Fizikalna ograničenja Hohenberg-Mermin-Wagnerovog argumenta

Palle, Grgur

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Grgur Palle

Fizikalna ograničenja Hohenberg–Mermin–Wagnerovog argumenta

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Grgur Palle

Diplomski rad

Fizikalna ograničenja Hohenberg–Mermin–Wagnerovog argumenta

Voditelj diplomskog rada: Prof. dr. sc. Denis Sunko

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________
Zagreb, 2020.

Svome dragome profesoru Dariju Mičiću i baki Ankici.

Fizikalna ograničenja Hohenberg–Mermin–Wagnerovog argumenta

Sažetak

Hohenberg–Mermin–Wagnerov (HMW) teorem egzaktan je rezultat koji zabranjuje spontano narušenje neprekidnih simetrija za brojne modele u jednoj i dvjema dimenzijama. U ovome radu istražili smo fizikalna ograničenja ovoga teorema. U poglavlju 1 temeljito razmatramo HMW argument i uloge svih njegovih sastavnih dijelova. U istome poglavlju istražujemo osjetljivost HMW argumenta na konačnost sustava i smetnje koje narušavaju simetrije te ustvrđujemo da je argument u dvjema dimenzijama iznimno osjetljiv na oba učinka, dok u jednoj dimenziji nije. Energetska skala koja se prirodno pojavljuje u HMW argumentu određuje koliko je izražena ta osjetljivost. Zatim, u poglavlju 2, dokazujemo jedan vrlo općenit HMW teorem za supravodiče te istražujemo njegovu osjetljivost i mogućnosti daljnjeg poopćenja. Za sustave koji nisu astronomskih veličina, ustanovili smo da je u dvije dimenzije HMW argument, ali i infracrvene fluktuacije općenitije, previše slab da bi potisnuo supravodljivo uređenje. Rad završavamo novim argumentom koji daje netrivijalnu gornju među na temperaturu supravodljivog prijelaza.

Ključne riječi: Hohenberg–Mermin–Wagnerov teorem, spontano narušenje simetrija, dugodosežno uređenje, Bogoljubovljeva nejednakost, infracrvene fluktuacije, visokotemperaturna supravodljivost

Physical limitations of the Hohenberg–Mermin–Wagner argument

Abstract

The Hohenberg–Mermin–Wagner (HMW) theorem is an exact result which rules out the spontaneous breaking of continuous symmetries for a variety of model systems in one and two dimensions. In this thesis, we explore the physical limitations of this theorem. An in-depth discussion of the HMW argument and how all of its parts fit together is given in Chapter 1. In the same chapter, we explore the sensitivity of the HMW argument to finite-size effects and symmetry-breaking perturbations and establish that in two dimensions it is exceptionally sensitive to both, whereas in one dimension it is not. The energy scale that naturally appears in the HMW argument determines how acute this sensitivity is. Afterwards, in Chapter 2 we prove a very general HMW theorem for superconductors and explore its sensitivity and possible further generalizations. For systems of non-astronomical size, we find that in two dimensions the HMW argument, and infrared fluctuations more generally, are too weak to suppress superconducting order. We conclude this work with a novel argument that gives a nontrivial upper bound on the superconducting transition temperature.

Keywords: Hohenberg–Mermin–Wagner theorem, spontaneous symmetry breaking, long-range order, Bogoliubov's inequality, infrared fluctuations, high-temperature superconductivity

Sadržaj

1 Hohenberg–Mermin–Wagnerov argument

Hohenberg–Mermin–Wagnerov (HMW) argument je rigorozan argument kojim se dokazuje da u jednoj i dvije dimenzije ne može doći do spontanog narušenja neprekidnih simetrija. Fizikalno, riječ je o tome da niskoležeća pobuđenja (tj. Nambu–Goldstoneovi bozoni) u niskim dimenzijama dovode do velikih fluktuacija parametra uređenja koje sprječavaju nastanak dugodosežnog uređenja. Kao jednostavan primjer, promotrimo feromagnet čiji su Nambu–Goldstoneovi bozoni magnoni (spinski valovi) koji imaju kvadratičnu disperziju $\omega_{\boldsymbol{k}} \propto \boldsymbol{k}^2$. Onda je relativna fluktuacija parametra uređenja $\Delta M/M$ ugrubo dana izrazom:

$$\frac{\Delta M}{M} \sim \frac{\sum_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}}}{N} \sim \int \frac{\mathrm{d}^d k}{\exp(\beta \hbar \omega_{\boldsymbol{k}}) - 1} \sim \int \mathrm{d}k \frac{k^{d-1}}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \,, \tag{1.1}$$

gdje je $n_{\boldsymbol{k}}$ popunjenost magnonskih modova. U gornjem se izrazu lako vidi da ove fluktuacije divergiraju u infracrvenom dijelu integrala $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$ za dimenzije $d = 1, 2$.

Glavna ideja HMW argumenta koji rigorozno dokazuje gornju slutnju jest iskoristiti Bogoljubovljevu nejednakost[1] na mudro odabranim operatorima od kojih je jedan blisko povezan s infinitezimalnim generatorom neprekidne simetrije čije spontano narušenje ispitujemo. Manipulacijom dane nejednakosti se zatim dobiva gornja međa na parametar uređenja koja u jednoj i dvije dimenzije iščezava zbog infracrvene divergencije oblika $\int \mathrm{d}k\, k^{d-3}$.[2] Pierre C. Hohenberg je bio prvi koji se dosjetio gornjeg argumenta [1], dok su N. David Mermin i Herbert Wagner preinačili Hohenbergov argument u elegantniju formu [2].[3]

U ostatku poglavlju ćemo objasniti kako HMW argument funkcionira te istražiti njegovu osjetljivost na konačnost sustava i smetnje. Naime, termodinamički limes i egzaktnost dane neprekidne simetrije su iznimno bitni u samome argumentu. Vidjet ćemo da je HMW argument u dvije dimenzije iznimno osjetljiv na oba učinka, dok u jednoj dimenziji nije. Sva razmatranja ovog poglavlja će biti na primjeru XXZ modela magnetizma. HMW argument je tijekom godina bio primijenjen i na brojne druge modele supravodljivosti [8, 9, 11–15], Boseove suprafluidnosti [39], magnetizma [3, 8, 9, 16–31, 39, 40], kristalnog uređenja [32–40], itd. Pregledi ovih rezultata se mogu

[1] Bogoljubovljevu nejednakost uvodimo u sljedećem odjeljku; vidite nejednakost (1.3).

[2] Primijetite kako je ova divergencija matematički identična divergenciji iz (1.1).

[3] U literaturi se Hohenbergov presedan često zaboravlja pa se Hohenberg–Mermin–Wagnerov argument često krivo naziva Mermin–Wagnerovim argumentom [3].

naći u [7–10]. U sljedećem poglavlju ćemo detaljnije razmatrati HMW argument za modele supravodljivosti.

1.1 HMW teorem na primjeru XXZ modela

Općenito govoreći, u HMW argumentu su ključne sljedeće četiri stvari:

1. **Bogoljubovljeva metoda kvaziprosjeka** [4–6]. Pomoću nje se ispituje spontano narušenje simetrija. Glavna ideja je ta da u termodinamičkoj granici *infinitezimalna* smetnja koja narušava danu simetriju može dovesti do *konačne* očekivane vrijednosti parametra uređenja (npr. infinitezimalno magnetsko polje dovodi do konačne magnetizacije ispod Curiejeve temperature). Matematički se ovo reflektira u činjenici da *Bogoljubovljev kvaziprosjek* definiran kao:

$$\langle\!\langle \Lambda \rangle\!\rangle := \lim_{\kappa\to 0^+} \lim_{\text{t.d.}} \langle \Lambda \rangle_\kappa = \lim_{\kappa\to 0^+} \lim_{\text{t.d.}} \frac{\operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\beta(\mathcal{H}+\kappa H')}\Lambda}{\operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\beta(\mathcal{H}+\kappa H')}}\,, \tag{1.2}$$

   ne iščezava za operator uređenja Λ. Ovdje je $\mathcal{H}$ ishodišni Hamiltonijan, H' perturbacije koja narušava danu simetriju, κ snaga perturbacije te t.d. termodinamički limes. Za $\kappa = 0$ bismo imali $\langle\Lambda\rangle = 0$ zbog simetrije.[4] Limesi $\kappa \to 0$ i t.d. u $\langle\!\langle \Lambda \rangle\!\rangle$ ne komutiraju te se jedino u termodinamičkom limesu dobiva neprekidnost prosjeka $\langle\Lambda\rangle_\kappa$ pri $\kappa = 0$.

2. **Bogoljubovljeva nejednakost** [4–6]. Ona je rigorozna nejednakost između termodinamičkih prosjeka kvantnih operatora koja glasi:

$$|\langle [C, A]\rangle|^2 \le \tfrac{1}{2}\beta \left\langle \{A, A^\dagger\}\right\rangle \left\langle \left[[C,\mathcal{H}], C^\dagger\right]\right\rangle, \tag{1.3}$$

   gdje je $\langle A\rangle := \operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} A / \operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}$ termodinamički prosjek. Ona se lako dokaže primjenom Cauchy–Bunjakovski–Schwarzove nejednakosti na skalarnom umnošku operatora:

$$\langle A|B\rangle := \frac{1}{\operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}} \int_0^1 \mathrm{d}\tau \operatorname{tr}\!\left(\mathrm{e}^{-(1-\tau)\beta\mathcal{H}} A^\dagger \mathrm{e}^{-\tau\beta\mathcal{H}} B\right). \tag{1.4}$$

   Detalji izvoda se mogu naći u [1, 2, 8].

[4]Kanonski ansambl sadrži sva stanja iste energije u jednakoj mjeri, dok zbog simetrije stanja različitog parametra uređenja imaju istu energiju.

3. **Grupa simetrija parametra uređenja je neprekidna**. Infinitezimalni generator ove grupe simetrija igra ključnu ulogu u konstrukciji gornje međe parametra uređenja. Primjerice, ako imamo sustav na rešetci s generatorom simetrija $Q = \sum_i Q_i$, onda ćemo u Bogoljubovljevu nejednakost (1.3) uvrstiti operator:

$$C = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} Q_i \,, \tag{1.5}$$

gdje je $\boldsymbol{k}$ valni vektor iz prve Brillouinove zone, a $\boldsymbol{R}_i$ su položaji jediničnih ćelija rešetke. U limesu $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$ operator C postaje generator simetrije.

4. **Niska dimenzionalnost**. Gornja međa na parametar uređenja iščezava samo u jednoj i dvije dimenzije. Infracrvena divergencija koja to iščezavanje određuje je oblika $\int_0 \mathrm{d}k\, k^{d-3}$.

Uz ovo se u argumentu često pojavljuju dodatni uvjeti koje sam model treba zadovoljavati kako bi HMW argument vrijedio poput kratkog dosega međudjelovanja. Ti dodatni uvjeti uglavnom osiguravaju da gornja međa u termodinamičkoj granici bude dobro definirana.

Sada ćemo ilustrirati HMW argument na XXZ modelu magnetizma. Prisjetimo se, XXZ model je model lokaliziranih (bezdimenzionalnih) spinova $\boldsymbol{S}_i$ na rešetci čije je međudjeluje u parovima dano izrazom $J_{ij}(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) + J_{ij}^z S_i^z S_j^z$. Indeksi i, j će nam u ovom odjeljku označavati čvorišta rešetke te će sve sume po i, j ići po cijeloj rešetci. Hamiltonijan XXZ modela je:

$$\mathcal{H} = -\sum_{ij} J_{ij}(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) - \sum_{ij} J_{ij}^z S_i^z S_j^z \,, \tag{1.6}$$

gdje *konstante vezanja* J_{ij} i J_{ij}^z imaju dimenzije energije te su simetrične i realne, odnosno $J_{ij} = J_{ji} \in \mathbb{R}$ i $J_{ij}^z = J_{ji}^z \in \mathbb{R}$. Grupa simetrija XXZ modela je $\mathrm{U}(1)$ grupa rotacija oko z osi čiji je infinitezimalan generator:

$$S_{\text{tot}}^z := \sum_i S_i^z \,. \tag{1.7}$$

Kao operator uređenja uzimamo poopćenu magnetizaciju:

$$\boldsymbol{M} := \Omega^{-1} \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{R}_i} \boldsymbol{S}_i \,, \tag{1.8}$$

u kojoj je Ω volumen (površina u 2D, duljina u 1D), $\boldsymbol{R}_i$ su položaji spinova na rešetci te $\boldsymbol{K}$ je valni vektor koji nam omogućuje istovremeno obuhvaćanje fero- ($\boldsymbol{K} = 0$) i antiferomagnetizma ($\boldsymbol{K} \neq 0$). Kako se HMW teorem odnosi samo na neprekidne simetrije, promatrat ćemo isključivo x i y komponente magnetizacije $\boldsymbol{M}$.[5] U skladu s Bogoljubovljevom metodom kvaziprosjeka, u Hamiltonijan uvodimo dodatan član:

$$H_b' = -\int \mathrm{d}V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{M} = -\Omega\, \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{M}\,, \tag{1.9}$$

u kojem je $\boldsymbol{B} = b\,\hat{\boldsymbol{e}}$ poopćeno magnetsko polje sa smjerom $\hat{\boldsymbol{e}}$ unutar XY ravnine. Sad nam je glavni zadatak dokazati da kvaziprosjek operatora uređenja:

$$\langle\!\langle \boldsymbol{M} \rangle\!\rangle_{\hat{\boldsymbol{e}}} := \lim_{b\to 0} \langle \boldsymbol{M} \rangle_b = \lim_{b\to 0} \frac{\mathrm{tr}[\exp(-\beta(\mathcal{H} + H_b'))\boldsymbol{M}]}{\mathrm{tr}\exp(-\beta(\mathcal{H} + H_b'))}\,, \tag{1.10}$$

iščezava. Taj rezultat se zove HMW teorem te on u matematički preciznom obliku glasi:

Teorem (Hohenberg–Mermin–Wagner)**.** *Dugodosežno magnetsko uređenje je zabranjeno u jednoj i dvije dimenzije za XXZ model* (1.6) *koji ima kratkodosežno spinsko međudjelovanje, pri temperaturama većim od apsolutne nule te u termodinamičkoj granici. Kvaziprosjek magnetizacije* (1.8) *iščezava za sve smjerove $\hat{\boldsymbol{e}}$ unutar XY ravnine* $\mathrm{U}(1)$ *simetrije:*

$$\langle\!\langle \boldsymbol{M} \rangle\!\rangle_{\hat{\boldsymbol{e}}} = \boldsymbol{0}\,, \tag{1.11}$$

u termodinamičko limesu u kojem držimo gustoću spinova $n := N/\Omega$ konstantnu, dok uzimamo broj spinova $N = \sum_i 1$ i duljinu/površinu Ω sustava u beskonačnost. Pod kratkodosežnost spinskog međudjelovanja podrazumijevamo:

$$\frac{1}{N}\sum_{ij} |J_{ij}| (\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)^2 < \infty\,. \tag{1.12}$$

[5] U slučaju Heisenbergovog modela kada je $J_{ij} = J_{ij}^z$, simetrija sustava je $\mathrm{SU}(2)$ te HMW teorem vrijedi za sve tri komponente poopćene magnetizacije $\boldsymbol{M}$.

1.1.1 Dokaz HMW teorema

Kako bi dokazali HMW teorem, iskoristit ćemo Bogoljubovljevu nejednakost koju radi jednostavnosti ovdje ponavljamo:

$$|\langle[C,A]\rangle|^2 \leq \tfrac{1}{2}\beta\left\langle\{A,A^\dagger\}\right\rangle\left\langle\left[[C,\mathcal{H}],C^\dagger\right]\right\rangle . \tag{1.13}$$

Bez gubitka općenitosti, neka je $\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{x}}$. Za operatore u Bogoljubovljevoj nejednakosti uzimamo:

$$C_{\boldsymbol{k}} = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^z\,, \tag{1.14}$$

$$A_{\boldsymbol{k}} = \Omega^{-1}\sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^y\,. \tag{1.15}$$

Ovaj odabir je motiviran sljedećim razmatranjima:

1. Operatori $C_{\boldsymbol{k}}$ su “Fourier modulirani” infinitezimalni generatori $\mathrm{U}(1)$ simetrije koji se u limesu $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$ svode na generator rotacije oko z osi S^z_{tot}. Ovo povlači da dupli komutator $\left\langle\left[[C_{\boldsymbol{k}},\mathcal{H}],C^\dagger_{\boldsymbol{k}}\right]\right\rangle$ iz (1.13) iščezava u limesu $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$ budući da je $[\mathcal{H}, S^z_{\text{tot}}] = 0$. U stvari, može se pokazati da je za male $\boldsymbol{k}$:

$$\left\langle\left[[C_{\boldsymbol{k}},\mathcal{H}],C^\dagger_{\boldsymbol{k}}\right]\right\rangle = \beta\langle[\mathcal{H},C_{\boldsymbol{k}}]|[\mathcal{H},C_{\boldsymbol{k}}]\rangle \propto \boldsymbol{k}^2\,, \tag{1.16}$$

   gdje je $\langle A|B\rangle$ definiran u (1.4), dok je $[\mathcal{H},C_{\boldsymbol{k}}]$ linearan u $\boldsymbol{k}$ za male $\boldsymbol{k}$ zbog glatkoće operatora $C_{\boldsymbol{k}}$. Iščezavanje parametra uređenja u jednoj i dvije dimenzije, odnosno divergencija oblika $\int_0 \mathrm{d}k\, k^{d-3}$ koja ovo iščezavanje uzrokuje, je direktna posljedica gornje $\boldsymbol{k}^2$ proporcionalnosti. Kratak doseg spinskog međudjelovanja osigurava ekstenzivnu konstantu proporcionalnosti u (1.16).

2. Operatori $A_{\boldsymbol{k}}$ su odabrani baš tako da je komutator $\langle[C_{\boldsymbol{k}},A_{\boldsymbol{k}}]\rangle$ iz (1.13) proporcionalan parametru uređenja M_x za sve $\boldsymbol{k}$. Istovremeno se moramo pobrinuti da zbroj:

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in 1\mathrm{BZ}} \{A_{\boldsymbol{k}}, A^\dagger_{\boldsymbol{k}}\}\,, \tag{1.17}$$

   koji ide po prvoj Brillouinovoj zoni bude intenzivan. U suprotnom bi gornja međa na (intenzivan) parametar uređenja rasla s veličinom sustava te divergirala u termodinamičkom limesu. U definiciji (1.15) smo se pobrinuli za ovu intenzivnost pomoću ortogonalnosti predfaktora $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{R}_i}$.

Nakon malo algebre dobivamo sve članove iz Bogoljubovljeve nejednakosti:

$$\begin{aligned}\big[[C_{\boldsymbol{k}},\mathcal{H}],C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big] = \sum_{ij} & J_{ij}(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \\ & \cdot 2\{1-\cos[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)]\}\,,\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\big[[C_{\boldsymbol{k}},H_b'],C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big] = b\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^x = \Omega b M_x\,, \tag{1.19}$$

$$[C_{\boldsymbol{k}},A_{\boldsymbol{k}}] = -\mathrm{i}\,\Omega^{-1}\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^x = -\mathrm{i}M_x\,, \tag{1.20}$$

$$\{A_{\boldsymbol{k}},A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\} = \Omega^{-2}\sum_{ij} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{K})\cdot(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)}\{S_i^y,S_j^y\}\,. \tag{1.21}$$

Kako smo i očekivali, $\big[[C_{\boldsymbol{k}},\mathcal{H}],C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big] \propto \boldsymbol{k}^2$ za male $\boldsymbol{k}$.

Sljedeći nam je korak podijeliti cijelu Bogoljubovljevu nejednakost (1.13) s duplim komutatorom koji se pojavljuje na desnoj strani:

$$\frac{|\langle[C_{\boldsymbol{k}},A_{\boldsymbol{k}}]\rangle_b|^2}{\big\langle\big[[C_{\boldsymbol{k}},\mathcal{H}+H_b'],C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big]\big\rangle_b} \le \tfrac{1}{2}\beta\,\big\langle\{A_{\boldsymbol{k}},A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\}\big\rangle_b\,. \tag{1.22}$$

Ovaj izraz sada zbrajamo po svim valnim vektorima prve Brillouinove zone jer će nam onda ortogonalnost $\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)} = N\delta_{ij}$ dopustiti da pojednostavimo desnu stranu na intenzivan izraz:

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in 1\mathrm{BZ}}\{A_{\boldsymbol{k}},A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\} = \frac{2n^2}{N}\sum_i S_i^y S_i^y\,, \tag{1.23}$$

gdje je $n := N/\Omega$ gustoća spinova. Za daljnja pojednostavljenja koristimo elementarne nejednakosti:

$$\big|\big\langle S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y\big\rangle\big| = \big|\tfrac{1}{2}\big\langle S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+\big\rangle\big| \le S(S+1)\,, \tag{1.24}$$

$$[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)]^2 \le \boldsymbol{k}^2\,(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)^2\,, \tag{1.25}$$

$$2(1-\cos x) \le x^2\,, \qquad |\langle S_i^y S_i^y\rangle| \le S^2\,, \tag{1.26}$$

koje nam daju:

$$\big|\big\langle\big[[C_{\boldsymbol{k}},\mathcal{H}],C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big]\big\rangle_b\big| \le S(S+1)\sum_{ij}|J_{ij}|(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)^2\boldsymbol{k}^2\,. \tag{1.27}$$

Uvrštavanjem prethodnog dobivamo:

$$\left|\tfrac{1}{2}\beta \textstyle\sum_{\boldsymbol{k}} \left\langle \{A_{\boldsymbol{k}}, A^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\} \right\rangle_b \right| \leq \beta n^2 S^2 \,, \tag{1.28}$$

$$\left| \left\langle \left[[C_{\boldsymbol{k}}, \mathcal{H} + H'_b], C^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \right] \right\rangle_b \right| \leq N\tau \boldsymbol{k}^2 + \Omega |b\langle M_x\rangle_b| \,, \tag{1.29}$$

gdje smo uveli *snagu vezanja*:

$$\tau := \frac{S(S+1)}{N} \sum_{ij} |J_{ij}| (\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)^2 \,. \tag{1.30}$$

Da bi τ konvergirao, međudjelovanje mora biti kratkodosežno.

Konačno, uvrštavanjem u Bogoljubovljevu nejednakost (1.22) zbrojenu po svim valnim vektorima $\boldsymbol{k} \in 1\text{BZ}$ nakon malo pojednostavljivanja dobivamo:

$$|\langle M_x \rangle_b|^2 \leq \frac{\beta n S^2}{\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k} \in 1\text{BZ}} \dfrac{1}{n\tau \boldsymbol{k}^2 + |b\langle M_x\rangle_b|}} \,. \tag{1.31}$$

U ovoj nejednakost se jasno vidi kako je naš razborit odabir operatora $C_{\boldsymbol{k}}$ i $A_{\boldsymbol{k}}$ doveo do gornje nejednakosti. Odabir operatora $C_{\boldsymbol{k}}$ nam je dao član $n\tau\boldsymbol{k}^2$ iz nazivnika desne strane, dok nam je odabir operatora $A_{\boldsymbol{k}}$ dao parametar uređenja na lijevoj strani nejednakosti. Ortogonalnost predfaktora $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{K})\cdot \boldsymbol{R}_i}$ iz $A_{\boldsymbol{k}}$ nam je osigurala da gornja međa bude intenzivna.

U skladu s Bogoljubovljevom metodom kvaziprosjeka, prvo uzimamo termodinamičku granicu, a zatim limes infinitezimalnog vanjskog polja $b \to 0$. U termodinamičkom limesu suma $\sum_{\boldsymbol{k}}$ prelazi u integral po prvoj Brillouinovoj zoni koji onda zamjenjujemo s krugom radijusa k_{BZ} istog volumena:

$$\frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k} \in 1\text{BZ}} \longrightarrow \frac{d}{k_{\text{BZ}}^d} \int_0^{k_{\text{BZ}}} \mathrm{d}k \, k^{d-1} \,. \tag{1.32}$$

Ovo smo pojednostavljenje napravili zato što nas samo infracrveni dio integrala zanima. Normalizacija desne strane je određena uvjetom $\sum_{\boldsymbol{k}} 1 = N$.

Iz oblika integrala $\int_0^{k_{\text{BZ}}} \mathrm{d}k\, k^{d-3}$ u nazivniku desne strane (1.31) se jasno vidi da on u limesu $b \to 0$ divergira samo u jednoj i dvije dimenzije. Izvrednjavanje integrala eksplicitno dobivamo:

$$|\langle M_x \rangle_b| \leq \sqrt{\frac{T^*(b)}{T}} \cdot M_{\text{sat}} \,, \tag{1.33}$$

gdje je $M_{\text{sat}} = nS$ saturacijska magnetizacija, a *temperatura gornje međe* je:

$$k_B T^*(b) = \tau k_{\text{BZ}}^2 \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|b\langle M_x\rangle_b|}{n\tau k_{\text{BZ}}^2}} \Big/ \arctan\left(\sqrt{\dfrac{n\tau k_{\text{BZ}}^2}{|b\langle M_x\rangle_b|}}\right), & \text{za } d = 1, \\ 1 \Big/ \log\left(1 + \dfrac{n\tau k_{\text{BZ}}^2}{|b\langle M_x\rangle_b|}\right), & \text{za } d = 2. \end{cases} \tag{1.34}$$

Gornja međa (1.33) je netrivijalna samo za temperature $T > T^*(b)$. Nadalje, temperature gornje međe T^* iščezava u limesu $b \to 0$ jer $|\langle M_x\rangle_b| < M_{\text{sat}}$ te stoga $|b\langle M_x\rangle_b| \to 0$. U granici $b \to 0$ imamo:

$$k_B T^*(b) \approx \tau k_{\text{BZ}}^2 \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{|b\langle M_x\rangle_b|}{n\tau k_{\text{BZ}}^2}}, & \text{za } d = 1, \\ -1 \Big/ \log\left(\dfrac{|b\langle M_x\rangle_b|}{n\tau k_{\text{BZ}}^2}\right), & \text{za } d = 2. \end{cases} \tag{1.35}$$

Hohenberg–Mermin–Wagnerov teorem slijedi iz ove zadnje nejednakost:

$$|\langle\!\langle M_x \rangle\!\rangle| = \lim_{b\to 0} |\langle M_x\rangle_b| \leq M_{\text{sat}} \cdot \lim_{b\to 0} \sqrt{\frac{T^*(b)}{T}} = 0\,. \tag{1.36}$$

Stoga je u jednoj i dvije dimenzije dugodosežno magnetsko uređenje za XXZ model s kratkodosežnim međudjelovanjem ($\lim_{\text{t.d.}} \tau < \infty$), pri konačnim temperaturama ($T > 0$) i u termodinamičkoj granici ($N \to \infty$) zabranjeno, QED.

1.2 Osjetljivost HMW argumenta za XXZ model

U prethodnom smo dijelu vidjeli kako se pomoću HMW argumenta može rigorozno dokazati odsutnost dugodosežnog uređenja u jednoj i dvije dimenzije za XXZ model. Uz nešto modifikacija se HMW argument može primijeniti i na razne druge modele. U ovome odjeljku ćemo istražiti što se događa kada umjesto *idealnog* XXZ modela koji je beskonačno velik i sadrži isključivo dijelove (1.6) i (1.9) promatramo realističniji XXZ model koji uzima u obzir nesavršenosti poput konačnosti sustava ili nečistoća. Istražit ćemo koliko je HMW argument relevantan za takve realističnije modele. Glavni rezultat ove analize je da je u dvije dimenzije HMW argument iznimno osjetljiv na nesavršenosti, dok u jednoj dimenziji nije. Ukratko, razlog je taj da je u dvije dimenzije infracrvena divergencija logaritamska te stoga vrlo slaba i osjetljiva, dok je u jednoj dimenziji potencijska te stoga jaka i robusna.

1.2.1 Osjetljivost na konačnost sustava

Neka je broj spinova N velik, ali konačan, recimo reda veličine $\sim 10^{15}$. Onda se suma $\sum_{\boldsymbol{k}}$ iz (1.31) u dvije dimenzije treba aproksimirati s izrazom:

$$\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{N}\bigg|_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}} + \frac{2}{k_{\mathrm{BZ}}^2}\int_{k_{\min}}^{k_{\mathrm{BZ}}} \mathrm{d}k\, k\,, \tag{1.37}$$

gdje je $k_{\min} := k_{\mathrm{BZ}}/\sqrt{N}$. Izvrednjavanjem dobivenog integrala za dvodimenzionalan XXZ model dobivamo:

$$|\langle M_x\rangle_b|^2 \leq \frac{\beta\tau k_{\mathrm{BZ}}^2}{\mathcal{D}}\cdot M_{\mathrm{sat}}^2\,, \tag{1.38}$$

$$\mathcal{D} = \frac{n\tau k_{\mathrm{BZ}}^2}{N|b\langle M_x\rangle_b|} + \log\left(\frac{|b\langle M_x\rangle_b| + n\tau k_{\mathrm{BZ}}^2}{|b\langle M_x\rangle_b| + n\tau k_{\min}^2}\right). \tag{1.39}$$

Kako bi ispitali spontano narušenje simetrija u konačnom sustavu potrebno je umjesto infinitezimalnog vanjskog polja b postaviti ga na vrijednost koja je fizikalno infinitezimalna, ali ipak dovoljno velika da cijeli sustav magnetizira. Ta tražena energetska skala ($\sim \sqrt{N}J$) je točno između makroskopske ($\sim NJ$) i mikroskopske ($\sim J$) energetske skale, a odgovarajuće magnetsko polje iznosi $b^* = \sqrt{N}\cdot\frac{nk_BT}{NM_{\mathrm{sat}}}$. Uvrštavanjem ovog polja u gornju nejednakost se dobiva nejednakost koja ima $\langle M_x\rangle$ s obije strane. Kada su lijeva i desna strana ove nejednakost jednake, to određuje maksimalnu magnetizaciju $M_{\max}$. Ako je maksimalna magnetizacija fizikalno infinitezimalna (npr. $\sim M_{\mathrm{sat}}/\sqrt{N}$ ili $\sim M_{\mathrm{sat}}/N$), onda je HMW argument robustan na konačnost sustava.

Transcendentalna jednadžba koja određuje $M_{\max}$ se može riješiti u limesu $N \to \infty$. Konačan rezultat je u dvije dimenzije:

$$M_{\max}^2 \approx \frac{2\beta\tau k_{\mathrm{BZ}}^2}{\log(N/2) + \log(\beta\tau k_{\mathrm{BZ}}^2)}\cdot M_{\mathrm{sat}}^2\,. \tag{1.40}$$

Ovaj rezultat očito nije infinitezimalno malen jer je $\log N$ za sustave razumnih veličina reda veličine ~ 10. U jednoj dimenziji analogna analiza daje:

$$M_{\max}^3 \approx \frac{4\beta\tau k_{\mathrm{BZ}}^2}{\pi^2 N^{1/2}}\cdot M_{\mathrm{sat}}^3\,, \tag{1.41}$$

što jest vrlo malo. Stoga u jednoj dimenziji infracrvene fluktuacije potiskuju nastanak uređenog stanja, dok su u dvije dimenzije one preslabe.

1.2.2 Osjetljivost na smetnje

Promotrimo što se događa kada u Hamiltonijan nadodamo smetnju δH:

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H} + H_b' + \delta H\,. \tag{1.42}$$

Prateći HMW argument lako se uoči da je jedini utjecaj ove smetnje novi član $\Delta_b(\boldsymbol{k})$:

$$\Delta_b(\boldsymbol{k}) := \Omega^{-1}\Big|\big\langle \big[[C_{\boldsymbol{k}}, \delta H], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big]\big\rangle_{b,\delta}\Big|\,, \tag{1.43}$$

koji se pojavljuje u nazivniku desne strane nejednakosti (1.31):

$$\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{n\tau \boldsymbol{k}^2 + \Delta_b(\boldsymbol{k}) + \big|b\langle M_x\rangle_{b,\delta}\big|}\,. \tag{1.44}$$

Kao što je iz ovog izraza jasno vidljivo, ako u limesu $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$ ovaj novi član ne iščezava, onda infracrvena divergencija koja je ključna HMW argumentu može biti potisnuta. Općenito gledajući, $\Delta_b(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0})$ ne iščezava samo ako smetnja δH eksplicitno narušava danu simetriju sustava, odnosno ako δH ne komutira s $C_{\boldsymbol{0}}$ koji je generator simetrije sustava. Tako bez bilo kakvih daljnjih izračuna možemo odmah reći da je HMW argument u dvije dimenziji iznimno osjetljiv na takve smetnje koje narušavaju simetriju sustava, dok u jednoj dimenzije nije, jer su logaritamske divergencije značajno osjetljivije (slabije) od potencijskih.

Jedna kategorija smetnji koje možemo promatrati su oblika:

$$\delta H = -\sum_i \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{S}_i\,, \tag{1.45}$$

gdje su $\boldsymbol{h}_i$ fiksna, nasumično raspodijeljena lokalna polja s prosjekom $\boldsymbol{0}$; ona predstavljaju nečistoće. Dodatan član se za ovu perturbaciju da izračunati:

$$\Delta_b = \Omega^{-1}\left|\left\langle \sum\nolimits_i \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{S}_i \right\rangle_{b,\delta}\right| = \Omega^{-1}\big|\langle \delta H\rangle_{b,\delta}\big|\,. \tag{1.46}$$

Gornja međa kvaziprosjeka magnetizacije se lako odredi u dvije dimenzije:

$$|\langle\!\langle M_x \rangle\!\rangle|^2 \leq \frac{\beta\tau k_{\text{BZ}}^2}{\log\big(1 + n\tau k_{\text{BZ}}^2/\Delta_0\big)} \cdot M_{\text{sat}}^2\,, \tag{1.47}$$

tako da čak i kada je energija perturbacije deset ili više redova veličine manja od energetske skale spinskog vezanja, tj. $\Delta_0 \sim 10^{-10} n\tau k_{\text{BZ}}^2$, gornja međa na magnetizaciju ispada vrlo slaba jer je $\log(1 + n\tau k_{\text{BZ}}^2/\Delta_0) \sim 10$. Nasuprot toga u jednoj se dimenziji analognim računom dobiva:

$$|\langle\!\langle M_x \rangle\!\rangle|^2 \leq \beta\tau k_{\text{BZ}}^2 \cdot \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta_0}{n\tau k_{\text{BZ}}^2}} \cdot M_{\text{sat}}^2 \,, \tag{1.48}$$

što jest vrlo malo za $\Delta_0 \ll n\tau k_{\text{BZ}}^2$.

1.2.3 Zaključak

Tako smo ustanovili da je HMW argument u dvije dimenzije iznimno osjetljiv na konačnost sustava i nečistoće koje narušavaju kontinuiranu simetriju sustava, dok je isti argument u jednoj dimenziji robustan na ove učinke. Ipak, valja primijetiti kako se u svim gornjim međama pojavljuje temperature te da je pri temperaturama značajno većim od temperature spinskog međudjelovanja $\tau k_{\text{BZ}}^2/k_B$ magnetizacija uvijek omeđena s malim brojem $\sim \sqrt{\beta\tau k_{\text{BZ}}^2} M_{\text{sat}}$. Ovo je i očekivano jer se za temperaturu faznog prijelaza očekuje da je istog reda veličine kao i temperatura spinskog međudjelovanja. U jednoj dimenziji infracrvene fluktuacije potiskuju ovu očekivanu temperaturu prijelaza za vrlo velike faktore $N^{1/6}$ (konačnost) i $\sqrt{N\tau k_{\text{BZ}}^2/\langle\delta\mathcal{H}\rangle}$ (smetnja), dok su u dvije dimenzije ti isti faktori relativno maleni: $\log N$ (konačnost) i $\log(N\tau k_{\text{BZ}}^2/\langle\delta\mathcal{H}\rangle)$ (smetnja). Tako da u dvije dimenzije sustav treba biti ili astronomski velik ($\sim 10^{10}\,\text{m}$) ili nevjerojatno čist ($\langle\delta\mathcal{H}\rangle \sim 10^{-10} N\tau k_{\text{BZ}}^2$) da bi Hohenberg–Mermin–Wagnerov argument bio imalo relevantan. Drugim riječima, u dvjema dimenzijama infracrvene fluktuacije ne predstavljaju bilo kakvu prepreku nastanku dugodosežnog uređenja. Do sličnog zaključka je došao Anthony J. Leggett u jednom od svojih predavanja o dvodimenzionalnoj fizici [41]. Eksperimentalno se u dvodimenzionalnim magnetskim sustavima fazni prijelazi s $T_c \sim \tau k_{\text{BZ}}^2/k_B$ uistinu i opažaju [42, sekcija 3.2]. Zanimljivo je primijetiti kako naš rezultat sugerira da nečistoće mogu pospješiti nastanak uređene fazne. Taj fenomen *uređenja induciranog nasumičnim polje* (eng. random-field-induced order) se podosta istraživao zadnjih godina [43–47].

2 HMW argument za supravodiče

Opće je poznato u literaturi visokotemperaturnih supravodiča da je supravodljivost u kupratima i željeznim pniktidima izrazito dvodimenzionalnoga karaktera [48–53]. Iz ovoga razloga je zanimljivo istražiti kakve implikacije Hohenberg–Mermin–Wagnerov argument ima na naše shvaćanje visokotemperaturne supravodljivosti, pogotovo uvidu nedavnih eksperimenata u kojima su se uspješno izolirali dvodimenzionalni slojevi visokotemperaturnih supravodiča te se pokazalo da su njihove temperature supravodljivog prijelaza usporedive s temperaturama prijelaza odgovarajućih trodimenzionalnih uzoraka [54–60].

Povijesno gledano, među prvim fenomenima koje je Pierre C. Hohenberg promatrao je bila supravodljivost [1]. U Hohenbergovom argumentu ključne su bile pretpostavke parabolične disperzije i neretardiranog lokalnog međudjelovanja. Kasnije se HMW argument također iskoristio kako bi se dokazala odsutnost supravodljivosti u Hubbardovom modelu [11, 12], periodičnom Andersonovom modelu nečistoća [13, 15] te t–J modelu [14]. Osim toga, HMW argument se poopćio i na Hubbardove modele s konačnim brojem slojeva [8, 9]. Svi ti HMW teoremi imaju sljedeći oblik:

Teorem (Hohenberg–Mermin–Wagner). *Dugodosežno supravodljivo uređenje je zabranjeno u jednoj i dvije dimenzije za neki specificiran Hamiltonijan, uz ograničenja na parametre tog Hamiltonijana, pri temperaturama većim od apsolutne nule, u termodinamičkoj granici te za jedan ili konačan broj slojeva. Kvaziprosjek parametra uređenja sa specifičnim Cooperovim sparivanjem iščezava:*

$$\langle\!\langle \Psi \rangle\!\rangle = 0\,, \tag{2.1}$$

u termodinamičkoj granici u kojoj držimo prosječnu gustoću elektrona konstantnu, dok uzimamo prosječan broj elektrona i duljinu/površinu sustava u beskonačnost.

U ostatku poglavlja ćemo prvo dokazati jedan vrlo općenit HMW teorem koji pokriva sve prethodne rezultate [8, 9, 11–15] kao posebne slučajeve. U teoremu će se pretpostaviti da Hamiltonijan ima isključivo neretardirana i lokalna međudjelovanja, dok će Cooperovo vezanje biti najopćenitije moguće (singlet/triplet, proizvoljna prostorna simetrija, konačna količina gibanja para, možda narušava simetrije vremenske ili prostorne inverzije). Nakon toga raspravljamo mogućnosti daljnjeg poopćenja HMW teorema te istražujemo osjetljivost na konačnost i perturbacije. Ustvrđujemo da je HMW argument u dvije dimenzije potpuno irelevantan za sve supravodiče laboratorijskih veličina. Na kraju izlažemo novi argument u kojem dobivamo netrivijalnu gornju među na parametar uređenja koja je za dvodimenzionalne sustave razumnih veličina manja od gornje međe iz HMW argumenta. U kontrast s ilustrativnom raspravom prošlog poglavlja, u ovom poglavlju ćemo preskakati sve elementarne korake u algebri, dokazima i sl.

2.1 HMW teorem za supravodiče

Promotrimo sustav obučenih elektrona koji se gibaju u periodičnoj pozadini. Neka se sustav sastoji od ℓ dvodimenzionalnih ravnina koje imaju površinu $\Omega = L_1 L_2$ i broj jediničnih ćelija $M := \Omega/(a_1 a_2) = M_1 M_2 = (L_1/a_1)(L_2/a_2)$[6] te neka su $\boldsymbol{R} \in \{\mathbb{Z}\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{Z}\boldsymbol{a}_2\}$ vektori direktne rešetke u Ω, $\boldsymbol{r} \in \{\mathbb{Z}\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{Z}\boldsymbol{a}_2\}$ razlike direktnih vektora te σ, τ oznake spinova. Na sustav namećemo uobičajene periodične rubne uvjete, a sume koje ide po valnim vektorima $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{Q}, \ldots \in \{(\mathbb{Z}/M_1)\boldsymbol{b}_1 + (\mathbb{Z}/M_2)\boldsymbol{b}_2\}$ ($\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$) će u ostatku odjeljka uvijek ići isključivo po prvoj Brillouinovoj zoni, osim ako se ne napomene suprotno.

Operatori stvaranja $a^\dagger_{\boldsymbol{k}\mu\sigma}$ i uništenja $a_{\boldsymbol{k}\mu\sigma}$ zadovoljavaju standardne fermionske antikomutacijske relacije te osim njih uvodimo i operatore stvaranja i uništenja u realnom prostoru:

$$a_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} := M^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} a_{\boldsymbol{k}\mu\sigma} \,, \tag{2.2}$$

$$a^\dagger_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} := M^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\mu\sigma} \,. \tag{2.3}$$

Ovdje indeksi $\mu, \nu, \ldots$ numeriraju vrpce i valne funkcije u z smjeru te ćemo često pretpostaviti implicitno zbrajanje (Einsteinovu konvenciju) za ove indekse kada se ponavljaju. Osim slobodnih elektrona također uvodimo fermionske operatore stvaranja $f^\dagger_{I\sigma}$(uništenja $f_{I\sigma}$) koji stvaraju (uništavaju) elektrone lokalizirane oko nečistoće s položajem $\boldsymbol{r}_I$. Indeks I je rezerviran za nečistoće. Također uvodimo operatore broja

[6]Koristimo slovo M za broj jediničnih ćelija jer će N biti operator broja čestica.

čestica i spina:

$$n_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} := a^\dagger_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{R}\mu\sigma}\,, \qquad n_{I\sigma} := f^\dagger_{I\sigma} f_{I\sigma}\,, \tag{2.4}$$

$$n_{\boldsymbol{R}\mu} := n_{\boldsymbol{R}\mu\uparrow} + n_{\boldsymbol{R}\mu\downarrow}\,, \qquad n_I := n_{I\uparrow} + n_{I\downarrow}\,, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{R}\mu} := \frac{1}{2}\sum_{\tau_1\tau_2} a^\dagger_{\boldsymbol{R}\mu\tau_1} \boldsymbol{\sigma}_{\tau_1\tau_2} a_{\boldsymbol{R}\mu\tau_2}\,, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_I := \frac{1}{2}\sum_{\tau_1\tau_2} f^\dagger_{I\tau_1} \boldsymbol{\sigma}_{\tau_1\tau_2} f_{I\tau_2} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{S}_\mu(\boldsymbol{r}) := \frac{1}{2M}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}\tau_1\tau_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\mu\tau_1} \boldsymbol{\sigma}_{\tau_1\tau_2} a_{\boldsymbol{p}\mu\tau_2}\,, \tag{2.7}$$

gdje su $\boldsymbol{\sigma}$ Paulijeve matrice.

Neka je efektivan Hamiltonijan sustava:

$$\mathcal{H} = H_0 + V_{\text{imp}} + U\big(a^\dagger_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{R}\nu\tau}, f^\dagger_{I\sigma} f_{I\tau}\big)\,, \tag{2.8}$$

gdje je:

$$H_0 := \sum_{\boldsymbol{k}\mu\nu\sigma\tau} \epsilon^{\sigma\tau}_{\boldsymbol{k}\mu\nu} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{k}\nu\tau} + \sum_{I\sigma\tau} \epsilon_{I\sigma\tau} f^\dagger_{I\sigma} f_{I\tau}\,, \tag{2.9}$$

$$V_{\text{imp}} := \frac{1}{2}\sum_{I\sigma\boldsymbol{R}\mu\tau} \left[V^{\sigma\tau}_{I\boldsymbol{R}\mu} f^\dagger_{I\sigma} a_{\boldsymbol{R}\mu\tau} + V^{\sigma\tau *}_{I\boldsymbol{R}\mu} a^\dagger_{\boldsymbol{R}\mu\tau} f_{I\sigma}\right], \tag{2.10}$$

a U je proizvoljan zbroj višečestičnih operatora koji su dijagonalni u operatorima $a^\dagger_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{R}\nu\tau}$ i $f^\dagger_{I\sigma} f_{I\tau}$. Očigledno, međudjelovanje U je lokalno (dijagonalno u $\boldsymbol{R}$) te nema retardacije.

Najopćenitiji mogući parametar uređenja je:

$$\begin{aligned}\Delta &:= \sum_{\boldsymbol{r}\mu\nu\boldsymbol{Q}} \sum_{\sigma\tau} s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \tilde{\Delta}^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \\ &= M^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}\mu\nu\boldsymbol{Q}} \sum_{\sigma\tau} S^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}\mu\sigma} a_{-\boldsymbol{k}\nu\tau}\,,\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\tilde{\Delta}^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) := M^{-1} \sum_{\boldsymbol{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}} a_{\boldsymbol{R}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}\nu\tau}\,, \tag{2.12}$$

gdje je $s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ proizvoljna funkcija razmazivanja (u biti, valna funkcija Cooperovog para), a $S^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{k})$ njen Fourierov transformat:

$$s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) = M^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} S^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{k})\,, \tag{2.13}$$

$$S^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{k}) := \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})\,. \tag{2.14}$$

Paulijev princip implicira da je $S^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{k}) = -S^{\nu\mu\boldsymbol{Q}}_{\tau\sigma}(-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})$, dok je inače funkcija razmazivanja $s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ potpuno proizvoljna. Član kojim narušavamo $\mathrm{U}(1)$ simetriju koja se lomi u supravodičima je:

$$H'_\kappa = -\tfrac{1}{8}\left[\kappa\Delta + \kappa^*\Delta^\dagger\right]. \tag{2.15}$$

Za razliku od prošlog poglavlja gdje smo promatrali magnetizam i gdje smo u slučaju feromagnetizma polje $\kappa = b$ mogli interpretirati kao vanjsko magnetsko polje, kod supravodiča to ne vrijedi te se član H'_κ ne može realizirati u laboratoriju.

Sada ćemo dokazati sljedeći teorem:

Teorem (Hohenberg–Mermin–Wagner)**.** *Dugodosežno supravodljivo uređenje je zabranjeno u jednoj i dvije dimenzije za Hamiltonijan* (2.8)*, uz ograničenja da je konstanta ζ definirana u* (2.22) *intenzivna, pri temperaturama većim od apsolutne nule, u termodinamičkoj granici te za konačan broj slojeva. Kvaziprosjek parametra uređenja* (2.11) *s proizvoljnim Cooperovim vezanjem iščezava:*

$$\langle\!\langle \Delta \rangle\!\rangle = \sum_{\boldsymbol{r}\mu\nu\boldsymbol{Q}} \sum_{\sigma\tau} s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \left\langle\!\!\left\langle \tilde{\Delta}^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \right\rangle\!\!\right\rangle = 0\,, \tag{2.16}$$

u termodinamičkoj granici u kojoj držimo prosječnu gustoću elektrona konstantnu, dok uzimamo prosječan broj elektrona i duljinu/površinu sustava u beskonačnost.

2.1.1 Dokaz HMW teorema

Kao operatore u Bogoljubovljevoj nejednakosti (1.3) uzimamo:

$$
\begin{aligned}
C_{\boldsymbol{k}} &= \sum_{\boldsymbol{R}\mu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} n_{\boldsymbol{R}\mu} + \sum_{I} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_I} n_I \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\mu\sigma} a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{q}\mu\sigma} + \sum_{I\sigma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_I} f^{\dagger}_{I\sigma} f_{I\sigma}\,,
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

$$
A_{\boldsymbol{k}} = M^{-1} \sum_{\boldsymbol{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})\cdot\boldsymbol{R}} a_{\boldsymbol{R}\mu_1\tau_1} a_{\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}\mu_2\tau_2}\,. \tag{2.18}
$$

Motivacija odabira ovih operatora je ista kao u odjeljku 1.1.1; relevantan infinitezimalan generator simetrija je u ovom slučaju operator broja čestica $N = C_{\boldsymbol{0}}$. Indeksi $(\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}\tau_1\tau_2)$ u $A_{\boldsymbol{k}}$ su fiksni te njihovo ponavljanje neće implicirati nikakve sumacije u sljedećem. Raspisivanjem se lako pokaže da je:

$$
[C_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}] = -(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\tilde{\Delta}^{\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}}_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})\,, \tag{2.19}
$$

$$
\sum_{\boldsymbol{k}} \big\langle \{A_{\boldsymbol{k}}, A^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\} \big\rangle_{\kappa} \le 1\,, \tag{2.20}
$$

$$
\big|\big\langle \big[[C_{\boldsymbol{k}}, \mathcal{H} + H'_{\kappa}], C^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big] \big\rangle_{\kappa}\big| \le M\ell\zeta\boldsymbol{k}^2 + M\ell\mathcal{D}(\kappa)\,, \tag{2.21}
$$

gdje je:

$$
\zeta := \frac{1}{M\ell} \sum_{\boldsymbol{q}\mu\nu\sigma\tau} \max_{\boldsymbol{k}} \frac{\big|\epsilon^{\sigma\tau}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}\mu\nu} + \epsilon^{\sigma\tau}_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}\mu\nu} - 2\epsilon^{\sigma\tau}_{\boldsymbol{q}\mu\nu}\big|}{\boldsymbol{k}^2} \big|\big\langle a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\mu\sigma} a_{\boldsymbol{q}\nu\tau}\big\rangle\big| + \frac{1}{M\ell} \sum_{I\sigma\boldsymbol{R}\mu\tau} (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_I)^2 \big|V^{\sigma\tau}_{I\boldsymbol{R}\mu}\big|\,, \tag{2.22}
$$

$$
\mathcal{D}(\kappa) := (M\ell)^{-1}|\kappa| \sum_{\boldsymbol{r}} \left| \sum_{\mu\nu\boldsymbol{Q}} \sum_{\sigma\tau} s^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \Big\langle \tilde{\Delta}^{\mu\nu\boldsymbol{Q}}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \Big\rangle_{\kappa} \right|. \tag{2.23}
$$

U prvom članu ζ-e, suma po $\mu\nu$ ide samo po djelomično punim vrpcama, dok drugi član daje intenzivnu konstantu samo za kratkodosežnu hibridizaciju s nečistoćama.

Uvrštavanjem prethodnog u Bogoljubovljevu nejednakost, dijeljenjem s dvostrukim komutatorom i zbrajanjem po $\boldsymbol{k} \in$ 1BZ dobivamo:

$$
\left| \Big\langle \tilde{\Delta}^{\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}}_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r}) \Big\rangle_{\kappa} \right|^2 \le \frac{\ell\beta}{\dfrac{2}{M} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right|^2}{\zeta\boldsymbol{k}^2 + \mathcal{D}(\kappa)}}\,. \tag{2.24}
$$

Ponovno uzimamo termodinamički limes, zamjenjujemo prvu Brillouinovu zonu s kuglom, izvodimo kutni integral te koristimo donje međe:

$$1 + J_0(ku) \geq \max\{2 - (ku)^2/4, 1 + J_{\text{min}}\}\,, \tag{2.25}$$

$$\left|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}ku}\right|^2 \geq \max\left\{4 - (ku)^2, 0\right\}\,, \tag{2.26}$$

gdje je $J_{\text{min}} = J_0(j_{1,1}) = -0.40276\ldots$ minimum prve Besselove funkcije nultog reda, kako bi na kraju dobili gornje međe na parametar uređenja.

Konačan je rezultat gornja međa:

$$\left|\left\langle \tilde{\Delta}^{\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}}_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})\right\rangle\right| \leq \sqrt{\frac{T^*(\kappa)}{T}}\,. \tag{2.27}$$

gdje je dvodimenzionalna *temperatura gornje međe*:

$$k_B T^*(\kappa) := \ell \cdot \frac{1}{8}\zeta k_{\text{BZ}}^2 \cdot \frac{1}{\log\left(1 + \dfrac{1}{\mathcal{D}'(\kappa)}\right) + B_2(\kappa)}\,, \tag{2.28}$$

s $\mathcal{D}'(\kappa) := \mathcal{D}(\kappa)/(\zeta k_{\text{max}}^2)$ i:

$$k_{\text{max}} := \begin{cases} k_{\text{BZ}}, & \text{ako je } \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \\ 2\sqrt{1 - J_{\text{min}}}/|\boldsymbol{r}|, & \text{u suprotnom,} \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} B_2(\kappa) := \frac{1}{8}(|\boldsymbol{r}|k_{\text{max}})^2\left(\mathcal{D}'(\kappa)\log\left(1 + \frac{1}{\mathcal{D}'(\kappa)}\right) - 1\right) \\ + \frac{1 + J_{\text{min}}}{2}\log\left(\frac{(k_{\text{BZ}}/k_{\text{max}})^2 + \mathcal{D}'(\kappa)}{1 + \mathcal{D}'(\kappa)}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

$B_2(\kappa)$ iščezava za $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Jednodimenzionalna *temperatura gornje međe* je dana s:

$$k_B T^*(\kappa) := \ell \cdot \frac{1}{4\pi}\zeta k_{\text{BZ}} k_{\text{max}} \cdot \frac{\sqrt{\mathcal{D}'(\kappa)}}{\frac{2}{\pi}\arctan\left(1/\sqrt{\mathcal{D}'(\kappa)}\right) + B_1(\kappa)}\,, \tag{2.31}$$

gdje je $\mathcal{D}'(\kappa) := \mathcal{D}(\kappa)/(\zeta k_{\text{max}}^2)$, a:

$$k_{\text{max}} := \begin{cases} k_{\text{BZ}} = \pi/a, & \text{ako je } u = 0, \\ 2/u, & \text{u suprotnom,} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$B_1(\kappa) := \frac{1}{2\pi}(uk_{\text{max}})^2\left(\mathcal{D}'(\kappa)\arctan\left(1/\sqrt{\mathcal{D}'(\kappa)}\right) - \sqrt{\mathcal{D}'(\kappa)}\right)\,. \tag{2.33}$$

$B_1(\kappa)$ iščezava za $u = 0$ te $B_1(\kappa) \to 0$ u granici $\kappa \to 0$. Prisjetimo se da je a veličina jedinične ćelije u jednoj dimenziji te da je $u = \mathbb{Z}\, a$. Prirodna energetska skala temperature gornje međe $k_B T^*$ je Fermijeva energija $E_F \sim \zeta k_{\text{BZ}}^2 \sim \zeta k_{\text{BZ}} k_{\text{max}}$ pomnožena s brojem slojeva ℓ. Za paraboličnu disperziju i samo jednu vodljivu vrpcu $\epsilon_{\boldsymbol{q}}^{\sigma\tau} = (\hbar^2 \boldsymbol{q}^2 / 2m_{\text{eff}})\delta_{\sigma\tau}$ te se dobiva da je $\zeta k_{\text{BZ}}^2 = 8\pi(\hbar^2/m_{\text{eff}}) n_{\text{el}} \sim E_F$, gdje je n_{el} broj elektrona u vodljivoj vrpci. Za općenite disperzije, prvi član u izrazu za zeta (2.22) se može interpretirati kao prosjek druge derivacije energije po Fermijevom moru jer je $(\epsilon_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}} + \epsilon_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}} - 2\epsilon_{\boldsymbol{q}})/\boldsymbol{k}^2 \approx (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}})^2 \epsilon_{\boldsymbol{q}}$ te će stoga ζk_{BZ}^2 uvijek biti istog reda veličine kao i Fermijeva energija E_F.

Budući da $\mathcal{D}'(\kappa) \to 0$ u granici $\kappa \to 0$ zbog omeđenosti parametra uređenja $\left|\left\langle \tilde{\Delta}_{\tau_1\tau_2}^{\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r}) \right\rangle\right| \leq 1$, temperature gornje međe $T^*(\kappa)$ iščezavaju u istom limesu za $d = 1, 2$. Iz ovoga slijedi Hohenberg–Mermin–Wagnerov teorem:

$$\left|\left\langle\!\left\langle \tilde{\Delta}_{\tau_1\tau_2}^{\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r}) \right\rangle\!\right\rangle\right| = \lim_{\kappa\to 0} \left|\left\langle \tilde{\Delta}_{\tau_1\tau_2}^{\mu_1\mu_2\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r}) \right\rangle_\kappa\right| \leq \lim_{\kappa\to 0} \sqrt{\frac{T^*(\kappa)}{T}} = 0\,. \tag{2.34}$$

2.1.2 Mogućnosti daljnjeg poopćenja

Zbog dijagonalnosti operatora $C_{\boldsymbol{k}}$ u položaju $\boldsymbol{R}$, u Hamiltonijanu smo mogli dodati proizvoljna instantna lokalna međudjelovanja U koja kasnije nisu uopće utjecala na dokaz jer je $[C_{\boldsymbol{k}}, U] = 0$. Ako u Hamiltonijan dodamo članove koji su skoro pa dijagonalni u položaju $\boldsymbol{R}$, onda je $\big[[C_{\boldsymbol{k}}, \mathcal{H}], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\big]$ i dalje proporcionalno $\boldsymbol{k}^2$ za male $\boldsymbol{k}$ jer Hamiltonijan čuva broj čestica. Stoga ta dodatna nelokalna međudjelovanja u HMW argumentu samo uzrokuje modifikaciju konstante ζ. Ako je međudjelovanje izrazito nelokalno, kao što je slučaj u reduciranom BCS Hamiltonijanu, onda ζ može i divergirati u termodinamičkoj granici te time narušiti HMW teorem.

Do sada su sva međudjelovanja koja smo promatrali bila bez retardacije. Kako bi se retardacija uzela u obzir, u Hamiltonijan treba dodati članove koji opisuju dinamiku fonona, fotona ili drugih prenosnika sila među elektronima. U samome HMW argumentu, operatori $C_{\boldsymbol{k}}$ i $A_{\boldsymbol{k}}$ ostaju isti, ali u koracima do određivanja gornje međe (2.21) je potrebno odrediti netrivijalne gornje međe na očekivane vrijednosti članova koji predstavljaju vezanje elektrona s prenosnicima sila. Primjerice, ako bismo imali Frölichovo vezanje elektrona s fononima, onda bismo u argumentu trebali odrediti gornju među na članove oblika $\langle b_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\lambda} a_{\boldsymbol{p}}^\dagger a_{\boldsymbol{q}} \rangle$. Ovo je značajna komplikacija za pokušaje daljnjeg poopćenja HMW argumenta. Ipak, valja napomenuti kako dodavanje fiksne elektromagnetske pozadine, primjerice, uopće ne utječe na valjanost HMW teorema.

2.2 Osjetljivost HMW argumenta za supravodiče

HMW teorem za supravodiče je izrazito osjetljiv na konačnost sustava u dvije dimenzije. S minimalnim izmjenama se analiza iz prethodnog poglavlja može primijeniti na HMW argument iz ovog poglavlja. Konačan rezultat te analize je da u dvije dimenzije HMW argument potiskuje temperaturu supravodljivog prijelaza T_c ispod temperature $\sim \ell \cdot T_F / \log(k_{\mathrm{BZ}} L)$, gdje je ℓ broj slojeva, T_F Fermijeva temperatura, a k_{BZ} radijus prve Brillouinove zone. Budući da su Fermijeve temperature $T_F \sim 50\,000\,\mathrm{K}$, a supravodljive temperature prijelaza $T_c < 200\,\mathrm{K}$ za sve do danas poznate supravodiče, sustav bi trebao biti astronomskih veličina ($\sim 10^{100}\,\mathrm{m}$ zbog logaritma u nazivniku) da bi HMW argument postao na bilo koji način fizikalno relevantan.

Budući da je prisutnost jednočestične Fermijeve energetske skale kriva za ovakvu irelevantnost HMW argument u dvije dimenzije, čovjek bi mogao pokušati nekako izmijeniti HMW argument tako da mu daje dvočestičnu energetsku skalu međudjelovanja u nejednakosti (2.24). U sljedećem odjeljku smo to i učili te tako dobili netrivijalnu gornju među na parametar uređenja (2.45) koja, međutim, ne iščezava u termodinamičkoj granici, već teži intenzivnoj konstanti. Stoga nam ova gornja međa ne može poreknuti postojanje supravodljivog uređenja, ali nam može reći da je potisnuto pri temperaturama puno većim od karakteristične temperature te gornje međe.

Jednodimenzionalan HMW argument je nasuprot dvodimenzionalnom argumentu robustan na utjecaje konačnosti sustava, čak iako su nam fizikalno najzanimljiviji baš supravodiči s dvodimenzionalnim geometrijama. Perturbacije, s druge strane, općenito ne remete HMW argument jer one uvijek čuvaju broj elektrona te stoga i relevantnu simetriju sustava. Stoga je HMW argument za supravodiče robustan na perturbacije.

2.3 HMW argument dijagonalan u Fourierovom prostoru

Ovdje opisujemo našu modifikaciju HMW argumenta iz odjeljka 2.1 u kojoj smo uspjeli umjesto Fermijeve energije u konačnim nejednakostima dobiti energetsku skalu međudjelovanja. Geometrija uzorka i oznake su iste kao u odjeljku 2.1, osim što će sume po valnim vektorima ići po svim valnim vektorima, a ne samo po prvoj Brillouinovoj zoni. Radi jednostavnosti, neka efektivan Hamiltonijan ne sadrži nečistoće te ima oblik reduciranog BCS Hamiltonijana:

$$\mathcal{H} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \epsilon_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} a_{\boldsymbol{k}\sigma} + \frac{1}{M} \sum_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1\uparrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{p}_1\downarrow} a_{-\boldsymbol{p}_2\downarrow} a_{\boldsymbol{p}_2\uparrow} \,, \tag{2.35}$$

gdje je $V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}$ efektivan potencijal, a ne više hibridizacija s nečistoćama. Neka je parametar uređenja oblika:

$$\Delta := \sum_{\boldsymbol{q}} \tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}} = M^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{q}} S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\uparrow} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \,, \tag{2.36}$$

gdje je M broj jediničnih ćelija.

Kao operatore u Bogoljubovljevoj nejednakosti (1.3) uzimamo:

$$C_{\boldsymbol{R}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} \big(a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} + a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \big) \,, \tag{2.37}$$

$$A_{\boldsymbol{R}} = M^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\uparrow} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \,, \tag{2.38}$$

gdje su $\boldsymbol{R}$ vektori direktne rešetke. Glavna razlika s argumentom odjeljka 2.1 je u tome da su operatori $C_{\boldsymbol{R}}$ sada dijagonalni u recipročnom prostoru te stoga komutiraju s jednočestičnim Hamiltonijanom. Relevantni komutatori i antikomutatori su:

$$[C_{\boldsymbol{R}}, A_{\boldsymbol{R}}] = -(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}) \tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}} \,, \tag{2.39}$$

$$\sum_{\boldsymbol{R}} \big\langle \{A_{\boldsymbol{R}}, A^\dagger_{\boldsymbol{R}}\} \big\rangle \le M^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}} |S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k})|^2 = I^{\boldsymbol{q}} \,, \tag{2.40}$$

$$\big[[C_{\boldsymbol{R}}, \mathcal{H}], C^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big] = \frac{4}{M} \sum_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} \big| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{R}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{R}} \big|^2 V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1\uparrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{p}_1\downarrow} a_{-\boldsymbol{p}_2\downarrow} a_{\boldsymbol{p}_2\uparrow} \,, \tag{2.41}$$

$$\big[[C_{\boldsymbol{k}}, \tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}], C^\dagger_{\boldsymbol{k}}\big] = \big| 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}} \big|^2 \tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}} \,, \tag{2.42}$$

gdje smo iskoristili $\sum_{\boldsymbol{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{k}} = M\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{0}}$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$\big| \langle \tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}} \rangle_\kappa \big|^2 \le I^{\boldsymbol{q}} \cdot \beta \left\{ \frac{1}{M} \sum_{\boldsymbol{R}} \frac{|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}|^2}{\xi_\kappa(\boldsymbol{R}) + \mathcal{D}(\kappa)} \right\}^{-1} \,, \tag{2.43}$$

gdje je:

$$\xi_\kappa(\boldsymbol{R}) := \frac{8}{M^2}\sum_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}\sin^2[(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{R}/2]\,|V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}|\,\left|\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{p}_1\downarrow}a_{-\boldsymbol{p}_2\downarrow}a_{\boldsymbol{p}_2\uparrow}\right\rangle_\kappa\right|. \tag{2.44}$$

Nažalost, desna strana ove nejednakosti ne iščezava u termodinamičkom limesu $M\to\infty$ i limesu infinitezimalne perturbacije $\kappa\to 0$, $\mathcal{D}(\kappa)\to 0$. Ipak, $\xi_\kappa(\boldsymbol{R})$ nam uistinu daje energetsku skalu međudjelovanja koja je značajno manja od Fermijeve energije. U dvije i tri dimenzije se nakon angularnog uprosječivanja $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}|^2 \xrightarrow{\text{2D}} 2(1+J_0(qR))\geq 1$, odnosno $\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\right|^2 \xrightarrow{\text{3D}} 2\left[1+\dfrac{\sin(qR)}{qR}\right]\geq 1$, može izvesti sljedeća netrivijalna gornja međa na parametar uređenja:

$$|\langle\!\langle\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}\rangle\!\rangle| \leq \sqrt{\frac{T^*}{T}}\cdot\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}_{\text{sat}}\,, \tag{2.45}$$

gdje je $\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}_{\text{sat}} = |M^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}} S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k})\langle a_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle_{T=0}|$ saturacijska ili maksimalna vrijednost parametra uređenja koju supravodič postiže pri apsolutnoj nuli $T=0$, dok je T^* *temperatura gornje međe*:

$$k_BT^* := \frac{I^{\boldsymbol{q}}}{(\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}_{\text{sat}})^2}\cdot\frac{8}{M^2}\sum_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}|V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}|\,\left|\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{p}_1\downarrow}a_{-\boldsymbol{p}_2\downarrow}a_{\boldsymbol{p}_2\uparrow}\right\rangle\right|. \tag{2.46}$$

U termodinamičkoj granici $\xi_\kappa(\boldsymbol{R})$ i k_BT^* teže intenzivnim konstantama.

Kako bismo ocijenili temperaturu gornje međe T^* trebamo odrediti veličinu predfaktora $I^{\boldsymbol{q}}/(\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}_{\text{sat}})^2$ koji je dan s izrazom:

$$\frac{I^{\boldsymbol{q}}}{(\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}_{\text{sat}})^2} = \frac{M^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}|S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k})|^2}{\left|M^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}} S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k})\langle a_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle_{T=0}\right|^2}. \tag{2.47}$$

U ovom izrazu je bitno primijetiti kako $\langle a_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle_{T=0}$ ima oblik $\propto E_{\text{gap}}/\sqrt{(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-E_F)^2+E^2_{\text{gap}}}$, gdje je E_{gap} energetski procjep u disperziji bogoljubona, pa stoga postiže vrijednosti bitno različite od nule samo unutar uskog pojasa oko Fermijeve energije debljine E_{gap}. Kako bismo minimizirali ovaj predfaktora te tako dobili što jaču gornju među, mi u vidu prethodnog smijemo staviti $S^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k})=0$ izvan ovog pojasa debljine E_{gap} oko Fermijeve energije, a da parametar uređenja i dalje dobro opisuje supravodljivi fazni prijelaz. U termodinamičkoj granici $M^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}$ prelazi u $\int \mathrm{d}^2k/A_{\text{1BZ}}$, gdje je A_{1BZ}

površina/volumen prve Brillouinove zone, pa se gornji predfaktora može ocijeniti s:

$$\frac{I^{\boldsymbol{q}}}{(\tilde{\Delta}^{\boldsymbol{q}}_{\text{sat}})^2} \sim \frac{(A_{\text{gap}}/A_{1\text{BZ}})\bar{S}^2}{[(A_{\text{gap}}/A_{1\text{BZ}})\bar{S}]^2} = \frac{A_{1\text{BZ}}}{A_{\text{gap}}} \sim \frac{k_{\text{BZ}}}{\delta k_{\text{gap}}}\,, \tag{2.48}$$

gdje je A_{gap} površina/volumen u recipročnom prostoru tog pojasa debljine E_{gap} oko Fermijeve energije. U većini materijala je ovaj predfaktor reda veličine 100.

Kako bismo ocijenili drugi član koji se pojavljuje u izrazu za temperaturu gornje međe T^*, pretpostavljamo da $V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}$ ima oblik:

$$V_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} = \begin{cases} -V_0, & \text{za } \epsilon_{\boldsymbol{p}_1}, \epsilon_{\boldsymbol{p}_2} \in \langle E_F - \hbar\omega_D, E_F + \hbar\omega_D \rangle, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \tag{2.49}$$

gdje je ω_D Debyeeva frekvencija. Uvrštavanjem u (2.46) tako dobivamo ocjenu:

$$k_B T^* \sim 10^2 \cdot 10[Ag(E_F)\hbar\omega_D]^2 V_0\,, \tag{2.50}$$

gdje je A površina/volumen jedinične ćelije, a $g(E_F)$ elektronska gustoća stanja po energiji i površini/volumenu pri Fermijevoj plohi. Ovo možemo izraziti i pomoću bezdimenzionalne konstante elektron-fonon vezanja $\lambda := Ag(E_F)V_0$ kao:

$$k_B T^* \sim 10^2 \cdot 10\lambda[Ag(E_F)\hbar\omega_D] \cdot \hbar\omega_D \tag{2.51}$$

$$\sim 10^3 \lambda^2 \cdot V_{\text{int}}\,, \tag{2.52}$$

gdje je V_{int} neka opća skala međudjelovanja kojom smo zamijenili i $\hbar\omega_D$ i V_0. Referenca ovoj ocjeni je BCS izraz za temperaturu faznog prijelaza $k_B T_c = 1.13\mathrm{e}^{-1/\lambda}\hbar\omega_D$. Zbog velikog faktora $10^3\lambda[Ag(E_F)\hbar\omega_D]$ ispred Debyeeve energije $\hbar\omega_D$ u gornjoj ocjeni, ova gornja međa nije baš onoliko jaka i zanimljiva koliko bismo htjeli. Ipak, ova gornja međa predstavlja napredak naspram rezultata odjeljka 2.1. Ovaj predfaktor općenito može biti i manji i veći od jedan, ali nikada nije baš značajno manji od jedinice. Naš argument jednako dobro vrijedi u dvije kao i u tri dimenzije.

Za (trodimenzionalni) hafnij, primjerice, imamo $Ag(E_F) \approx 0.8\,\mathrm{eV}^{-1}$, $\lambda \approx 0.14$ i $T_D \approx 250\,\mathrm{K}$ ($\hbar\omega_D \approx 22\,\mathrm{meV}$) što daje $T^* \approx 840\,\mathrm{K}$, dok je temperatura prijelaza $T_c(\mathrm{Hf}) = 0.13\,\mathrm{K}$ ($T_{BCS}(\mathrm{Hf}) = 0.22\,\mathrm{K}$) [61]. Kao drugi primjer promotrimo (trodimenzionalni) aluminij koji ima $Ag(E_F) \approx 0.5\,\mathrm{eV}^{-1}$, $\lambda \approx 0.4$ i $T_D \approx 420\,\mathrm{K}$ ($\hbar\omega_D \approx 36\,\mathrm{meV}$)

što vodi do $T^* \approx 3000\,\mathrm{K}$, dok je $T_c(\mathrm{Al}) = 1.2\,\mathrm{K}$ [61, 62]. Tako da naš argument predstavlja napredak naspram originalnog HMW argumenta iz odjeljka 2.1 koji daje $T^* \sim 10\,000\,\mathrm{K}$.

Literatura

[1] P. C. Hohenberg. *Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions*. Phys. Rev. **158**, 2 (1967) 383–386. https://doi.org/10.1103/PhysRev.158.383.

[2] N. D. Mermin, H. Wagner. *Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models*. Phys. Rev. **17**, 22 (1966) 1133–1136. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.1133.

[3] B. I. Halperin. *On the Hohenberg-Mermin-Wagner Theorem and Its Limitations*. J. Stat. Phys. **175** (2019) 521–529. https://doi.org/10.1007/s10955-018-2202-y.

[4] N. N. Bogoliubov. *Quasi-Averages in problems of statistical mechanics*. Communication JINR D-781, Dubna, 1961.; Reprints in English are available in [5,6].

[5] N. N. Bogoliubov (1970). *Lectures on Quantum Statistics, Volume 2, Quasi-averages*. Gordon and Breach Science Publishers. ISBN-10: 0-677-20570-8.

[6] N. N. Bogoliubov, Jr. (2014). *Quantum Statistical Mechanics. Selected works of N N Bogolubov*. World Scientific. ISBN-13: 978-9-814-61251-7.

[7] V. L. Pokrovsky. *Two-dimensional magnetic phase transitions*. J. Magn. Magn. Mater. **200**, 1–3 (1999) 515–531. https://doi.org/10.1016/S0304-8853(99)00406-0.

[8] A. Gelfert. *On the role of dimensionality in many-body theories of magnetic long-range order*. arXiv (2001). https://arxiv.org/abs/cond-mat/0106031.

[9] A. Gelfert, W. Nolting. *The absence of finite-temperature phase transitions in low-dimensional many-body models: a survey and new results*. J. Phys. Condens. Matter **13**, 27 (2001) R505–R524. https://doi.org/10.1088/0953-8984/13/27/201.

[10] A. L. Kuzemsky. *Bogoliubov's Vision: Quasiaverages and Broken Symmetry to Quantum Protectorate and Emergence*. Int. J. Mod. Phys. B **24**, 8 (2010) 835–935. https://doi.org/10.1142/S0217979210055378.

[11] Gang Su, A. Schadschneider, J. Zittartz. *Absence of superconducting long-range order in low-dimensional Hubbard models*. Phys. Lett. A **230**, 1 (1997) 99–104. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00204-1.

[12] Gang Su, M. Suzuki. *Nonexistence of $d_{x^2-y^2}$ superconductivity in the Hubbard model*. Phys. Rev. B **58**, 1 (1998) 117–120. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.58.117.

[13] C. Noce, M. Cuoco. *Absence of long-range order in the one- and two-dimensional Anderson lattice model*. Phys. Rev. B **59**, 11 (1999) 7409–7412. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.59.7409.

[14] Gang Su. *Investigation of the adequacy of the two-dimensional t–J model for high-temperature superconductivity*. Phys. Rev. B **72**, 9 (2005) 092510. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.092510.

[15] C. Noce. *Quantum disorder in the periodic Anderson model*. Phys. Rev. B **71**, 9 (2005) 092506. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.092506.

[16] R. Wegner. *Magnetic ordering in one and two dimensional systems*. Phys. Lett. A **24**, 2 (1967) 131–132. https://doi.org/10.1016/0375-9601(67)90520-8.

[17] M. B. Walker, Th. W. Ruijgrok. *Absence of Magnetic Ordering in One and Two Dimensions in a Many-Band Model for Interacting Electrons in a Metal*. Phys. Rev. **171**, 2 (1968) 513–515. https://doi.org/10.1103/PhysRev.171.513.

[18] G. V. Chester, M. E. Fisher, N. D. Mermin. *Absence of Anomalous Averages in Systems of Finite Nonzero Thickness or Cross Section*. Phys. Rev. **185**, 2 (1969) 760–762. https://doi.org/10.1103/PhysRev.185.760.

[19] G. Costache, G. Nenciu. *Absence of spontaneous magnetization in isotropic partially finite systems*. Phys. Lett. A **33**, 3 (1970) 193–194. https://doi.org/10.1016/0375-9601(70)90728-0.

[20] M. E. Fisher, D. Jasnow. *Decay of Order in Isotropic Systems of Restricted Dimensionality. II. Spin Systems*. Phys. Rev. B **3**, 3 (1971) 907–924. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.3.907.

[21] D. K. Ghosh. *Nonexistence of Magnetic Ordering in the One- and Two-Dimensional Hubbard Model*. Phys. Rev. Lett. **27**, 23 (1971) 1584–1587. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.27.1584.

[22] M. F. Thorpe. *Absence of Ordering in Certain Isotropic Systems*. J. Appl. Phys. **42**, 4 (1971) 1410–1411. https://doi.org/10.1063/1.1660265.

[23] R. Kishore, D. Sherrington. *On the non-existence of magnetic order in one and two dimensions*. Phys. Lett. A. **42**, 3 (1972) 205–207. https://doi.org/10.1016/0375-9601(72)90862-6.

[24] M. Van den Bergh, G. Vertogen. *Absence of magnetic phase transition in one- and two-dimensional s-d interaction models*. Phys. Lett. A **50**, 2 (1974) 85–87. https://doi.org/10.1016/0375-9601(74)90885-8.

[25] V. G. Baryakhtar, D. A. Yablonskii. *On the criterion of the magnetic ordering existence in non-collinear structures*. Phys. Status Solidi B **72** (1975) K95–K98. https://doi.org/10.1002/pssb.2220720170.

[26] S. Robaszkiewicz, R. Micnas. *Absence of Magnetic Ordering in One and Two Dimensions in a Model with Localized and Itinerant Electrons*. Phys. Status Solidi B **73** (1976) K35–K39. https://doi.org/10.1002/pssb.2220730148.

[27] G. Roepstorff. *A stronger version of Bogoliubov's inequality and the Heisenberg model*. Commun. Math. Phys. **53**, 2 (1977) 143–150. https://doi.org/10.1007/BF01609128.

[28] E. Rastelli, A. Tassi. *Absence of long-range order in three-dimensional Heisenberg models*. Phys. Rev. B **40**, 7 (1989) 5282–5284. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.5282.

[29] A. Pimpinelli, E. Rastelli. *Absence of long-range order in three-dimensional spherical models*. Phys. Rev. B **42**, 1 (1990) 984–987. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.42.984.

[30] G. S. Uhrig. *Nonexistence of planar magnetic order in the one- and two-dimensional generalized Hubbard model at finite temperatures*. Phys. Rev. B **45**, 9 (1992) 4738–4740. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.45.4738.

[31] P. Bruno. *Absence of Spontaneous Magnetic Order at Nonzero Temperature in One- and Two-Dimensional Heisenberg and XY Systems with Long-Range Interactions*. Phys. Rev. Lett. **87**, 13 (2001) 137203. `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.137203`.

[32] N. D. Mermin. *Crystalline Order in Two Dimensions*. Phys. Rev. **176**, 1 (1968) 250–254. `https://doi.org/10.1103/PhysRev.176.250`.

[33] J. F. Fernández. *Crystalline Order in Restricted Geometries*. Phys. Rev. A **2**, 6 (1970) 2555–2559. `https://doi.org/10.1103/PhysRevA.2.2555`.

[34] J. C. Garrison, J. Wong, H. L. Morrison. *Absence of Long-Range Order in Thin Films*. J. Math. Phys. **13**, 11 (1972) 1735–1742. `https://doi.org/10.1063/1.1665901`.

[35] J. Fröhlich, C. Pfister. *On the absence of spontaneous symmetry breaking and of crystalline ordering in two-dimensional systems*. Commun. Math. Phys. **81**, 2 (1981) 277–298. `https://doi.org/10.1007/BF01208901`.

[36] A. Klein, L. J. Landau, D. S. Shucker. *On the absence of spontaneous breakdown of continuous symmetry for equilibrium states in two dimensions*. J. Stat. Phys. **26**, 3 (1981) 505–512. `https://doi.org/10.1007/BF01011431`.

[37] C. A. Bonato, J. F. Perez, A. Klein. *The Mermin-Wagner phenomenon and cluster properties of one- and two-dimensional systems*. J. Stat. Phys. **29**, 2 (1982) 159–175. `https://doi.org/10.1007/BF01020779`.

[38] T. Momoi. *Quantum fluctuations in quantum lattice systems with continuous symmetry*. J. Stat. Phys. **85**, 1 (1996) 193–210. `https://doi.org/10.1007/BF02175562`.

[39] L. Pitaevskii, S. Stringari. *Uncertainty principle, quantum fluctuations, and broken symmetries*. J. Low Temp. Phys **85**, 5 (1991) 377–388. `https://doi.org/10.1007/BF00682193`.

[40] N. D. Mermin. *Absence of Ordering in Certain Classical Systems*. J. Math. Phys. **8**, 5 (1967) 1061–1064. `https://doi.org/10.1063/1.1705316`.

[41] A. J. Leggett. *Long-range order in (quasi-) 2D systems, Lecture 9*. Physics 598, University of Illinois at Urbana-Champaign, Fall 2013. https://courses.physics.illinois.edu/phys598PTD/fa2013/L9.pdf.

[42] L. J. De Jongh, A. R. Miedema. *Experiments on simple magnetic model systems*. Advances in Physics **50**, 8 (2001) 947–1170. https://doi.org/10.1080/00018730110101412.

[43] J. Wehr, A. Niederberger, L. Sanchez-Palencia, M. Lewenstein. *Disorder versus the Mermin–Wagner–Hohenberg effect: From classical spin systems to ultracold atomic gases*. Phys. Rev. B **74**, 22 (2006) 224448. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.224448.

[44] A. Niederberger, T. Schulte, J. Wehr, M. Lewenstein, L. Sanchez-Palencia, K. Sacha. *Disorder-Induced Order in Two-Component Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **100**, 3 (2008) 030403. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.030403.

[45] A. Niederberger, M. M. Rams, J. Dziarmaga, F. M. Cucchietti, J. Wehr, M. Lewenstein. *Disorder-induced order in quantum XY chains*. Phys. Rev. A **82**, 1 (2010) 013630. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.013630.

[46] N. Crawford. *On Random Field Induced Ordering in the Classical XY Model*. J. Stat. Phys. **142**, 1 (2011) 11–42. https://doi.org/10.1007/s10955-010-0094-6.

[47] N. Crawford. *Random field induced order in low dimension*. J. Stat. Phys. **102**, 3 (2013) 36003. https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F102%2F36003.

[48] A. J. Leggett (2006). *Quantum Liquids*. Oxford University Press. ISBN-13: 978-0-19-8526438.

[49] A. J. Leggett. *The Ubiquity of Superconductivity*. Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **2**, 1 (2011) 11–30. https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-062910-140541.

[50] A. A. Kordyuk. *Iron-based superconductors: Magnetism, superconductivity, and electronic structure*. Low Temp. Phys. **38**, 9 (2012) 888–899. https://doi.org/10.1063/1.4752092.

[51] A. Bussmann-Holder, H. Keller. *High-temperature superconductors: underlying physics and applications*. Z. Naturforsch **75**, 1-2 (2020) 3–14. https://doi.org/10.1515/znb-2019-0103.

[52] B. Keimer, S. A. Kivelson, M. R. Norman, S. Uchida, J. Zaanen. *From quantum matter to high-temperature superconductivity in copper oxides*. Nature **518**, 7538 (2015) 179–186. https://doi.org/10.1038/nature14165.

[53] M. R. Norman. *The Challenge of Unconventional Superconductivity*. Science **332**, 6026 (2011) 196–200. https://doi.org/10.1126/science.1200181.

[54] T. Uchihashi. *Two-dimensional superconductors with atomic-scale thickness*. Supercond. Sci. Technol. **30**, 1 (2016) 013002. https://doi.org/10.1088%2F0953-2048%2F30%2F1%2F013002.

[55] A. Gozar, G. Logvenov, L. F. Kourkoutis, *et al*. *High-temperature interface superconductivity between metallic and insulating copper oxides*. Nature **455**, 7214 (2008) 782–785. https://doi.org/10.1038/nature07293.

[56] G. Logvenov, A. Gozar, I. Bozovic. *High-Temperature Superconductivity in a Single Copper-Oxygen Plane*. Science **326**, 5953 (2009) 699–702. https://doi.org/10.1126/science.1178863.

[57] A. T. Bollinger, G. Dubuis, J. Yoon, *et al*. *Superconductor–insulator transition in* $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ *at the pair quantum resistance*. Nature **472**, 7344 (2011) 458–460. https://doi.org/10.1038/nature09998.

[58] Y. Yu, L. Ma, P. Cai, *et al*. *High-temperature superconductivity in monolayer* $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$. Nature **575** (2019) 156–163. https://doi.org/10.1038/s41586-019-1718-x.

[59] Q. Wang, Z. Li, W. Zhang, *et al*. *Interface-Induced High-Temperature Superconductivity in Single Unit-Cell FeSe Films on* $SrTiO_3$. Chin. Phys. Lett. **29**, 3 (2012) 037402. https://doi.org/10.1088/0256-307x/29/3/037402.

[60] J. Ge, Z. Liu, C. Liu, *et al*. *Superconductivity above* $100\,\mathrm{K}$ *in single-layer FeSe films on doped* $SrTiO_3$. Nature Mater. **14**, 3 (2015) 285–289. https://doi.org/10.1038/nmat4153.

[61] C. P. Poole, Jr., R. Prozorov, H. A. Farach, R. J. Creswick (2014). *Superconductivity*. Elsevier. ISBN-13: 978-0-12-4095090. Table 15.1.

[62] Z. Lin, L. V. Zhigilei, V. Celli. *Electron-phonon coupling and electron heat capacity of metals under conditions of strong electron-phonon nonequilibrium*. Phys. Rev. B **77**, 7 (2008) 075133. `https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.075133`. Figure 1.