolazimo do tenzora $\epsilon^{AB} = o^A \imath^B - o^B \imath^A$. Koristeći ϵ^{AB} radimo korespondenciju sličnu onoj u jednadžbi (4.1):

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B \tag{3.1.6}$$

Na taj način uspostavili smo mehanizam dizanja i spuštanja indeksa sličan onome na koji smo navikli u Einsteinovoj notaciji. Razlika je u tome što je ϵ_{AB} antisimetričan dok je g_{ab} simetričan tenzor zbog čega se javlja dodatni negativan predznak:

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B = -\epsilon^{BA} \xi_B \tag{3.1.7}$$

$$\xi_A = -\epsilon_{AB} \xi^B = \epsilon_{BA} \xi^B \tag{3.1.8}$$

Vidljivo je da se negativan predznak ne pojavljuje ako kontrahiramo **lijevi** indeks kod spuštanja te **desni** indeks kod podizanja indeksa. Za lakše pamćenje koristimo se mnemotehnikom [1] "***LEFT TO <u>L</u>OWER, <u>RI</u>GHT TO <u>RA</u>ISE***"

Spomenuti prostori $\overline{S}$ i $\overline{S}^*$ odnose se kao S i S^* tako da koristimo sličnu notaciju uz promjene $\xi^A \to \bar{\xi}^{A'}$. Tako je $\overline{\xi^A} = \bar{\xi}^{A'}$. Po konvenciji je $\overline{\epsilon_{AB}} = \epsilon_{A'B'}$ umjesto $\bar{\epsilon}_{A'B'}$. Svi dosadašnji i budući identiteti su ekvivalentni uz poštivanje navedenih zamjena. Upoznati smo da multilinearne funkcionale

$$f : \overbrace{V^* \times ... \times V^*}^{k} \times \overbrace{V \times ... \times V}^{l} \to \mathbb{C}$$

(gdje je V neki vektorski prostor, a V^* njegov pripadni dual) u Einsteinovoj notaciji pišemo kao $f^{a_1 a_2 \dots a_k}{}_{b_1 b_2 \dots b_l}$ i zovemo tenzorima ranga (k,l). U spinorskim prostorima vrijedi ista logika, osim što postoje četiri prostora na kojima multilinearni funkcional može djelovati. Tako neki multilinearni funkcional

$$F : \overbrace{S^* \times \dots \times S^*}^{k} \times \overbrace{S \times \dots \times S}^{l} \times \overbrace{\bar{S}^* \times \dots \times \bar{S}^*}^{k'} \times \overbrace{\bar{S} \times \dots \times \bar{S}}^{l'} \to \mathbb{C}$$

zovemo tenzor ranga $(k, l; k'l')$ i pišemo $F^{A_1 A_2 \dots A_k}{}_{B_1 B_2 \dots B_l}{}^{A'_1 A'_2 \dots A'_{k'}}{}_{B'_1 B'_2 \dots B'_{l'}}$. Crtkani i necrtkani indeksi (u nastavku obični indeksi i "konjugirani" indeksi jer odgovaraju komponentama kompleksno konjugiranih prostora) međusobno komutiraju, ali, isto kao kod običnih tenzora, indeksi istog tipa ne komutiraju. Također, moguće je kontrahirati obične ili konjugirane indekse; miješane kontrakcije nisu definirane. Sljedeće navodimo bitan teorem o dekompoziciji spinora.

Teorem 3.1. *Neka je τ_{AB} spinorski tenzor. Tada vrijedi*

$$\tau_{AB} = \tau_{(AB)} + \frac{1}{2}\tau_C{}^C \epsilon_{AB} \tag{3.1.9}$$

Dokaz. Svaki tenzor može se napisati kao suma svojeg simetričnog i antisimetričnog dijela. Tako je $\tau_{AB} = \tau_{(AB)} + \tau_{[AB]}$. Ako kontrahiramo jednadžbu (4.4) s τ^{DC} dobivamo:

$$\begin{aligned} \epsilon_{[AB}\epsilon_{C]D}\tau^{DC} &= 0 \\ 2(\epsilon_{AB}\tau_C{}^C + \tau_{BA} - \tau_{AB}) &= 0 \\ \implies \tau_{[AB]} &= \frac{1}{2}\tau_C{}^C \epsilon_{AB} \end{aligned}$$

gdje smo u trećem redu iskoristili činjenicu da je $\tau_{BA} - \tau_{AB} = \epsilon_{[AB]}$. Uvrštavanjem dobivenog izraza u dekompoziciju spinorskog tenzora slijedi tvrdnja teorema.

□

Promotrimo sada prostor $Y = S \times \bar{S}$. Jasno je odmah da je Y 4-dimenzionalan kompleksan vektorski prostor gdje se prirodno nameće baza $\{o^A \bar{o}^{A'}, o^A \bar{\imath}^{A'}, \imath^A \bar{o}^{A'}, \imath^A \bar{\imath}^{A'}\}$ čiji su elementi tenzori ranga $(1, 0; 1, 0)$. Moguće je koristeći te vektore konstruirati bazu vektora:

$$t^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(o^A\bar{o}^{A'} + \imath^A\bar{\imath}^{A'}\right) \tag{3.1.10}$$

$$x^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(o^A\bar{\imath}^{A'} + \imath^A\bar{o}^{A'}\right) \tag{3.1.11}$$

$$y^{AA'} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(o^A\bar{\imath}^{A'} - \imath^A\bar{o}^{A'}\right) \tag{3.1.12}$$

$$z^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(o^A\bar{o}^{A'} - \imath^A\bar{\imath}^{A'}\right) \tag{3.1.13}$$

Za tenzore $\phi^{AA'}$ kažemo da su realni ako vrijedi $\bar{\phi}^{AA'} = \phi^{AA'}$. Operacija kompleksne konjugacije za spinorske tenzore prirodno se nastavlja na operaciju kompleksne konjugacije spinora jer komutira s tenzorskim produktom. Primjerice, neka je $a^{AA'} = 2i\,o^A\bar{\imath}^{A'}$; tada je $\bar{a}^{AA'} = -2i\,\bar{o}^{A'}\imath^A$. Lako se pokaže da su tenzori definirani jednadžbama (3.1.10)-(3.1.13) realni. Uzmimo kao primjer $t^{AA'}$:

$$\bar{t}^{AA'} = \frac{1}{2}(\overbrace{o^A\bar{o}^{A'}}^{\bar{o}^{A'}o^A} + \overbrace{\imath^A\bar{\imath}^{A'}}^{\bar{\imath}^{A'}\imath^A}) = t^{AA'}$$

Ako odaberemo podprostor svih realnih tenzora iz Y $Re(Y) = \{ax^{AA'} + by^{AA'} + cz^{AA'} + dt^{AA'}|a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \equiv V$ vidimo da smo koristeći spinore konstruirali 4-dimenzionalan **realan** vektorski prostor. Pogledamo li još i tenzor

$$g_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'} \tag{3.1.14}$$

vidimo da je nedegeneriran te u bazi $\{t^{AA'}, x^{AA'}, y^{AA'}, z^{AA'}\}$ izgleda kao $diag(+ - - -)$. Drugim riječima, V je 4-dimenzionalan vektorski prostor opremljen Lorentzovom metrikom $g_{AA'BB'}$! Na razini indeksa radimo s promjenama $a \longrightarrow AA'$, $b \longrightarrow BB', \ldots$. Tako svaki "prostorvremenski" vektor ξ^a odgovara nekom $(0, 1; 0, 1)$ realnom tenzoru $a^{AA'} \in V$. Proširenje spinorskih prostora s točke na cijelu zakrivljenu mnogostrukost obavlja se analogno kao za tangentne prostore, a za više detalja pogledati [6], poglavlje 13.
Slijedi teorem o spinorskoj dekompoziciji svjetlosnih vektora.

Teorem 3.2. *k^a je neiščezavajući svjetlosni vektor ($k_ak^a = 0$) ako i samo ako se k^a može napisati kao:*

$$k^a = \pm\kappa^A\bar{\kappa}^{A'} \tag{3.1.15}$$

Dokaz. $k^a = \pm\kappa^A\bar{\kappa}^{A'}$ je svjetlosni vektor jer $\kappa_A\bar{\kappa}_{A'}\kappa^A\bar{\kappa}^{A'} = 0$ zbog toga što je $\kappa^A\kappa_A = \epsilon_{BA}\kappa^A\kappa^B = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je k^a svjetlosni vektor. Tada postoji realni $(0,1;0,1)$ tenzor $\omega^{AA'} \in V$ takav da je $k^a = \omega^{AA'}$. S obzirom da je k^a svjetlosnog tipa, mora vrijediti $\omega_{AA'}\omega^{AA'} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}\omega^{AA'}\omega^{BB'} = 0$ što je točno definicija determinante 2×2 matrice $\det(\omega^{AA'}) = 0$. Ako je determinanta 0 znači da je jedan stupac matrice linearno zavisan drugom, tj.

$$\omega = \begin{pmatrix} b & \sigma b \\ c & \sigma c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sigma \end{pmatrix} \tag{3.1.16}$$

To znači da postoje spinori κ^A i λ^A takvi da je $\omega^{AA'} = \kappa^A\bar{\lambda}^{A'}$. Iz realnosti $\omega^{AA'}$ slijedi $\kappa^A\bar{\lambda}^{A'} = \lambda^A\bar{\kappa}^{A'} \implies \kappa^A \sim \lambda^A = c\kappa^A, \quad c \in \mathbb{R}$. Slijedi da je $\omega^{AA'} = \kappa^A\, c\bar{\kappa}^{A'}$ pa ako definiramo $\alpha^A = \sqrt{|c|}\kappa^A$ dobivamo $\omega^{AA'} = \pm\alpha^A\bar{\alpha}^{A'}$, ovisno o predznaku konstante c.

□

Možemo primjetiti da ako za neke ϕ^A i ψ^A vrijedi $\psi^A = c\phi^A$ gdje je $|c| = 1,\ c \in \mathbb{C}$, onda oni definiraju isti svjetlosni vektor $k^{AA'}$. To znači da je uz jedan svjetlosni vektor vezana jednoparametarska familija spinora. S druge strane, možemo definirati realan tenzor $F^{AA'BB'}$:

$$F^{AA'BB'} = \psi^A\psi^B\epsilon^{A'B'} + \bar{\psi}^{A'}\bar{\psi}^{B'}\epsilon^{AB} \tag{3.1.17}$$

kojeg gledamo kao $(2,0)$ tenzor nad V, F^{ab}. Ovaj tenzor, poznat i kao nul-zastava, razlikuje spinore do na predznak, tj. dva spinora daju istu nul-zastavu ako i samo ako se razlikuju najviše do na predznak. Ne postoji ni jedan tenzor na V konstruiran od spinora ψ^A koji razlikuje ψ^A i $-\psi^A$.

Okrenut ćemo se sada problemu derivacija spinora na mnogostrukosti. Problem nastaje što ne znamo uspoređivati spinore u različitim točkama, stoga se kako bismo definirali derivacije spinora u zakrivljenom prostorvremenu koristimo idejom paralelnog transporta. Kao podsjetnik, neka je X^a vektorsko polje na mnogostrukosti i ∇_a kovarijantna derivacija. Tada je neki tenzor F^{ab} paralelno transportiran po integralnim krivuljama X^a ako zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $X^a\nabla_a F^{bc} = 0$. Kovarijantna derivacija je jedinstvena ako vrijedi $\nabla_a g_{bc} = 0$ gdje je g_{bc} pripradna metrika. Ne znamo paralelno transportirati spinore, ali znamo paralelno transportirati nul-zastavu (koja je $(2,0)$ tenzor na V). Kažemo, stoga, da je spinor paralelno transportiran po X^a ako mu je nul-zastava paralelno transportirana. S ovom novom definicijom dobivamo mogućnost uspoređivati spinore na krivuljama što posljedično definira **spinorsku** kovarijantnu derivaciju. Konzistentno prethodnim pravilima $a \rightarrow AA'$, spinorska kovarijantna derivacija $\nabla_{AA'}$ preslikava $(k, l : k', l')$ tenzor u $(k, l+1 : k', l'+1)$. Zadovoljava očekivana svojstva operatora derivacije (linearnost, Leibnizovo pravilo, komutaciju s kontrakcijom indeksa) uz neka popratna svojstva:

1) za svako spinorsko tenzorsko polje ψ vrijedi: $\overline{\nabla_{AA'}\psi} = \nabla_{AA'}\overline{\psi}$

2) $\nabla_{AA'}\epsilon^{BC} = \quad \nabla_{AA'}\epsilon_{BC} = \quad \nabla_{AA'}\epsilon^{B'C'} = \quad \nabla_{AA'}\epsilon_{B'C'} = 0$

te se poklapa s običnom kovarijantnom derivacijom $\nabla_{AA'}$ kada se primjenjuje na obična tenzorska polja.

3.2 ADM masa i početni uvjeti

Podsjetimo sve da smo u poglavlju 1.4 masu u prostorvremenu definirali koristeći vremenski Killingov vektor. Takva definicija mase poznata je kao Komarov integral. Javlja se pitanje: što napraviti kako bismo u općenitom slučaju (nestacionarnog prostovremena tj. onog koje ne posjeduje vremenski Killingov vektor) definirali isti parametar? Nasreću, postoji drugačija definicija mase, tzv. ADM (Arnowitt-Deser-Minser) masa, za koju se može pokazati da je ekvivalentna Komarovoj masi za stacionarna prostorvremena. Za njezino shvaćanje potrebno je prvo reći nešto o formulaciji opće teorije relativnosti početnim uvjetima.

Zamislimo na trenutak biljarski stol s kuglicama, 15 obojanih i jedna bijela. Recimo da nam je netko dao fotografiju biljarskog stola u nekom trenutku i zapisao brzine svih kuglica. Koristeći naše znanje Newtonovih zakona, sposobni smo iz tih informacija rekonstruirati položaje i brzine svih kuglica u svakom trenutku u prošlosti i predvidjeti položaje i brzine u budućnosti. Drugim riječima, ako je naš sustav biljarski stol iz **početnih uvjeta** možemo rekonstruirati stanje sustava u svakom trenutku, tj. skup $\{x_1, ...x_{15}, x_B, \vec{v_1}, \vec{v_{15}}, \vec{v_B}\}$ (gdje su x položaji, a $\vec{v}$ brzine) zadan u nekom trenutku, dovoljan je za određivanje evolucije sustava što zovemo **formulacija početnim uvjetima**. Tu ideju prenosimo i u OTR. Želimo naći polja čije vrijednosti moramo poznavati u nekom "zamrznutom trenutku" (što bi, npr. odgovaralo nekoj prostornoj hiperplohi Σ) kako bismo mogli odrediti cijelo prostorvrijeme i vrijednosti polja na cijelom prostorvremenu. Ugrubo, za teoriju kažemo da ju je moguće formulirati početnim uvjetima ako:

1. postoje početni uvjeti nekih veličina (uz moguća ograničenja) koji jednoznačno određuju evoluciju sustava

2. "male" promjene u početnim uvjetima odgovaraju "malim" promjenama u evoluciji sustava

3. promjene početnih uvjeta u nekom kompaktnom skupu $A \subset S$ ne smiju uzrokovati promjene van kauzalne budućnosti od A

Drugi uvjet namećemo jer je početne uvjete moguće odrediti samo konačnom preciznošću pa bi nezadovoljavanje ovog uvjeta oduzelo vjerodostojnost bilo kakvom predviđanju teorije. Treći uvjet nametnut je jer bismo promjene koje se propagiraju van kauzalne budućnosti mogli koristiti za prenošenje informacija brže od brzine svjetlosti.

"Zamrznuti trenutak" vrlo je lako odrediti u slučaju stacionarnog prostorvremena. Stacionarnost prostorvremena implicira postojanje nametnutog smjera vremena u obliku vremenskog Killingovog vektora K^μ. Neka je su integralne krivulje polja K^μ parametrizirane s t. Tada je jedan zamrznuti trenutak neka prostorna hiperploha za koju je $t = konst$. U slučaju nestacionarnog prostorvremena ulogu "zamrznutog trenutka" igra Cauchyjeva ploha.

Neka je S akronalni (ni jedne dvije točke ne mogu se povezati vremenskom krivuljom) podskup mnogostrukosti M. **Buduća domena ovisnosti** $D^+(S)$ je skup svih točaka $p \in M$ takvih da kauzalna krivulja usmjerena prema budućnosti koja prolazi kroz p nužno siječe S. Drugim riječima $D^+(S)$ je skup svih događaja u kauzalnoj budućnosti koji su potpuno određeni događajima na S (jer se informacije prenose kauzalnimm krivuljama). Analogno, **prošla domena ovisnosti** $D^-(S)$ je skup svih točaka $p \in M$ takvih da kauzalna krivulja usmjerena prema prošlosti koja prolazi kroz p nužno siječe S. Prateći opis za $D^-(S)$, prošla domena ovisnosti je skup svih događaja koje u potpunosti možemo rekonstruirati znanjem o događajima na S. Za neki skup Σ kažemo da je **Cauchyjeva ploha** ako $D^-(\Sigma) \cup D^+(\Sigma) = M$ tj. ako znanje o događajima na toj plohi omogućava rekonstruiranje cijele kauzalne povijesti i predviđanje svih događaja u kauzalnoj budućnosti. Naravno, ako je prostorvrijeme stacionarno Cauchyjeva ploha je već opisana prostorna hiperploha "zamrznutog trenutka", slično kao što je fotografija biljarskog stola "Cauchyjeva ploha" za taj sustav jer možemo iz nje iščitati prošlost i predvidjeti budućnost.

Kako bismo OTR formulirali pomoću početnih uvjeta potrebna nam je uređena trojka (Σ, h_{ab}, K_{ab}). Ovdje je Σ trodimenzionalna mnogostrukost, h_{ab} Riemannova metrika na Σ, a K_{ab} simetrično tenzorsko polje na Σ. Tada postoji prostorvrijeme (M, g_{ab}) koje posjeduje Cauchyjevu plohu difeomorfnu s Σ na kojoj je inducirana metrika jednaka h_{ab}, te K_{ab} ekstrinzična zakrivljenost (ili druga fundamentalna forma). Primjetimo da smo uređenu trojku (Σ, h_{ab}, K_{ab}) definirali bez pozivanja na mnogostrukost. To smo učinili jer po formulaciji početnim uvjetima takva uređena trojka generira neko prostorvrijeme pa izražavanje tih veličina u kontekstu prostovremena ne bi imalo smisla. Prostorvrijeme generirano nekim početnim uvjetima zove se **maksimalni Cauchyjev razvoj** početnih uvjeta.

Preostalo je još samo definirati ekstrinzičnu zakrivljenost K_{ab} prostorne hiperplohe Σ. Neka je γ kongruencija geodezika okomitih na Σ te neka je n^a jedinično tangentno polje na te geodezike. n^a je vremenskog tipa na Σ jer je Σ prostorna hiperploha pa stoga ima vremensku normalu. **Ekstrinzična zakrivljenost** je tenzor K_{ab} izvrijednjen na Σ definiran s:

$$K_{ab} = \nabla_a n_b \tag{3.2.1}$$

Može se pokazati [6] da se K_{ab} može zapisati i kao:

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n g_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n (h_{ab} - n_a n_b) = \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab} \tag{3.2.2}$$

gdje je u zadnjem koraku upotrebljeno $\pounds_n n_a = 0$. Vidimo da K_{ab} mjeri kako se mijenja inducirana metrika na Σ kada se krećemo po kongruenciji geodezika. U kontekstu formulacije početnim uvjetima, možemo n^a smatrati lokalnim vremenom pa je zadati h_{ab} i K_{ab} slično kao zadati položaj i brzinu (mjeru promjene položaja u smjeru vremena).

Sada smo spremni definirati ADM masu. Neka je (M, g_{ab}) asimptotski ravno prostorvrijeme, te neka je Σ prostorna hiperploha klase $C^{>1}$ takva da je (Σ, h_{ab}, K_{ab}) asimptotski ravan skup početnih uvjeta. Neka su x^1, x^2, x^3 asiptotski Euklidske koordinate ($h_{\mu\nu}$ teži u $(1, 1, 1)$ kako $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \longrightarrow \infty$). Tada su energija

E i komponente ukupnog prostornog momenta p_ν dane jednadžbama:

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \int_{\Sigma_r} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\mu}}{\partial x^\nu} \right) N^\nu dA \tag{3.2.3}$$

$$p_\nu = \frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \sum_{\mu=1}^{3} \int_{\Sigma_r} \left(K_{\mu\nu} N^\mu - K^\mu{}_\mu N_\nu \right) dA \tag{3.2.4}$$

gdje je Σ_r 2-sfera radijusa r u Σ, a N^ν normala na nju. Možemo konstruirati i 4-vektor

$$P^a = -En^a + p^a \tag{3.2.5}$$

u prostornoj beskonačnosti i^0 za kojeg se može pokazati da je neovisan o izboru Σ pri čemu je n_a jedinična normala na Σ u i^0 usmjerena prema budućnosti.

> **Napomena:** *Kako bi skup (Σ, h_{ab}, K_{ab}) zaista bio valjan skup početnih uvjeta ekstrinzična zakrivljenost i inducirana metrika moraju zadovoljavati dodatni skup uvjeta poznatih kao Gauss-Codazzi jednadžbe. Za više detalja pogledati [6]*

Često puta ćemo se susretati s konceptom asimptotski ravnih početnih uvjeta. Asimptotska ravnost postaje nam bitna kada promatramo izolirane sustave, primjerice zvijezde ili planete. Ideja je da se zakrivljenje prostorvremena zbog zvijezde ne proteže u beskonačnost već se udaljavanjem smanjuje i postaje manje zamjetan tj. prostorvrijeme postaje ravno kako se asimptotski približavamo beskonačnosti. Asimptotski ravni početni uvjeti su stoga oni čija inducirana metrika teži u Euklidsku kako se približavamo beskonačnosti, a ekstrinzična zakrivljenost teži u 0. Nešto formalnije, ako induciranu metriku zapišemo kao $h_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij}$ gdje je δ_{ij} Euklidska metrika, mora vrijediti:

$$\gamma_{ij} = O(r^{-1}) \tag{3.2.6}$$

$$\partial_k \gamma_{ij} = O(r^{-2}) \tag{3.2.7}$$

$$\partial_k \partial_l \gamma_{ij} = O(r^{-3}) \tag{3.2.8}$$

$$K_{ij} = O(r^{-2}) \tag{3.2.9}$$

$$\partial_k K_{ij} = O(r^{-3}) \tag{3.2.10}$$

3.3 Wittenov dokaz

Teorem 3.3. (Witten [16]) *Neka je* (Σ, h_{ij}, K_{ij}) *asimptotski ravan skup početnih uvjeta. Ako je dominantni energijski uvjet zadovoljen, četverovektor energije i impulsa* (E, p_μ) *(gdje je* E *ADM energija, a* p_μ *komponente ADM impulsa definirani jednadžbama* (3.2.3) *i* (3.2.4)*) je ne-prostornog tipa i usmjeren prema budućnosti, a nula ako i samo ako je maksimalni Cauchyjev razvoj početnih uvjeta prostorvrijeme Minkowskog.*

Dokaz. Neka je λ_A spinorsno polje u prostorvremenu te neka su kovarijantne derivacije dane s ∇_a i $\nabla_{AA'}$. Koristeći λ_A možemo konstruirati tzv. Nester-Witten formu antisimetriziranjem kompleksnog tenzora:

$$\Omega_{ab} = -i\overline{\lambda}_{B'}\nabla_{AA'}\lambda_B \tag{3.3.1}$$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_{[ab]} \tag{3.3.2}$$

U nastavku dokaza diferencijalne forme uvijek ćemo označavati podebljanim slovima. Kao što znamo iz teorema 3.2, svakom spinoru λ_A pridružen je svjetlosni vektor $\xi_a = \lambda_A\overline{\lambda}_{A'}$.

Neka je Σ_r kugla radijusa r u Σ. Računamo iznos integrala:

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{\Sigma_r}\mathbf{\Omega} = \int_\Sigma d\mathbf{\Omega} \tag{3.3.3}$$

gdje je $d\mathbf{\Omega}$ vanjska derivacija forme $\mathbf{\Omega}$ te smo iskoristili Stokesov teorem. Računajući imaginarni dio integranda s lijeve strane jednadžbe (3.3.3) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\mathbf{\Omega}) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Omega} - \overline{\mathbf{\Omega}}\right)\\
&= \frac{1}{2}(\overbrace{\frac{i}{2}[\overline{\lambda}_{A'}\nabla_{BB'}\lambda_A - \overline{\lambda}_{B'}\nabla_{AA'}\lambda_B]}^{\mathbf{\Omega}} - \overbrace{\frac{-i}{2}[\lambda_A\nabla_{BB'}\overline{\lambda}_{A'} - \lambda_B\nabla_{AA'}\overline{\lambda}_{B'}]}^{\overline{\mathbf{\Omega}}})\\
&= \frac{i}{4}(\overline{\lambda}_{A'}\nabla_{BB'}\lambda_A + \lambda_A\nabla_{BB'}\overline{\lambda}_{A'}) - \frac{i}{4}(\overline{\lambda}_{B'}\nabla_{AA'}\lambda_B + \lambda_B\nabla_{AA'}\overline{\lambda}_{B'})\\
&= \frac{i}{4}\nabla_{BB'}\overbrace{(\lambda_A\overline{\lambda}_{A'})}^{\xi_A} - \frac{i}{4}\nabla_{AA'}\overbrace{(\lambda_B\overline{\lambda}_{B'})}^{\xi_B}\\
&= \frac{i}{2}\nabla_{[b}\xi_{a]} = \frac{i}{2}d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

gdje smo tenzor ξ_a u zadnjem koraku tretirali kao diferencijalnu formu. Po Stokesovom teoremu integral diferencijala forme po mnogostrukosti bez ruba (što 2-sfera jest) ne doprinosi integralu pa je integral (3.3.3) realan. Neka za λ_A:

$$\lambda_A = \mathring{\lambda}_A + \gamma_A, \quad \gamma_A = O(r^{-1}) \tag{3.3.4}$$

gdje je $\mathring{\lambda}_A$ proizvoljan konstantan spinor. Ovaj γ^A nije povezan s γ_{ij}. Postojanje ovakve dekompozicije nije trivijalno pa za više detalja upućujemo na [16]. Može se pokazati [16] da vrijedi:

$$P_a \mathring{\xi}^a = \frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \oint_{\Sigma_r} \mathbf{\Omega} \tag{3.3.5}$$

Gdje je svjetlosni vektor $\mathring{\xi}^a$ definiran kao $\mathring{\xi}^a = \mathring{\lambda}_A \overline{\mathring{\lambda}}_{A'}$, a vektor P_a je četverovektor energije i impulsa definiran jednadžbom (3.2.5). Sljedeći korak je pokazati da iznos integrala u jednadžbi (3.3.3) ovisi samo o konstantnom spinoru $\mathring{\lambda}_A$. Rastavljamo $\mathbf{\Omega}$ na dio ovisan o samo o $\mathring{\lambda}_A$ i ostatak:

$$\mathbf{\Omega} = \mathring{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Gamma} \tag{3.3.6}$$

$$\mathring{\Omega}_{ab} = -i\overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \nabla_{AA'} \mathring{\lambda}_B, \quad \mathring{\mathbf{\Omega}} = \mathring{\Omega}_{[ab]} \tag{3.3.7}$$

$$\Gamma_{ab} = -i(\overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \nabla_{AA'} \gamma_B + \overline{\gamma}_{B'} \nabla_{AA'} \mathring{\lambda}_B + \overline{\gamma}_{B'} \nabla_{AA'} \gamma_B), \quad \mathbf{\Gamma} = \Gamma_{[ab]} \tag{3.3.8}$$

Želimo pokazati da je $\mathbf{\Gamma} = O(r^{-3})$ i time ne doprinosi integralu. Po članovima (3.3.8):

1. $\overline{\gamma}_{B'} \nabla_{AA'} \gamma_B$

   S obzirom da ne postoji jednostavan komponentan način računanja kovarijantne derivacije općenitog spinorskog tenzora moramo se okrenuti drugim tehnikama kako bismo saznali kojom brzinom opada $\nabla_{AA'}\gamma_B$. Definirajmo svjetlosni vektor $l_a = \gamma_A \overline{\gamma}_{A'}$ te neka su ∇_a i $\Gamma^a{}_{bc}$ kovarijantna derivacija i Christoffelovi simboli. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \nabla_a l_b &= \partial_a l_b + \Gamma^c{}_{ab} l_c \\ &= \partial_a(\gamma_B \overline{\gamma}_{B'}) - \Gamma^c{}_{ab}(\gamma_C \overline{\gamma}_{C'}) \\ &= \overline{\gamma}_{B'} \partial_{a(=AA')} \gamma_B + \gamma_B \partial_{a(=AA')} \overline{\gamma}_{B'} - \Gamma^c{}_{ab} \gamma_C \overline{\gamma}_{C'} \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

S druge strane također vrijedi:

$$\nabla_a l_b = \nabla_{AA'}\gamma_B\overline{\gamma}_{B'} = \gamma_B\nabla_{AA'}\overline{\gamma}_{B'} + \overline{\gamma}_{B'}\nabla_{AA'}\gamma_B \tag{3.3.10}$$

Pa kombiniranjem jednadžbi dobivamo:

$$\overline{\gamma}_{B'}\partial_{AA'}\gamma_B + \gamma_B\partial_{AA'}\overline{\gamma}_{B'} - \Gamma^c{}_{ab}\gamma_C\overline{\gamma}_{C'} = \gamma_B\nabla_{AA'}\overline{\gamma}_{B'} + \overline{\gamma}_{B'}\nabla_{AA'}\gamma_B \tag{3.3.11}$$

Zahtjevali smo da je $\gamma_A = O(r^{-1})$ te $\partial_{AA'}\gamma_B = O(r^{-2})$ pa prva dva člana s lijeve strane jednadžbe (3.3.10) padaju s $O(r^{-3})$. Što se tiče trećeg člana produkt $\gamma_C\overline{\gamma}_{C'}$ je $O(r^{-2})$ (jer je $\gamma_A = O(r^{-1})$), a Christoffelovi simboli mogu se izraziti parcijalnim derivacijama metrike g_{ab} koju možemo zapisati u terminima inducirane metrike i normale, preciznije $g_{ab} = h_{ab} + n_a n_b$ gdje je n_a normala na hiperplohu Σ. Ako odaberemo koordinatni sustav tako da su 3 koordinate vezane na hiperplohu (ijk) a jedna duž integralnih krivulja n_a (ℓ), imamo dvije derivacije na koje trebamo obratiti pozornost. Jedne su derivacije u ℓ-smjeru:

$$\partial_\ell g_{ab} = \pounds_n g_{ab} \overset{(3.2.2)}{=} 2K_{ab} \tag{3.3.12}$$

koje su $O(r^{-2})$ zbog (3.2.9). S druge strane, kako je $g_{ab} = h_{ab} + n_a n_b$ derivacije u (ijk)-smjeru su:

$$\partial_i g_{ab} = \partial_i h_{ab} + \partial_i(n_a n_b) \tag{3.3.13}$$

Iz (3.2.7) vidimo da je za asimptotski ravne početne uvjete $\partial_i h_{ab} = \partial_i \gamma_{ab} = O(r^{-3})$. Preostaje pokazati da je $\partial_i(n_a n_b) = O(r^{-1})$ što je ekvivalentno zahtjevu $\partial_i n_a = O(r^{-1})$. Definicija ekstrinzične zakrivljenosti (3.2.1) je:

$$K_{ab} = \nabla_a n_b \tag{3.3.14}$$

Neka je l^a vektor koji zadaje smjer parcijalne derivacije ∂_i. Taj je vektor tangentan hiperplohi Σ (jer zadaje neku derivaciju u ijk smjeru) pa induciranu metriku možemo pisati kao $h_{ab} = l_a l_b + ...$ Tada je po definiciji sporni član:

$$\partial_i n_a = l^b\nabla_b n_a = l^b K_{ba} = O(r^{-2}) \tag{3.3.15}$$

U zadnjem koraku iskoristili smo $K_{ab} = O(r^{-2})$ i činjenicu da $h_{ab} = l_a l_b + ... \to \delta_{ab}$. Time smo pokazali da je lijeva strana jednadžbe $O(r^{-3})$. S obzirom da na desnoj strani imamo produkt $\gamma_B \nabla_{AA'} \overline{\gamma}_{B'}$, pokazali smo da je traženi član $O(r^{-3})$. Dodatno, znamo da je $\gamma_A = O(r^{-1})$ pa slijedi i da je $\nabla_{AA'}\gamma_B = O(r^{-2})$.

2. $\overline{\gamma}_{B'} \nabla_{AA'} \mathring{\lambda}_B$

   Analognim pristupom onome iz prvog odjeljka dolazimo do jednadžbe:

$$\overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \partial_{AA'} \mathring{\lambda}_B + \mathring{\lambda}_B \partial_{AA'} \overline{\mathring{\lambda}}_{B'} - \Gamma^c{}_{ab} \mathring{\lambda}_C \overline{\mathring{\lambda}}_{C'} = \mathring{\lambda}_B \nabla_{AA'} \overline{\mathring{\lambda}}_{B'} + \overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \nabla_{AA'} \mathring{\lambda}_B \tag{3.3.16}$$

   Ovdje parcijalne derivacije $\partial_{AA'} \mathring{\lambda}_B$ iščezavaju jer je $\mathring{\lambda}_A$ konstantan spinor pa nam ostaje:

$$-\Gamma^c{}_{ab} \mathring{\lambda}_C \overline{\mathring{\lambda}}_{C'} = \mathring{\lambda}_B \nabla_{AA'} \overline{\mathring{\lambda}}_{B'} + \overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \nabla_{AA'} \mathring{\lambda}_B \tag{3.3.17}$$

   Istom argumentacijom kao u prethodnom odjeljku dolazimo do zaključka da je $\nabla_{AA'} \mathring{\lambda}_B = O(r^{-2})$ pa množenjem s $\overline{\gamma}_{B'} = O(r^{-1})$ slijedi da je dotični član $O(r^{-3})$.

3. $\overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \nabla_{AA'} \gamma_B$

   Logikom iz prethodna dva odjeljka najviše što možemo zaključiti je da je član $O(r^{-2})$ stoga ga raspisujemo:

$$\overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \nabla_{AA'} \gamma_B = \nabla_{AA'} (\overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \gamma_B) - \gamma_B \nabla_{AA'} \overline{\mathring{\lambda}}_{B'} \tag{3.3.18}$$

   Drugi član desne strane jednadžbe (3.3.17) ekvivalentan je članu kojim smo se bavili u prethodnom odjeljku pa je, po identičnom postupku, $O(r^{-3})$. S druge strane, nakon antisimetrizacije $\Gamma_{[ab]}$ prvi član postat će $\nabla_{[a}\alpha_{b]}$ gdje je $\alpha_b = \gamma_B \overline{\mathring{\lambda}}_{B'}$ što je diferencijal neke 1-forme pa ne doprinosi integralu po mnogostrukosti bez ruba.

Doista, vrijedi:

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{\Sigma_r} \mathbf{\Omega} = \lim_{r\to\infty} \oint_{\Sigma_r} \mathring{\mathbf{\Omega}} \tag{3.3.19}$$

Nadalje, želimo pokazati da je integral (3.3.3) pozitivan. To ćemo napraviti tako što ćemo pokazati da je integrand $d\mathbf{\Omega}$ s desne strane iste jednadžbe nenegativan, a za to nam treba eksplicitan oblik forme $d\boldsymbol{\Omega}$. Po definiciji je, ako je $\boldsymbol{\Omega}$ p-forma:

$$d\boldsymbol{\Omega} = (p+1)\nabla_{[a}\Omega_{b_1,\ldots b_p]} \tag{3.3.20}$$

U našem je slučaju $p = 2$ pa imamo:

$$d\boldsymbol{\Omega} = 3\nabla_{[a}\Omega_{bc]} \tag{3.3.21}$$

Računajući po komponentama:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\Omega} = 3\,\frac{1}{3!}\,(&\nabla_a\Omega_{bc} + \nabla_b\Omega_{ca} + \nabla_c\Omega_{ab} - \\
&-\nabla_a\Omega_{cb} - \nabla_b\Omega_{ac} - \nabla_c\Omega_{ba}) \\
= \frac{-3i}{6}\,\big(&\nabla_a(\overline{\lambda}_{C'}\nabla_{BB'}\lambda_C) + \nabla_b(\overline{\lambda}_{A'}\nabla_{CC'}\lambda_A) + \nabla_c(\overline{\lambda}_{B'}\nabla_{AA'}\lambda_B) - \\
&-\nabla_a(\overline{\lambda}_{B'}\nabla_{CC'}\lambda_B) - \nabla_b(\overline{\lambda}_{C'}\nabla_{AA'}\lambda_C) + \nabla_c(\overline{\lambda}_{A'}\nabla_{BB'}\lambda_A)\big) \\
= \frac{-i}{2}\,\big(&\nabla_a\overline{\lambda}_{C'}\nabla_b\lambda_C + \overline{\lambda}_{C'}\nabla_a\nabla_b\lambda_C + \\
&+ \nabla_b\overline{\lambda}_{A'}\nabla_c\lambda_A + \overline{\lambda}_{A'}\nabla_b\nabla_c\lambda_A + \\
&+ \nabla_c\overline{\lambda}_{B'}\nabla_a\lambda_B - \overline{\lambda}_{B'}\nabla_b\nabla_a\lambda_B - \\
&- \nabla_a\overline{\lambda}_{B'}\nabla_c\lambda_B - \overline{\lambda}_{B'}\nabla_a\nabla_c\lambda_B - \\
&- \nabla_b\overline{\lambda}_{C'}\nabla_a\lambda_C - \overline{\lambda}_{C'}\nabla_b\nabla_a\lambda_C - \\
&-\nabla_c\overline{\lambda}_{A'}\nabla_b\lambda_A - \overline{\lambda}_{A'}\nabla_b\nabla_b\lambda_A\big)
\end{aligned}$$

Možemo grupirati članove lijevog stupca i članove desnog stupca te definirati diferencijalne forme:

$$\text{Lijevi stupac: } \beta_{abc} = -i\nabla_a\overline{\lambda}_{C'}\nabla_b\lambda_C \quad \boldsymbol{\beta} = \beta_{[abc]} \tag{3.3.22}$$

$$\text{Desni stupac: } \alpha_{abc} = -i\overline{\lambda}_{C'}\nabla_a\nabla_b\lambda_C \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_{[abc]} \tag{3.3.23}$$

pa slijedi da je:

$$d\boldsymbol{\Omega} = 3(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \tag{3.3.24}$$

Po definiciji je integral neke n-forme $\boldsymbol{F}$ po n-mnogostrukosti M parametrizirane funkcijom $\boldsymbol{\phi} : M \to \mathbb{R}^n$ takve da je $\phi(p \in M) = (x_1, x_2, ...x_n)$ dan s:

$$\int_{C\in M} \boldsymbol{F} = \int_{\phi(C)\subseteq\mathbb{R}} F_{a_1a_2a_3...a_n}\epsilon^{a_1a_2a_3...a_n}\sqrt{|\nabla\phi^T\nabla\phi|}dx_1dx_2dx_3...dx_n \tag{3.3.25}$$

gdje je $\epsilon^{a_1a_2a_3...a_n}$ pripadni Levi-Civita simbol. Ako sada pretpostavimo da je n-mnogostrukost uronjena u $n+1$-mnogostrukost i da je normala na n-mnogostrukost dana vektorom n^a možemo izraziti projicirani n-dimenzionalni Levi-Civita simbol u terminima globalnog $n+1$ dimenzionalnog i normale pa imamo:

$$\epsilon^{a_1a_2a_3...a_n} = \epsilon^{a_1a_2a_3...a_nd}n_d \tag{3.3.26}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (3.3.25) dobivamo:

$$\int_{C\in M} \boldsymbol{F} = \int_{\phi C\subseteq\mathbb{R}} F_{a_1a_2a_3...a_n}\epsilon^{a_1a_2a_3...a_nd}n_d dV \tag{3.3.27}$$

gdje smo uveli pokratu $dV = \sqrt{|\nabla\phi^T\nabla\phi|}dx_1dx_2dx_3...dx_n$ Primjenjujući (3.3.27) na integral $d\boldsymbol{\Omega}$ iz jednadžbe (3.3.3) dobivamo:

$$\int_\Sigma d\boldsymbol{\Omega} = \int_\Sigma 3(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \int_\Sigma 3(\alpha_{abc}+\beta_{abc})\epsilon^{abcd}t_d dV \tag{3.3.28}$$

gdje smo iskoristili oznaku t_d umjesto n_d kako bismo naznačili da se radi o vremenskoj normali (jer je hiperploha Σ prostornog tipa). Kako bismo pokazali pozitivnost dotičnog integrala potrebno je samo pokazati pozitivnost integranda.

Počet ćemo računajući komponente kontrakcije $\beta_{abc}\epsilon^{abcd}$. Podsjetimo se iz jednadžbe (3.3.22) da su komponente $\beta_{abc} = -i\nabla_a\overline{\lambda}_{C'}\nabla_b\lambda_C$. Kovarijantnu derivaciju možemo razdvojiti na prostorni i vremenski dio:

$$\nabla_a = D_a + t_a t^b\nabla_b, \quad D_a = h_a{}^b\nabla_b \tag{3.3.29}$$

pa se i komponente $\beta_{abc}\epsilon^{abcd}$ mogu raspisati kao:

$$\begin{aligned}\beta_{abc}\epsilon^{abcd} =& -i(D_a + t_a t^d \nabla_d)\overline{\lambda}_{C'}(D_b + t_b t^e \nabla_e)\lambda_C \epsilon^{abcd} \\ =& -iD_a\overline{\lambda}_{C'}D_b\lambda_C\epsilon^{abcd} \overbrace{-i(t_a t^d \nabla_d \overline{\lambda}_{C'} D_b \lambda_C + D_a \overline{\lambda}_{C'} t_b t^e \nabla_e \lambda_C)\epsilon^{abcd}}^{\equiv W^d} \\ & \cancel{-t_a t^d \nabla_d \overline{\lambda}_{C'} t_b t^e} \nabla_e \lambda_C \epsilon^{abcd}\end{aligned}$$

Zadnji član iščezava jer se javlja kontrakcija antisimetričnog ϵ^{abc} i simetričnog $t^a t^b$ tenzora u indeksima ab. Vidimo da će se u integralu (3.3.28) javiti kontrakcija $\beta_{abc}\epsilon^{abcd}t_d$ pa ako gledamo član W^d imamo:

$$W^d t_d = -i(t_a t^d \nabla_d \overline{\lambda}_{C'} D_b \lambda_C + D_a \overline{\lambda}_{C'} t_b t^e \nabla_e \lambda_C)\epsilon^{abcd} t_d = 0$$

Zbog antisimetričnosti ϵ^{abcd} te simetričnosti $t_a t_d$ ili $t_b t_d$. Integralu nam stoga doprinosi samo dio:

$$\beta_{abc}\epsilon^{abcd} t_d = -iD_a \overline{\lambda}_{C'} D_b \lambda_C \epsilon^{abcd} t_d \tag{3.3.30}$$

Postoji identitet [17]:

$$\epsilon^{abcd} = -i(\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon^{A'D'}\epsilon^{B'C'} - \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\epsilon^{A'C'}\epsilon^{B'D'}) \tag{3.3.31}$$

pa uvrštavanjem (3.3.31) u (3.3.30) (uz izostavljanje t_d zbog jednostavnosti) imamo:

$$\begin{aligned}\epsilon^{abcd}\beta_{abc} =& -\cancel{i}(\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon^{A'D'}\epsilon^{B'C'} - \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\epsilon^{A'C'}\epsilon^{B'D'}) \cdot \cancel{(-i)} D_a \overline{\lambda}_{C'} D_b \lambda_C \\ =& -\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon^{A'D'}\epsilon^{B'C'} D_{AA'}\overline{\lambda}_{C'} D_{BB'}\lambda_C + \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\epsilon^{A'C'}\epsilon^{B'D'}\epsilon^{B'C'} D_{AA'}\overline{\lambda}_{C'} D_{BB'}\end{aligned}$$

Koristeći mnemotehniku "Right to Raise, Left to Lower" kontrahiranjem s ϵ^{XY} možemo podići ili spustiti indekse pa dolazimo do izraza:

$$\epsilon^{abcd}\beta_{abc} = D^{CD'}\overline{\lambda}_{C'} D^{DC'}\lambda_C + D^{DC'}\overline{\lambda}_{C'} D^{CD'}\lambda_C \tag{3.3.32}$$

Do sada je spinorsko polje λ_A bilo proizvoljno (uz iznimku uvjeta asimptotske konstantnosti). Pretpostavimo da postoji rješenje diferencijalne jednadžbe [18]:

$$D_{AB}\lambda^A = 0 \tag{3.3.33}$$

Takvo da su zadovoljeni zahtjevi asimptotske konstantnosti polja iz jednadžbe (3.3.4). Ovaj zahtjev ne utječe na iznos integrala jer smo pokazali da ovisi samo o konstantnom spinoru $\mathring{\lambda}_A$ čija derivacija iščezava neovisno o (3.3.33). S ovim zahtjevom drugi član iz jednadžbe (3.3.32) iščezava. Voljeli bismo nekako dovesti prvi član desne strane jednadžbe (3.3.32) do oblika koji odgovara (3.3.33). To možemo postići zamjenom indeksa $D \leftrightarrow D'$ u derivacijama $D^{XX'}$. Kako bismo to učinili koristimo se identitetom (3.1.9):

$$\begin{aligned} \tau^{D'C'} &= \tau^{(D'C')} - \frac{1}{2}\tau^{F'}{}_{F}\,\epsilon^{D'C'} \\ \tau^{[D'C']} &= \frac{1}{2}\tau^{F'}{}_{F}\,\epsilon^{D'C'} \\ \frac{1}{2}(\tau^{D'C'} - \tau^{C'D'}) &= \frac{1}{2}\tau^{F'}{}_{F}\,\epsilon^{D'C'} \\ \tau^{D'C'} &= +\,\tau^{C'D'} + \frac{1}{2}\tau^{F'}{}_{F}\,\epsilon^{D'C'} \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

stoga za prvi član desne strane jednadžbe (3.3.32) imamo:

$$\begin{aligned} D^{CD'}\overline{\lambda}_{C'}D^{DC'}\lambda_C &= D^{CC'}\overline{\lambda}_{C'}D^{DD'}\lambda_C + D^{C}{}_{E'}\overline{\lambda}_{C'}D^{DE'}\lambda_C\epsilon^{D'C'} \\ &= D^{CC'}\overline{\lambda}_{C'}D^{DD'}\lambda_C + D^{C}{}_{E'}\overline{\lambda}^{D'}D^{DE'}\lambda_C \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Isto možemo napraviti i za drugi član desne strane u jednadžbi (3.3.35) mijenjanjem indeksa $C \leftrightarrow D$. Za njega vrijedi:

$$\begin{aligned} D^{C}{}_{E'}\overline{\lambda}^{D'}D^{DE'}\lambda_C &= D^{D}{}_{E'}\overline{\lambda}^{D'}D^{CE'}\lambda_C + D_{EE'}\overline{\lambda}^{D'}D^{EE'}\lambda_C\epsilon^{CD} \\ &= D^{D}{}_{E'}\overline{\lambda}^{D'}D^{CE'}\lambda_C - D_{EE'}\overline{\lambda}^{D'}D^{EE'}\lambda^{D} \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Uvrštavanjem (3.3.35) i (3.3.36) u jednadžbu (3.3.32) dobivamo:

$$\epsilon^{abcd}\beta_{abc} = D^{CC'}\overline{\lambda}_{C'}D^{DD'}\lambda_C + D^{D}{}_{E'}\overline{\lambda}^{D'}D^{CE'}\lambda_C - D_{EE'}\overline{\lambda}^{D'}D^{EE'}\lambda^{D} + D^{DC'}\overline{\lambda}_{C'}D^{CD'}\lambda_C \tag{3.3.37}$$

Vidimo da ako vrijedi (3.3.33) svi članovi s desne strane jednadžbe (3.3.27) iščezavaju osim trećeg. Stoga konačno imamo:

$$\epsilon^{abcd}\beta_{abc} = -D_{EE'}\overline{\lambda}^{D'}D^{EE'}\lambda^{D} = -D_e\overline{\lambda}^{D'}D^{e}\lambda^{D} \tag{3.3.38}$$

Diferencijalna jednadžba (3.3.33) zove se Sen-Wittenova jednadžba i pokazano je da rješenja te jednadžbe s adekvatnim uvjetima trnjenja zaista postoje. Za više detalja o toj temi referiramo se na [16] te [15]. Posvetimo se sada računanju komponenti kontrakcije $\epsilon^{abcd}\alpha_{abc}$. Po definiciji je:

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}\xi_c = R_{abc}{}^{d}\xi_d \tag{3.3.39}$$

gdje je R_{abcd} Riemannov tenzor. Ako ξ_c definiramo kao $\xi_c = \lambda_C\overline{\lambda}_{C'}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{[a}\nabla_{b]}\xi_c =& \nabla_{[AA'}\nabla_{BB']}\lambda_C\overline{\lambda}_{C'} \\
=& (\nabla_{AA'}\nabla_{BB'} - \nabla_{BB'}\nabla_{AA'})\lambda_C\overline{\lambda}_{C'} \\
=& \nabla_{AA'}(\nabla_{BB'}\lambda_C\overline{\lambda}_{C'} + \lambda_C\nabla_{BB'}\overline{\lambda}_{C'}) - \nabla_{BB'}(\nabla_{AA'}\lambda_C\overline{\lambda}_{C'} + \lambda_C\nabla_{AA'}\overline{\lambda}_{C'}) \\
=& (\nabla_{AA'}\nabla_{BB'}\lambda_C)\overline{\lambda}_{C'} + \cancel{\nabla_{AA'}\lambda_C\nabla_{BB'}\overline{\lambda}_{C'}} + \cancel{\nabla_{BB'}\lambda_C\nabla_{AA'}\overline{\lambda}_{C'}} + \lambda_C\nabla_{AA'}\nabla_{BB'}\overline{\lambda}_{C'} \\
&-(\nabla_{BB'}\nabla_{AA'}\lambda_C)\overline{\lambda}_{C'} - \cancel{\nabla_{BB'}\lambda_C\nabla_{AA'}\overline{\lambda}_{C'}} - \cancel{\nabla_{AA'}\lambda_C\nabla_{BB'}\overline{\lambda}_{C'}} - \lambda_C\nabla_{BB'}\nabla_{AA'}\overline{\lambda}_{C'} \\
=& \lambda_C\nabla_{[a}\nabla_{b]}\overline{\lambda}_{C'} + \overline{\lambda}_{C'}\nabla_{[a}\nabla_{b]}\lambda_C
\end{aligned}$$

Slijedi, dakle, da je

$$\lambda_C\nabla_{[a}\nabla_{b]}\overline{\lambda}_{C'} + \overline{\lambda}_{C'}\nabla_{[a}\nabla_{b]}\lambda_C = R_{AA'BB'CC'}{}^{DD'}\lambda_D\overline{\lambda}_{D'} \tag{3.3.40}$$

Isti argumenti koji kažu da je komutator kovarijantnih derivacija tenzorska veličina (koju zovemo Riemannov tenzor) vrijede i za spinore [6]. To znači da možemo uvesti neki spinorski tenzor $\chi_{AA'BB'CD}$ takav da vrijedi:

$$\nabla_{[AA'}\nabla_{BB']}\lambda_C = \chi_{AA'BB'C}{}^{D}\lambda_D \tag{3.3.41}$$

te kompleksni konjugat:

$$\nabla_{[AA'}\nabla_{BB']}\overline{\lambda}_{C'} = \overline{\chi}_{AA'BB'C'}{}^{D'}\overline{\lambda}_{D'} \tag{3.3.42}$$

Ako ove izraze uvrstimo u (3.3.40) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lambda_C\nabla_{[AA'}\nabla_{BB']}\overline{\lambda}_{C'} + \overline{\lambda}_{C'}\nabla_{[AA'}\nabla_{BB']}\lambda_C =& \lambda_C\overline{\chi}_{AA'BB'C'}{}^{D'}\overline{\lambda}_{D'} + \overline{\lambda}_{C'}\chi_{AA'BB'C}{}^{D}\lambda_D \\
=& \overline{\chi}_{AA'BB'C'}{}^{D'}\epsilon_C{}^{D}\lambda_D\overline{\lambda}_{D'} + \chi_{AA'BB'C}{}^{D}\epsilon_{C'}{}^{D'}\lambda_D\overline{\lambda}_{D'} \\
=& R_{AA'BB'CC'}{}^{DD'}\lambda_D\overline{\lambda}_{D'}
\end{aligned}$$

gdje je $\epsilon_C{}^D = \epsilon_{EC}\epsilon^{ED}$. Iz ovoga direktno slijedi:

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = \overline{\chi}_{AA'BB'C'D'}\epsilon_{CD} + \chi_{AA'BB'CD}\epsilon_{C'D'} \tag{3.3.43}$$

Riemannov tenzor posjeduje sljedeće simetrije:

$$R_{abcd} = R_{[ab][cd]} \tag{3.3.44}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{3.3.45}$$

$$R_{a[bcd]} = 0 \tag{3.3.46}$$

Potrebno je paziti kako se simetrije u zamjenama tenzorskih indeksa manifestiraju u spinorskim. Primjerice, relacija (3.3.44) koja govori o antisimetričnosti s obzirom na zamjenu $a \leftrightarrow b$ u spinorskoj notaciji izgledala bi kao:

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = -R_{BB'AA'CC'DD'} \tag{3.3.47}$$

Primjetimo da o pojavi minusa možemo govoriti ako smo napravili **i** $A \leftrightarrow B$ **i** $A' \leftrightarrow B'$ zamjenu jer jednom tenzorskom indeksu a odgovaraju dva spinorska AA'. Dekompoziciju Riemannovog tenzora vršimo koristeći identitet (3.1.9) (zbog zornosti pisat ćemo $R_{ABCDA'B'C'D'}$ što je isto kao $R_{AA'BB'CC'DD'}$ jer obični i konjugirani indeksi komutiraju po definiciji):

$$\begin{aligned} R_{ABCDA'B'C'D'} &\overset{(3.1.9)}{=} R_{AB(CD)A'B'C'D'} + \frac{1}{2}R_{ABX}{}^{X}{}_{A'B'C'D'}\epsilon_{CD} \\ &\overset{(3.1.9)}{=} \cancel{R_{AB(CD)A'B'(C'D')}} + \frac{1}{2}R_{AB(CD)A'B'X'}{}^{X'}\epsilon_{C'D'} + \frac{1}{2}R_{ABX}{}^{X}{}_{A'B'C'D'}\epsilon_{CD} \end{aligned}$$

gdje $R_{AB(CD)A'B'(C'D')}$ iščezava jer je R_{abcd} po (3.3.44) antisimetričan na zamjenu $c \leftrightarrow d$. Možemo pokazati da je $R_{ABCDA'B'X'}{}^{X'}$ simetričan na zamjenu $C \leftrightarrow D$:

$$\begin{aligned} R_{ABCDA'B'X'}{}^{X'} &= R_{ABCDA'B'X'Y'}\epsilon^{X'Y'} \\ &\overset{(3.3.45)}{=} -R_{BACDA'B'Y'X'}\epsilon^{X'Y'} \\ &= R_{BACDA'B'Y'X'}\epsilon^{Y'X'} \\ &= R_{BACDA'B'Y'}{}^{Y'} \end{aligned} \tag{3.3.48}$$

tj. $R_{AB(CD)A'B'X'}{}^{X'} = R_{ABCDA'B'X'}{}^{X'}$ pa možemo pisati:

$$R_{ABCDA'B'C'D'} = \frac{1}{2}R_{ABCDA'B'X'}{}^{X'}\epsilon_{C'D'} + \frac{1}{2}R_{ABX}{}^{X}{}_{A'B'C'D'}\epsilon_{CD} \tag{3.3.49}$$

Iz (3.3.49) vidimo da je

$$\chi_{ABCDA'B'} = \frac{1}{2}R_{ABCDA'B'X'}{}^{X'} \tag{3.3.50}$$

$$\overline{\chi}_{ABA'B'C'D'} = \frac{1}{2}R_{ABX}{}^{X}{}_{A'B'C'D'} \tag{3.3.51}$$

Prateći identičan postupak možemo nastaviti s dekompozicijom po indeksima AB i $A'B'$ pa dolazimo do izraza:

$$\begin{aligned} R_{ABCDA'B'C'D'} =& X_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \overline{X}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \\ & \phi_{ABC'D'}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{CD} + \overline{\phi}_{CDA'B'}\epsilon_{AB}\epsilon_{C'D'} \end{aligned} \tag{3.3.52}$$

$$X_{ABCD} = \frac{1}{4}R_{ABCDY'}{}^{Y'}{}_{X'}{}^{X'} \tag{3.3.53}$$

$$\phi_{ABC'D'} = \frac{1}{4}R_{ABX}{}^{X}{}_{Y'}{}^{Y'}{}_{C'D'} \tag{3.3.54}$$

pa konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} \nabla_{[AA'}\nabla_{BB']}\lambda_C =& \chi_{ABC}{}^{D}{}_{A'B'}\lambda_D \\ =& \frac{1}{2}R_{ABC}{}^{D}{}_{A'B'X'}{}^{X'}\lambda_D \\ \overset{(3.1.9)}{=}& \frac{1}{4}R_{Y}{}^{Y}{}_{C}{}^{D}{}_{A'B'X'}{}^{X'}\lambda_D + \frac{1}{4}R_{ABC}{}^{D}{}_{Y'}{}^{B'}{}_{X'}{}^{X'}\lambda_D \\ =& X_{ABC}{}^{D}\epsilon_{A'B'}\lambda_D + \overline{\phi}_{A'B'C}{}^{D}\epsilon_{AB}\lambda_D \end{aligned} \tag{3.3.55}$$

Primjetimo da iz realnosti Riemannovog tenzora odmah slijedi:

$$\phi_{ABC'D'} = \overline{\phi}_{ABC'D'} \tag{3.3.56}$$

Pogledajmo sada traženu kontrakciju $\epsilon^{abcd}\alpha_{abc}$:

$$\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} = \epsilon^{abcd}\cdot(-i)\overline{\lambda}_{C'}\nabla_a\nabla_b\lambda_C = \epsilon^{abcd}\cdot(-i)\overline{\lambda}_{C'}\nabla_{[a}\nabla_{b]}\lambda_C \tag{3.3.57}$$

Ovdje smo antisimetrizirali po indeksima a i b jer je ϵ^{abcd} antisimetričan u istim indeksima pa kontrakcija sa simetričnim dijelom $\alpha_{(ab)c}$ iščezava. Koristeći ponovno (3.3.31) i kombiniranjem s (3.3.55) imamo

$$\begin{aligned}\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} =& - i(\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon^{A'D'}\epsilon^{B'C'} - \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\epsilon^{A'C'}\epsilon^{B'D'})\cdot \\ & - i\overline{\lambda}_{C'}(X_{ABC}{}^{E}\epsilon_{A'B'}\lambda_E + \overline{\phi}_{A'B'C}{}^{E}\epsilon_{AB}\lambda_E)\end{aligned}$$

pa uz podizanje indeksa

$$\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} = -\left(-\left[X^{DC}{}_{C}{}^{E} + X^{CD}{}_{C}{}^{E}\right]\epsilon^{C'D'} + \left[\overline{\phi}^{D'C'DE} + \overline{\phi}^{C'D'DE}\right]\right)\lambda_E\overline{\lambda}_{C'}$$

Uz zamjenu $C' \to E'$ možemo $\lambda_E\overline{\lambda}_{C'}$ pisati kao $\lambda_E\overline{\lambda}_{E'} =: \xi_e$. Cijeli izraz tada je:

$$\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} = -\left(-\left[X^{DC}{}_{C}{}^{E} + X^{CD}{}_{C}{}^{E}\right]\epsilon^{E'D'} + \left[\overline{\phi}^{D'E'DE} + \overline{\phi}^{E'D'DE}\right]\right)\xi_e \tag{3.3.58}$$

Voljeli bismo sada drugačije napisati tenzore $X^{DC}{}_{C}{}^{E}$ i $\overline{\phi}^{D'E'DE}$. Oni će se prirodno pojaviti u kontrakcijama Riemannovog tenzora. Jedna nama poznata kontrakcija Riemannovog tenzora je Riccijev tenzor

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{c} \tag{3.3.59}$$

pa koristeći jednadžbu (3.3.52) Riccijev tenzor u spinorskoj notaciji je

$$\begin{aligned}R_{ABA'B'} =& X_{ACB}{}^{C}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B'}{}^{C'} + \overline{X}_{A'C'B'}{}^{C'}\epsilon_{AC}\epsilon_{B}{}^{C} + \phi_{ACB'}{}^{C'}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B}{}^{C} + \overline{\phi}_{B}{}^{C}{}_{A'C'}\epsilon_{AC}\epsilon_{B'}{}^{C'} \\ =& X_{ACB}{}^{C}\epsilon_{A'B'} + \overline{X}_{A'C'B'}{}^{C'}\epsilon_{AB} - \phi_{ABB'A'} - \overline{\phi}_{BAA'B'}\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

A Riccijev skalar je:

$$R = R_{a}{}^{a} = R_{A}{}^{A}{}_{A'}{}^{A'} = X_{AC}{}^{AC}\epsilon_{A'}{}^{A'} + \overline{X}_{A'C'}{}^{A'C'}\epsilon_{A}{}^{A} - \phi_{A}{}^{AA'}{}_{A'} - \overline{\phi}^{A}{}_{AA'}{}^{A'} \tag{3.3.61}$$

Na isti način kao u (3.3.48) možemo pokazati da je $\phi_{(AB)(A'B')} = \phi_{ABA'B'}$ te $\overline{\phi}_{(AB)(AB')} = \overline{\phi}_{ABAB'}$ te $X_{(AB)(CD)} = X_{ABCD}$ i $\overline{X}_{(A'B')(C'D')} = \overline{X}_{A'B'C'D'}$. Suprotno od onoga na što smo navikli kod običnih tenzora, kod spinora kontrakcije **simetričnih** indeksa tenzora iščezavaju. Npr za $\phi_{ABA'B'}$ imamo

$$\phi_{A}{}^{A}{}_{A'B'} = \phi_{ABA'B'}\epsilon^{AB} = 0$$

Jer se radi o kontrakciji simetričnog i antisimetričnog indeksa. Iz tog razloga kontrakcije $\phi_{ABA'B'}$ i $\overline{\phi}_{ABA'B'}$ u jednadžbi (3.3.61) iščezavaju. Kako bismo dalje pojednostavnili jednadžbu (3.3.61) možemo pokazati da je $X_{ACB}{}^{C}\epsilon_{A'B'} = \overline{X}_{A'C'B'}{}^{C'}\epsilon_{AB}$. Kako bismo to napravili izračunajmo tzv. desni dual Riemannovog tenzora:

$$\begin{aligned} R^{*}_{abcd} =& \frac{1}{2}\epsilon_{cd}{}^{pq}R_{abpq} = \frac{i}{2}(\epsilon_{C}{}^{P}\epsilon_{D}{}^{Q}\epsilon_{C'}{}^{Q'}\epsilon_{D'}{}^{P'} - \epsilon_{C}{}^{Q}\epsilon_{D}{}^{P}\epsilon_{C'}{}^{P'}\epsilon_{D'}{}^{Q'})R_{ABPQA'B'P'Q'} \\ =& \frac{i}{2}(R_{ABCDA'B'D'C'} - R_{ABDCA'B'C'D'}) \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem (3.3.52) dobivamo

$$\begin{aligned} R^{*}_{abcd} = \frac{i}{2}(&X_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{D'C'} + \overline{X}_{A'B'D'C'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \phi_{ABD'C'}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{CD} + \overline{\phi}_{CDA'B'}\epsilon_{AB}\epsilon_{D'C'} \\ &- X_{ABDC}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} - \overline{X}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{DC} - \phi_{ABC'D'}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{DC} - \overline{\phi}_{DCA'B'}\epsilon_{AB}\epsilon_{C'D'}) \end{aligned}$$

što uz korištenje simetrija $\epsilon_{[AB]} = \epsilon_{AB}$ i $X_{(AB)(CD)} = X_{ABCD}$ daje

$$R^{*}_{abcd} = iR_{ABCDA'B'D'C'} \tag{3.3.62}$$

Korištenjem identiteta (3.3.46) za kontrakciju $R^{*}{}_{abc}{}^{b}$ dobivamo:

$$R^{*}{}_{abc}{}^{b} = \frac{1}{2}g^{bd}\epsilon_{cd}{}^{pq}R_{abpq} = \frac{1}{2}\epsilon_{c}{}^{bpq}R_{abpq} \overset{(3.3.46)}{=} 0 \tag{3.3.63}$$

stoga, kombiniranjem (3.3.63) i (3.3.62) direktno vidimo da mora vrijediti

$$X_{ACB}{}^{C}\epsilon_{A'B'} = \overline{X}_{A'C'B'}{}^{C'}\epsilon_{AB} \tag{3.3.64}$$

Kako bi bilo zadovoljeno (3.3.63). Uz pokratu $X_{ACB}{}^{B} = 3\Lambda\epsilon_{AC}$, (3.3.64), (3.3.56) i simetrije pripadnih tenzora (3.3.58) možemo zapisati kao:

$$\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} = -\left(6\Lambda\epsilon^{DE}\epsilon^{D'E'} + 2\phi^{DED'E'}\right)\xi_{e} \tag{3.3.65}$$

Koristeći se još definicijom metrike iz (3.1.14) dobivamo izraz:

$$\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} = -\left(6\Lambda g^{de} + 2\phi^{de}\right)\xi_e \tag{3.3.66}$$

Konačno, koristimo Einsteinovu jednadžbu kako bismo dodatno približili izraz (3.3.66). Einsteinova jednadžba glasi:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{3.3.67}$$

Uvrštavanjem $\epsilon^A{}_A = 2$ (3.3.60) i (3.3.61) (uz korištenje poznatih identiteta za X_{ABCD} te $\phi_{ABC'D'}$) u jednadžbu (3.3.67) dobivamo:

$$6\Lambda g^{ab} - 2\phi^{ab} - \frac{1}{2}24\Lambda g^{ab} = 8\pi T^{ab} \tag{3.3.68}$$

Možemo primjetiti da lijeva strana jednadžbe (3.3.67) odgovara traženoj kontrakciji, odnosno vrijedi:

$$\epsilon^{abcd}\alpha_{abc} = 8\pi T^{de}\xi_e \tag{3.3.69}$$

Integral (3.3.28) uz uvrštavanje (3.3.38) i (3.3.69) glasi:

$$\int_\Sigma d\Omega = \int_\Sigma 3(8\pi T^{de}\xi_e t_d - D_e\overline{\lambda}^{D'} D^e\lambda^D t_d)dV \tag{3.3.70}$$

Prisjetimo se da je jedna od pretpostavki teorema bila da vrijedi dominantni energijski uvjet. U njegovom iskazu stoji da je kontrakcija tenzora energije i impulsa s vektorima neprostornog tipa uvijek veća od ili jednaka nuli pa je zbog toga prvi član integranda jednadžbe (3.3.70) nenegativan tj.

$$8\pi T^{de}\xi_e t_d \geq 0 \tag{3.3.71}$$

Drugi član možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} D_e\overline{\lambda}^{D'} D^e\lambda^D t_d =& h_e{}^a\nabla_a\overline{\lambda}^{D'} h^{eb}\nabla_b\lambda^D t_d \\ =& h^{ab}\nabla_a\overline{\lambda}^{D'}\nabla_b\lambda^D t_d \end{aligned} \tag{3.3.72}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili identitet $h_e{}^a h^{eb} = h^{ab}$. Znamo da je Riemannova metrika (u $(+---)$ signaturi) negativno definitna. To znači da postoje svojstveni (prostorni) vektori $\alpha^a, \beta^a, \gamma^a$ i pozitivne konstante h_1, h_2, h_3 takvi da je:

$$h^{ab} = -h_1\alpha^a\alpha^b - h_2\beta^a\beta^a - h_3\gamma^a\gamma^b \tag{3.3.73}$$

Uvrštavanjem (3.3.73) u (3.3.72) dobivamo

$$\begin{aligned} D_e\overline{\lambda}^{D'}D^e\lambda^D t_d =& (-h_1\alpha^a\alpha^b - h_2\beta^a\beta^b - h_3\gamma^a\gamma^b)\nabla_a\overline{\lambda}^{D'}\nabla_b\lambda^D t_d \\ =& - h_1\alpha^a\alpha^b\nabla_a\overline{\lambda}^{D'}\nabla_b\lambda^D t_d + (\beta, \gamma \text{ članovi}) \\ =& - h_1(\alpha^a\nabla_a)\overline{\lambda}^{D'}(\alpha^b\nabla_b)\lambda^D t_d + (\beta, \gamma \text{ članovi}) \end{aligned} \tag{3.3.74}$$

Članovi s β^a i γ^a su izostavljeni jer ovaj postupak za njih ide potpuno analogno. Sada je lako vidljivo da za spinore $\overline{\tau}^{D'} := (\alpha^a\nabla_a)\overline{\lambda}^{D'}$ i $\psi^D := (\alpha^b\nabla_b)$ vrijedi $\overline{\tau^D} = \overline{\tau}^{D'}$ zbog čega produkt $\overline{\tau}^{D'}\psi^D$ prema teoremu 3.2 odgovara nekom svjetlosnom vektoru k^d. Opremljeni ovim znanjem jednadžbu (3.3.74) svodimu na

$$D_e\overline{\lambda}^{D'}D^e\lambda^D t_d = -h_1k^d t_d + (\beta, \gamma \text{ članovi}) \tag{3.3.75}$$

Iz diskusije o dominantnom energijskom uvjetu iz poglavlja 1.5 znamo da za kauzalne vektore istog vremenskog usmjerenja vrijedi $k^d t_d \equiv c \geq 0$. Uvrštavanjem (3.3.75) u jednadžbu (3.3.70) vidimo da za integrand vrijedi:

$$8\pi T^{de}\xi_e t_d + h_1 c + (\beta, \gamma \text{ članovi}) \geq 0 \tag{3.3.76}$$

Čime je dokazan prvi dio Teorema 3.3.

Kod ekvivalencije $E = 0 \Leftrightarrow$ Minkowski jasno je da ravan prostor povlači $E = 0$. S obzirom da je iznos energije definiran integralom u beskonačnosti (3.2.3) možemo proizvoljno deformirati plohu u unutrašnjosti bez utjecanja na iznos integrala. Tako ju možemo deformirati i do ravne plohe za koju vrijedi $h_{ab} = \delta_{ab}$ pa je

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial h_{\mu\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{3.3.77}$$

tj. $E = 0$.

Preostaje dokazati da je u slučaju $E = 0$ maksimalni Cauchyjev razvoj prostorvrijeme

Minkowskog. Četverovektor energije i impulsa P_a definiran je s (E, p_μ). S obzirom da smo dokazali da se radi o neprostornom vektoru mora vrijediti

$$E^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (p^\mu)^2 \geq 0 \tag{3.3.78}$$

pa u slučaju $E = 0$ mora vrijediti $P_a = 0$. To implicira da je integral $\int_\Sigma d\mathbf{\Omega} = 0$ što je, zbog toga što smo pokazali da je integrand nenegativan, moguće samo ako vrijedi:

$$8\pi T^{de}\xi_e t_d - D_e \overline{\lambda}^{D'} D^e \lambda^D t_d = 0 \tag{3.3.79}$$

Pokazali smo da su oba ova člana uvijek pozitivna pa mora vrijediti

$$8\pi T^{de}\xi_e t_d = 0 \tag{3.3.80}$$

$$D_e \overline{\lambda}^{D'} D^e \lambda^D t_d = 0 \tag{3.3.81}$$

Jednadžba implicira da je $T^{ab} = 0$ te $D^a \lambda^D = 0$ na cijeloj hiperplohi Σ za bilo koji izbor polja λ^D. To implicira

$$D_{[a} D_{b]} \lambda_D = 0 \tag{3.3.82}$$

Svaki vektor x^a može se zapisati slično kao u jednadžbama (3.1.10)-(3.1.13) pa se (3.3.82) može poopćiti na obične četverovektore:

$$D_{[a} D_{b]} u_c = 0 \tag{3.3.83}$$

Kada bi se u (3.3) radilo o operatorima kovarijantne derivacije ∇_a, a ne o projekcijama kovarijantne derivacije $D_a = \nabla_a - t_a t^b \nabla_b$ imali bismo:

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = R_{abc}{}^d u_d = 0 \tag{3.3.84}$$

To bi impliciralo da na hiperplohi Σ vrijedi $R_{abcd} = 0$. To, naravno, nije slučaj, ali možemo primjetiti da ako izaberemo bazu koja odgovara smjerovima (ijk, ℓ) (gdje t^a pokazuje u ℓ smjeru) vrijedi:

$$t^\mu = 0, \quad \mu = i, j, l \Leftarrow \nabla_\mu = D_\mu, \quad \mu = i, j, \ell \tag{3.3.85}$$

pa stoga jednadžba zapravo govori

$$D_{[\mu}D_{\nu]}u_\sigma = \nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}u_\sigma = R_{\mu\nu\sigma}{}^{\delta}u_\delta = 0, \quad \mu,\nu = i,j,k \tag{3.3.86}$$

što povlači $R_{ijcd} = 0$ na Σ gdje su (i,j,k) smjerovi tangentni hiperplohi Σ. S obzirom da su E (3.2.3) i p_ν (3.2.4) definirani u beskonačnosti hiperplohe Σ, možemo malo deformirati hiperplohu Σ. S obzirom da to ne mijenja ponašanje u beskonačnosti, E i p_ν još uvijek su 0. Na svakoj hiperplohi u koju možemo deformirati Σ mora vrijediti $R_{ijcd} = 0$, a to je ostvarivo jedino ako je $R_{abcd} = 0$ svugdje u prostoru. To povlači da je prostor ravan, a Einsteinova jednadžba $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}$ automatski implicira da je prostor prazan, tj. $T_{ab} = 0$. Slijedi da $E = 0$ ako i samo ako je prostor Minkowski čime je dokaz teorema gotov. □

Napomena: Nerijetko se u općoj teoriji relativnosti susrećemo s mnogostrukostim s više asimptotskih krajeva. Za mnogostrukost M kažemo da ima više krajeva ako postoji kompaktan skup $K \subset M$ takav da je $M \setminus K$ disjunktna unija konačnog broja skupova koje zovemo **asimptotski krajevi** i označavamo s U_k. Primjer takve mnogostrukosti bilo bi maksimalno proširenje Schwarzschildovog prostorvremena u Kruskalovim koordinatama koje ima dvije prostorne beskonačnosti. Dokaz se lako poopćuje na takve skupove. Prva promjena koju je potrebno napraviti je svaki integral po beskonačnosti sumirati po svim asimptotskim krajevima U_k, primjerice:

$$\sum_k \lim_{r\to\infty} \oint_{\Sigma_r} \mathbf{\Omega} = \oint_\Sigma d\mathbf{\Omega} \tag{3.3.87}$$

Dokaz bi se stoga provodio na svakom asimptotskom kraju odvojeno i rezultat bi se na kraju zbrojio i dao ukupnu vrijednost energije u prostorvremenu. Kako bismo dokaz provodili odvojeno za svaki kraj potrebno je promijeniti asimptotsko ponašanje spinorskog polja λ^A. Prisjetimo se, u prethodnoj verziji zahtjevali smo da za spinorsko polje λ_A vrijedi:

$$\lambda_A = \mathring{\lambda}_A + \gamma_A, \quad \gamma_A = O(r^{-2})$$

Gdje je $\mathring{\lambda}_A$ neki proizvoljan konstantan spinor. U slučaju više krajeva namećemo ovaj zahtjev na **jednom** kraju na kojem trenutno radimo, a na ostalima zahtjevamo da vrijedi $\lambda_A = 0$. Tako je svakom kraju pridružene spinorsko polje $\lambda_A^{(k)}$ te diferencijalna forma (i pripadna vanjska derivacija) $\mathbf{\Omega}^{(k)}$ određena jednadžbama (3.3.1) i (3.3.2) uz zamjenu $\lambda_A \to \lambda_A^{(k)}$. Dokaz se nastavlja na isti način s provjeravanjem pozitivnosti integranda $d\mathbf{\Omega}^{(k)}$ za svaki kraj U_k.

4 Teoremi i otvoreni problemi

U ovom poglavlju navodimo neke glavne rezulate iz ovog područja istraživanja. Najviše proučavana je Penroseova nejednakost (2.2.6) koja, kao što smo već napomenuli, vrijedi i bez zahtjeva na simetriju. Glavne dokaze te nejednakosti napravili su Huisken i Ilmanen [9] te Bray [10] za Riemannove mnogostrukosti. U [9] korištena je metoda slabog toka inverzne usrednjene zakrivljenosti, dok je u [10] korišten upravo dokazani teorem o pozitivnosti mase. Slučaj Penroseove nejednakosti s angularnim momentom (2.2.13) znatno je manje istražen.

S druge strane, nejednakosti (2.2.5) i (2.2.7) nisu općenito dokazane. Napredak je napravljen u obliku teorema s određenim zahtjevima na simetrije crnih rupa. Za (2.2.7) imamo sljedeći dokazani teorem

Teorem 4.1. *Neka je zadan osnosimetričan, asimptotski ravan i maksimalan početni skup podataka s dva asimptotska kraja. Neka su M i J ukupna masa i angularni moment na jednom od krajeva. Tada vrijedi sljedeća njednakost:*

$$\sqrt{|J|} \leq M \text{ (=Ekstremalna Kerrova c.r.)} \tag{4.0.1}$$

Za kvazilokalnu nejednakost (2.2.5) imamo:

Teorem 4.2. *Neka je zadana osnonosimetrična, zatvorena, marginalno zatočena i stabilna površina Σ u prostorvremenu s nenegativnom kozmološkom konstantom koje zadovoljava dominantni uvjet na energiju. Tada vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$8\pi|J| \leq A \text{ (=Ekstremalni Kerrov horizont)} \tag{4.0.2}$$

gdje su A i J površina i angularni moment površine Σ

Ovaj teorem, za razliku od prvog koji je bio u potpunosti globalan (ukupna masa i angularni moment u prostorvremenu), je u potpunosti lokalan rezultat. Točnije ne spominje se nikakva trodimenzionalna mnogostrukost u koju je hiperploha Σ uronjena. Također, ne spominje se vakuum kao pretpostavka teorema. Dapače, nejednakost vrijedi i kada polja materije imaju angularni moment koji mogu izmjenjivati s crnom rupom. Ne postoji jedinstveni članak u kojemu je Teorem 4.2 dokazan, već je nadopunjavan kroz niz članaka umanjivanjem jačine pretpostavki teorema. Stoga, za povijesni kontekst i uvid u reference upućujemo na [7].

Intersantno je što se pretpostavlja [12] da nejednakost oblikom sličnu (2.2.7) moraju zadovoljavati **sva** tijela, a ne samo crne rupe. Neka je U rotirajuće tijelo s angularnim momentom $J(U)$ te mjerom veličine $R(U)$ u jedinicama duljine. Tada se vjeruje da vrijedi:

$$R^2(U) \gtrsim \frac{G}{c^3}|J(U)| \tag{4.0.3}$$

Znak za nejednakost odabran je kako bi simbolizirao da se radi o nejednakosti između redova veličine dok se ne fiksiraju konstante prilikom odabira mjere veličine $R(U)$.

Na poslijetku ćemo nabrojati otvorene probleme u području geometrijskih nejednakosti fizikalnih parametara crnih rupa. Za globalnu nejednakost (2.2.5) postoje dva glavna otvorena problema koji se bave generalizacijom pretpostavki Teorema 4.1:

1. Uklanjanje maksimalnog uvjeta

2. Generalizacija za asimptotski ravne mnogostrukosti s više krajeva

Postignuto je ublaženje pretpostavke maksimalnost početnog skupa podataka u [14], dok se za 2. se vjeruje da je rješiv poblem jer se i na takva prostorvremena apliciraju fizikalni argumenti prezentirani u poglavlju 1.4, a pronađene su i numeričke potvrde [13] za neke slučajeve. Jedan od problema predstavlja i:

3. Dokaz Penroseove nejednakosti koja uključuje angularni moment (2.2.13)

te na poslijetku problemi vezani uz nejednakost (2.2.7) i Teorem 4.2:

4. Generalizacija nejednakosti (2.2.7) bez osne simetrije

5. Generalizacija nejednakosti (2.2.7) na obična tijela

Ako se na trenutak vratimo na (1.4.10) možemo se podsjetiti da smo angularni moment definirali koristeći rotacijski Killingov vektor R^ν. Razlog zbog kojeg 4. predstavlja toliki problem je iz razloga što u odsustvu osne simetrije ne postoji rotacijski Killingov vektor, a samim time ni dobro definiran kvazilokalni angularni moment. Problem 4. tako se svodi na matematički izazov definiranja adekvatnog angularnog momenta u općenitom slučaju. Za više detalja o problemu 5. referiramo se na [12].

5 Zaključak

Počevši od Kerrovog rješenja Einsteinove jednadžbe uz pretpostavku kozmičke cenzure došli smo do skupa nejednakosti (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) koje smo zatim, prateći pojednostavljen Penroseovu argumentaciju, poopćili na dinamičke osnosimetrične crne rupe. Nakon toga uveli smo osnovne alate potrebne za razumijevanje Wittenovog dokaza teorema o pozitivnosti mase koji smo i dokazali. Na poslijetku smo naveli neke dokazane teoreme i otvorene probleme u području geometrijskih nejednakosti fizikalnih parametara crnih rupa. Može biti zbunjujuće zašto su nam od interesa bili teoremi koji s naoko jačim pretpostavkama pokazuju ono što je Penrose uspio pokazati bez pretpostavki na simetriju sustava. Razlog tome je što se Penroseova dedukcija velikim dijelom oslanjala na hipotezu kozmičke cenzure koja, iako fizikalno razumna, sama nije potvrđena. Tako bi dokazivanje navedenih nejednakosti u općenitim slučajevima bez oslanjanja na hipotezu kozmičke cenzure moglo poslužiti kao svojevrstan dokaz hipoteze koja nas je fizikalnom intuicijom dovela do istih zaključaka. Svi ovi problemi ostavljaju niz otvorenih pitanja, ali uz dosad ostvarene napretke mala je vjerojatnost da će njihovi odgovori još dugo ostati neodgonetnuti.

Bibliography

[1] Ivica Smolić: A brief introduction to spinor formalism in general relativity. Coffee & Chalk Press, 2020.

[2] R. Penrose: *Naked singularities*, Ann. New York Acad. Sci.,224:125-134, 1973.

[3] Blaschke, Wilhelm: *Die Grundlehren der Mathematischen* Wissenschaften. Berlin: Springer Verlag, 1950. Print.

[4] Suzana Bedić: *Kosa crnih rupa*, PMF 2016.

[5] Sean M. Carroll: *Spacetime and Geometry*, Pearson Education 2018.

[6] Robert M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago. 1984.

[7] Sergio Dain: *Geomeric inequalities for black holes*

[8] Sergio Dain: *Geomeric inequalities for axially symmetric black holes*

[9] G.Huisken,T. Ilmanen: *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, J. Differential geometry, 59:352-437, 2001.

[10] H. L. Bray: *Proof of the Riemannia Penrose conjecture using the positive mass theorem*, J. Differential Geometry, 59:177-267, 2001.

[11] S. Dain: *Proof of the angular momentum-mass inequality for axially symmetric black holes*, J. Differential Geometry, 79(1):33-67, 2008, gr-qc/0606105

[12] S. Dain: *Inequality between size and angular momentum for bodies*, Phys. Rev. Lett., 112:041101, Jan 2014, 1305.6645

[13] S. Dain, O.E. Ortiz: *Numerical evidences for the angular momentum mass inequality for multiple axially symmetric black holes*, Phys. Rev., D80:024045, 2009, 0905.0708

[14] X. Zhou: *Mass angular momentum inequality for axisymmetric vacuum data with small trace*, ArXiv e-prints, Sept. 2012,1209.1609

[15] A. Sen: *On the existence of neutrino "zero-modes" in vacuum spacetimes*, Journal of Mathematical Physics, 22(8):1781–1786, 1981.

[16] E. Witten: *A new proof of the positive energy theorem*, Communications in Mathematical Physics, 80:381–402, 1981. 10.1007/BF01208277.

[17] J. Stewart: *Advanced general relativity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press 1991.

[18] T. Parker, C. H. Taubes: *On Witten's proof of the positive energy theorem* Commun. Math. Phys., 84(2):223–238, 1982.

[19] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis: *The largle scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.