

# Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja u laboratorijskom sustavu

---

**Rudec, Dario**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:903295>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Dario Rudec

Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja u  
laboratorijskom sustavu

Diplomski rad

Zagreb, 2020.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Dario Rudec**

Diplomski rad

**Sjena odbojnog Rutherfordovog  
raspršenja u laboratorijskom sustavu**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Petar Žugec

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Petru Žugecu što je pristao sa mnom raditi ovu iznimno zanimljivu i izazovnu temu.

Zahvaljujem Mateu Forjanu na strpljenju i instrukcijama bez kojih bi studiranje bilo znatno teže.

## Sažetak

U ovom radu računa se i analizira sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja. Rad je generalizacija prijašnjeg rada kolege Topića [1], koji se bavio analiziranjem sjene u sustavu mirne mete i u sustavu centra mase. U ovom se radu analiza sjene poopćuje na kogibajući inercijalni sustav koji se giba paralelno početnoj brzini projektila. Prvo se izlaže pregled rezultata potrebnih za proračune u ovom radu, zatim se izvodi putanja projektila u kogibajućem sustavu koristeći izraz za putanju u sustavu mirne mete. U detalje se izvodi dobivanje putanje projektila. Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja određuje se numerički pomoću programskog paketa Python. Za razliku od sustava mirne mete i sustava centra mase, u kogibajućem sustavu neće uvijek postojati sjena. Navode se uvjeti na brzine nužni za nastajanje sjene. Detaljno se prikazuje i postupak dobivanja sjene za jako malene i jako velike vrijednosti radijalne koordinate. Pokazuje se da za velike vrijednosti radijalne koordinate sjena izgleda kao parabola. Analiziraju se kutovi raspršenja u ovisnosti o brzini gibanja kogibajućeg sustava te početnoj brzini projektila. Određuje se i raspon kuteva raspršenja ovisno o brzinama.

Ključne riječi: sjena, Rutherfordovo raspršenje, sustav fiksne mete, sustav centra mase, laboratorijski sustav, kutovi raspršenja.

# Shadow of repulsive Rutherford scattering in laboratory frame

## Abstract

In this work, the shadow of repulsive Rutherford scattering is calculated and analyzed. The work is generalization of previous work by colleague Topić [1] where the shadow analysis in the center-of-mass frame and the fixed-target frame was performed. Shadow analysis is generalized to the laboratory frame, moreover to the entire class of inertial frames moving parallel to the initial projectile velocity. First, the results to be used later in derivations are introduced. After that, projectile trajectory in the inertial frame is derived using expression for projectile trajectory in fixed-target frame. Shadow of repulsive Rutherford scattering is calculated numerically using Python. In the inertial frame there will be a condition on velocities for shadow existence. Therefore, the conditions on velocities for shadow existence are shown. The procedure for obtaining shadow for very small and very large values of radial coordinate is presented in detail. It is shown that for large values of radial coordinate, shadow is parabolic in shape. Additionally, dependency of scattering angles on inertial frame velocity and projectile initial velocity is examined. Furthermore, range of scattering angles is determined.

Keywords: shadow, Rutherford scattering, fixed-target frame, center of mass frame, laboratory frame, scattering angle.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorijski uvod</b>	<b>2</b>
2.1	Putanja u sustavu mirne mete . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Putanja projektila u kogibajućem sustavu</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja u kogibajućem sustavu</b>	<b>12</b>
4.1	Laboratorijski sustav . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Vrijednost sjene u graničnim vrijednostima</b>	<b>14</b>
5.1	Položaj tjemena sjene . . . . .	14
5.2	Asimptotski oblik sjene . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Kutovi raspršenja</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>22</b>
	<b>Literatura</b>	<b>23</b>



# 1 Uvod

Ernest Rutherford je 1911. [3], promatrajući rezultate eksperimenata koje su pod njegovim vodstvom radili Geiger i Marsden [4], postavio novi model atoma koji se razlikovao od prijašnjeg Thomsonovog modela atoma. Proslavljeni eksperiment proveo se tako što se  $\alpha$  česticama gađala tanka zlatna folija. Po Thomsonovom modelu, sve bi čestice trebale proći kroz foliju. No iz eksperimenta se vidjelo da su se neke  $\alpha$  čestice odbile unazad. Rutherford je po tomu zaključio da Thomsonova pretpostavka o ravnomjerno raspoređenom pozitivnom i negativnom naboju nije točna. Tvrdio je kako je pozitivan naboj sav koncentriran u relativno malenom središtu atoma koje se naziva jezgrom. Time je otvoreno cijelo jedno novo područje: nuklearna fizika.

Raspršenje  $\alpha$  čestica na jezgrama nekog atoma primjer je elastičnog raspršenja, nazvanog Rutherfordovo raspršenje. Rutherfordovo raspršenje podrazumijeva slučajeve i privlačnog i odbojnog kulonskog potencijala.

U ovom radu tema će biti Rutherfordovo raspršenje u odbojnom kulonskom potencijalu. Centralni dio rada bit će proučavanje sjene i svojstava sjene. Sjena je dio prostora nedostupan čestici koja sudjeluje u Rutherfordovom raspršenju. Odmah je jasno da pojam sjene ima smisla samo za odbojni kulonski potencijal. Za privlačni kulonski potencijal projektil se može kontinuirano približavati meti dok se putanje ne savinu oko mete brišući na taj način cijeli prostor. Pojam sjene najčešće je usputno spominjan u literaturi bez da mu je dano previše pažnje. Izuzeci su Sommerfeldov udžbenik mehanike [5] i rad Burgdorfera [6]. U tim slučajevima ukratko je naveden oblik sjene. Nešto detaljnije sjena je analizirana u radu kolege Topića [1].

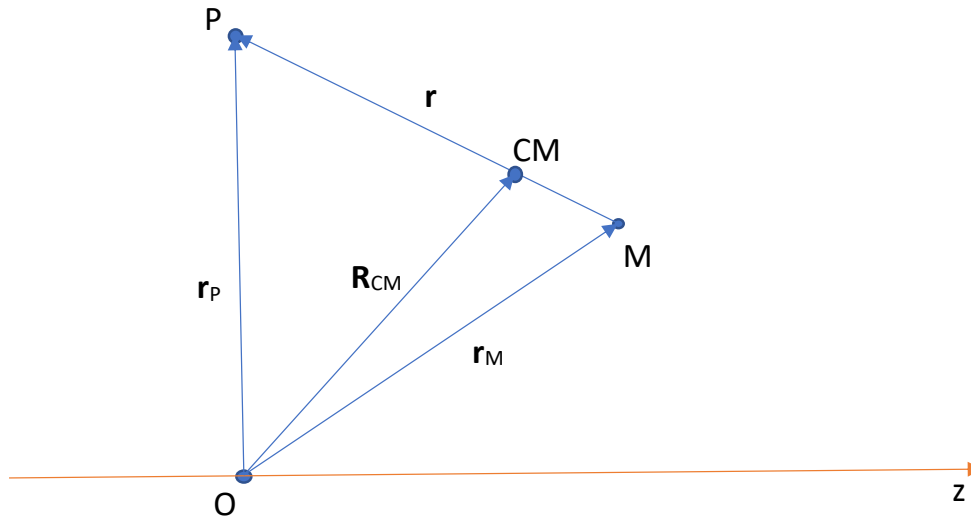
Nadalje, zanimljivo je da čak i u tom radu nije izveden i analiziran oblik sjene u laboratorijskom odnosno općenitijem inercijalnom sustavu. Jedino spominjanje sjene u laboratorijskom sustavu nalazi se u radu John W. Adolpha [7]. No u tom se radu samo navodi kako je iznimno teško dobiti uopće putanje projektila u laboratorijskom sustavu, a kamoli jednadžbu sjene. Istaknuto je kako dobivanje putanja projektila u laboratorijskom sustavu izlazi iz opsega njihova proučavanja te da je problem daleko kompliciraniji, što će se itekako pokazati istinitim u ovom radu.

Cilj ovoga rada je izračunati putanje projektila u laboratorijskom sustavu te proučiti sjenu i njezina svojstva.

## 2 Teorijski uvod

Putanje projektila i mete opisuju se pomoću vektora relativnog položaja i pomoću vektora centre mase. Vektor relativnog položaja jednak je u svim sustavima.

Na slici 2.1 prikazani su vektori u koordinatnom sustavu. Gibanja projektila i mete



Slika 2.1: Odnosi pozicija projektila, mete te vektori relativnog položaja i vektor centra mase.

odvijat će se u ravnini zbog očuvanja kutne količine gibanja kao vektorske veličine. Prema tome, za opis putanja i sjene dovoljan je dvodimenzionalni sustav pomoću cilindričnih  $\rho - z$  koordinata. Vektor relativnog položaja dan je s:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M, \quad (2.1)$$

gdje su  $\mathbf{r}_P$  i  $\mathbf{r}_M$  redom vektori položaja projektila i mete. Položaj centra mase dan je s:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{m_P \mathbf{r}_P + m_M \mathbf{r}_M}{m_P + m_M}, \quad (2.2)$$

gdje su  $m_P$  i  $m_M$  redom mase projektila i mete. Radi jednostavnosti uvode se dva nova parametra (pokrata):

$$\eta_P = \frac{m_P}{m_P + m_M}, \quad (2.3)$$

i

$$\eta_M = \frac{m_M}{m_P + m_M}. \quad (2.4)$$

Formulu (2.2) sada možemo pisati:

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \eta_{\text{P}} \mathbf{r}_{\text{P}} + \eta_{\text{M}} \mathbf{r}_{\text{M}}. \quad (2.5)$$

Preko vektora relativnog položaja i vektora centra mase izrazi se vektor projektila:

$$\mathbf{r}_{\text{P}} = \mathbf{R}_{\text{CM}} + \eta_{\text{M}} \mathbf{r}. \quad (2.6)$$

U početnom trenutku, meta se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava. Projektil je u početnom trenutku na položaju  $\mathbf{r}_{\text{P}}(t = 0) = -\lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 \hat{\mathbf{z}} + \rho_0 \hat{\boldsymbol{\rho}}$ . Pri tome ćemo pozitivnim parametrom  $z_0$  na formalno ispravan način držati beskonačnosti pod kontrolom. Uvrsti li se to u izraz za položaj centra mase, dobije se izraz za položaj centra mase u početnom trenutku:

$$\mathbf{R}_{\text{CM}}(t = 0) = -\eta_{\text{P}} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 \hat{\mathbf{z}} + \eta_{\text{P}} \rho_0 \hat{\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.7)$$

Kako bi se problem prebacio u kogibajući sustav, moramo centru mase dati neku brzinu u odnosu na promatrača. Pozicija centra mase koji se giba brzinom  $v$  u  $\hat{\mathbf{z}}$  smjeru dana je s:

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \mathbf{R}_{\text{CM}}(t = 0) + vt \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.8)$$

Raspišu li se komponente po koordinatnim osima, dobije se:

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = (-\eta_{\text{P}} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 + vt) \hat{\mathbf{z}} + \eta_{\text{P}} \rho_0 \hat{\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.9)$$

Raspiše li se i vektor relativnog položaja po  $z$  i  $\rho$  koordinatama, za putanju projektila dobije se:

$$\mathbf{r}_{\text{P}} = (-\eta_{\text{P}} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 + vt + \eta_{\text{M}} r \cos \theta) \hat{\mathbf{z}} + (\eta_{\text{P}} \rho_0 + \eta_{\text{M}} r \sin \theta) \hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.10)$$

gdje je kut  $\theta$  definiran kao kut koji zatvaraju vektor relativnog položaja i z-os koordinatnog sustava. Važno je istaknuti da ovako definirani kut  $\theta$  nije koordinata sustava. Kako bi se dobila putanja projektila kao funkcija samo od  $\theta$ , preostalo je još izraziti vrijeme preko kuta  $\theta$  te u jednadžbu (2.10) uvrstiti izraz relativnog položaja (putanju u sustavu mirne mete) izračunat u [1].

## 2.1 Putanja u sustavu mirne mete

Sustav mirne mete definiran je tako da meta tokom cijelog sudara miruje u ishodištu koordinatnog sustava, pa je prema tome vektor relativnog gibanja mete i projektila u sustavu mirne mete vektor putanje projektila. Gibanje projektila opisano je sljedećom jednadžbom gibanja:

$$m_P \ddot{\mathbf{r}}_P = \frac{Z_P Z_M e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.11)$$

gdje su  $Z_P$  i  $Z_M$  nabojni brojevi projektila i mete. Odnosno, nakon pažljivih koordinatnih transformacija provedenih u [1], dobije se jednadžba relativnog gibanja:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{Z_P Z_M e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.12)$$

u kojoj se pojavljuje reducirana masa  $\mu$ . Jednadžba (2.12) u sfernom sustavu ima oblik:

$$\mu(\ddot{r} - r\ddot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{Z_P Z_M e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.13)$$

Rješavanjem diferencijalne jednadžbe (2.13) dobije se putanja projektila. Postoje različite forme za putanju projektila u sustavu mirne mete, koje se dobiju jedna iz druge koristeći trigonometrijske identitete. Radi kompletnosti, navode se tri forme koje će se koristiti za dobivanje putanja i sjena.

$$\tilde{r}(\theta; \tilde{\rho}_0) = \frac{\tilde{\rho}_0^2}{\sqrt{1 + \tilde{\rho}_0^2 \sin[\theta - \arctan(1/\tilde{\rho}_0)]} - 1}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{r}(\theta; \tilde{\rho}_0) = \frac{\tilde{\rho}_0^2}{\tilde{\rho}_0 \sin \theta - (1 + \cos \theta)}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{r}(\theta; \tilde{\rho}_0) = \frac{\tilde{\rho}_0^2}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1)}. \quad (2.16)$$

U gornjim su jednadžbama sve veličine iznad kojih je znak tilda ( $\tilde{\rho}_0 = \rho_0/\chi$ ,  $\tilde{r} = r/\chi$ ) bezdimenzionalne, odnosno podijeljene s prirodnom skalom:

$$\chi = \frac{Z_P Z_M e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2}, \quad (2.17)$$

gdje je  $\rho_0$ , podsjećamo, početni odmak projektila od z-osi.

### 3 Putanja projektila u kogibajućem sustavu

Kako bi se dobila putanja projektila kao funkcija samo od  $\theta$  moramo vrijeme iz jednadžbe (2.10) izraziti preko kuta  $\theta$ . Može se krenuti od veličine:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

U [1, 2] pokazano je da:

$$l = -r^2 \dot{\theta}, \quad (3.2)$$

gdje je  $l$  konstanta koja se određuje iz početnih uvjeta:

$$l = \rho_0 v_0. \quad (3.3)$$

U jednadžbi (3.2) minus dolazi od vektorskog produkta, a kvalitativno se može razumjeti da se kut  $\theta$  smanjuje s vremenom. Diferencijalna jednadžba pripremi se za separaciju:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{l}{r^2}. \quad (3.4)$$

Separiraju li se varijable, slijedi:

$$r^2 d\theta = -l dt. \quad (3.5)$$

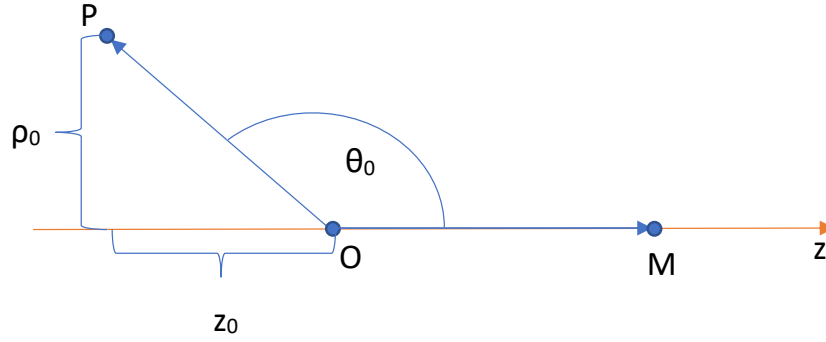
Integriraju se i jedna i druga strana od nekog početnog trenutka  $t = 0$  u kojemu je početni kut  $\theta_0 = \pi - \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \arctan \frac{\rho_0}{z_0}$  što se jasno vidi sa slike 3.1. U limesu kada  $z_0$  teži u beskonačnost početni kut svodi se na:

$$\theta_0 = \pi - \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{\rho_0}{z_0}, \quad (3.6)$$

što predstavlja donju granicu integracije po kutu. Koristeći formulu (2.16) za relativni položaj, dobiva se integralna jednadžba:

$$\lim_{z_0 \rightarrow \infty} \int_{\pi - \frac{\tilde{\rho}_0}{z_0}}^{\theta} \left( \frac{\tilde{\rho}_0^2}{2 \cos^2 \frac{\theta'}{2} (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta'}{2} - 1)} \right)^2 d\theta' = -\frac{l}{\chi^2} \int_0^t dt'. \quad (3.7)$$

Desna strana jednakosti svodi se na  $\frac{l}{\chi^2} t$ , odnosno, pozivom na (3.3), desna se strana svodi na  $-\frac{\rho_0 v_0 t}{\chi^2}$ . Primitivnu funkciju podintegralne funkcije s lijeve strane označavamo



Slika 3.1: Odnosi kuta  $\theta_0$ , udarnog parametra  $\rho_0$  i  $z_0$ .

s  $I$ :

$$I(\theta) = \int^{\theta} \left( \frac{\tilde{\rho}_0^2}{2 \cos^2 \frac{\theta'}{2} (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta'}{2} - 1)} \right)^2 d\theta'. \quad (3.8)$$

Antideriviranjem dobiva se sljedeća funkcija:

$$I(\theta) = -(\tilde{\rho}_0 \cos \theta + \sin \theta) \tilde{r}(\theta) + \tilde{\rho}_0 \ln \left[ \left( \tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1 \right) \right]. \quad (3.9)$$

Uvrštavanjem donje granice dobije se:

$$\lim_{z_0 \rightarrow \infty} I \left( \pi - \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{z}_0} \right) = - \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \left[ \tilde{\rho}_0 \cos \left( \pi - \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{z}_0} \right) + \sin \left( \pi - \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{z}_0} \right) \right] \tilde{r} \left( \pi - \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{z}_0} \right) + \tilde{\rho}_0 \ln \left[ \tilde{\rho}_0 \tan \left( \frac{\pi - \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{z}_0}}{2} - 1 \right) \right]. \quad (3.10)$$

Nakon što se (3.9) i (3.10) uvrste u lijevu stranu jednadžbe (3.7), te se izraz sredi, dobije se ovisnost vremena o kutu  $\theta$ :

$$t = \frac{\chi}{\tilde{\rho}_0 v_0} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \left[ (\tilde{\rho}_0 \cos \theta + \sin \theta) \tilde{r}(\theta) + \tilde{\rho}_0 \tilde{z}_0 - \tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_0 \ln \left( \frac{\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1}{\tilde{\rho}_0 \frac{1}{\tan \frac{\tilde{\rho}_0}{2\tilde{z}_0}} - 1} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Sada su napokon poznate sve veličine potrebne za opisivanje putanje projektila te je izraženo vrijeme preko kuta između vektora položaja i  $z$ -osi koordinatnog sustava. Uvrste li se (2.16) i (3.11) natrag u (2.10) dobije se vektor položaja projektila.

Putanja projektila parametrizirana je sfernim kutom  $\theta$  iz sustava mirne mete. Jednostavnije je i zornije raditi u cilindričnom sustavu, kako je već ranije rečeno. Prebačaj iz sfernog u cilindrični sustav vrši se na sljedeći način. Jednadžba (2.10) može se napisati na sljedeći način:

$$\tilde{\mathbf{r}}_p = \tilde{z}_p \hat{\mathbf{z}} + \tilde{\rho}_p \hat{\boldsymbol{\rho}}. \quad (3.12)$$

Iz (3.12) vidljivo je da je vektor položaja projektila rastavljen na dvije komponente u cilindričnom sustavu gdje je  $\tilde{z}_p$  z-komponenta dana s:

$$\tilde{z}_p = -\eta_p \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \tilde{z}_0 + \frac{vt}{\chi} + \eta_M \tilde{r} \cos \theta, \quad (3.13)$$

a  $\tilde{\rho}_p$  radijalna komponenta dana s:

$$\tilde{\rho}_p = \eta_p \tilde{\rho}_0 + \eta_M \tilde{r} \sin \theta. \quad (3.14)$$

Kako bi jednadžbe bile izražene u cilindričnom sustavu i kako bi se rezultati mogli grafički prikazati, treba se izračunati  $\tilde{z}_p$  u ovisnosti o  $\tilde{\rho}_p$ . Valja primjetiti da i  $\tilde{z}_p$  i  $\tilde{\rho}_p$  u sebi sadrže ovisnost o kutu  $\theta$ . Valjalo bi dakle izraziti  $\theta$  preko  $\tilde{\rho}_p$  te takav  $\theta$  uvrstiti u  $\tilde{z}_p$ . Kako bi se to izvelo što jednostavnije, uvede se pokrata:

$$\tilde{R}(\theta) = \tilde{r}(\theta) \sin \theta, \quad (3.15)$$

gdje se za  $\tilde{r}(\theta)$  odabire forma (2.16):

$$\tilde{R}(\theta) = \tilde{r}(\theta) \sin \theta = \frac{\tilde{\rho}_0^2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1)} = \frac{\tilde{\rho}_0^2 \tan \frac{\theta}{2}}{\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1}. \quad (3.16)$$

Odavde se za  $\tan \frac{\theta}{2}$  dobije:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\tilde{R}(\theta)}{\tilde{\rho}_0 (\tilde{R}(\theta) - \tilde{\rho}_0)}. \quad (3.17)$$

U izrazu za  $\tilde{z}_p$  pojavljuje se  $\tilde{r} \cos \theta$ , a kako je ranije ustanovljeno, potrebno je riješiti se kuta  $\theta$ . Za  $\tilde{r} \cos \theta$  slijedi:

$$\tilde{r} \cos \theta = \frac{\tilde{\rho}_0^2}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1)} \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\tilde{\rho}_0^2 (1 - \tan^2 \frac{\theta}{2})}{2 (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1)}. \quad (3.18)$$

Sada se jasno vidi zašto se u postupku istaknuo tangens kuta, a ne samo kut preko arkus funkcija. Funkcije sinus i kosinus jednostavno je izraziti preko tangensa polovičnog kuta što dovodi do jednostavnijih krajnjih formula. Za  $\tilde{r} \cos \theta$  naposljetku se dobije:

$$\tilde{r} \cos \theta = \frac{\tilde{\rho}_0^2 \left( \tilde{R}(\theta) - \tilde{\rho}_0 \right)^2 - \tilde{R}(\theta)^2}{2\tilde{\rho}_0 \left( \tilde{R}(\theta) - \tilde{\rho}_0 \right)}. \quad (3.19)$$

Kada se izraz (3.14) zapiše preko  $\tilde{R}(\theta)$ , za  $\tilde{\rho}_P$  dobije se:

$$\tilde{\rho}_P(\theta) = \eta_P \tilde{\rho}_0 + \eta_M \tilde{R}(\theta). \quad (3.20)$$

Odavde za  $\tilde{R}(\theta)$  slijedi:

$$\tilde{R}(\theta) = \frac{1}{\eta_M} \tilde{\rho}_P(\theta) - \frac{\eta_P}{\eta_M} \tilde{\rho}_0. \quad (3.21)$$

Konačan izraz za putanju čestice u cilindričnim koordinatama dobije se uvrštavanjem (3.11), (3.19) i (3.21) u (3.13):

$$\begin{aligned} \tilde{z}_P = \frac{v}{\tilde{\rho}_0 v_0} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} & \left[ \tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{\rho}_0^2 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)^2 - (\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0)^2}{2\tilde{\rho}_0 \eta_M (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)} + \frac{1}{\eta_M} \tilde{\rho}_P - \frac{\eta_P}{\eta_M} \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0 \tilde{z}_0 \right] - \\ & - \frac{v}{\tilde{\rho}_0 v_0} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \left[ \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0 \ln \left( \frac{\tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)} - 1}{\tilde{\rho}_0 \frac{1}{\tan \frac{\tilde{\rho}_0}{2\tilde{z}_0}} - 1} \right) \right] - \\ & - \eta_P \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \tilde{z}_0 + \eta_M \frac{\tilde{\rho}_0^2 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)^2 - (\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0)^2}{2\tilde{\rho}_0 \eta_M (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pogleda li se pomno jednadžba (3.22) vidi se da postoje čak 3 pribrojnika koji u sebi sadrže beskonačni član te jedan pribrojnik koji ovisi samo o omjeru brzina:  $\frac{v}{v_0}$ . Beskonačni su članovi:  $\frac{v}{v_0} \tilde{z}_0$ ,  $-\eta_P \tilde{z}_0$ , te nešto složeniji član  $\frac{v}{v_0} \ln \left( \tilde{\rho}_0 \frac{1}{\tan \frac{\tilde{\rho}_0}{2\tilde{z}_0}} - 1 \right)$ . U limesu kada  $\tilde{z}_0$  teži u beskonačnost, prethodni izraz svodi se na:

$$\lim_{\tilde{z}_0 \rightarrow \infty} \ln \left( \tilde{\rho}_0 \frac{1}{\tan \frac{\tilde{\rho}_0}{2\tilde{z}_0}} - 1 \right) = \lim_{\tilde{z}_0 \rightarrow \infty} \ln (2\tilde{z}_0 - 1). \quad (3.23)$$

Jednadžba (3.22) raspisuje se u dva dijela: konačni dio koji ima funkcionalnu ovisnost o  $\tilde{\rho}_0$  i  $\tilde{\rho}_P$ , te dio koji sadrži beskonačne pribrojnike odnosno sadrži članove neovisne o  $\tilde{\rho}_0$  i  $\tilde{\rho}_P$ :

$$\tilde{z}_P = \tilde{Z} + \tilde{Z}_0, \quad (3.24)$$



gdje je sa  $\tilde{Z}_0$  dana suma beskonačnih pribrojnika:

$$\tilde{Z}_0 = \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{v}{v_0} [\tilde{z}_0 + \ln(2\tilde{z}_0)] - \eta_P \tilde{z}_0 \right\}, \quad (3.25)$$

Za  $\tilde{Z}$  preostaje:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = \frac{v}{\tilde{\rho}_0 v_0} & \left[ \tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{\rho}_0^2 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)^2 - (\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0)^2}{2\tilde{\rho}_0 \eta_M (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)} + \frac{1}{\eta_M} \tilde{\rho}_P \right] - \\ & - \frac{v}{\tilde{\rho}_0 v_0} \left[ \frac{\eta_P}{\eta_M} \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0 \ln \left( \tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)} - 1 \right) \right] + \\ & + \frac{\tilde{\rho}_0^2 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)^2 - (\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0)^2}{2\tilde{\rho}_0 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dobiveni izraz za  $\tilde{Z}$  jest izraz za putanju čestice u kogibajućem sustavu čije je ishodište pomaknuto za  $\tilde{Z}_0$ . Izraz je znatno složeniji od izraza za putanju čestice u sustavu mirne mete i sustavu centra mase. Za promatranje ovisnosti putanje o raznim parametrima korisno je uvesti parametar  $\nu$  definiran na sljedeći način:

$$\nu = \frac{v}{v_0 \eta_M}. \quad (3.27)$$

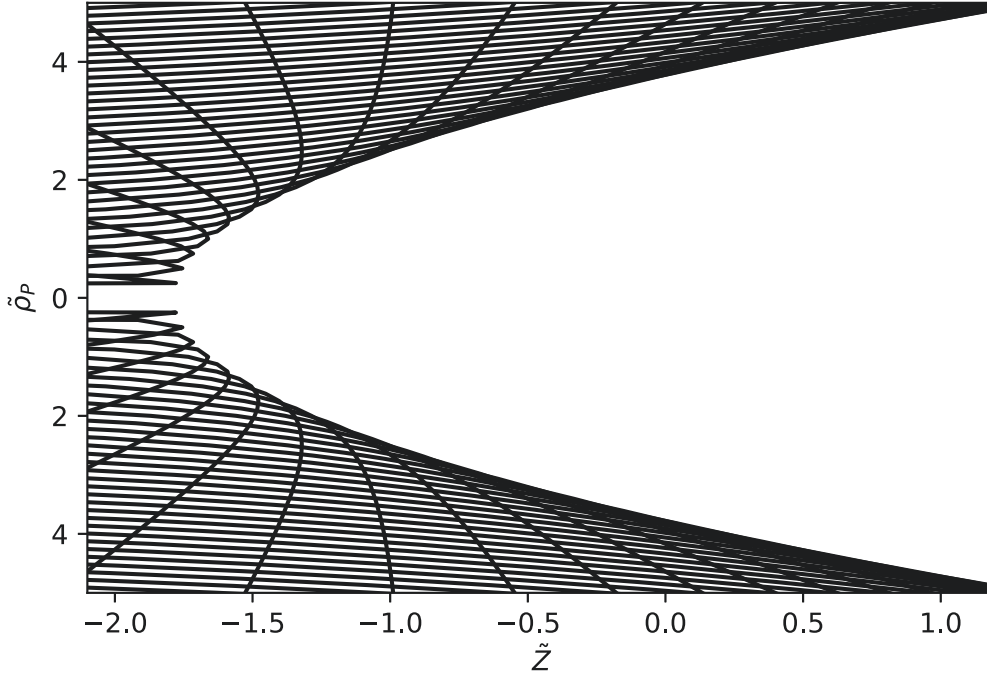
Bilo bi korisno pogledati slučaj kada je  $v = 0$  odnosno  $\nu = 0$ . Iz toga bi se trebala dobiti jednaka funkcijska ovisnost i jednake putanje kao i sustavu centra mase. Za  $\nu = 0$  jednadžba (3.26) prelazi u sljedeći oblik:

$$\tilde{Z}_{\nu=0} = \frac{\tilde{\rho}_0^2 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)^2 - (\tilde{\rho}_P - \eta_P \tilde{\rho}_0)^2}{2\tilde{\rho}_0 (\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)}. \quad (3.28)$$

Koristimo izraz za putanju projektila iz (2.16):

$$\tilde{r}(\theta; \tilde{\rho}_0) = \frac{\tilde{\rho}_0^2}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (\tilde{\rho}_0 \tan \frac{\theta}{2} - 1)}. \quad (3.29)$$

Kada se to raspiše u cilindričnom koordinatnom sustavu dobije se identičan izraz kao i (3.28). Pomoću programskog paketa Python se numerički izračunaju pa nacrtaju putanje za određene parametre. Za pokratu  $\eta_M$  odabire se  $\eta_M = 0.89$ . Iz toga slijedi:  $\eta_P = 0.11$ . Iako su koordinata  $\tilde{\rho}_P$  i udarni parametar definirani kao veći od nule, na slikama se prikazuju i zrcalne vrijednosti tih parametara kako bi se dobio bolji uvid u izgled sjene u prostoru. Na slici 3.2 prikazano je mnoštvo različitih dijelova putanja

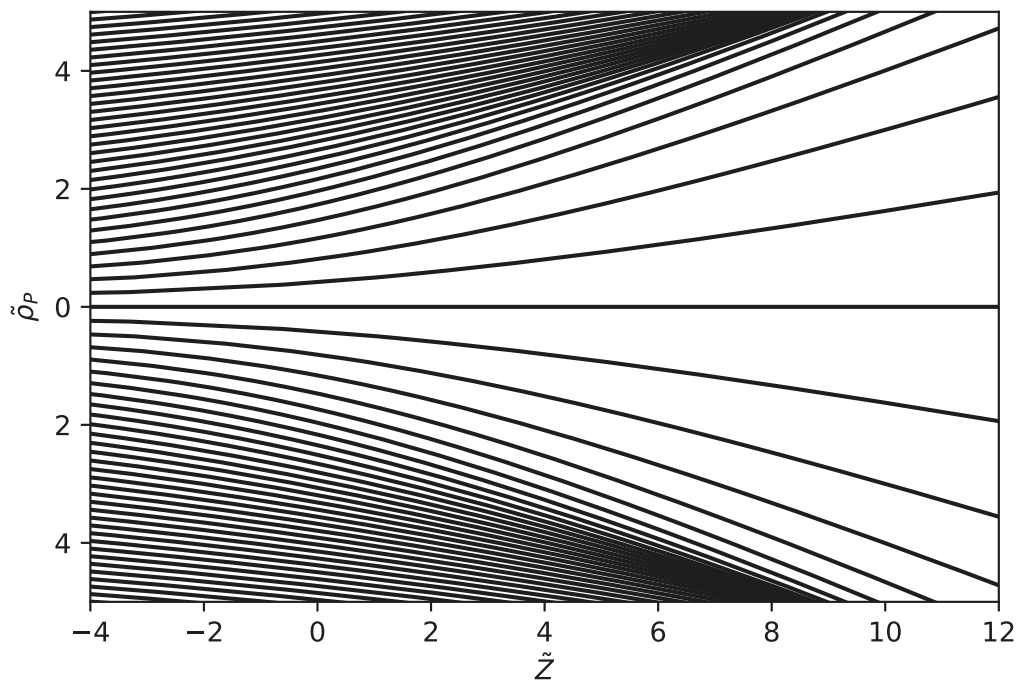


Slika 3.2: Dijelovi putanja projektila za različite udarne parametre uz  $\nu = 0$ .

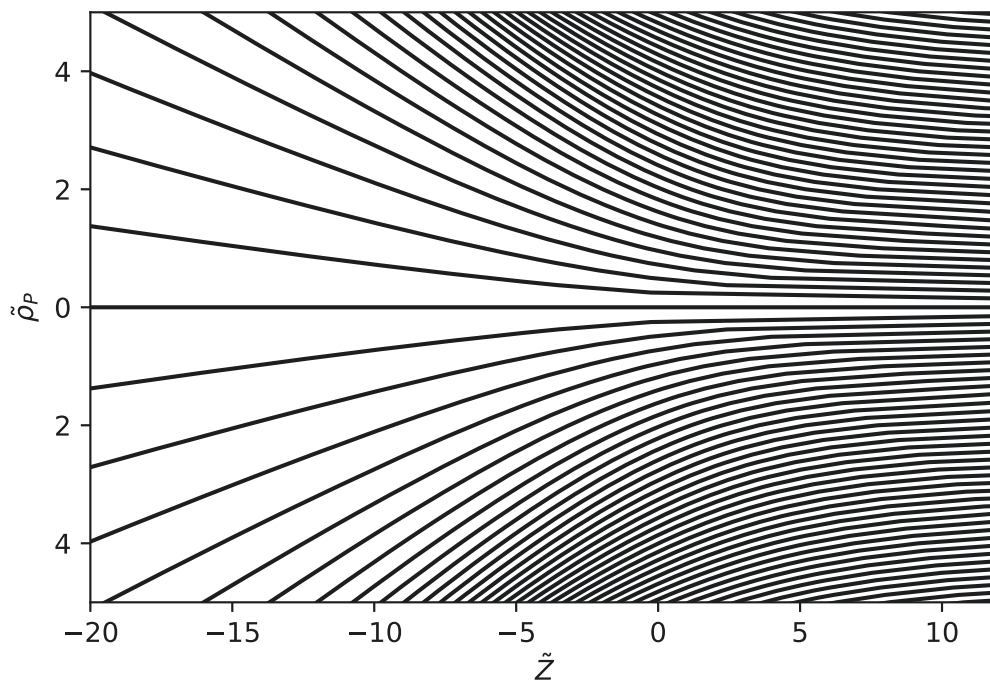
za različite udarne parametre. Za manje udarne parametre čestice se odbijaju unatrag. Za veće udarne parametre, čestice se blago otklone. Rezultat je sjena za koju se u [1, 2] pokazuje da je oblika parabole. Dijelovi putanja mogu se pogledati i za neke druge vrijednosti parametra  $\nu$ . Primjerice, može se pogledati kako izgledaju putanje ako je početna brzina projektila veća ili manja od brzine sustava centra mase. Parametar  $\eta_P = 0.11$  drži se konstantnim a ne mijenja se ni  $\nu$  za koji se odabere  $\nu = 2.25$ . Odabran je dakle sustav u kojemu će se sustav centra mase gibati brže od početne brzine projektila. Slika 3.3 sugerira da u tom slučaju ne dolazi do stvaranja sjene.

Uzmimo sada  $\nu = 2.25$ . To odgovara slučaju kada je iznos  $v$  veći od  $\eta_M v_0$ , no  $v$  je u suprotnom smjeru od  $v_0$ . Slika 3.4 sugerira da ni u slučaju  $\nu = -2.25$  ne dolazi do stvaranja sjene. Brzina projektila u sustavu centra mase kreće se između  $-\eta_M v_0$  i  $\eta_M v_0$ . Ako sustav ide brzinom koja je brža u bilo kojem smjeru, sve su putanje potisnute prema naprijed (ako je  $v > \eta_M v_0$ ) ili prema nazad (ako je  $v < -\eta_M v_0$ ) što se posebno vidi iz središnje putanje za  $\tilde{\rho}_0 = 0$ . Slijedi da sjena postoji i računa se za  $\nu$  u intervalu:

$$-1 \leq \nu \leq 1. \quad (3.30)$$



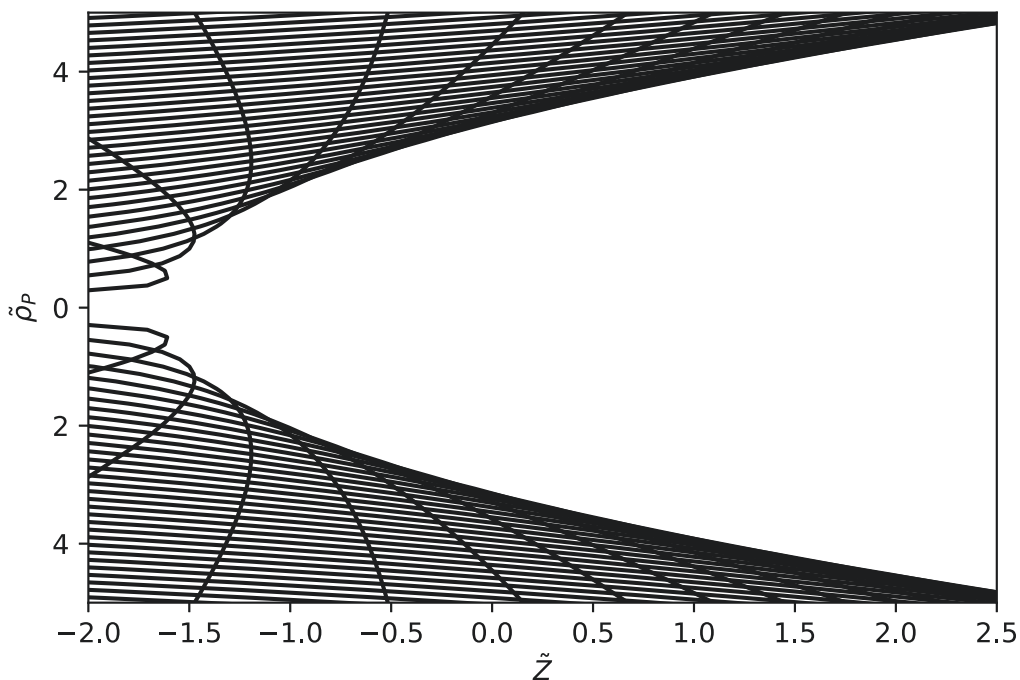
Slika 3.3: Dijelovi putanja projektila za različite udarne parametre uz  $\nu = 2.25$ .



Slika 3.4: Dijelovi putanja projektila za različite udarne parametre uz  $\nu = -2.25$ .

## 4 Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja u kogibajućem sustavu

Nakon izvoda putanja čestica u laboratorijskom sustavu normalno je zapitati se zašto se sjena nije jednostavno mogla dobiti Galileijevom transformacijom iz sustava mirne mete. Odnosno zašto se sjena ne bi jednostavno gibala kao parabola koja bi putovala brzinom sustava centra mase. Odgovor se mogao naslutiti u prethodnom poglavlju. Naime, kada bismo sjenu pokušali dobiti Galileijevom transformacijom, onda bismo sjenu imali za svaki omjer brzina  $v$  i  $v_0$ , a u prethodnom je poglavlju pokazano da to nije slučaj. Odabere li se  $\nu$  između -1 i 1, dobije se sjena slična sjeni na slici 3.2. U sustavu mirne mete i u sustavu centra mase, sjena je paraboličnog oblika kao što je pokazano u [1, 2]. Za odabranu vrijednost  $\nu = 0.56$  i  $\eta_M = 0.89$  dobije se sjena različita od sjene koja se dobije u sustavu centra mase kada je  $\nu = 0$  slika 4.1. Golim okom, ne vidi se hoće li funkcijska ovisnost sjene biti drugačija od parabolične.



Slika 4.1: Dijelovi putanja projektila za različite udarne parametre uz  $\nu = 0.56$  i  $\eta_M = 0.89$ .

Kako bi se saznao oblik sjene, provodi se egzaktan postupak dobivanja sjene. Za početak je potrebno ekstremizirati  $\tilde{Z}$  u odnosu na udarni parametar  $\tilde{\rho}_0$ . Za početak

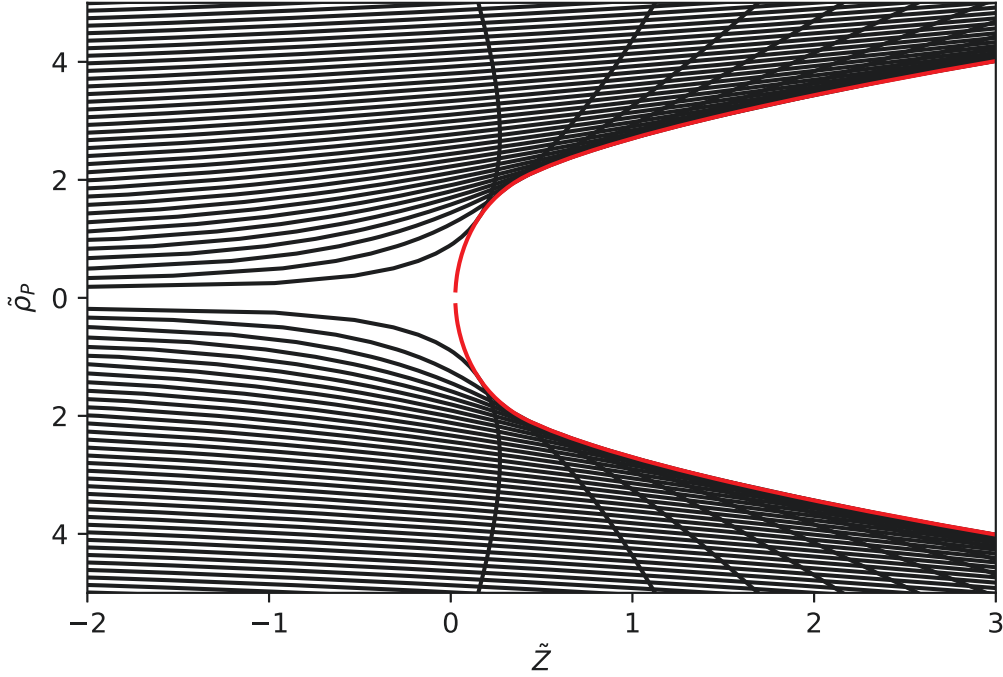
se  $\tilde{Z}$  derivira po udarnom parametru  $\tilde{\rho}_0$  te se derivacija izjednači s nulom. To se može izvršiti analitički iz uvjeta  $\left. \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_0} \right|_{\tilde{\rho}_0} = 0$ . Za vrijednost  $\tilde{\rho}_0$  koja rješava prethodni ekstremizacijski problem dobije se jednačba:

$$\begin{aligned}
& -2(v + v_0\eta_M)\tilde{\rho}_0^5 + 5\tilde{\rho}_P(v + v_0\eta_M)\tilde{\rho}_0^4 - 4\tilde{\rho}_P^2(v + v_0\eta_M)\tilde{\rho}_0^3 + \\
& + [\tilde{\rho}_P^3(v + v_0\eta_M) + \tilde{\rho}_P\eta_P(-v\eta_P + v_0\eta_M(\eta_M + 1))] \tilde{\rho}_0^2 + 2\tilde{\rho}_P(v\eta_P - v_0\eta_M)\tilde{\rho}_0 + \\
& + \tilde{\rho}_P^3(v - v_0\eta_M) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Iz ovako dobivene jednačbe, izrazi se  $\tilde{\rho}_0$  preko  $\tilde{\rho}_P$ . U ovom koraku nastaje problem. Naime općeniti polinom petog stupnja nema rješenje u zatvorenoj formi elementarnih funkcija. Zbog toga se rješenje polinoma petog stupnja za pojedini skup parametara rješava numerički. Tako dobiveni udarni parametri vrte se u izraz za putanju čestica (3.26). Ta novodobivena veličina predstavlja jednačbu sjene:  $\tilde{Z}(\tilde{\rho}_P) = \tilde{Z}(\tilde{\rho}_P, \tilde{\rho}_0(\tilde{\rho}_P))$ . U određenim slučajevima (za neke vrijednosti  $\tilde{\rho}_P$ ) postoje višestruka realna rješenja za  $\tilde{\rho}_0$ . Indeksiramo li ta višestruka rješenja s  $i$ , numerička analiza pokazuje da je sjena dana izrazom  $\tilde{Z}(\tilde{\rho}_P) = \max_i \tilde{Z}(\tilde{\rho}_P, \tilde{\rho}_0^{(i)}(\tilde{\rho}_P))$ .

## 4.1 Laboratorijski sustav

Laboratorijski sustav je onaj kogibajući sustav u kojem meta u početnom trenutku miruje. Ovaj uvjet određuje faktor  $\nu^{(\text{lab})}$  kao:  $\nu^{(\text{lab})} = \frac{\eta_P}{\eta_M}$ . Za prikazati primjer sjene u laboratorijskom sustavu izabiremo vrijednost  $\eta_P = 0.48$ . Nacrtaju li se pripadne putanje i sjena za navedene parametre dobije se slika 4.2. Sa slike se odmah vidi slaganje dobivene krivulje (izračunata sjena, označena crvenom bojom) sa sjenom putanja projektila. Putanja dakako nije paraboličnog oblika. Sa slike se još vidi da nedostaju i putanje čestica za udarni parametar jednak nuli. Također nedostaje i vrijednost sjene u točki  $\tilde{\rho}_P = 0$ . Dosadašnjim metodama, vrijednosti putanja i sjene u nuli nisu jednostavne za iskonstruirati (problem je u tome što se dobije neodređeni izraz). Ovom problemu posvetit ćemo se u sljedećem poglavlju.



Slika 4.2: Sjena putanja označena crvenom bojom poklapa se s rubovima putanja čestica.

## 5 Vrijednost sjene u graničnim vrijednostima

### 5.1 Položaj tjemena sjene

Dosadašnjim metodama, moguće je dobiti vrijednost sjene za jako male  $\tilde{\rho}_0$  ali ne i za sami  $\tilde{\rho}_0 = 0$ . Kako bismo odredili granično ponašanje rješenja  $\bar{\rho}_0$  u limesu  $\tilde{\rho}_P \rightarrow 0$  koristit ćemo dosjetljivo rješenje. Pretpostavljamo ansatz:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \bar{\rho}_0 = \alpha \tilde{\rho}_P^\beta, \quad (5.1)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  konstante koje se trebaju odrediti. Sljedeći je korak minimizacija:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_0} \right|_{\alpha \tilde{\rho}_P^\beta} = 0. \quad (5.2)$$

Kada se odrede  $\alpha$  i  $\beta$  iz uvjeta (5.2), to možemo uvrstiti u jednadžbu sjene:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \tilde{Z}(\tilde{\rho}_P) = \lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \tilde{Z}(\tilde{\rho}_P, \alpha \tilde{\rho}_P^\beta), \quad (5.3)$$

kako bismo dobili jednadžbu sjene u okolini tjemena. Naravno, izraz za jednadžbu sjene  $\tilde{Z}(\tilde{\rho}_p)$  bezdimenzionalan je kao i ostale varijable. Dobije se, dakle, egzaktna ovisnost jednadžbe sjene  $\tilde{Z}(\tilde{\rho}_p)$  o parametru  $\tilde{\rho}_p$ . u Jednadžbu (4.1) uvrštava se ansatz dan jednadžbom (5.1). Dobije se ovisnost derivacije samo o  $\tilde{\rho}_p$ . Nakon sređivanja preostaje:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_0} \right|_{\alpha \tilde{\rho}_p^\beta} &= \frac{1}{2v_0} \left\{ \left( v_0 + \frac{v}{\eta_M} \right) \tilde{\rho}_p + \frac{-v + v_0 \eta_M}{\alpha^2 \eta_M} \tilde{\rho}_p^{1-2\beta} - \frac{2v}{\alpha} \tilde{\rho}_p^{-\beta} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2v_0} \left\{ -\frac{2(v + v_0 \eta_M) \alpha}{\eta_M} \tilde{\rho}_p^\beta - \frac{\eta_M (v + v_0 \eta_M)}{(\tilde{\rho}_p - \alpha \tilde{\rho}_p^\beta)^2} \tilde{\rho}_p + \frac{2v}{-\tilde{\rho}_p + \alpha \tilde{\rho}_p^\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sljedeći je korak napraviti limes, odnosno pustiti da  $\tilde{\rho}_p$  ide u 0. Kako u izrazu (5.4) postoje ovisnosti izraza o raznim potencijama  $\tilde{\rho}_p$ , limes će uvelike ovisiti o tome koliki je točno  $\beta$ . Parametar  $\beta$  ne smije biti manji od 1 jer bi tada  $\tilde{\rho}_p$  bio manji od  $\bar{\rho}_0$ , što je u direktnoj kontradikciji s odbojnim međudjelovanjem.

Odabirom  $\beta \geq 1$ , u limesu kada  $\tilde{\rho}_p$  teži u 0, preživljavanje pojedinih potencija ovisi o tome koliki je točno parametar  $\beta$ . No, pogleda li se malo bolje izraz (5.4), vidljivo je da desna strana neće iščezavati u slučaju  $\beta > 1$ . Odabere li se pak  $\beta = 0$ , to vodi na 2 konstantna člana (dolazi od članova koji su imali  $\tilde{\rho}_p^\beta$  i  $\tilde{\rho}_p^{-\beta}$ ), što je dakako različito od 0. Odabere li se  $\beta = 1$ , u tom slučaju od izraza (5.4) preostaje:

$$\lim_{\tilde{\rho}_p \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_0} \right|_{\alpha \tilde{\rho}_p} = \frac{1}{2v_0} \left\{ \frac{-v + v_0 \eta_M}{\alpha^2 \eta_M} \tilde{\rho}_p^{-1} - \frac{2v}{\alpha} \tilde{\rho}_p^{-1} - \frac{\eta_M (v + v_0 \eta_M)}{(\alpha - 1)^2} \tilde{\rho}_p^{-1} + \frac{2v}{\alpha - 1} \tilde{\rho}_p^{-1} \right\}. \quad (5.5)$$

Čak četiri člana preživljavaju, no svi imaju jednake potencije pa nam to omogućava da postavimo uvjet da svi zbrojeni koeficijenti iznose 0. To se svodi na sljedeći uvjet:

$$\frac{-v + v_0 \eta_M}{\alpha^2 \eta_M} - \frac{2v}{\alpha} - \frac{\eta_M (v + v_0 \eta_M)}{(\alpha - 1)^2} + \frac{2v}{\alpha - 1} = 0. \quad (5.6)$$

Rješi li se to, dobije se dva rješenja za  $\alpha$ . Rješenja se označe sa  $\alpha_1$  koji iznosi:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \eta_M}, \quad (5.7)$$

te  $\alpha_2$  koji iznosi:

$$\alpha_2 = \frac{-v + v_0\eta_M}{-v + v\eta_M + v_0\eta_M + v_0\eta_M^2}. \quad (5.8)$$

Pogleda li se pažljivije  $\alpha_1$  vidi se da je on veći od 1. Kada se u ansatz vrate  $\alpha_1$  i  $\beta = 1$ , dobije se:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \bar{\rho}_0 = \frac{1}{1 - \eta_M} \tilde{\rho}_P. \quad (5.9)$$

Kako je  $\alpha_1$  veći od 1, ispada da je i  $\bar{\rho}_0$  veći od  $\tilde{\rho}_P$ , što je nemoguće s obzirom na to da se sudar odvija pod utjecajem odbojne interakcije. Prema tome, konačno rješenje za  $\alpha$  jest  $\alpha_2$ . Uvrsti li se  $\alpha_2$  natrag u ansatz, za odnos udarnog parametra i koordinate u blizini tjemena dobiva se:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \tilde{\rho}_0 = \frac{-v + v_0\eta_M}{-v + v\eta_M + v_0\eta_M + v_0\eta_M^2} \tilde{\rho}_P. \quad (5.10)$$

Dobivena je ovisnost udarnog parametra o koordinati  $\tilde{\rho}_P$ . Zadnji korak je uvrštavanje udarnog parametra u jednadžbu putanja čestice (3.26). Nakon sređivanja, za jednadžbu sjene u blizini tjemena preostaje:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{Z}}(\tilde{\rho}_P) = -\frac{2v - 4v_0(-1 + \eta_P) + \frac{(v+v_0(-1+\eta_P))(v+v_0-v_0\eta_P)^2}{(v_0(-2+\eta_P)(-1+\eta_P)-v\eta_P)^2} \tilde{\rho}_P^2 + 2v \ln \left[ 1 - \frac{2v}{v+v_0-v_0\eta_P} \right]}{2v_0}. \quad (5.11)$$

Cilj je zapravo dobiti vrijednost sjene u tjemenu. To se dobije tako da se u gornju jednadžbu uvrsti  $\tilde{\rho}_P = 0$ . Dakle vrijednost sjene točno u nuli jest:

$$\tilde{\mathcal{Z}}(\tilde{\rho}_P = 0) = -\frac{v + 2v_0\eta_M + v \ln \left[ 1 - \frac{2v}{v+v_0\eta_M} \right]}{v_0}. \quad (5.12)$$

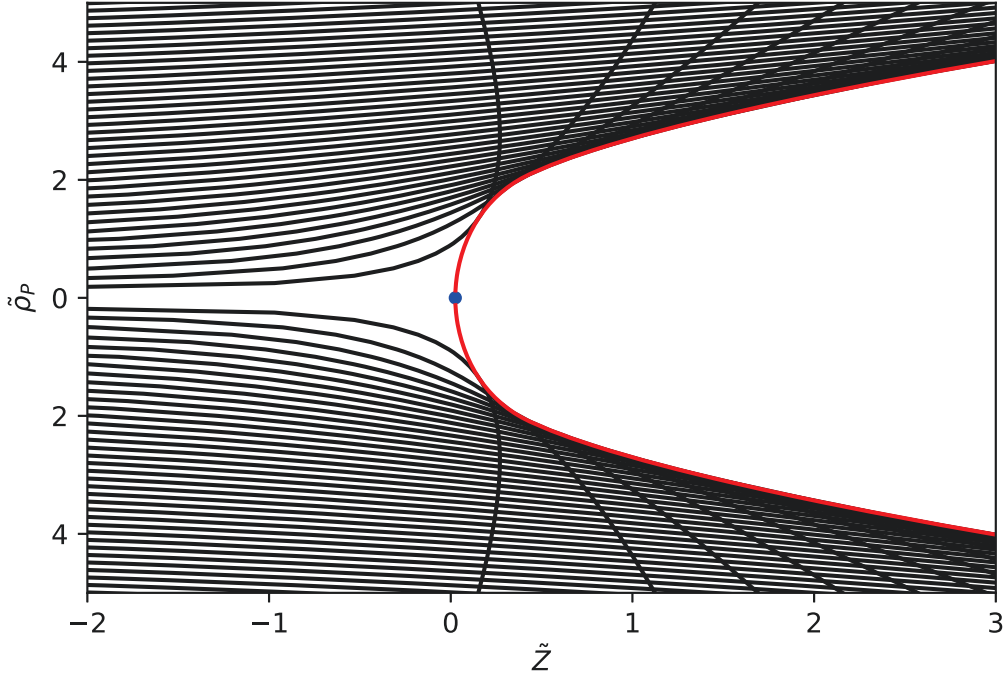
Točka tjemena može se prikazati i grafički. Sa slike 5.1 vidi se kako se izračunata vrijednost iz (5.12) savršeno slaže s jednadžbom sjene.

## 5.2 Asimptotski oblik sjene

Sada želimo odrediti asimptotski oblik sjene. Opet pretpostavljamo ansatz kao u izrazu (5.1):

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow \infty} \bar{\rho}_0 = \alpha \tilde{\rho}_P^\beta. \quad (5.13)$$





Slika 5.1: Putanje projektila i sjena u laboratorijskom sustavu za  $\eta_P = 0.48$ , uz položaj tjemena prikazanog velikom plavom točkom.

Kako u izrazu (5.4) dobivenom uz ansatz istog oblika, postoje ovisnosti o raznim potencijama  $\tilde{\rho}_P$ , limes će uvelike ovisiti o tome koliki je točno  $\beta$ . U ovom slučaju,  $\beta$  ne smije biti veći od 1 jer je to u kontradikciji s odbojnim međudjelovanjem. Odabere li se  $\beta < 1$  iz izraza (5.4) vidljivo je da će desna strana svakako težiti u beskonačnost ukoliko se nekako ne ponošti prvi član:  $\frac{1}{2v_0}(v_0 + \frac{v}{\eta_M})\tilde{\rho}_P$ . Pokazat će se kako to nije moguće. Desna strana izraza (5.4) bit će nula samo ako ili sve potencije  $\tilde{\rho}_P$  iščezavaju ili ako se uz neiščezavajuće potencije koeficijenti zbroje u nulu. Sve potencije ne iščezavaju. Potencija prvoga člana u izrazu (5.4) ne ovisi o  $\beta$  i iznosi 1, pa prema tome prvi pribrojnik teži u beskonačnost kako  $\tilde{\rho}_P$  teži u beskonačnost. Slučaj  $\beta < 1$  eliminiran je jer ne daje nulu u limesu kada  $\tilde{\rho}_P$  teži u beskonačnost, a to je bio uvjet da točka bude na sjeni. Jedina je preostala mogućnost  $\beta = 1$ . Za  $\beta = 1$ , preživljavaju samo prvi i četvrti član iz jednadžbe (5.4):

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_0} \right|_{\alpha \tilde{\rho}_P} = \frac{1}{2v_0} \left\{ \left( v_0 + \frac{v}{\eta_M} \right) \tilde{\rho}_P - \frac{2(v + v_0 \eta_M) \alpha}{\eta_M} \tilde{\rho}_P \right\}. \quad (5.14)$$

Ostali članovi imaju negativne potencije  $\tilde{\rho}_p$  pa iščezavaju. Uvjet da se koeficijenti uz pozitivne potencije  $\tilde{\rho}_p$  zbroje u nulu jest:

$$v_0 + \frac{v}{\eta_M} - 2 \frac{v + v_0 \eta_M}{\eta_M} \alpha = 0. \quad (5.15)$$

Rješi li se jednačba (5.15) za  $\alpha$ , dobije se:

$$\alpha = \frac{1}{2}. \quad (5.16)$$

Prema tome, za udarni parametar ostaje:

$$\lim_{\tilde{\rho}_p \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_0 = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_p. \quad (5.17)$$

Kako je  $\alpha < 1$  rješenje je zadovoljavajuće. Udarni je parametar manji od koordinate čestice što i jest slučaj kod odbojne Coulombove interakcije. Uvrsti li se sada udarni parametar  $\tilde{\rho}_0$ , za jednačbu sjene koja teži u beskonačnost, dobije se:

$$\lim_{\tilde{\rho}_p \rightarrow \infty} \tilde{Z}(\tilde{\rho}_p) = \frac{1}{8} \left\{ -4(-2 + \eta_p)^2 + \tilde{\rho}_p^2 + \frac{v[8 + 4(-4 + \eta_p)\eta_p - \tilde{\rho}_p^2]}{v_0(-1 + \eta_p)} - 8 \frac{v}{v_0} \ln(\eta_M) \right\}. \quad (5.18)$$

U izrazu za sjenu u beskonačnosti pojavljuju se članovi koji su neovisni o  $\tilde{\rho}_p$  i pojavljuju se dva člana koji su kvadratični u  $\tilde{\rho}_p$ . Radi pojednostavnjenja, svi konstantni članovi sprema se u konstantu C:

$$\lim_{\tilde{\rho}_p \rightarrow \infty} \tilde{Z}(\tilde{\rho}_p) = \frac{1}{8} \tilde{\rho}_p^2 + \frac{v}{v_0 \eta_M} \tilde{\rho}_p^2 + C. \quad (5.19)$$

Zaključak je da je oblik sjene za velike  $\tilde{\rho}_p$  oblika parabole. Radi usporedbe, sjena je parabolična i u sustavu mirne mete i u sustavu centra mase. Jednačba sjene u sustavu mirne mete izračunata u [1, 2] dana je s:

$$\tilde{Z}(\tilde{\rho}_p) = \frac{\tilde{\rho}_p^2}{8} - 2, \quad (5.20)$$

dok je u sustavu centra mase jednačba sjene (također izračunata u [1, 2]) dana s:

$$\tilde{Z}(\tilde{\rho}_p) = \frac{\tilde{\rho}_p^2}{8\eta_M} - 2\eta_M. \quad (5.21)$$

Iako je u laboratorijskom sustavu za velike  $\tilde{\rho}_P$  sjena oblika parabole, ta je parabola drugačijeg oblika od parabola u sustavu mirne mete i u sustavu centra mase.

## 6 Kutovi raspršenja

Kut raspršenja je kut koji zatvaraju početni i konačni smjer gibanja projektila. U početku se projektil giba u pozitivnom smjeru z-osi. Kontangens kuta raspršenja dan je derivacijom putanje čestice  $\tilde{Z}$  po radijalnoj koordinati  $\tilde{\rho}_P$ .

$$\cot \Theta = \lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow \infty} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_P}. \quad (6.1)$$

Prema tome, kut raspršenja je:

$$\Theta = \operatorname{arccot} \lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow \infty} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_P}. \quad (6.2)$$

Kako bi se izračunala desna strana jednadžbe (6.2), derivira se izraz (3.26) po  $\tilde{\rho}_P$ . Dobije se:

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_P} = \frac{1}{2v_0} \left\{ \frac{v - v_0 \eta_M}{\tilde{\rho}_0 \eta_M} - \frac{2v}{\tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_P} + \frac{\tilde{\rho}_0}{\eta_M} (v + v_0 \eta_M) \left[ 1 + \frac{\eta_M^2}{(\tilde{\rho}_P - \tilde{\rho}_0)^2} \right] \right\}. \quad (6.3)$$

Limes derivacije svodi se na:

$$\lim_{\tilde{\rho}_P \rightarrow \infty} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{\rho}_P} = \frac{v(1 + \tilde{\rho}_0^2) + v_0 \eta_M (\tilde{\rho}_0^2 - 1)}{2\tilde{\rho}_0 v_0 \eta_M}. \quad (6.4)$$

Dobiven je relativno jednostavan izraz za kut raspršenja:

$$\Theta = \operatorname{arccot} \frac{v(1 + \tilde{\rho}_0^2) + v_0 \eta_M (\tilde{\rho}_0^2 - 1)}{2\tilde{\rho}_0 v_0 \eta_M}. \quad (6.5)$$

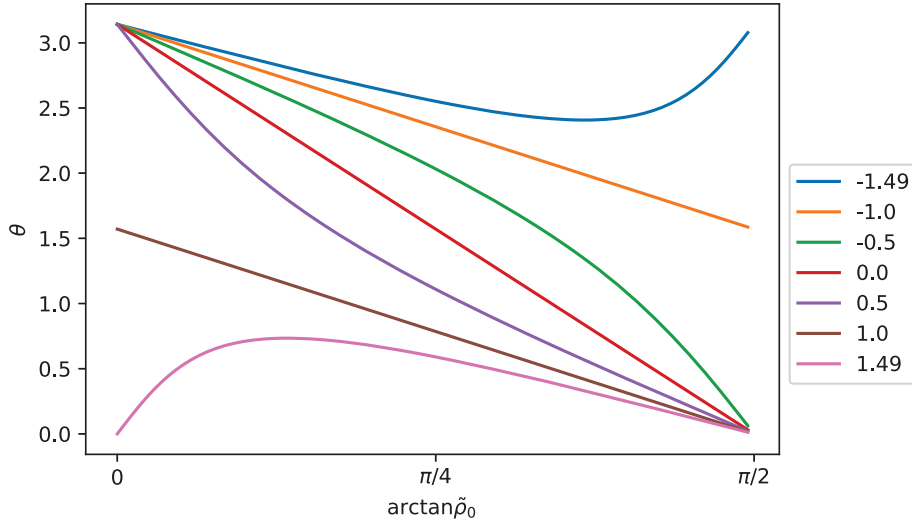
Radi kompaktnosti zapisa brojnik i nazivnik podijele se s  $v_0 \eta_M$ .

$$\Theta = \operatorname{arccot} \frac{\nu(\tilde{\rho}_0^2 + 1) + (\tilde{\rho}_0^2 - 1)}{2\tilde{\rho}_0}. \quad (6.6)$$

Ovisnost kuta raspršenja prikazana je pomoću samo 2 parametra:  $\nu$  i  $\tilde{\rho}_0$ .  $\tilde{\rho}_0$  je udarni parametar, a kako je to već ranije rečeno u poglavlju 3,  $\nu$  ovisi o masama projektila i mete te o brzinama projektila i sustava centra mase. Izraz (6.6) za kut raspršenja

nije ograničen samo za  $-1 < \nu < 1$  nego vrijedi za bilo koji  $\nu$ . Na slici 6.1 prikazana je ovisnost kuta raspršenja o arkus tangensu udarnog parametra  $\tilde{\rho}_0$  za različite vrijednosti parametra  $\nu$ .

Slika 6.1 prikazuje ovisnost kuta raspršenja o cijelom rasponu udarnih parametara, od 0 pa sve do beskonačno. Kako bi se nacrtao graf ovisnosti na konačnom prostoru potrebno je pronaći funkciju koja beskonačnu domenu preslikava u konačnu sliku funkcije. Jedna od takvih funkcija je arkus tangens. Ako je  $\nu$  u intervalu



Slika 6.1: Ovisnost kuta raspršenja o udarnom parametru  $\tilde{\rho}_0$  za različite vrijednosti parametra  $\nu$ .

$-1 < \nu < 1$  tada je raspon kuteva raspršenja za različite udarne parametre između 0 i  $\pi$ . Za dva granična slučaja kada je  $\nu = \pm 1$  dobije se nešto manji raspon kuta raspršenja. Za  $\nu = 1$  dobije se  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Za  $\nu = -1$  dobije se raspon kuteva raspršenja od  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  Raspon kuteva za  $\nu > 1$  i  $\nu < -1$  mora se izvesti. Kako bi se našli minimumi i maksimumi za pojedini parametar  $\nu$ , kut raspršenja derivira se po udarnom parametru. Nakon sređivanja, dobije se:

$$\left. \frac{d\theta}{d\tilde{\rho}_0} \right|_{\tilde{\rho}_0} = \frac{4\hat{\rho}_0^2(\nu + 1) - 2\nu(1 + \hat{\rho}_0^2) - 2(\hat{\rho}_0^2 - 1)}{4\hat{\rho}_0^2 + \nu^2(1 + \hat{\rho}_0^2)^2 + 2\nu(\hat{\rho}_0^4 - 1) + (\hat{\rho}_0^2 - 1)^2}. \quad (6.7)$$

Kako bi se dobila vrijednost udarnog parametra za koju je  $\theta$  u (6.8) ekstremalan gornji izraz izjednači se s nulom:

$$\frac{4\hat{\rho}_0^2(\nu + 1) - 2\nu(1 + \hat{\rho}_0^2) - 2(\hat{\rho}_0^2 - 1)}{4\hat{\rho}_0^2 + \nu^2(1 + \hat{\rho}_0^2)^2 + 2\nu(\hat{\rho}_0^4 - 1) + (\hat{\rho}_0^2 - 1)^2} = 0. \quad (6.8)$$

Gornji će izraz biti jednak nuli kada je brojnik izraza jednak 0.

$$4\hat{\rho}_0^2(\nu + 1) - 2\nu(1 + \hat{\rho}_0^2) - 2(\hat{\rho}_0^2 - 1) = 0. \quad (6.9)$$

Izraz se svede na kvadratnu jednadžbu:

$$\hat{\rho}_0^2 = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}. \quad (6.10)$$

Prema tome, rješenje je:

$$\hat{\rho}_0 = \sqrt{\frac{\nu - 1}{\nu + 1}}. \quad (6.11)$$

Jednadžba (6.11) ima realno rješenje samo za  $\nu < -1$  ili  $\nu \geq 1$ . Sa slike 6.1 vidljivo je da će za  $\nu < -1$  krivulja ovisnosti kuta raspršenja o udarnom parametru u točkama  $\hat{\rho}_0 = \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu+1}}$  imati minimum dok će krivulja za parametre  $\nu > 1$  imati maksimume. U slučaju  $\nu < -1$ , raspon kuteva dobit će se tako da se od  $\pi$  oduzme minimum funkcije kuta raspršenja, a u slučaju kada je  $\nu \geq 1$  raspon kuteva bit će jednak iznosu maksimuma funkcije kuta raspršenja. Kako bi se dobili maksimum odnosno minimum kuta raspršenja potrebno je vrijednost iz jednadžbe (6.11) uvrstiti nazad u jednadžbu (6.6). Dobije se izraz za ekstremalnu vrijednost kuta raspršenja.

$$\theta_0 = \operatorname{arccot} \left( \nu \sqrt{1 - \frac{1}{\nu^2}} \right). \quad (6.12)$$

Raspon kuteva raspršenja za vrijednosti parametra  $\nu < -1$ , prema tomu je:

$$\theta_0 < \theta < \pi. \quad (6.13)$$

Za vrijednosti parametra  $\nu > 1$  raspon kuteva raspršenja je:

$$0 < \theta < \theta_0. \quad (6.14)$$

Raspon kuteva raspršenja za razne vrijednosti parametra  $\nu$  može se zorno prikazati u tablici:

$\nu < -1$	$\nu = -1$	$-1 < \nu < 1$	$\nu = 1$	$\nu > 1$
$\theta_0 < \theta < \pi$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$0 < \theta < \pi$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < \theta < \theta_0$

Tablica 6.1: Raspon kutova raspršenja za razne vrijednosti parametra  $\nu$ .

## 7 Zaključak

U ovom radu u detalje je analizirana sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja promatrana iz kogibajućeg sustava. Pokazano je da je postojanje sjene uvjetovano odnosima početne brzine projektila i brzine sustava centra mase. Izvedena je egzaktna formula za putanju projektila. Numerički se odredila sjena. Sjena nije oblika parabole za razliku od sustava mirne mete i sustava centra mase. No, u asimptotskom području, sjena poprima oblik parabole. Nađena je i ovisnost kuteva raspršenja o udarnom parametru za različite omjere brzina te raspon kuteva raspršenja u ovisnosti o omjeru brzina. U detalje je prikazan i postupak dobivanja sjene za vrlo malu i vrlo veliku vrijednost radijalne varijable.

## Bibliography

- [1] Ivan Topić, Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno matematički fakultet, 2020.
- [2] Petar Žugec, Ivan topić, A shadow of the repulsive Rutherford scattering in the fixed-target and the center-of-mass frame, *European Journal of Physics* 41 (2020) 065005.
- [3] Ernest Rutherford, “The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom,” *Philos. Mag.* 21, 669-688 (1911).
- [4] Hans Geiger, Ernest Marsden, “On a Diffuse Reflection of the  $\alpha$ -Particles,” *Proc. R. Soc London, Ser. A* 82, 495-500 (1909.)
- [5] Arnold Sommerfeld, *Mechanics (Lectures on Theoretical Physics, Vol. 1)*, 1st edition (Academic Press, New York, 1952) pp. 242, 258-259.
- [6] J. Burgdorfer “Atomic Collisions with Surfaces”, in *Review of Fundamental Processes and Applications of Atoms and Ions*, edited by C.D. Lin (World scientific, Singapore, 1993), p. 544.
- [7] John W. Adolph; A. Leon Garcia; William G. Harter; G. C. McLaughlin; Richard R. Shiffman; Victor G. Surkus: Some Geometrical Aspects of Classical Coulomb Scattering. *American Journal of Physics* 40, 1852 (1972); doi: 10.1119/1.1987076