Metoda invarijanti

Trbušić Hlad, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Trbušić Hlad

METODA INVARIJANTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, srpanj, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliko Hvala mojoj mentorici na svom vremenu i trudu kojeg je uložila kako bi mi pomogla u pisanju diplomskog rada. Još veće Hvala cijeloj mojoj obitelji na podršci i strpljenju. Najveće Hvala suprugu na svakodnevnoj motivaciji i našoj malenoj kčerki koja nas iz dana u dan zajedno potiče.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Bojanje **2**
1.1 Metodički primjeri 2
1.2 Riješeni zadatci 7

2 Invarijante **12**
2.1 Metodički primjeri 12
2.2 Otkrivanje metode invarijanti na nastavi 21
2.3 Riješeni zadatci 30

Bibliografija **55**

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se metodom invarijanti odnosno rješavanjem zadataka tom metodom. Invarijanta je svojstvo koje se u nekom procesu ne mijenja prelazeći iz koraka u korak po nekom zadanom pravilu, dok se metodom invarijanti naziva metoda rješavanja zadataka traženjem invarijante. Rješavanje zadataka ovom metodom nije predviđeno u redovnoj nastavi osnovnih i srednjih škola u Republici Hrvatskoj. Štoviše, tipovi zadataka koji su rješivi tom metodom ne nalaze se u udžbenicima. Ipak, oni se pojavljuju na svim razinama učeničkih natjecanja iz matematike, uglavnom u srednjoj školi. Metoda invarijanti se stoga može uvrstiti u program dodatne nastave matematike, što ovisi o volji i mogućnosti nastavnika. Ukoliko nastavnik radi u srednjoj školi te priprema učenike za natjecanja, svakako bi trebao uvrstiti metodu invarijante u plan rada dodatne nastave.

Ovaj diplomski rad može poslužiti kao metodički priručnik za temu invarijanti koja se obrađuje na satovima dodatne nastave sa grupom učenika u satnici koju nastavnik isplanira. Na satu se obrade što raznovrsniji zadaci, dok se oni slični mogu dati učenicima za samostalno rješavanje i domaću zadaću.

U prvom poglavlju rješavat ćemo zadatke bojanjem i motivirati učenike na temu o invarijantama. U drugom poglavlju rješavat ćemo zadatke metodom invarijanti. Na početku svakog poglavlja bit će objašnjeni zadaci uz metodičke preporuke u potpoglavlju *Metodički primjeri*, dok će se oni slični, koji se učenicima mogu zadati za samostalan rad, nalaziti u potpoglavlju *Riješeni zadatci*.

Osim invarijanti koje ćemo uočiti u ovom radu, postoje invarijante i u drugim područjima matematike kao i u drugim znanostima (npr.rang ili determinanta matrice, zakon o očuvanju energije ili drugi pokusi čiji su rezultati neovisni o vremenu i prostoru u kojem se odvijaju). To može biti motivacija nama matematičarima.

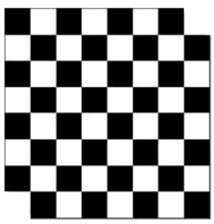
Poglavlje 1

Bojanje

Zadatci koje ćemo riješiti bojanjem trebali bi se obraditi prije uvođenja pojma invarijante. U tim zadatcima pojavljivat će se šahovske ploče ili neke druge ploče sa poljima koje će trebati prekriti uz dane uvjete. Učenici će, obojivši polja tih ploča, uočavati različita svojstva i na taj način doznati može li se tražena situacija ostvariti.

1.1 Metodički primjeri

Primjer 1.1.1. *[9]*
Uklonimo li sa šahovske ploče dva dijametralno suprotna polja, možemo li ostatak ploče prekriti domino pločicama?



Slika 1.1: 'Osakaćena' šahovska ploča

Kako bi se istražilo je li moguće prekriti zadanu ploču na traženi način, na nastavu se mogu donijeti domino pločice i šahovska ploča čija su polja istih dimenzija kao i domino pločice. Prekrivajući takvu 'osakaćenu' ploču, učenici će uočiti da u nizu pokušaja nisu uspjeli postići traženo prekrivanje. Moglo bi se primjerice uočiti da je dodavanjem pojedine domino pločice uvijek pokriven paran broj polja, zatim da je broj pokrivenih crnih i bijelih polja uvijek jednak, ...

Treba uočiti da se šahovska ploča sastoji od 64 polja, odnosno 32 polja bijele boje i 32 polja crne boje, odnosno broj crnih i broj bijelih polja šahovske ploče je jednak. Jedna domino pločica uvijek prekriva 2 polja, neovisno postavi li se horizontalno ili vertikalno. Nakon micanja dijametralno suprotnih polja, koja su iste boje, ostaju 62 polja, 32 polja jedne boje i 30 polja druge boje. Domino pločica prekriva dva polja šahovske ploče koja su različite boje, odnosno uvijek je prekriven jednak broj crnih i bijelih polja. Kako su ostala 62 polja, potrebna je 31 domino pločica. Pretpostavimo da je tih 62 polja prekriveno s 31 domino pločicom, one bi prekrile 31 crno i 31 bijelo polje. No, kako broj preostalih crnih i bijelih polja na ploči nije jednak, dolazimo do kontradikcije. Dakle, zadanu ploču ne možemo prekriti u potpunosti.

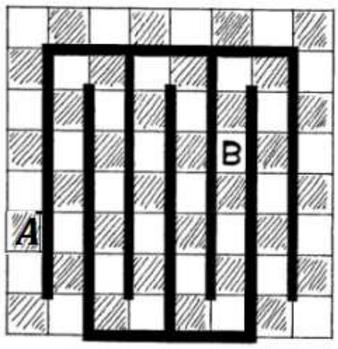
□

Navedeni problem možemo nadograditi, te pitati učenike bi li se domino pločicama mogla prekriti šahovska ploča odstranimo li bilo koja dva polja te ploče. Ukoliko odstranimo dva polja iste boje, prekrivanje nije moguće, jer tada broj crnih i bijelih polja nije jednak. No, odstranimo li bilo koja dva polja različite boje, broj crnih i bijelih polja na ploči je jednak, pa bismo možda i mogli. Učenici će pokušati prekriti šahovsku ploču i brzo će shvatiti da se uvijek može, ali trebamo objasniti zašto.

Na potpunoj šahovskoj ploči našli smo kružni put kojim se obilaze sva polja redom crno, bijelo, crno, bijelo,.... Kružni put određen je crnim podebljanim linijama (slika 1.2). Pokažimo kako ćemo uz tako određen labirint prekriti sva polja odstranimo li neka dva koja su različite boje.

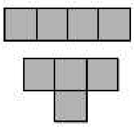
Odstranimo sa šahovske ploče jedno crno polje (A) i jedno bijelo polje (B), kao na slici 1.2. Krenimo slagati domino pločice od prvog polja koje slijedi nakon odstranjenog crnog polja (A) u smjeru crnih podebljanih linija. Kada dođemo do bijelog odstranjenog bolja (B) prekrit ćemo sva polja od A do B. Zatim polje B preskočimo i nastavimo slagati domino pločice na isti način. Kada dođemo pred polje A, prekrili smo sva polja na šahovskoj ploči osim odstranjenog crnog i bijelog polja.

Dakle, ukoliko sa šahovske ploče uklonimo dva polja iste boje, ploču ne možemo u potpunosti prekriti domino pločicama. Ukoliko uklonimo dva polja različitih boja, popločavanje je moguće.



Slika 1.2: Ploča sa odstranjena bilo koja dva polja različite boje

Primjer 1.1.2. *([1], str.26.)*
a) Može li se ploča dimenzija 10×10 *prekriti sa* 25 *ravnih tetromino pločica?*



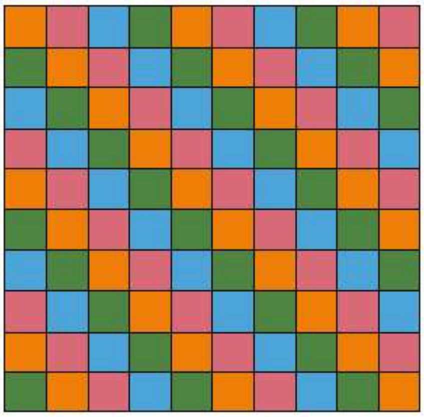
Slika 1.3: Ravna i T - tetromino pločica

Rješenje. Učenici bi mogli krivo pomisliti da ploču koja ima 100 polja sigurno mogu prekriti sa 25 tetromino pločica, budući svaka takva pločica prekriva točno 4 polja, a $25 \cdot 4 = 100$. Slično kao što se kod prekrivanja domino pločicama ploča oboji sa dvije boje, za prekrivanje ploče tetromino pločicom, obojimo je sa četiri boje, i to dijagonalno, kao na slici 1.4.

Ravna tetromino pločica, neovisno kako je postavili, prekriva po jedno polje od svake boje. Dakle, broj pokrivenih polja u svakoj od četiri boje je jednak. Kad bismo ploču prekrili na traženi način, bilo bi prekriveno točno 25 kvadratića u svakoj boji. Primijetimo da obojana ploča ima 26 kvadrata narančaste boje i 24 kvadrata plave boje, pa traženo prekrivanje nije moguće.

□

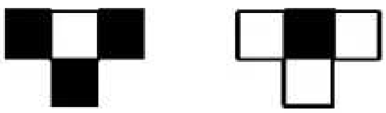
b) Može li se ploča dimenzija 10×10 *prekriti sa* 25 *T - tetromino pločica?*



Slika 1.4: Dijagonalno bojanje ploče

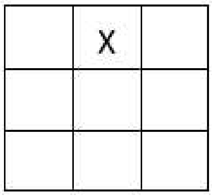
Rješenje. Možemo se pitati bi li se identična ploča mogla prekriti sa 25 T - tetromino pločica. Za ovaj problem bit će nam prikladnije šahovsko bojanje, dakle po 50 polja u svakoj boji. Kako god postavili T - tetromino pločicu, uvijek su prekrivena četiri polja i to tri polja jedne boje i jedno polje one druge boje, kao na slici 1.5.

Neka je a broj tetromino pločica koje prekrivaju 3 crna i jedno bijelo polje, i neka je b broj tetromino pločica koje prekrivaju 3 bijela i jedno crno polje. Tada je ukupan broj prekrivenih crnih polja jednak $3a + b$, dok je ukupan broj prekrivenih bijelih polja $3b + a$. Kad bismo ploču prekrili na traženi način, bilo bi prekriveno točno 50 polja u svakoj boji, odnosno vrijedilo bi $3a + b = 3b + a$, iz čega slijedi $a = b$. Kako je ukupan broj pločica $a + b = 100 : 4 = 25$, nije moguće imati jednak broj pločica istog tipa. Dakle, šahovsku ploču danih dimenzija ne možemo u potpunosti prekriti T - tetromino pločicama.

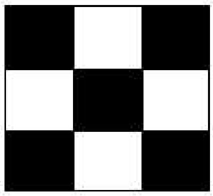


Slika 1.5: T - tetromino pločica i šahovsko bojanje

Primjer 1.1.3. *([2] str.9.)*
Na svakom polju kvadratne ploče 3×3 *nalazi se po 1 žeton. U svakom koraku premještamo bilo koja dva žetona, svakog od njih na neko susjedno polje (polje sa zajedničkim bridom). Je li moguće da, nakon izvjesnog broja koraka, svi žetoni budu na polju označenom slovom X?*



Rješenje. Nacrtajmo ploču i pokušajmo premještati po dva žetona na opisani način ne bi li smjestili sve žetone na traženo polje. Traženi raspored žetona nećemo dobiti, ali bitno je pokušati pronaći rješenje i efikasnu metodu rješavanja. Tijekom razmještanja žetona, trebalo bi uočiti neke zakonitosti vezane uz premještanja. Učenici se mogu prisjetiti zadatka sa šahovskom pločom, primjerice zadatka 1.1.1, budući ovdje isto imaju sličnu ploču, ali sa manjim brojem polja. Primijetit će da su polja ploče tamo bila u dvjema različitim bojama, pa bi takvu poznatu situaciju mogli stvoriti i u ovom problemu.
Obojimo stoga polja kvadratne ploče na šahovski način (slika 1.6).



Slika 1.6: Ploča obojana na šahovski način

Na ovako obojanoj ploči, na početku se na bijelim poljima nalazi 4 dok se na crnim poljima nalazi 5 žetona. Željeli bismo da se na označenom polju, koje je bijele boje, nakon izvjesnog broja koraka nalazi svih 9 žetona. Učenici sad ponovno premještaju žetone i uočavaju kako se opisanim načinom premještanja mijenja broj žetona na pojedinim poljima obojane ploče. Lako će uočiti da se premještanjem pojedinog žetona na susjedno polje on premješta na polje druge boje.
Sada promotrimo što se zbiva pri istovremenom premještanju dvaju žetona:

- Premještamo li jedan žeton sa crnog polja na bijelo i jedan s bijelog polja na crno, broj žetona u bijelim odnosno crnim poljima neće se promjeniti.
- Premještamo li oba žetona sa crnih polja na bijela, broj žetona na bijelim poljima porast će za 2, dok će se na crnima smanjiti za 2.
- Premještamo li oba žetona sa bijelih polja na crna, broj žetona na bijelim poljima smanjit će se za 2, dok će se na crnim poljima povećati za 2.

Broj žetona u bijelim poljima se ili ne mijenja ili se promijeni za 2. Dakle, broj žetona na bijelim poljima uvijek je iste parnosti, tj. paran je, budući su na početku bila 4 žetona na bijelim poljima. Zaključujemo da nije moguće postići da se svi žetoni nalaze na označenom bijelom polju, jer bi ih tada na tom polju bilo 9, odnosno broj žetona u bijelim poljima bio bi neparan.

1.2 Riješeni zadatci

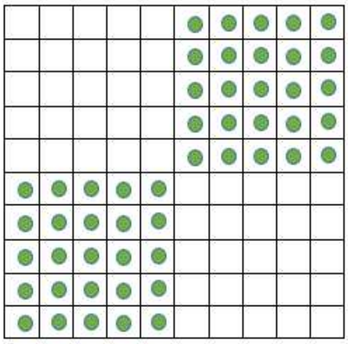
Zadatak 1.2.1. *(Županijsko natjecanje, 1. razred, A varijanta, 2014.)*
Ploča 8×8 *na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?*

Rješenje. Na početku se na ploči nalazi 64 polja od kojih je točno 32 crne boje. Primijetimo da u pojedinom potezu mijenjamo boju na točno 8 polja. Neka je:
C - ukupan broj crnih polja prije nekog poteza, k - broj crnih polja u nekom trenutku u odabranom retku/stupcu, $k \in \{0, 1, ..., 8\}$. Budući je u odabranom retku ukupno 8 polja, a crnih je k, tada je bijelih polja u tom retku točno $(8 - k)$. Nakon opisanog poteza ukupan broj crnih polja bit će

$$C - k + (8 - k) = C + 8 - 2k = C - 2(k - 4).$$

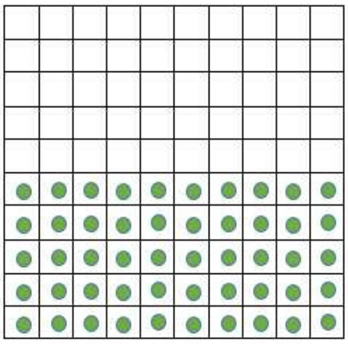
Vidimo da se broj crnih polja mijenja za parni broj, tj. ako je na početku bio paran, takav će i ostati. Ako je pak na početku bio neparan, ostat će neparan. Parnost broja crnih polja se dakle ne mijenja. Budući da su na početku na ploči bila 32 crna polja, te da broj crnih polja ne mijenja parnost, na ploči će uvijek biti paran broj crnih polja. Zaključujemo da na ploči ne može ostati jedno crno polje, budući broj 1 nije paran broj.

Zadatak 1.2.2. *(Županijsko natjecanje, 1. razred, A varijanta, 2010.)*
Na ploču 10×10 *postavljeno je* 50 *žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom* 25 *žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih* 25 *gornju desnu četvrtinu.*
Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y.



Slika 1.7: Početni raspored žetona

Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 *žetona na donju polovicu ploče?*

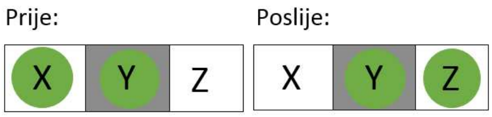


Slika 1.8: Traženi raspored žetona

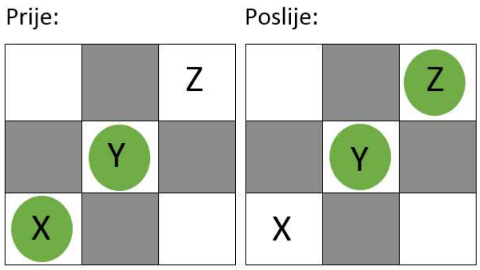
Rješenje. Obojimo ploču šahovski. Od ukupno 100 polja točno je 50 bijelih i 50 crnih polja. Postavimo 50 žetona na zadani način, kao što je prikazano na slici 1.7. Ploču smo postavili tako da je polje u donjem lijevom, pa onda i u gornjem desnom kutu crne boje. U donjoj lijevoj četvrtini ploče 25 žetona zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja, kao i 25 žetona postavljenih u gornjoj desnoj četvrtini ploče.

Pogledajmo sada što se događa krenemo li premještati žetone na zadani način. Na slikama 1.9 i 1.10 prikazana su 3 polja *X, Y, Z* kojima se žeton kreće. Kretanje žetona vertikalno slično je kretanju žetona horizontalno.

Opisanim premještanjem, žetoni uvijek prelaze s crnog na crno polje, ili s bijelog na bijelo polje, neovisno kreću li se horizontalno, vertikalno ili dijagonalno. Stoga se broj crnih



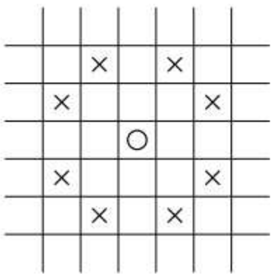
Slika 1.9: Kretanje žetona horizontalno



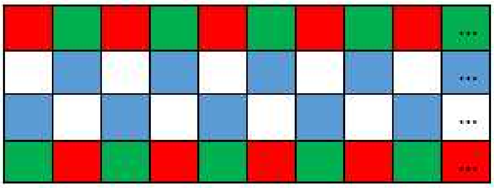
Slika 1.10: Kretanje žetona dijagonalno

(odnosno bijelih) polja koje žetoni zauzimaju ne mijenja. Budući da žetoni u početku zauzimaju ukupno 12 + 12 = 24 bijela i 13 + 13 = 26 crnih polja, a donja polovica ploče se sastoji od 25 bijelih i 25 crnih polja, ne možemo postići da se svi žetoni nalaze na donjoj polovici ploče.

Zadatak 1.2.3. *(Državno natjecanje, 2.razred, A varijanta, 2012.)*
Može li skakač obići ploču dimenzija 4×2012 *i vratiti se na polazno polje tako da pritom stane na svako polje točno jednom?*
Skakač je figura koja se kreće kao u šahu, u obliku slova L: s polja označenog kružićem može se pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči).



Rješenje. U ovom zadatku obojat ćemo ploču sa četiri boje. Obojimo polja 1. i 4. retka ploče crvenom i zelenom bojom, a preostala dva retka sa plavom i bijelom bojom, kao na sljedećoj slici.

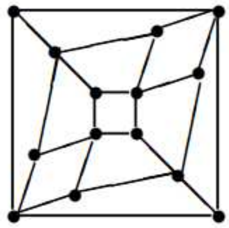


Slika 1.11: Bojanje ploče sa četiri boje

Budući se skakač giba po ploči u obliku slova L, boja polja s kojeg je krenuo bit će različita od boje polja na kojem će stati. Na ovako obojanoj ploči, skakač može sa crvenog polja skočiti samo na bijelo polje a sa zelenog samo na plavo polje. Skače li pak sa bijelog polja može skočiti na crveno ili plavo, a kreće li sa plavog polja može doći na zeleno ili bijelo polje. Pretpostavimo da postoji način da skakač posjeti svako polje ploče točno jednom i vrati se na polje s kojeg je krenuo. U nekom trenutku skakač će se sigurno naći na nekom crvenom polju s kojeg može skočiti samo na neko bijelo polje. Kad bi sa tog bijelog polja skočio na plavo polje, što po opisu kretnje skakača može, više se ne bi mogao vratiti na preostala crvena i plava polja, jer sa plavog polja može samo na bijelo ili zeleno polje. Zato skakač skače sa bijelog polja na crveno, pa opet s crvenog na bijelo, i tako dalje , dok na ostala polja više ne dolazi, što je kontradikcija s pretpostavkom da postoji način da skakač obiđe svako polje točno jednom.
Dakle, skakač ne može obići ploču dimenzija 4×2012 i vratiti se na polazno polje tako da pritom stane na svako polje točno jednom.

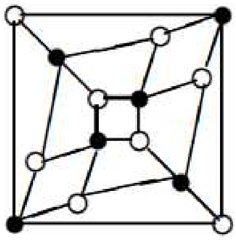
Zadatak 1.2.4. *([1], str.26.)*
Na slici je prikazana mreža cesta između 14 *gradova. Mogu li se obići svi gradovi tako da se svaki grad posjeti točno jednom?*

Rješenje. Svaki kružić predstavlja jedan grad, a susjedni gradovi su oni između kojih postoji cesta. Kružiće obojimo crnom i bijelom bojom tako da su susjedni gradovi obojani različitom bojom, kao na donjoj slici. Na taj je način osam gradova obojano bijelom bojom, a crnom je bojom obojano šest gradova. Uočimo da gradove možemo označiti na taj način - to nije tako za bilo koju mrežu cesta, ali ovdje jest. Pri prelasku iz jednog grada u njemu



Slika 1.12: Mreža cesta između 14 gradova

susjedni grad, mijenja se boja grada, jer smo tako obojali gradove. Kad bi postojao traženi put kojim bi se svaki grad posjetio točno jednom, on bi se sastojao od sedam crnih i sedam bijelih polja. No, kako se na mapi cesta nalazi 8 bijelih i 6 crnih gradova, traženi obilazak nije moguće ostvariti. □



Slika 1.13: Susjedni gradovi obojani su različitim bojama.

U proteklim primjerima i zadatcima pokazali smo na koji način učenici pristupaju zadanom problemu i traženju svojstava, te kako kontradikcijom zaključuju da se traženo ne može postići. Tako smo napravili dobar uvod u jedan, za njih novi način rješavanja zadataka, bez da smo išta govorili o samim invarijantama i metodi.

Poglavlje 2

Invarijante

Učenici su dosad u svakom zadatku primijetili da se nešto ne mijenja, odnosno ostaje nepromijenjeno, što je odlična ideja za uvođenje pojma invarijante. U zadatcima koji slijede, radit će to isto, ali će pritom pokušati i dokazati ono što su naslutili. Problemi koji slijede bit će uglavnom algebarski, a bit će raspoređeni u tri manje cjeline.

2.1 Metodički primjeri

Slijedi nekoliko primjera nakon čijeg rješavanja bi učenici trebali opisati što je invarijanta te samu metodu rješavanja. Otkrit će korake u rješavanju koje treba provoditi kako bi zadatak bio cjelovito riješen. Također, moći će prepoznati invarijante u primjerima koje su rješavali prije nego su opisali metodu invarijanti.
Uvodni, jednostavniji primjer koji nastavnik može zadati učenicima je sljedeći:

Primjer 2.1.1. *([4], str.* 1.*)*
Na ploči pišu tri broja: 1, 2, 3. *Franjo svake minute obriše sva tri broja te na mjesto prvoga upiše dvostruki prvi umanjen za drugi, na mjestu drugoga dvostruki drugi umanjen za treći, te na mjesto trećega dvostruki treći umanjen za prvi, bez promjene poretka brojeva. Hoće li Franjo ikada napisati brojeve* 4, 5, 6 *točno tim redoslijedom?*

Učenici će pogledati što se događa s početnom trojkom brojeva primjenjujući opisanu transformaciju i vidjeti mogu li ikako doći do tražene trojke brojeva.

$$\begin{aligned}
(1,2,3) &\to (2\cdot 1-2, 2\cdot 2-3, 2\cdot 3-1) = (0,1,5),\\
(0,1,5) &\to (2\cdot 0-1, 2\cdot 1-5, 2\cdot 5-0) = (-1,-3,10),\\
(-1,-3,10) &\to (2\cdot(-1)-(-3), 2\cdot(-3)-10, 2\cdot 10-(-1)) = (1,-16,21),\ldots
\end{aligned}$$

Provodi se diskusija u kojoj će učenici iznijeti svoja zapažanja, tj. koliko god transformacija proveli, ne uspijevaju dobiti brojeve 4, 5, 6 u traženom poretku. Naslućuju da ne bi bilo efikasno i dalje pokušavati ispisivati trojke brojeva, već bi se do rješenja trebalo doći na neki drugi način. Zasigurno se može nešto zaključiti iz prethodno provedenih transformacija, iz trojki brojeva koje su dobivene opisanim postupkom pa se učenike može motivirati da traže nešto zajedničko svim dobivenim trojkama. Može se uočiti da se u trojkama dobivaju cijeli brojevi, da su dobiveni brojevi nekad u rastućem ili padajućem poretku, a ponekad ne. Ništa ih od ovih zaključaka ne vodi rješenju. U daljnjoj komunikaciji učenici će uočiti da zbroj brojeva u svakoj uređenoj trojci iznosi 6, tj. da se zbroj ne mijenja te da je jednak zbroju brojeva na početku igre.

$$1+2+3=6, \quad 0+1+5=6, \quad (-1)+(-3)+10=6, \quad 1+(-16)+21=6, ...$$

No, promatranje samo nekoliko trojki ne garantira da će nakon svake transformacije zbroj brojeva opet biti 6. Stoga ih nastavnik upućuje da pokušaju dokazati da će tako biti uvijek.

Ako je na ploči zapisana trojka (a, b, c) u sljedećem će koraku biti napisana trojka $(2a-b, 2b-c, 2c-a)$. Odredimo zbroj tih brojeva:

$$(2a-b)+(2b-c)+(2c-a)=a+b+c.$$

Učenici zaključuju da se zbroj brojeva zapisanih na ploči neće promijeniti i on će biti jednak zbroju zadanih brojeva. No, kako zbroj brojeva u trojki $(4, 5, 6)$ iznosi 15, učenici zaključuju da Franjo nikad neće zapisati brojeve $4, 5, 6$. □

Tijekom rješavanja uvodnog primjera učenicima se ne spominje riječ invarijanta. Oni rješavaju zadatak na način da zadanu transformaciju provode nekoliko puta, nakon čega ih se upućuje na uočavanje svojstva koje je zajedničko svim dobivenim trojkama.

Nastavnik zadaje učenicima još jedan primjer, uz uputu da ga pokušaju riješiti na sličan način kao i prethodni zadatak.

Primjer 2.1.2. *(Školsko natjecanje, 1. razred, B varijanta, 2014.)*
U škrinjici je bilo 111 *zlatnika. Nakon toga je svake noći Crnobradi iz škrinjice uzeo* 10 *zlatnika, a Modrobradi je u nju stavio* 15 *zlatnika. Može li nakon nekog broja noći u škrinjici biti točno* 2014 *zlatnika?*

Nastavnik pušta učenike da istražuju te pokušaju naći rješenje i ovog primjera. Oni promatraju što se događa s brojem zlatnika u škrinjici nakon pojedine noći. Nakon prve noći u škrinjici ostaje 116 zlatnika, nakon druge ih ostaje 121, nakon treće noći ima ih 126, nakon četvrte noći 131, ... Tako će lako uočiti da se broj zlatnika u škrinji povećava. Uporniji bi učenici mogli raspisivati broj novčića ne bi li se približili traženoj brojci 2014, ali taj način rješavanja nije efikasan. Tako velik broj nije slučajan, jer nastavnik želi potaknuti učenike na uočavanje zakonitosti koja se može uočiti nakon nekoliko provedenih koraka.

- *Nastavnik*: Što ste uočili, što se događa sa brojem zlatnika u škrinji nakon svake noći?
- *Učenik*: Broj zlatnika se iz noći u noć povećava.
- *Nastavnik*: Postoji li neka zakonitost u povećavanju broja zlatnika?
- *Učenik*: Uočili smo da se broj zlatnika povećava za 5.
- *Nastavnik*: To ste uočili nakon nekoliko prvih koraka. Možemo li biti sigurni da će se uvijek povećavati baš za 5?
- *Učenik*: Možemo, jer Crnobradi uvijek uzme 10 zlatnika, dok ih Modrobradi uvijek stavi točno 15.
- *Nastavnik*: Dakle, broj zlatnika nakon jedne noći dobije se uvećanjem prethodnog broja zlatnika za 5. Koje ukupne brojeve zlatnika smo dobili? Zašto smo dobili 131 zlatnik, a 130 zlatnika ne?
- *Učenik*: Svi ukupni brojevi zlatnika koje smo dobili pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 1. Broj 130 je djeljiv s 5 pa njega nismo mogli dobiti.
- *Nastavnik*: Može li dakle u škrinji biti točno 2014 zlatnika?
- *Učenik*: Ne može, budući da broj 2014 pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 4, a ne 1. □

Učenici su dosad vidjeli nekoliko različitih primjera koje su rješavali na sličan način. Promotre li sličnosti u načinu rješavanja tih primjera, uočit će da je u svakom bio zadan neki proces koji su nekoliko puta proveli. Zatim su tražili svojstvo koje se provođenjem tog postupka ne mijenja, te dokazivali da ono vrijedi uvijek kako bi zaključak primijenili na postavljeno pitanje. Nastavnik otkriva učenicima da se svojstvo koje se ne mijenja prelazeći iz koraka u korak po nekom zadanom pravilu zove invarijanta, pa se ova metoda rješavanja zadataka zove metoda invarijante. Učenici prepoznaju da je u primjeru 2.1.1 invarijanta bila zbroj svih triju brojeva, a u primjeru 2.1.2 ostatak broja zlatnika pri dijeljenju brojem 5.

U rješavanju zadataka metodom invarijanti, uočavamo tri tipična koraka. Sistematizirajmo ih na temelju primjera 2.1.1.

1. Prepoznavanje invarijante tj. postavljanje hipoteze (u primjeru 2.1.1 pretpostavili smo da se zbroj brojeva ne mijenja).
2. Dokaz da je svojstvo za koje smo pretpostavili da je invarijantno zbilja takvo, odnosno da se iz koraka u korak ne mijenja. Dokaz treba provesti jer je moguće da smo u naslućivanju invarijante uočili nešto što ne vrijedi općenito (u primjeru 2.1.1 dokazali smo da nakon provođenja transformacije zbroj brojeva ostaje isti).
3. Usporedbom početka i kraja pokazati da tražena situacija nije moguća (u primjeru 2.1.1 zaključili smo da na ploči ne mogu pisati brojevi $4, 5, 6$ jer njihov zbroj nije jednak zbroju brojeva koji su na ploči napisani na početku).

Ovi će koraci učenicima biti nit vodilja pri rješavanju ostalih zadataka metodom invarijante.

Primjer 2.1.3. *([4], str. 2.)*
Na uređeni par (x, y) *možemo primijeniti sljedeće transformacije:*

i) $(x, y) \to (x + 2y, y - 4x)$
ii) $(x, y) \to (x - 6y,\ 5y - 2x)$
iii) $(x, y) \to (y, x)$.

Ako počinjemo od para $(2, 6)$*, možemo li nizom opisanih transformacija dobiti par* $(4, 3)$*?*

Rješenje: Vodeći se trima koracima, učenici rješavaju zadatak metodom invarijante. Primijenjujući opisane transformacije na uređene parove brojeva pokušavaju uočiti nešto što se ne mijenja, odnosno neku invarijantu. Jedan način na koji mogu transformirati uređene parove je sljedeći:

$$(2, 6) \xrightarrow{i} (14, -2) \xrightarrow{iii} (-2, 14) \xrightarrow{ii} (-86, 74) \xrightarrow{i} (62, 418) \xrightarrow{ii} (-2446, 1966) \to ...$$

Nastavnik može uputiti učenike da koriste opisane transformacije u različitim redoslijedima. Na kraju svi trebaju uočiti istu pravilnost, tj. da su u svakom uređenom paru koji su dobili dva parna broja, kao i u uređenom paru $(2, 6)$ od kojeg su krenuli. To bi moglo biti ono svojstvo koje se ne mijenja, čime je gotov prvi korak u rješavanju. Uočenu pravilnost trebamo dokazati. Označimo slovom P paran, a slovom N neparan cijeli broj. Ukoliko su oba broja koja transformiramo parna, vrijedi:

i) $(P, P) \to (P + 2P, P - 4P) = (P, P)$
ii) $(P, P) \to (P - 6P, 5P - 2P) = (P, P)$
iii) $(P, P) \to (P, P)$.

Oba broja nakon transformacija ponovno su parna. Učenici će usporediti početak zadatka odnosno uređeni par $(2, 6)$ u kojem se pojavljuju dva parna broja, te uređeni par $(4, 3)$ u kojem je samo jedan broj paran. Zaključit će da traženi par ne mogu dobiti, jer su pokazali da će se, ukoliko krenu od para $(2, 6)$, u transformacijama pojavljivati samo uređeni parovi u kojima su dva parna broja. □

Zadatak možemo izmijeniti zadamo li neki drugi početni par za transformaciju, u kojem nisu oba broja parna, ili neki drugi traženi uređeni par. Takve zadatke možemo zadati i učenicima za domaću zadaću. Analizirajmo sve slučajeve, odnosno ispitajmo parnost brojeva u uređenom paru nakon transformacija, ovisno o parnosti brojeva u početnom uređenom paru.

(x, y)	$(x + 2y, y - 4x)$	$(x - 6y, 5y - 2x)$	(y, x)
(P, P)	(P, P)	(P, P)	(P, P)
(N, N)	(N, N)	(N, N)	(N, N)
(N, P)	(N, P)	(N, P)	(P, N)
(P, N)	(P, N)	(P, N)	(N, P)

Slučaj gdje su x i y parni brojevi (prvi redak) već smo analizirali, koju god transformaciju primijenili opet ćemo dobiti dva parna broja. Slično, ukoliko su i x i y neparni (drugi redak), oba broja u uređenom paru nakon svake od transformacija ostat će neparni.
U trećem retku tablice vidimo, ako je x neparan a y paran, nakon prve dvije transformacije ponovno imamo uređen par gdje je prvi broj neparan, a drugi paran. U četvrtom retku tablice, gdje je x paran, a y neparan, vidimo da nakon prve dvije transformacije prvi broj ostaje paran, a drugi neparan.

Zaključujemo da se broj parnih brojeva u uređenom paru neće promijeniti, ali zbog treće transformacije, oni mogu zamijeniti mjesto. Ukoliko transformacija počinje od brojeva koji nisu iste parnosti, jedino što sigurno znamo je da ne možemo dobiti brojeve koji su iste parnosti. Primjerice, počinjemo li od para $(1, 2)$, provođenjem svih triju transformacija sigurno ne možemo dobiti par $(4, 6)$.

Primjer 2.1.4. *([4], zad.* 3.*)*
Zmaj ima 100 *glava.*

- *Ako odsječemo* 2 *glave, izraste ih* 14.
- *Ako odsječemo* 15 *glava, neće izrasti nova.*

- *Ako odsiječemo* 21 *glavu, izrast će* 3.
- *Ako odsiječemo* 8 *glava, izrast će 11.*

Možemo li odsjeći sve glave?

Rješenje. Pokušajmo vidjeti kako se mijenja broj glava zmaja. Istražimo neke moguće situacije kao što smo to radili i dosad. Željeli bismo naravno postići situaciju da zmaju odsiječemo sve glave. Hoće li to biti moguće?
Zmaj ima 100 glava. Odsiječemo ih 15, preostat će još 85 glava.
Zmaj ima 85 glava. Odsiječemo li 21, preostat će mu još 64 glave, ali će izrasti 3 nove pa će ih imati 67.
Ako zmaj ima 67 glava a odsiječemo opet 21 glavu, preostat će ih 46 glava, ali će izrasti 3 nove pa će ih imati 49. Postupak možemo nastaviti, ali uočavamo da se broj glava smanjuje. To je možda zato što smo birali mogućnosti koje bi nas mogle dovesti do situacije sa što manje glava na zmaju. Nastavljamo dalje i odsiječemo 21 glavu, nakon čega ih preostaje još 28, ali izrastu 3 nove pa sad zmaj ima 31 glavu.
Odsiječemo zmaju 15 glava, ostat će ih još 16.
Odsiječemo još 15 glava, ostat će mu još 1...
Zapišimo skraćeno:

$100 \stackrel{-15}{\rightarrow} 85 \stackrel{-21+3}{\rightarrow} 67 \stackrel{-21+3}{\rightarrow} 49 \stackrel{-21+3}{\rightarrow} 31 \stackrel{-15}{\rightarrow} 16 \stackrel{-15}{\rightarrow} 1 \stackrel{\cdots}{}.$

Ovaj način rješavanja zadatka, mogli bismo reći metodom pokušaja i promašaja, u trenutnoj situaciji nije efikasan i ne vodi rješenju. Htjeli bismo pronaći svojstvo koje se ne mijenja koliko god glava zmaju odsjekli. Označimo sa n broj glava zmaja i pogledajmo promjene u broju glava za svaki potez:

- $n \rightarrow (n-2) + 14 = n + 12$
- $n \rightarrow (n-15) + 0 = n - 15$
- $n \rightarrow (n-21) + 3 = n - 18$
- $n \rightarrow (n-8) + 11 = n + 3$

Pogledavši dobivene promjene, uočavamo da se broj glava zmaja mijenja, odnosno povećava ili smanjuje za višekratnik broja 3. To znači da će broj preostalih glava pri dijeljenju s 3 davati isti ostatak. Dakle, invarijanta je ostatak pri dijeljenju broja glava zmaja s 3. Za moguću situaciju koju smo vidjeli ranije vrijedi:

$$\begin{aligned}100 &= 33 \cdot 3 + 1,\\ 85 &= 28 \cdot 3 + 1,\\ 67 &= 22 \cdot 3 + 1,\\ 49 &= 16 \cdot 3 + 1,\\ &\dots\end{aligned}$$

Pri dijeljenju broja glava zmaja brojem 3, dobit ćemo ostatak 1. Zato se ne može postići da su zmaju odsječene sve glave.

□

Ideja o promatranju ostataka pri dijeljenju već se pojavila u primjeru 2.1.2. No, ovdje treba razmotriti više dozvoljenih transformacija i uočiti nešto zajedničko svima. Stoga ga možemo s učenicima riješiti na satu dodatne nastave, a sličan zadati za domaću zadaću. Nastavnici bi trebali težiti naučiti učenike snalaženju u novim situacijama, problemima. Ukoliko u zadatku promijenimo samo jedan podatak, otvorili smo novi problem koji onda pokušamo riješiti koristeći istu strategiju i vidimo hoće li biti korisna. Mogli bismo promijeniti broj glava zmaja, neka ih umjesto 100 ima 99. Učenici će odmah uočiti da je broj 99 djeljiv brojem 3, tj. da je $99 \equiv 0 \pmod 3$, a kako to vrijedi i za broj 0, mogli bi pomisliti da se zmaju mogu odsjeći sve glave. Ako je odgovor potvrdan, potrebno je primjerom pokazati da je to moguće, što ponekad nije jednostavno, ali je izvedivo. Evo jedne mogućnosti kako zmaju odsjeći sve glave ukoliko ih je bilo 99:

$$99 \xrightarrow{-15} 84 \xrightarrow{-21+3} 66 \xrightarrow{-21+3} 48 \xrightarrow{-21+3} 30 \xrightarrow{-15} 15 \xrightarrow{-15} 0.$$

Slično razmišljamo ako pretpostavimo da je zmaj imao 98 glava. Kako smo već pokazali da se ostatak pri dijeljenju broja glava zmaja ne mijenja, i kako je $98 \equiv 2 \pmod 3$, u tom slučaju zmaju ne možemo posjeći sve glave. Zaključno, ukoliko zmaj na početku ima 100 ili 98 glava, ne možemo mu odsjeći sve glave što smo pokazali metodom invarijante. Ukoliko zmaj ima 99 glava, možemo mu odsjeći sve glave, što smo pokazali konkretnim primjerom.

Primjer 2.1.5. *([1], str.13.; Državno natjecanje, 2. razred, A varijanta, 2018.)* *Ispisujemo niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$, zapisujemo polinom:*

i) $cx^2 + bx + a$ *ili* *ii)* $a(x + t)^2 + b(x + t) + c$, *za neki realni broj t.*

Može li s od $f(x)$ dobiti $g(x)$ ako je:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 - x - 1$?

b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 1$?

c) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$?

Rješenje. U ovom bismo zadatku željeli iskoristiti neko svojstvo karakteristično za polinome i vidjeti mijenja li se ono danim transformacijama. Uz polinom drugog stupnja vežemo diskriminantu pa možemo stoga promotriti diskriminante kvadratnih polinoma. Diskriminanta kvadratnog polinoma $ax^2 + bx + c$ je $b^2 - 4ac$, dok je diskriminanta kvadratnog polinoma $cx^2 + bx + a$ broj $b^2 - 4ca$. Budući je $b^2 - 4ac = b^2 - 4ca$, provođenjem prve opisane transformacije, diskriminanta će ostati ista. Kako bismo odredili diskriminantu polinoma $a(x + t)^2 + b(x + t) + c$, moramo dani izraz transformirati i odrediti koeficijente uz x^2 i x te slobodni član. Budući je:

$$\begin{aligned} a(x+t)^2 + b(x+t) + c &= a(x^2 + 2xt + t^2) + b(x+t) + c \\ &= ax^2 + (2at + b)x + (at^2 + bt + c), \end{aligned}$$

diskriminanta tog polinoma je broj

$$\begin{aligned} (2at + b)^2 - 4 \cdot a \cdot (at^2 + bt + c) &= 4a^2t^2 + 4atb + b^2 - 4a^2t^2 - 4abt - 4ac \\ &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Zaključujemo da niti druga transformacija ne mijenja diskriminantu kvadratnog polinoma. Kako danim operacijama nad kvadratnim polinomom $ax^2 + bx + c$ dobivamo polinome s istom diskriminantom, zaključujemo da je diskriminanta kvadratnog polinoma invarijanta obiju opisanih transformacija.

a) Diskriminanta zadanog polinoma $x^2 - x - 2$ je $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$, a opisanim operacijama nad kvadratnim polinomima ona se neće promijeniti. Zaključujemo da danim operacijama nad početnim polinomom nećemo dobiti polinom $x^2 - x - 1$ jer je njegova diskriminanta broj $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 \neq 9$.

b) Diskriminanta zadanog polinoma $x^2 - 2x - 1$ je $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$, dok diskriminanta polinoma $2x^2 - 1$ također iznosi $-4 \cdot 2 \cdot (-1) = 8$. Bez konkretnog primjera kako od zadanog polinoma dobiti traženi polinom i to operacijama koje su zadane, ne možemo biti sigurni da je to i moguće. Jedan način je sljedeći:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &\xrightarrow{(i)} -x^2 - 2x + 1 \\ &\xrightarrow{(ii)} -(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 = -x^2 + 2 \\ &\xrightarrow{(i)} 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

c) Diskriminanta polinoma $2x^2 - x - 1$ je $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \neq 8$. Dakle, u ovom slučaju danim transformacijama nikada nećemo dobiti traženi polinom.

□

Metoda invarijanti jedna je od strategija rješavanja logičko-kombinatornih zadataka i problema. Problemi su to u kojima se pojavljuje invarijanta – svojstvo koje se ne mijenja prelazeći iz koraka u korak po nekom zadanom pravilu. Tipovi problema rješivi ovom metodom, posebice ukoliko se problemom rješavanja takvih zadataka duže bavimo, mogu se ponekad prepoznati. Sljedećim primjerom nastavnik može procijeniti prepoznaju li učenici takve tipove zadataka.

Promotrite zadatke i pokušajte (bez puno razmišljanja) izabrati one koje biste pokušali riješiti metodom invarijante:

1. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost:
$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dokaži da među bilo kojih 6 prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s 5.

3. Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b, 3b - c$ i $3c - a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri ista broja?

4. Na zabavi je 7 mladića i 3 djevojke. Na koliko načina ljude možemo posložiti u red tako da se djevojke nalaze na prva tri mjesta?

5. Zmaj ima 2010 glava. Vitez može jednim udarcem mača odsjeći $2, 17, 33$ ili 21 glavu. Ako odsječe 2, narast će 9 novih. Odsječe li 17 glava, narast će 10 novih. Odsječe li pak 33 glave, izrast će 47 novih. Odsječe li 21 glavu, neće narasti niti jedna nova. Može li u nekom trenutku vitez odsjeći sve zmajeve glave?

Možemo uočiti i povezati određene tipove zadataka sa nekim drugim metodama rješavanja (matematička indukcija, Dirichletov princip, prebrojavanja,...). Ovdje ćemo se zanimati za metodu invarijanti kao metodu rješavanja zadataka. Karakteristični tipovi zadataka rješivi ovom metodom uglavnom su tekstualno zanimljivi i drugačiji od uobičajenih. U tekstu zadataka može se razaznati da imamo nekakav proces, niz transformacija a često završavaju pitanjem *Možemo li...* ili *Je li moguće...?*. Upravo se u 3. i 5. primjeru pojavljuju takva pitanja. Ti će zadaci biti riješeni kasnije (vidi zadatke 2.3.2 i 2.2.4).

Metoda invarijante korisna je u dokazivanju da neku traženu situaciju ne možemo postići, u drugim situacijama ne pomaže. Želimo li pokazati da je nešto moguće postići, problem moramo riješiti nekom drugom metodom odnosno pronaći konkretni primjer kojim pokazujemo da je moguće. Pogledajmo primjer 2.1.3. Dokazali smo da ćemo, ako krenemo transformirati uređeni par s dva parna broja, opet dobiti dva parna broja. No, to ne znači da je moguće dobiti bilo koji par s dva parna broja, to nam nije dovoljan argument. Moramo naći konkretan niz transformacija da bismo potvrdili da je to moguće.

2.2 Otkrivanje metode invarijanti na nastavi

Slijedi zadatak na kojem učenici mogu istraživanjem otkriti metodu invarijanti. Nastavnik će postaviti zadatak, učenici će razmatrati transformaciju i doći do određenih zaključaka koje će onda primjenjivati na postavljeni zadatak.

Zadatak 2.2.1. *(Županijsko natjecanje, 1. razred, A varijanta, 2012.)*
Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b, 3b - c$ *i* $3c - a$. *Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči pišu tri jednaka broja?*

Rješenje. Učenici kreću provoditi zadane transformacije pri čemu uočavaju neke zakonitosti. U prvoj su tablici prikazani odabrani brojevi a, b i c, zatim u sljedeća tri stupca brojevi koje dobijemo zamjenom, dok je u zadnjem stupcu zbroj brojeva nakon zamjene, što će nam trebati malo kasnije. Moguće je ostvariti niz drugačijih transformacija i odabrati brojeve drugačijim redoslijedom.

Učenici će uočiti da su nakon svake zamjene na ploči napisana dva neparna i jedan parni broj, odnosno broj parnih brojeva ostaje nepromijenjen. Pokažimo da će to uvijek vrijediti. Neka su a, b i c brojevi zapisani na ploči. Brišemo ih te zapisujemo brojeve $3a - b, 3b - c$ i $3c - a$. Označimo slovom P paran, slovom N neparan broj. U prva dva retka sljedeće tablice sva su tri broja iste parnosti, zatim ispitujemo što se događa ako je samo jedan od

a	b	c	$3a-b$	$3b-c$	$3c-a$	Zbroj
2009	2012	2015	4015	4021	4036	12072
4021	4036	4015	8027	8093	8024	24144
8024	8027	8093	16045	15988	16255	48288
16045	16255	15988	31880	32777	31919	96576
31919	32777	31880	62980	66451	63721	193152
...	...	...	...	...	...	...

a	b	c	$3a$	$3b$	$3c$	$3a-b$	$3b-c$	$3c-a$
P	P	P	P	P	P	P	P	P
N	N	N	N	N	N	P	P	P
P	N	N	P	N	N	N	P	N
N	P	N	N	P	N	N	N	P
N	N	P	N	N	P	P	N	N
P	P	N	P	P	N	P	N	N
P	N	P	P	N	P	N	N	P
N	P	P	N	P	P	N	P	N

brojeva a, b, c paran, dok u zadnja tri retka tablice pretpostavljamo da su među brojevima a, b, c točno dva parna.

Dakle, situacije koje se mogu dogoditi su sljedeće:

- Mijenjamo li tri parna broja, dobivamo tri parna broja.
- Mijenjamo li tri neparna broja, dobivamo tri parna broja.
- Mijenjamo li jedan paran i dva neparna broja, dobit ćemo jedan parni i dva neparna broja.
- Mijenjamo li dva parna i jedan neparni broj, dobit ćemo jedan paran i dva neparna broja.

Dakle, broj parnih brojeva je u ovom zadatku invarijanta. Budući da su na početku zadani jedan parni i dva neparna broja, tj. brojevi $2009, 2012$ i 2015, nakon zamjene ćemo opet dobiti jedan parni te dva neparna broja. Dakle, nikako ne možemo postići da su na ploči zapisana tri broja iste parnosti, odnosno tri jednaka broja. Zaključujemo da Željko ni u kojem trenutku na ploči neće napisati tri ista broja. □

Sljedeće što učenici primjećuju, a vidi se i u prvoj tablici, da se zbroj brojeva napisanih na ploči u svakom koraku udvostručuje. Pokažimo da je to uvijek tako. Neka su a, b, c brojevi napisani na ploči u nekom trenutku. Nakon što ih transformiramo, dobivamo zbroj $(3a - b) + (3b - c) + (3c - a) = 2(a + b + c)$, koji je dvostruko veći od početnoga. Zbroj na početku je 6036, a želimo da nakon nekog koraka on iznosi $3x$, pri čemu je x broj kojeg smo dobili transformacijama. Dakle, moralo bi vrijediti $2(a + b + c) = 3x$, odnosno zbroj brojeva na ploči trebao bi biti djeljiv s 3. Učenici bi mogli pomisliti, budući nema kontradikcije, da mogu dobiti 3 ista broja. Ali, već su metodom invarijante pokazali da se ne može. Činjenica da se zbroj iz koraka u korak udvostručuje nam za rješavanje ovog zadatka metodom invarijante ipak nije koristan podatak.

Pogledaju li učenici zadane brojeve $2009, 2012$ i 2015, vide da je drugi za tri veći od prvog, treći je također za tri veći od drugog. U dozvoljenim se transformacijama zadani brojevi prvotno utrostručuju. Nameće im se ideja - pogledati što se događa sa ostatcima pri dijeljenju brojem 3. Svaki od zadana tri broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, tj. $2009, 2012, 2015 \equiv 2 \pmod 3$. Pogledamo li u prvoj tablici brojeve $3a - b, 3b - c, 3c - a$ te njihove ostatke pri dijeljenju s 3, vidimo da su ostatci nakon svake zamjene jednaki, tj. dobivamo ostatke $(1, 1, 1) \to (2, 2, 2) \to (1, 1, 1) \to (2, 2, 2) \to (1, 1, 1)$ ... Pogledajmo u sljedećim tablicama što se događa sa ostatcima u ovisnosti o zadanim brojevima. Prvo promatramo ostatke pri dijeljenju brojeva a, b, c te brojeva $3a - b, 3b - c, 3c - a$ brojem 3, ukoliko zadani brojevi čine potpuni sustav ostataka pri dijeljenju s 3. U prvom retku biramo broj a takav da je $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$ i $c \equiv 2 \pmod 3$. U drugom je retku također $a \equiv 0 \pmod 3$, dok je sada $b \equiv 2 \pmod 3$ a $c \equiv 1 \pmod 3$. Na taj način popunjavamo ostale redove tablice kako bi ispitali sve moguće slučajeve.

(a, b, c)	$(3a{-}b, 3b{-}c, 3c{-}a)$
$(0, 1, 2)$	$(2, 1, 0)$
$(0, 2, 1)$	$(1, 2, 0)$
$(1, 0, 2)$	$(0, 1, 2)$
$(1, 2, 0)$	$(1, 0, 2)$
$(2, 0, 1)$	$(0, 2, 1)$
$(2, 1, 0)$	$(2, 0, 1)$

Zatim ispitujemo ostatke pri dijeljenju brojeva a, b, c i $3a - b, 3b - c, 3c - a$ brojem 3, ali biramo brojeve a, b, c tako da pri njihovom dijeljenju brojem 3 dobivamo dva ista ostatka, a treći ne. Tablica je podijeljena u tri dijela. U prvom dijelu brojevi a i b daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3, u drugom dijelu tablice brojevi a i c imaju iste ostatke, dok u posljednjem dijelu tablice iste ostatke pri dijeljenju brojem 3 imaju brojevi b i c.

(a, b, c)	$(3a-b, 3b-c, 3c-a)$
$(0,0,1)$	$(0,2,0)$
$(0,0,2)$	$(0,1,0)$
$(1,1,0)$	$(2,0,2)$
$(1,1,2)$	$(2,1,2)$
$(2,2,0)$	$(1,0,1)$
$(2,2,1)$	$(1,2,1)$
$(0,1,0)$	$(2,0,0)$
$(0,2,0)$	$(1,0,0)$
$(1,0,1)$	$(0,2,2)$
$(1,2,1)$	$(1,2,2)$
$(2,0,2)$	$(0,1,1)$
$(2,1,2)$	$(2,1,1)$
$(1,0,0)$	$(0,0,2)$
$(2,0,0)$	$(0,0,1)$
$(0,1,1)$	$(2,2,0)$
$(2,1,1)$	$(2,2,1)$
$(0,2,2)$	$(1,1,0)$
$(1,2,2)$	$(1,1,2)$

Ostaje još vidjeti što se događa s ostatcima kada brojevi a, b, c daju jednake ostatke pri dijeljenju brojem 3.

(a, b, c)	$(3a-b, 3b-c, 3c-a)$
$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
$(1,1,1)$	$(2,2,2)$
$(2,2,2)$	$(1,1,1)$

Iz svake promatrane tablice donosimo zaključak. Ako polazni brojevi a, b, c pri dijeljenju brojem 3:

- daju različite ostatke, i nakon transformacija ostatci će biti različiti, pa nećemo dobiti tri ista broja.
- daju dva ista ostatka, a treći ne, tako će ostati i nakon zamjene, pa se tri ista broja ne mogu dobiti.
- daju jednake ostatke, tako ostaje i nakon transformacija.

Za zadane brojeve $2009, 2012$ i 2015 vrijedi treći promatrani slučaj, odnosno $2009, 2012$ i 2015 daju pri dijeljenju s 3 ostatak 2, pa bi učenici mogli pogrešno pomisliti da je tražene brojeve moguće postići. No, koristeći parnost već su pokazali da traženo nije moguće postići.

Rezimirajmo donesene zaključke te ih primijenimo na konkretni zadatak kojeg su učenici dobili. Otkrili su da se broj parnih brojeva na ploči ne mijenja, pa su metodom invarijante dokazali da na ploči ne mogu pisati 3 ista broja. Činjenica da se u svakom koraku zbroj brojeva na ploči udvostručuje nije bila korisna, odnosno navodila je na pomisao da bi bilo moguće postići 3 ista broja. Učenici su uočili i da su ostatci brojeva na ploči pri dijeljenju brojem 3 jednaki, što ih je također moglo navesti na pogrešan zaključak.

Nastavnik može učenicima postaviti malo drugačije 'verzije' ovog zadatka, odnosno zadati im drugačije brojeve, uz istu transformaciju. Slijedi nekoliko takvih primjera.

Zadatak 2.2.2. *Ako su na početku zapisani brojevi* $(1, 2, 3)$*, možemo li dobiti brojeve* $(2019, 2020, 2021)$*?*

Rješenje. Iskoristimo činjenicu da se zbroj brojeva pri danoj transformaciji u svakom koraku udvostručuje. Zbroj na početku je 6, a trebao bi biti 6060. No, nakon n koraka zbroj je $6 \cdot 2^n$, što nikada neće biti 6060, pa zaključujemo da ne možemo dobiti tražene brojeve. Promatramo li parnost zadanih i traženih brojeva, uočavamo da se broj parnih brojeva nije promijenio, pa mogli bismo zaključiti da se traženi brojevi mogu dobiti. Gledamo li pak ostatke pri dijeljenju brojem 3, vidimo da zadani brojevi čine potpuni sustav ostataka, kao i traženi brojevi. Također bismo mogli pomisliti da je brojeve $2019, 2020$ i 2021 moguće dobiti. Kad bismo ih dobili, trebalo bi vrijediti da je $3a - b = 2019, 3b - c = 2020, 3c - a = 2021$, za neke cijele brojeve a, b, c. No, rješavanjem sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice vidimo da to nije moguće (dobije se $a = \frac{152}{13}, b = \frac{157}{13}, c = \frac{159}{13}$).

Zadatak 2.2.3. *Ako su na početku zadani brojevi* $(5, 6, 7)$*, možemo li dobiti brojeve* $(23, 24, 25)$*?*

Rješenje. Opet su zadana dva neparna i jedan paran broj, a i tražena su dva neparna i jedan parni broj. Gledamo li ostatke pri dijeljenju s 3, i zadani i traženi brojevi čine potpuni sustav ostataka pri dijeljenju brojem 3. Ove nam činjenice daju naslutiti da bismo u nekom trenutku mogli dobiti brojeve $(23, 24, 25)$. Tražimo trojku od koje bi se mogla dobiti tražena trojka, odnosno rješavamo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice

$(3a - b = 23, 3b - c = 24, 3c - a = 25)$. Kako rješenja nisu cjelobrojna (dobivamo $a = \frac{13126}{13}, b = \frac{39378}{13}, c = \frac{13133}{13}$), zaključujemo da ne možemo dobiti tražene brojeve. Zadani i traženi brojevi nisu veliki, pa možemo ispisati sve mogućnosti kako bi vidjeli dobivamo li traženu trojku. Od trojke $(5, 6, 7)$ gdje je zbroj 18 se, do na poredak, mogu dobiti samo dvije trojke gdje je zbroj $2 \cdot 18 = 36$. Trojke koje možemo dobiti su: $(3 \cdot 5 - 6, 3 \cdot 6 - 7, 3 \cdot 7 - 5) = (9, 11, 16)$ i $(3 \cdot 5 - 7, 3 \cdot 7 - 6, 3 \cdot 6 - 5) = (8, 15, 13)$. Od svake od te dvije mogu se u sljedećem koraku dobiti po dvije trojke: $(3 \cdot 9 - 11, 3 \cdot 11 - 16, 3 \cdot 16 - 9) = (16, 17, 39)$, $(3 \cdot 9 - 16, 3 \cdot 16 - 11, 3 \cdot 11 - 9) = (11, 37, 24)$, $(3 \cdot 8 - 15, 3 \cdot 15 - 13, 3 \cdot 13 - 8) = (9, 32, 31)$, $(3 \cdot 8 - 13, 3 \cdot 13 - 15, 3 \cdot 15 - 8) = (11, 24, 37)$. To su jedine četiri trojke sa zbrojem 72 koje se mogu dobiti od $(5, 6, 7)$. No, niti jedna od njih nije tražena trojka $(23, 24, 25)$.

□

Proteklom zadatku posvećen je jedan cijeli dio poglavlja jer u načinu na koji je riješen možemo vidjeti mnoštvo pitanja i potpitanja, različitih invarijanti i novih primjera. Naime, učenici su pronašli čak tri svojstva vezana uz zadanu transformaciju koja se ne mijenjaju, odnosno pronašli su tri invarijante. Pomoću nekih su mogli odgovoriti na postavljeni problem, pomoću nekih ne. Konkretno, jedna je invarijanta bila broj parnih brojeva i njome su mogli riješiti zadatak kao što su to radili u svim prethodnim zadatcima dosad. No, nekako je trebalo iskoristiti i ostale invarijante koje su uočili pri zadanoj transformaciji. Upravo zbog toga nastavnik može osmisliti nove primjere iste tranformacije. I u tim novim primjerima učenici su mogli uočiti da nisu sve uočene invarijante 'korisne' kako bi se zadatak riješio. Naslutimo li da bi se nešto moglo, jer ne uočavamo kontradikciju, moramo pronaći konkretno rješenje. Za njegovo pronalaženje potrebno je ponekad raspisati sva moguća rješenja i vidjeti jesmo li dobili ono traženo, riješiti sustav jednadžbi, i slično.

Zadatak koji slijedi može se dati učenicima za uvježbavanje, jer je vrlo sličan prethodnom. Učenici će uočiti više invarijanti te zadatak riješiti metodom invarijanti. Ukoliko to neće biti moguće jer nema kontradikcije, tražit će konkretne primjere da bi odgovorili na postavljena pitanja.

Zadatak 2.2.4. *([3], str.*1.*)*
Na školskoj je ploči napisano pet brojeva. U svakom koraku odabiremo bilo koja tri broja, nazovimo ih x, y i z te umjesto njih zapisujemo brojeve $2x - y$, $2y - z$ *i* $2z - x$. *Ako su na početku bili napisani brojevi* 7, 10, 12, 15 *i* 17, *možemo li doći do petorke:*

a) 9, 11, 13, 14, 16 ?

b) 6, 8, 10, 18, 19 ?

c) -41, -3, 7, 46, 52 ?

Rješenje: Primijetimo da je ovaj zadatak sličan primjeru 2.1.1, samo što smo tamo transformirali uređenu trojku brojeva. Pokušat ćemo riješiti i ovaj zadatak na sličan način pa ispitajmo zbroj brojeva u pojedinom koraku.
Krenimo od zadane petorke brojeva te umjesto odabrane trojke x, y, z, uz dva broja koja ostaju nepromijenjena, zapišimo brojeve $2x - y, 2y - z$ i $2z - x$.

- Između brojeva $7, 10, 12, 15, 17$ biramo $x = 10, y = 12, z = 15$. Nakon transformacije dobivamo $7, 8, 9, 20, 17$.
- Između brojeva $7, 8, 9, 20, 17$ biramo $x = 20, y = 8, z = 17$. Nakon transformacije dobivamo $7, -1, 9, 32, 14$.
- Između brojeva $7, -1, 9, 32, 14$ biramo $x = -1, y = 9, z = 7$. Nakon transformacije dobivamo $15, -11, 11, 32, 14$.
- Između brojeva $15, -11, 11, 32, 14$ biramo $x = 14, y = 11, z = 32$. Nakon transformacije dobivamo $15, -11, -10, 50, 17$.
- ...

Zbrojimo brojeve napisane na ploči.

$$\begin{aligned}
7 + 10 + 12 + 15 + 17 &= 61,\\
7 + 8 + 9 + 20 + 17 &= 61,\\
7 + (-1) + 9 + 32 + 14 &= 61,\\
15 + (-11) + 11 + 32 + 14 &= 61,\\
15 + (-11) + (-10) + 50 + 17 &= 61,\\
&\dots
\end{aligned}$$

U prvih nekoliko transformacija primijećujemo da zbroj iznosi 61, odnosno da se transformacijom ne mijenja zbroj brojeva na ploči. Dokažimo da će tako biti neovisno o zadanoj petorki brojeva i o trima odabranim brojevima. Pretpostavimo da su u nekom koraku na ploči zapisani brojevi x, y, z, a, b te da izbrišemo brojeve x, y, z i zamijenimo ih brojevima $2x - y, 2y - z, 2z - x$. Budući da vrijedi

$$(2x - y) + (2y - x) + (2z - x) = x + y + z,$$

nakon transformacije zbroj je

$$(2x - y) + (2y - x) + (2z - x) + a + b = x + y + z + a + b,$$

kao i prije transformacije. Dakle, promatranim postupkom zbroj brojeva na ploči neće se promijeniti. Budući je

$$9 + 11 + 13 + 14 + 16 = 63 \neq 61,$$

ne možemo doći do tražene petorke brojeva. Time je riješen a) podzadatak.

Neobična se situacija javlja pokušamo li, koristeći uočenu pravilnost, riješiti b) podzadatak. Naime, za petorku brojeva $6, 8, 10, 18, 19$ vrijedi

$$6 + 8 + 10 + 18 + 19 = 61,$$

pa bismo mogli pomisliti da je traženu situaciju moguće postići. Za razliku od primjera kojima smo učenike uvodili u temu o invarijantama, u kojima je odgovor na pitanje možemo li nešto postići bio negativan, valja im skrenuti pozornost na ovakvu mogućnost gdje mogu pogrešno naslutiti da je odgovor potvrdan (kao što smo to radili u zadatku 2.2.1).
Rješavajući zadatak na opisani način, učenici mogu pogrešno pomisliti da se može doći do petorke brojeva $6, 8, 10, 18, 19$, budući je zbroj tih brojeva točno 61. Nastavnik može zatražiti da učenici napišu kako se ta petorka brojeva dobila, koji se početni brojevi odabiru i transformiraju, jer bi to bio konkretni dokaz da se petorka zbilja može dobiti. Učenici će krenuti provoditi dozvoljene transformacije, ali neće uspjeti dobiti traženu petorku brojeva što će dati naslutiti da to možda ipak nije moguće postići. Nastavnik stoga želi da učenici i pri rješavanju b) podzadatka iskoriste metodu koju su proučili, pa ih navodi na pronalaženje neke druge invarijante, a koja bi dala konačan odgovor na postavljeni problem.
Učenici će istraživati koje bi to svojstvo moglo biti, prisjetit će se i zadataka koje su već dosad rješavali kako bi dobili ideju, pa će recimo usporediti parnost brojeva prije i nakon transformacija.

Primijetit će da su na početku na ploči bila napisana dva parna i tri neparna broja. Također, nakon nekoliko provedenih koraka uočavaju da su na ploči i dalje dva parna i tri neparna broja. Dakle, mogli bi naslutiti da se broj parnih, tj. neparnih brojeva na ploči neće mijenjati, pa bi to trebalo i dokazati.
Neka su x, y, z tri nasumično odabrana broja na ploči. Ispitajmo parnost brojeva dobivenih nakon transformacije. Brojevi $2x$, $2y$ i $2z$ parni su brojevi, a parnost razlike parnog broja i nekog drugog broja jednaka je parnosti tog drugog broja. Stoga je broj $2x - y$ iste parnosti kao y, broj $2y - z$ iste je parnosti kao z, kao što je i $2z - x$ iste parnosti kao broj x. Vrijedi da su brojevi dobiveni nakon transformacije jednake parnosti kao odabrani brojevi. Pogledamo li parnost brojeva x, y i z prije i nakon transformacije, vidimo da je broj parnih odnosno neparnih brojeva ostao nepromijenjen. Naravno, brojevi koje nismo transformirali

nisu mijenjali parnost. Stoga, kako su na početku na ploči zapisana dva parna i tri neparna broja, a tako će ostati i nakon svake transformacije, od početne petorke nije moguće dobiti petorku $6, 8, 10, 18, 19$, budući su u njoj čak četiri parna broja.

Učenici su pronašli svojstvo koje se ne mijenja i metodom invarijante pokazali da je odgovor na traženo pitanje negativan. Ukoliko se u nekim zadacima nasluti da se tražena situacija može postići, da bismo to i potvrdili, trebalo bi pronaći konkretni primjer, što često nije jednostavno.

Pri rješavanju c) podzadatka, pokušavamo iskoristiti invarijante korištene u a) i b) podzadacima. Zbroj brojeva u traženoj petorki je $(-41)+(-3)+7+46+52 = 61$. Također, u traženoj su petorki točno dva parna broja, kao i kod brojeva zapisanih na ploči na početku. Obje invarijante koje smo dosad našli daju nam naslutiti da je odgovor na pitanje potvrdan, ali u to ne možemo biti sigurni. Krenimo stoga od zadane petorke brojeva te transformirajmo odabranu trojku:

Prije	Odabrani brojevi	Poslije
7,10,12,15,17	10,12,15	$7, 8, 9, 17, 20$
7,8,9,17,20	7,17,20	$-6, 8, 9, 23, 27$
$-6, 8, 9, 23, 27$	8,9,27	$-6, 7, -9, 23, 46$
$-6, 7, -9, 23, 46$	$-6, -9, 23$	$-41, -3, 7, 46, 52$

Pokazali smo da je moguće doći do petorke $-41, -3, 7, 46, 52$.
Rezimirajmo zaključke zadatka. Uočili smo dvije invarijante, zbroj brojeva i broj parnih brojeva.

a) Odgovor: ne može, što smo dokazali prvom invarijantom. Zbroj svih pet brojeva se iz koraka u korak nije mijenjao. Svakako uočimo da invarijanta kao broj parnih, odnosno neparnih brojeva zapisanih na ploči, koja je bila korisna u b) podzadatku, ne bi ovdje pomogla jer su u traženom nizu upravo dva parna broja, koliko ih je i na početku zapisano na ploči.

b) Odgovor: ne može, što smo dokazali drugom invarijantom. Kako su na početku na ploči napisana samo dva parna broja, tako će ostati i nakon zamjena. Dakle, brojeve $6, 8, 10, 18, 19$ nije moguće dobiti budući su među njima čak četiri parna broja. Vidjeli smo da invarijanta sa zbrojem brojeva napisanih na ploči nije pomogla u ovom slučaju.

c) Odgovor: može, što smo dokazali primjerom. Zbroj brojeva bio je 61, a također su bila napisana i dva parna broja. Transformirali smo brojeve i pokazali da možemo doći do brojeva $-41, -3, 7, 46, 52$.

□

Uočimo da nam ponekad pri istoj transformaciji za razlikovane slučajeve nije dovoljna samo jedna invarijanta kako bismo odgovorili na postavljena pitanja. Uočimo li da invarijantom ne možemo dokazati da se nešto ne može, pokušavamo uočiti neku drugu invarijantu kojom ćemo to dokazati, ili pak konkretnim primjerom dokazujemo da se traženo ipak može postići.

2.3 Riješeni zadatci

Slijedi pregled zadataka koji se mogu riješiti metodom invarijante. Važno je nakon pročitanog zadatka uočiti da se on može riješiti metodom invarijante, ponekad to nije jednostavno. Ako to uočimo, pokušamo naslutiti invarijantu te dalje rješavamo zadatak po već navedenim koracima. Zadatci u ovom poglavlju bit će grupirani u dvije skupine. U prvoj skupini bit će zadaci slični onima koje smo s učenicima riješili na satu, dok će se u dijelu *Složeniji zadatci* naći zadaci za učenike koji žele još novih, težih zadataka.

Jednostavniji zadatci

Zadatak 2.3.1. *([4], zad.* 1.*)*
Marin je odlučio igrati sljedeću igru. Napisat će na ploču uređeni par (x, y) *koji može mijenjati na sljedeće načine:*

i) $(x, y) \to \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y\right)$
ii) $(x, y) \to \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$
iii)$(x, y) \to (y, x)$.

Može li Marin ponavljajući ovaj postupak doći do uređenog para $\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{8}\right)$ *ako je polazni uređeni par* $(2, 3)$*?*

Primjer 2.1.3 jest također primjer zadatka sa transformacijama uređenog para. Tamo smo promatrali parnost brojeva u uređenom paru, no ta ideja ovdje ne može pomoći budući da računamo s razlomcima.

Rješenje. Primijenimo transformacije na zadani par brojeva te pokušajmo uočiti neko invarijantno svojstvo.

$$(2,3) \xrightarrow{i} \left(\tfrac{53}{12}, \tfrac{7}{12}\right) \xrightarrow{iii} \left(\tfrac{7}{12}, \tfrac{53}{12}\right) \xrightarrow{ii} \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{2}\right) \xrightarrow{i} \left(\tfrac{95}{24}, \tfrac{25}{24}\right), \ldots$$

Možemo uočiti da dobiveni razlomci u uređenom paru imaju isti nazivnik, a razlomci jednakih nazivnika motiviraju nas na njihovo zbrajanje ili oduzimanje. Zbrojimo elemente uređenih parova:

$$\tfrac{53}{12} + \tfrac{7}{12} = \tfrac{7}{12} + \tfrac{53}{12} = \tfrac{60}{12} = 5,$$

$$\tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{2} = \tfrac{10}{2} = 5,$$

$$\tfrac{95}{24} + \tfrac{25}{24} = \tfrac{120}{24} = 5.$$

Uočavamo da zbroj brojeva u svakom dobivenom uređenom paru iznosi 5, kao što je i zbroj brojeva u uređenom paru od kojeg smo krenuli. Provjerimo vrijedi li to za bilo koji uređeni par koji se može dobiti dozvoljenim transformacijama.

$$\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{4}y\right) + \left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{4}y\right) = x + y,$$

$$\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right) + \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right) = x + y,$$

$$y + x = x + y.$$

Vidimo da pri svakoj od tri dopuštene transformacije zbroj brojeva u uređenom paru ostaje jednak kao u polaznom paru (x, y). Invarijanta u ovom postupku je dakle zbroj brojeva u uređenom paru.

Ukoliko Marin započne igru sa uređenim parom $(2, 3)$ u kojem je zbroj brojeva 5, u nastavku igre ne može doći do para $\left(\tfrac{5}{6}, \tfrac{11}{8}\right)$, budući da je

$$\tfrac{5}{6} + \tfrac{11}{8} = \tfrac{53}{24} \neq 5.$$

□

Zadatak 2.3.2. *(Županijsko natjecanje, 1. razred, B varijanta, 2010.)*
Zmaj ima 2010 *glava. Vitez može jednim udarcem mača odsjeći* 2 *glave, tada će izrasti* 9 *novih. Odsječe li* 17 *glava, izrast će* 10 *novih. Odsječe li pak* 33 *glave, izrast će* 47 *novih. Vitez može odsjeći zmaju i* 21 *glavu, no tada neće izrasti niti jedna nova. Može li u nekom trenutku vitez odsjeći sve zmajeve glave?*

Rješenje. Slično kao u primjeru 2.1.4, pogledajmo promjene u broju glava zmaja, ako je n broj glava zmaja. Vrijedi:

- $n - 2 + 9 = n + 7$
- $n - 17 + 10 = n - 7$
- $n - 21 + 0 = n - 21$
- $n - 33 + 47 = n + 14$

Pogledavši dobivene razlike, uočavamo da se broj glava zmaja u svakom slučaju mijenja za višekratnik broja 7, što znači da će razlika u broju glava zmaja biti višekratnik broja 7, odnosno bit će djeljiva sa 7. Kako je zadano da zmaj ima 2010 glava, zaključujemo da je nemoguće odsjeći zmaju sve glave, budući broj 2010 nije djeljiv brojem 7, odnosno razlika između početnog i željenog broja glava zmaja nije višekratnik broja 7.

$\square$

Zadatak 2.3.3. *([4], zad.*13.*)*
Maja uzima uređene parove realnih brojeva i transformira ih na jedan od sljedećih načina:

i) $(x, y) \to (0.6x + 0.8y, 0.8x - 0.6y)$
ii)$(x, y) \to (y, x)$.

Može li Maja, počevši s parom $(2, 3)$*, uzastopnom primjenom gornjih transformacija dobiti par* $(1, 4)$*?*

Rješenje. Pogledajmo kakve brojeve možemo dobiti u uređenim parovima primjenom konačno mnogo zadanih transformacija.

$$(2,3) \xrightarrow{ii} (3,2) \xrightarrow{ii} (3.4, 1.2) \xrightarrow{ii} (1.2, 3.4) \xrightarrow{i} (3.44, -1.08) \xrightarrow{i} (2.928, 2.104), ...$$

Možemo se prisjetiti sličnog zadatka 2.3.1, u kojem je zbroj brojeva u uređenom paru nakon transformacije bio isti. Ovdje:

$$\begin{aligned} 3+2&=5,\\ 3.4+1.2&=4.6,\\ 3.44+(-1.08)&=2.36,\\ 2.928+2.104&=5.032,\ldots \end{aligned}$$

Vidimo da zbrojevi nisu jednaki, dakle, zbroj brojeva u uređenom paru nije invarijanta. Naime, pri transformaciji *ii*) zbroj ostaje isti, ali zbroj nakon transformacije *i*) ne mora biti jednak $x+y$.

$$\begin{aligned} 0.6x+0.8y+0.8x-0.6y &= 1.4x+0.2y,\\ y+x &= x+y. \end{aligned}$$

Uvodimo preslikavanje $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y^2$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} f(2,3)=f(3,2)&=2^2+3^2=13,\\ f(1.2,3.4)=f(3.4,1.2)&=1.2^2+3.4^2=13,\\ f(3.44,-1.08)&=3.44^2+(-1.08)^2=13,\\ f(2.928,2.104)&=2.928^2+2.104^2=13,\ldots \end{aligned}$$

Naslućujemo da je vrijednost funkcije f ista za sve uređene parove koje je moguće dobiti nizom dozvoljenih transformacija počevši od $(2,3)$. Pokažimo to.
Neka je (x,y) bilo koji uređeni par realnih brojeva. Tada je:

$$\begin{aligned} f(0.6x+0.8y,0.8x-0.6y) &= (0.6x+0.8y)^2+(0.8x-0.6y)^2\\ &= (0.36x^2+0.96xy+0.64y^2)+(0.64x^2-0.96xy+0.36y^2)\\ &= x^2+y^2\\ &= f(x,y), \end{aligned}$$

$$f(y,x)=y^2+x^2=x^2+y^2=f(x,y).$$

Ovime smo dokazali da obje transformacije čuvaju vrijednost funkcije f, tj.zbroj kvadrata njenih argumenata, pa je vrijednost funkcije f ista za sve uređene parove koje je moguće dobiti dozvoljenim transformacijama. Kako je $f(1,4)=17\neq 13$, zaključujemo da taj par ne možemo dobiti. □

Zadatak 2.3.4. *([1], str.11.)*
Je li moguće, krenuvši od polinoma $f(x) = x^2 + 4x + 3$ dobiti polinom $g(x) = x^2 + 10x + 9$ rabeći transformacije $f(x) \to x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ ili $f(x) \to (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)$?

Rješenje. U primjeru 2.1.5 vidjeli smo da je diskriminanta kvadratnog polinoma bila invarijanta, pa bismo mogli provjeriti vrijedi li isto i u ovom zadatku. Da bismo mogli pričati o diskriminantama, moramo provjeriti hoćemo li nakon navedenih transformacija dobiti kvadratne polinome. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratni polinom, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prvom transformacijom dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \left[a\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + b\left(\frac{1}{x} + 1\right) + c\right] &= a \cdot (1 + x)^2 + b \cdot (1 + x)x + cx^2 \\ &= a(1 + 2x + x^2) + b(x + x^2) + cx^2 \\ &= (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a. \end{aligned}$$

Drugom transformacijom dobivamo:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 \cdot \left[a\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x-1}\right) + c\right] &= a + b(x-1) + c(x-1)^2 \\ &= cx^2 + (b - 2c)x + (a - b + c). \end{aligned}$$

Provođenjem zadanih transformacija dobivamo kvadratne polinome, pa možemo promatrati njihove diskriminante.
Diskriminanta polinoma $(a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$ je

$$(2a + b)^2 - 4(a + b + c)a = 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - 4ac = b^2 - 4ac.$$

Diskriminanta polinoma $cx^2 + (b - 2c)x + (a - b + c)$ je

$$(b - 2c)^2 - 4c(a - b + c) = b^2 - 4bc + 4c^2 - 4ac + 4bc - 4c^2 = b^2 - 4ac.$$

Pokazali smo da je diskriminanta obaju polinoma koje možemo dobiti dozvoljenim transformacijama od polinoma $ax^2 + bx + c$ broj $b^2 - 4ac$. Kako je diskriminanta zadanog polinoma $x^2 + 4x + 3$ broj 4, a diskriminanta traženog polinoma $x^2 + 10x + 9$ broj 64, zaključujemo da traženi polinom ne možemo dobiti.

Zadatak 2.3.5. *(Državno natjecanje, 3. razred, A varijanta, 2012.)*
Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, brišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ *i* $13a - 3b$. *Ako su na početku na ploči brojevi* $1, 2, 3, 4, \dots, 2011, 2012$, *mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi* $2, 4, 6, 8, \dots, 4022, 4024$?

Rješenje. Pojednostavnimo zadatak i pretpostavimo da su na početku na ploči napisani prirodni brojevi do 8. Odabiremo neka dva broja te ih transformiramo na opisani način. U svakom koraku zbrojimo svih osam brojeva.

Brojevi	Zbroj	Δ	a	b	$3a - b$	$13a - 3b$
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	36					
		+15	2	3	3	17
$1, 3, 17, 4, 5, 6, 7, 8$	51					
		−25	1	8	−5	−11
$-5, 3, 17, 4, 5, 6, 7, -11$	26					
		+40	5	7	8	44
$-5, 3, 17, 4, 8, 6, 44, -11$	66					
			…	…	…	…

Na prvi pogled u zbroju se ne uočavaju neke pravilnosti, ponekad je zbroj paran, ponekad neparan, smanjuje se i povećava. Dakle, zbroj brojeva se mijenja, a mi želimo pronaći nešto što se ne mijenja. Pokušajmo stoga uočiti neku pravilnost, pa promotrimo promjenu dobivenih zbrojeva. Uočavamo da se zbroj povećava ili smanjuje za višekratnik broja 5. To nadalje znači i da će razlika bilo koja dva dobivena zbroja biti višekratnik broja 5. Ovdje je to napravljeno na primjeru i za brojeve 1, ..., 8. Uzmimo u obzir da je na ploči napisano prvih 2012 prirodnih brojeva pa pokažimo da će to vrijediti nakon svakog koraka.

Promotrimo zbroj prije i nakon zamjene. Neka je s zbroj svih brojeva na ploči, osim odabranih brojeva a i b. Dakle, zbroj na početku iznosi $s + a + b$. Nakon zamjene imamo zbroj:

$$s + (3a - b) + (13a - 3b) = s + 16a - 4b. \tag{2.1}$$

Odredimo razliku zbroja svih brojeva na ploči prije i nakon zamjene.

$$(s + 16a - 4b) - (s + a + b) = 15a - 5b = 5 \cdot (3a - b) \tag{2.2}$$

Zbroj se nakon svake zamjene mijenja za višekratnik broja 5. Dakle, ostatak zbroja pri dijeljenju brojem 5 je u svakom trenutku isti, pa je to invarijanta. Označimo sa S_0 zbroj cijelih brojeva zapisanih na ploči na početku. Vrijedi:

$$S_0 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2012 = 2013 \cdot 1006 = 2025078. \tag{2.3}$$

Očito je $S_0 \equiv 3 \pmod 5$. Dakle, u svakom će koraku zbroj brojeva napisanih na ploči pri dijeljenu brojem 5 dati ostatak 3. Označimo sa S_k zbroj brojeva koje bismo željeli na ploči nakon konačno mnogo koraka. Tada je

$$S_k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 4024 = 2 \cdot S_1 = 4050156. \tag{2.4}$$

Očito je $S_k \equiv 1 \pmod 5$. Dakle, nije moguće dobiti brojeve $2, 4, 6, 8, \ldots, 4022, 4024$ jer njihov zbroj pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 3, a ne 1.

□

Pitamo se bismo li mogli riješiti zadatak i na drugi način. Je li broj parnih (odnosno neparnih) brojeva na ploči invarijanta pri ovoj transformaciji? Primijetimo da je na početku na ploči zapisano 1006 parnih i 1006 neparnih brojeva, a željeli bismo postići situaciju sa 2012 zapisanih parnih brojeva. Pogledajmo stoga što se događa pri transformacijama ovisno o parnosti brojeva a i b. Označimo sa P paran, sa N neparan broj.

a	b	$3a - b$	$13a - 3b$
P	P	P	P
N	N	P	P
P	N	N	N
N	P	N	N

Vidimo da broj parnih brojeva na ploči nije invarijanta, jer se taj broj povećava ukoliko biramo 2 neparna broja, smanjuje ukoliko brišemo brojeve različite parnosti ili se ne mijenja, ukoliko odaberemo 2 parna broja.

□

Zadatak smo krenuli rješavati promatrajući zbroj brojeva na ploči. Uočili smo da je ostatak zbroja pri dijeljenju brojem 5 uvijek isti, on je invarijanta pomoću koje smo pokazali da traženu situaciju nije moguće postići. Broj parnih tj. neparnih brojeva pak nije invarijanta pri ovoj transformaciji.
U sljedećem zadatku ponovno ćemo birati neka dva broja, ali umjesto njih zapisat ćemo samo jedan broj.

Zadatak 2.3.6. *([1], str.* 2.*)*
Pretpostavimo da je n neparan prirodni broj. Napisani su brojevi $1, 2, \ldots, 2n$. U svakom koraku brišemo bilo koja dva broja te umjesto njih zapisujemo njihovu razliku. Time se

broj napisanih brojeva u svakom koraku smanjuje. Postupak nastavljam dok ne ostane samo jedan broj. Dokažimo da će na kraju uvijek ostati neparni broj.

Rješenje. Neka je $n = 3$, odnosno ispišimo prvih šest prirodnih brojeva. Pogledajmo što se događa sa zbrojem brojeva u pojedinom koraku.

Brojevi	Zbroj	a	b	$\lvert a-b\rvert$	Promjena
$1,2,3,4,5,6$	21				
		2	3	1	$-5+1=-4$
$1,4,5,6,1$	17				
		1	6	5	$-7+5=-2$
$1,4,5,5$	15				
		4	5	1	$-9+1=-8$
$1,5,1$	7				
		1	5	4	$-6+4=-2$
$1,4$	5				
		1	4	3	$-5+3=-2$
3	3				

Uočimo da je zbroj ispisanih brojeva nakon svakog koraka neparan broj. Pomaže li nam ta činjenica u rješenju? Budući smo ovdje uzeli $n = 3$, ne znamo bi li to vrijedilo i za bilo koji n i za bilo koja dva izbrisana broja.

Pogledajmo promjenu zbrojeva u dva uzastopna koraka kao u prošlom zadatku. U konkretnom primjeru u tablici uočavamo da se zbroj smanjuje za paran broj, što zapravo znači da se parnost zbroja provođenjem transformacija nije promijenila. Kao što i vidimo, zbrojevi ispisanih brojeva kao i posljednji preostali broj su neparni.

Pogledajmo kako će nas ova nit vodilja dovesti rješenju zadatka. Neka su $a_1, a_2, ..., a_k$ brojevi zapisani na ploči u nekom trenutku. Vrijedi:

$$S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_k. \tag{2.5}$$

Neka je $x = a_i$, $y = a_j$, te neka je bez smanjenja općenitosti $x \geq y$. Tada je $x - y = a_i - a_j$. Pretpostavimo da brišemo brojeve x i y te umjesto njih zapisujemo $x - y$. Tada je

$$S_2 = S_1 - (x + y) + (x - y) \tag{2.6}$$

$$S_2 = S_1 - 2y. \tag{2.7}$$

Vrijedi:

$$S_2 - S_1 = -2y. \tag{2.8}$$

Dakle, zbroj se, prema (2.8), u ovom koraku smanjio za $2y$. Kako su svi brojevi na ploči (na početku i u svakom trenutku) prirodni, $2y$je paran broj. U svakom se koraku zbroj brojeva na ploči smanjuje se za paran broj. Odatle zaključujemo da se parnost zbroja brojeva na ploči provođenjem transformacija ne mijenja. Invarijanta ove tranformacije je parnost zbroja brojeva na ploči.

Neka je

$$S_0 = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1). \tag{2.9}$$

Budući je n neparan broj, izraz $n(2n + 1)$ je također neparan, tj. za bilo koji neparan n zbroj brojeva zapisanih na ploči na početku bit će neparan broj. Budući smo pokazali da se parnost zbroja brojeva na ploči ne mijenja, zbroj će ostati neparan do posljednjeg koraka u kojem ostaje samo jedan broj.

□

Zadamo li konkretni n, dobivamo zadatak vrlo sličan prethodnome. Neka su primjerice zadani brojevi $1, 2, 3, ..., 100$. Ponavljamo isti postupak odnosno u svakom koraku brišemo neka dva broja i umjesto njih zapisujemo njihovu razliku. Pitanje čiji odgovor želimo saznati možemo postaviti na više načina, primjerice *Je li moguće da na kraju na ploči piše samo broj* 1*?*, ili bilo koji drugi neparni broj.
Nadamo se da bismo mogli odgovoriti na zadano pitanje koristeći istu ideju - parnost zbroja se pri zadanoj transformaciji ne mijenja. Pogledajmo vrijedi li ta pravilnost i u ovom zadatku.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 50 \cdot (100 + 1) = 5050. \tag{2.10}$$

Zbroj brojeva na ploči na početku je paran. Slično kao u prethodnom zadatku, obrišemo li neka dva broja x i y ($x \geq y$) te umjesto njih zapišemo $x - y$, vrijedit će (2.8). Zbroj brojeva na ploči se nakon svakog koraka smanjuje za paran broj, dakle, ne mijenja svoju parnost. Kako je zbroj na početku paran, takav će i ostati, pa ne možemo postići situaciju da na ploči piše broj 1 ili bilo koji drugi neparni broj.

□

Pogledajmo još jedan način koji nas je mogao dovesti do rješenja - pogledajmo odnos broja parnih i neparnih brojeva zapisanih na ploči. Budući su na početku na ploči napisani prirodni brojevi do 100, možemo zaključiti da je napisano pedeset parnih i pedeset neparnih brojeva. Uzmimo u obzir sljedeće činjenice:

- Razlika dva parna broja je parni broj.

- Razlika dva neparna broja je parni broj.
- Razlika dva broja različite parnosti je neparan broj.

Situacije koje nam se mogu dogoditi tijekom brisanja i transformiranja prvih 100 prirodnih brojeva su:

1. Izbrišemo li s ploče dva parna broja, dopisujemo njihovu razliku koja je također parni broj.
2. Izbrišemo li dva neparna broja, dopisujemo njihovu razliku koja je parni broj.
3. Izbrišemo li jedan paran i jedan neparan broj, dopisujemo njihovu razliku koja je neparan broj.

Uočavamo da se broj neparnih brojeva zapisanih na ploči iz koraka u korak ne mijenja ili se smanjuje za dva. Rekli smo da je na početku na ploči zapisano 50 neparnih brojeva, znači ima ih paran broj. Neovisno o tome ostaje li broj neparnih brojeva jednak ili se smanjuje za 2, i dalje će na ploči biti zapisan paran broj neparnih brojeva. Konačno, broj 1 ne može ostati jedini zapisan na ploči, jer bi tada na ploči bio zapisan neparan broj neparnih brojeva.

Složeniji zadatci

Slijede zadatci između kojih nastavnik može izabrati neke te ih rješavati sa učenicima. Za neke od njih nije sasvim jednostavno uočiti da se mogu riješiti metodom invarijante, bit će zadataka koji nisu trivijalni i stoga se bi ih bilo dobro rješavati s učenicima koji vrlo dobro shvate dosad navedene zadatke.

Zadatak 2.3.7. *([2], str.* 10.*)*
Na otoku Velika Hrid nalazi se 12 *crvenih,* 14 *plavih i* 16 *zelenih kameleona. Kad se sretnu dva kameleona različitih boja, oba promijene boju u onu treću. Mogu li svi kameleoni postati iste boje?*

Rješenje. Pogledajmo što se događa nakon nekoliko susreta i pokušajmo uočiti neku pravilnost. Označimo sa C crvene kameleone, sa P plave kameleone i sa Z zelene kameleone.

Prije susreta	Susreću se	Nakon susreta
12 C, 14 P, 16 Z	C i P	11 C, 13 P, 18 Z
11 C, 13 P, 18 Z	C i P	10 C, 12 P, 20 Z
10 C, 12 P, 20 Z	P i Z	12 C, 11 P, 19 Z
12 C, 11 P, 19 Z	C i Z	11 C, 13 P, 18 Z
11C, 13 P, 18 Z	...	...

Broj kameleona dviju vrsta se nakon svakog koraka smanjuje za 1, dok se broj kameleona preostale vrste povećava za 2, prema pravilu koje je zadano. Kako to iskoristiti i uočiti neko svojstvo koje se ne mijenja? Promatramo li broj kameleona samo jedne vrste, on će se nakon svake promjene ili povećati za 1, ili će se smanjiti za 2. Primjerice, ukoliko je na početku 14 kameleona plave boje, nakon promjene bit će ili 13 ili pak 16 kameleona plave boje. Želimo naći svojstvo vezano uz zadani broj, koje se neće mijenjati smanji li se taj broj za 1 ili se poveća za 2. Parnost broja se mijenja smanjimo li ga za 1, stoga parnost nećemo gledati. Opisanim promjenama ne dobivamo višekratnike, pa nećemo gledati niti njih, možda bi nam nešto o djeljivosti moglo pomoći pri traženju invarijante. Uzmimo brojeve 13 i 16, koje smo spomenuli kao dvije mogućnosti broja kameleona nakon promjene, promatramo li 14 plavih kameleona. Ti brojevi daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3, što zapravo vrijedi za bilo koja 2 broja čija je razlika tri. Ideja je stoga gledati ostatke pri dijeljenju broja kameleona brojem 3 nakon svakog susreta. Primijetimo da brojevi crvenih, plavih i zelenih kameleona, $12, 14$ i 16, čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju brojem 3, jer su ostatci redom $0, 2, 1$.

Nakon svakog susreta, broj crvenih, plavih i zelenih kameleona ponovno čini potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3. Pokažimo da to vrijedi neovisno o boji kameleona koji se susreću.

Označimo sa c, p i z broj kameleona određene boje u nekom trenutku. Pretpostavimo da se susreću jedan crveni i jedan plavi kameleon te promatrajmo što se događa sa ostatcima pri dijeljenju brojem 3 ako brojevi c, p i z čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju brojem 3.

(c, p, z)	$(c-1, p-1, z+2)$
$(0, 1, 2)$	$(2, 0, 1)$
$(0, 2, 1)$	$(2, 1, 0)$
$(1, 0, 2)$	$(0, 2, 1)$
$(1, 2, 0)$	$(0, 1, 2)$
$(2, 0, 1)$	$(1, 2, 0)$
$(2, 1, 0)$	$(1, 0, 2)$

Vidimo da ponovno dobivamo putpuni sustav ostataka. Analogno bi vrijedilo da smo gledali susrete plavih i zelenih ili crvenih i zelenih kameleona. Invarijanta je dakle broj crvenih, plavih i zelenih kameleona – oni čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju brojem 3.

Kada bi svi kameleoni postali iste boje, broj kameleona u preostalim dvjema bojama bio bi 0 te ne bismo imali potpun sustav ostataka. Dakle, tražena situacija na otoku sa svim kameleonima iste boje ne može se postići.

□

Prirodno se nameće pitanje: Ako barem dva od brojeva c, p, z daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, mogu li svi kameleoni postati istobojni? To pitanje nastavnik može postaviti učenicima kao problemski zadatak. Oni će pokušati pronaći takvu brojnost kameleona, a jedna je od njih sljedeća: pretpostavimo da na otoku živi 8 crvenih, 8 plavih i 12 zelenih kameleona. Primijetimo da je broj crvenih i plavih kameleona jednak, te da brojevi $8, 8, 12$ ne čine potpuni sustav ostataka pri dijeljenju brojem 3. Neka se u svakom koraku susreću crveni i plavi kameleoni. Naravno, njihov će se broj smanjivati za 1 dok će se broj zelenih kameleona povećavati za 2. Na taj ćemo način postići situaciju u kojoj će svi kameleoni biti zelene boje.

C	**P**	**Z**
8	8	12
7	7	14
6	6	16
5	5	18
4	4	20
3	3	22
2	2	24
1	1	26
0	0	28

Još jedna mogućnost dobivanja istobojnih kameleona je sljedeća: na otoku je 12 crvenih, 8 plavih i 9 zelenih kameleona. Sada broj crvenih i broj zelenih kameleona pri dijeljenju s 3 daju ostatak 0. Prvim susretom plavog i crvenog kameleona ostat će nam 11 crvenih, 7 plavih i 11 zelenih kameleona. Tako ćemo se ponovno naći u situaciji u kojoj je broj kameleona dviju vrsta jednak. Nakon toga će se međusobno susretati samo crveni i zeleni kameleoni dok ne postignemo situaciju sa 29 plavih kameleona.

C	**P**	**Z**
12	8	9
11	7	11
10	9	10
9	11	9
8	13	8
7	15	7
6	17	6
5	19	5
4	21	4
3	23	3
2	25	2
1	27	1
0	29	0

Dakle, ukoliko brojevi barem dviju vrsta daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, postoji raspored susreta takav da svi kameleoni budu istobojni.
U ovom zadatku metoda invarijante nam je omogućila dokazati da uz određene uvjete nije moguće ostvariti traženu situaciju, odnosno, svi kameleoni ne mogu postati istobojni čim c, p i z ne čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3. No, pomoću invarijante nije moguće dokazati da određenu situaciju možemo postići. Stoga smo, da bismo pokazali da je traženu situaciju ipak moguće dobiti čim dva od brojeva c, p, z daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, pronašli primjere. Pritom nismo dokazali da općenito vrijedi da čim brojevi dviju vrsta kameleona daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, kameleoni mogu svi postati istobojni.

Zadatak 2.3.8. *([1], str.* 2.*)*
Krug je podijeljen na šest kružnih isječaka. U kružne isječke upisujemo redom, u smjeru kazaljke na satu, brojeve $1, 0, 1, 0, 0, 0$. *U svakom je potezu dozvoljeno povećati brojeve u susjednim kružnim isječcima za* 1. *Mogu li se ponavljanjem takvih poteza u krugu nalaziti svi jednaki brojevi?*

Rješenje: Označimo sa $a_1, a_2, ..., a_6$ redom u smjeru kazaljke na satu brojeve napisane u isječcima kruga. Neka su $a_1 = a_3 = 1$, odnosno neka su četiri nule u preostalim kružnim isječcima. Promatrajmo alternirajući zbroj te ga označimo sa S. Vrijedi:

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6.$$

Na početku je $S = 2$. Pretpostavimo da smo dozvoljeni potez izveli u susjednim kružnim isječcima označenim s a_2 i a_3. Tada vrijedi:

$$a_1 - (a_2 + 1) + (a_3 + 1) - a_4 + a_5 - a_6 = S.$$

Budući promatramo alternirajući zbroj, a povećavamo vrijednost u susjednim kružnim isječcima, alternirajući se zbroj neće mijenjati. Nakon svakog će poteza izraz $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ imati istu vrijednost. Na početku je vrijednost tog izraza 2, pa ne možemo postići situaciju da su u svim kružnim isječcima upisani isti brojevi.

Zadatak 2.3.9. *(Državno natjecanje, 2. razred, A varijanta, 2019.)*
Ukrug je napisano 299 *nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:*

- *svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja;*
- *odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za*1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane
a) dvije uzastopne jedinice i 298 *nula?*
b) tri uzastopne jedinice i 297 *nula?*

Rješenje. Primijetimo da je na početku ukrug upisano 300 brojeva, te da njihov zbroj iznosi 1. Označimo sa a_k brojeve napisane ukrug, i to tako da je a_1 na mjestu na kojem se u početku nalazi jedinica, dok brojeve $a_2, ..., a_{300}$ smještamo redom gibajući se ukrug u smjeru kazaljke na satu.

a) Primijenimo prvi zadani potez. Označimo sa b_k brojeve nakon tog poteza. Dobivamo:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_{300} - a_2, \\ b_k &= a_k - a_{k-1} - a_{k+1}, \\ b_{300} &= a_{300} - a_{299} - a_1. \end{aligned}$$

Neka je S zbroj brojeva a_k, odnosno $S = a_1 + a_2 + ... + a_{299} + a_{300}$. Zbrojimo sve brojeve b_k:

$$b_1+b_2+...+b_{299}+b_{300} = (a_1-a_{300}-a_2)+(a_2-a_1-a_3)+...+(a_{299}-a_{298}-a_{300})+(a_{300}-a_{299}-a_1). \tag{2.11}$$

Kako svaki a_k jednom pribrojimo i dvaput oduzmemo, vrijedi da je zbroj svih b_k točno $-S$. Vidimo da zbroj nije promijenio parnost, već samo predznak. Kad bismo još jednom primijenili zadani potez, te zbrojili sve brojeve u krugu, dobili bismo zbroj:

$$(b_1 - b_{300} - b_2) + (b_2 - b_1 - b_3) + ... + (b_{299} - b_{298} - b_{300}) + (b_{300} - b_{299} - b_1) =$$
$$-(b_1 + b_2 + ... + b_{300}) = -(-S) = S.$$

Vidimo da je apsolutna vrijednost zbroja brojeva upisanih ukrug nakon svakog koraka jednaka, odnosno zbroj ne mijenja svoju parnost.

Primijenimo drugi potez. Povećamo li odabrana dva broja za 1, S će se povećati za 2. Smanjimo li odabrana dva broja za 1, S će se umanjiti za 2. Uvećanjem ili smanjenjem broja S za 2 neće se mijenjati njegova parnost.
Parnost zbroja brojeva upisanih ukrug se ne mijenja, koji god potez izveli. Kako je zbroj na početku bio 1, i ostat će neparan, ne možemo postići da ukrug budu napisane dvije uzastopne jedinice i 288 nula , jer bi zbroj tada bio paran.

b) Promatramo alternirajući zbroj brojeva a_k, kao i u zadatku 2.3.8 i označimo ga sa S'.

$$S' = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{299} - a_{300}.$$

Nakon provedenog prvog poteza, alternirajući zbroj (prilagodimo 2.11 tako da su brojevi na mjestima s parnim indeksom negativni) je:

$$b_1 + ... + b_{300} = (a_1 - a_{300} - a_2) + ... + (-a_{300} + a_{299} + a_1) = 3S'$$

Nakon provedenog drugog poteza, alternirajući zbroj neće se promijeniti. Primjerice, ako odabaremo a_1 i a_4 te oba povećamo za 1, dobivamo zbroj:

$$(a_1 + 1) - a_2 + a_3 - (a_4 + 1) + a_5 - ... - a_{299} + a_{300} = S'.$$

Zaključujemo da se alternirajući zbroj provođenjem prvog poteza utrostručuje, dok nakon drugog dozvoljenog poteza on ostaje isti.

Pretpostavimo da su ukrug upisane tri uzastopne jedinice i 297 nula. Tada alternirajući zbroj S' iznosi 1 (ako se dvije jedinice nalaze na mjestima s neparnim indeksom) ili -1 (ako se dvije jedinice nalaze na mjestima s parnim indeksom). Budući da se opisanim potezima alternirajući zbroj utrostručuje ili ne mijenja, tri uzastopne jedinice mogli smo dobiti jedino ako je alternirajući zbroj bio 1 (tj. dvije jedinice su sigurno na mjestima s neparnim indeksom) te smo koristili samo drugi opisani potez kojim se on ne mijenja.

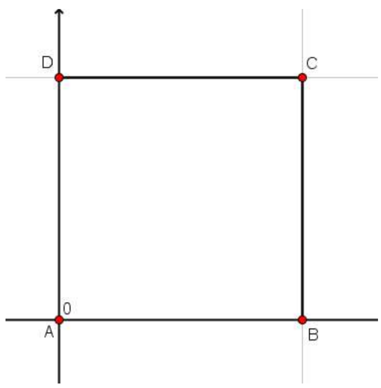
Promotrimo zbroj brojeva na mjestima s indeksom koji je višekratnik broja 3. Označimo ga s S_0.

$$S_0 = a_3 + a_6 + ... + a_{297} + a_{300}.$$

Prije poteza je $S_0 = 0$, jer je ukrug upisana samo jedna jedinica na mjestu a_1. Kad bi ukrug bile upisane tri uzastopne jedinice i 297 nula, bilo bi $S_0 = 1$, jer bi u zbroj ulazila samo jedna od uzastopne tri jedinice. Primjenom samo drugog poteza, zbroj S_0 bi se promijenio za 2 (ukoliko odaberemo oba broja na mjestima s promatranim indeksom) ili se nebi mijenjao jer ne bismo uopće birali te brojeve. U svakom slučaju, S_0 ne mijenja parnost, pa ne možemo postići da je $S_0 = 1$. Zaključujemo da ne možemo postići da su ukrug upisane tri uzastopne jedinice i 297 nula, jer je tada $S_0 = 1$.

Zadatak 2.3.10. *(Županijsko natjecanje, 2. razred, A varijanta, 2009.)*
Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku centralno-simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

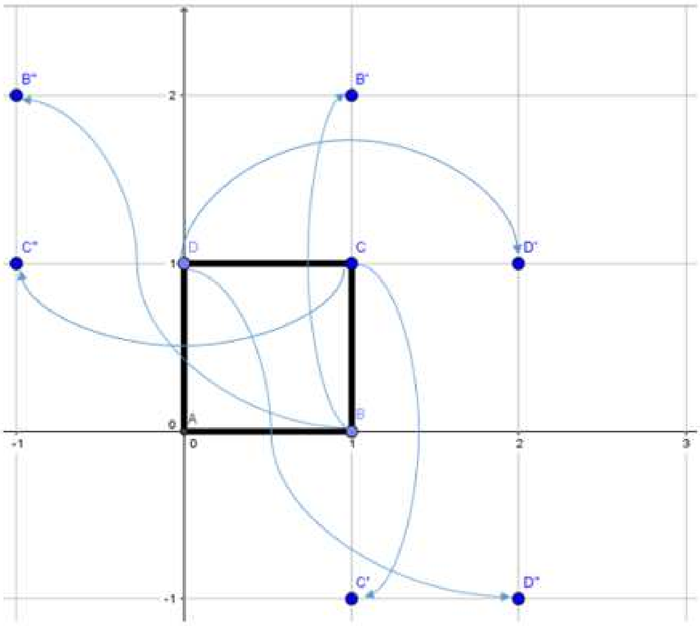
Rješenje. Smjestimo kvadrat u koordinatni sustav u ravnini. Radi jednostavnijeg računanja, smjestit ćemo kvadrat u prvi kvadrant sa jednim vrhom u $A(0, 0)$. Neka su skakavci smješteni u vrhovima $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, kao na slici 2.1.



Slika 2.1: Početni položaj skakavaca

Svaki skakavac ima dva moguća puta kojim može centralnosimetrično krenuti. Položaji na kojima se skakavci mogu nalaziti prikazani su na slici 2.2.

- Ako prvi skače $B(1, 0)$ otići će ili u točku $(1, 2)$ ili u točku $(-1, 2)$.
- Ako prvi kreće onaj u vrhu $C(1, 1)$ otići će ili u točku $(1, -1)$ ili u točku $(-1, 1)$.
- Ako on kreće iz vrha $D(0, 1)$ otići će ili u točku $(2, 1)$ ili u točku $(2, -1)$.



Slika 2.2: Mogući položaji skakavaca nakon prvog skoka

Vidimo da niti jedan skakavac nije skočio u točku $A(0, 0)$. No, zadatak nas pita može li se tražena situacija sa skakavcem u vrhu A postići u nekom sljedećem trenutku kretanja skakavaca, ovdje naime njihovo kretanje ne staje. Pogledajmo mogu li nam promotrene mogućnosti nakon prvog skoka u tome pomoći.

Ono što primjećujemo je da parnost koordinata točaka na koje je skakavac skočio ostaju iste, odnosno ako su mu početne koordinate bile primjerice obje neparne, kao kod skakavca koji kreće iz točke C, takve će i ostati. Pokažimo da će to vrijediti za bilo kojeg skakavca, neovisno o točki odakle kreće skakati i u odnosu točku preko koje skače.

Pretpostavimo da je skakavac na trenutnoj poziciji u točki $T(x, y)$ te preskače u točku centralno-simetričnu obzirom na točku $S(x_0, y_0)$. Njegovo će odredište biti točka $T'(x', y')$. Budući da je, po definiciji centralne simetrije, točka S polovište dužine $\overline{TT'}$, vrijedi:

$$x_0 = \frac{x + x'}{2}, \quad y_0 = \frac{y + y'}{2}.$$

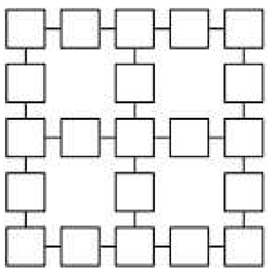
Odavde zaključujemo da je $x' = 2x_0 - x$, $y' = 2y_0 - y$, odnosno $T' = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$. Pogledajmo promjene u koordinatama:

$$(2x_0 - x) - x = 2(x_0 - x)$$

$$(2y_0 - y) - y = 2(y_0 - y)$$

Dakle, koordinate se uvijek umanjuju za paran broj, pa one svoju parnost ne mijenjaju. Budući niti jedan skakavac nije krenuo iz točke čije su obje koordinate parne, ne može se dogoditi da neki od njih skoči u točku čije su obje koordinate parne. Dakle, u vrh $A(0, 0)$ kvadrata neće skočiti niti jedan skakavac.

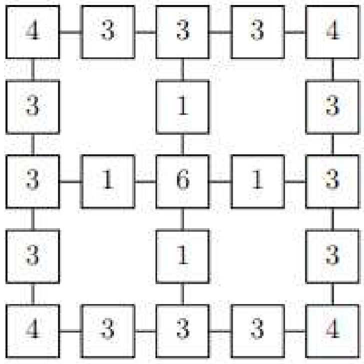
Zadatak 2.3.11. *(Državno natjecanje, 2. razred, A varijanta, 2010.)*
Na početku je u svaki od kvadrata raspoređenih kao na slici 2.3 upisana nula. U svakom potezu odabire se jedan od kvadrata te se istovremeno brojevi koji se nalaze u tom kvadratu i u svim njemu susjednim kvadratima uvećaju za jedan. Dokaži da je nakon određenog broja poteza:
a) moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2010*;*
b) nemoguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2011.



Slika 2.3: Kvadrati

Rješenje.
a) Ukoliko je moguće postići traženo, jedan je način taj da u nekom trenutku u svakom

kvadratu piše broj 10, pa isti postupak ponavljamo 201 put. Upišimo u prvi kvadrat prvog retka (a_1 na slici 2.5) broj 4 što znači da njega biramo četiri puta. Nakon ta četiri poteza, u tom kvadratu i u njegova dva susjedna kvadrata (a_2 i a_6 na slici 2.5) piše broj 4. Budući želimo da u tom prvom kvadratu prvog retka piše broj 10, svaki od njegova susjedna dva kvadrata ćemo birati po tri puta, te će se njegova vrijednost uvećati ukupno za 6, i iznosit će traženih 10. Na taj način popunjavamo ostale kvadrate na slici 2.4. Dakle, kad svaki kvadrat odaberemo odgovarajući broj puta (točno onoliko puta koliko je na njemu napisano na slici 2.4), on se povećava za onoliko koliko je puta biran bilo koji od njegovih susjeda ili on sam. Popunivši sva polja na taj način, zbroj brojeva koji pišu na pojedinom kvadratu i njemu susjednim kvadratima je 10. Ponovimo li opisani postupak 201 put, u svakom kvadratu pisat će broj $201 \cdot 10 = 2010$.



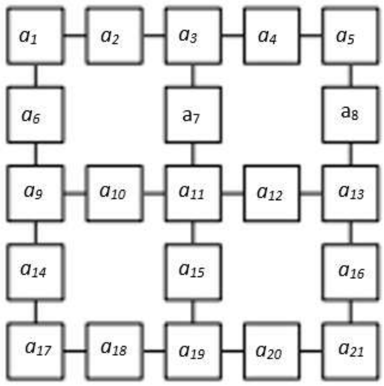
Slika 2.4: Zbroj je 10

b) U nekom trenutku, nakon određenog broja poteza, u svim kvadratima pišu neki brojevi - nazovimo ih $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$, kao na slici 2.5. Neka su $b_1 = 4, b_2 = 3, \ldots, b_7 = 1, \ldots, b_{21} = 4$ brojevi na slici 2.4. Definiramo $X = \sum a_i \cdot b_i = 4a_1 + 3a_2 + \cdots + a_7 + \cdots + 4a_{21}$. U početnoj konfiguraciji, kada u svakom kvadratu piše nula, vrijedi $X = 0$. Pogledajmo što se događa s brojem X u jednom potezu - odaberemo polje a_k, $k \in \{1, \ldots, 21\}$ te obavimo transformaciju. Pretpostavimo da polje a_k ima 3 susjedna polja, neka su to a_l, a_m, a_n. Označimo sa X' zbroj nakon transformacije, odnosno sa a'_k brojeve u poljima nakon poteza. Tada je $a'_l = a_l + 1, a'_m = a_m + 1, a'_n = a_n + 1$. Vrijedi:

$$X' = a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_k b_k + a'_l b_l + a'_m b_m + a'_n b_n + \cdots + a'_{21} b_{21},$$

$$X' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + (a_k + 1) b_k + (a_l + 1) b_l + (a_m + 1) b_m + (a_n + 1) b_n + \cdots + a_{21} b_{21},$$

$$X' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k + a_l b_l + a_m b_m + a_n b_n + \cdots + a_{21} b_{21} + b_k + b_l + b_m + b_n,$$



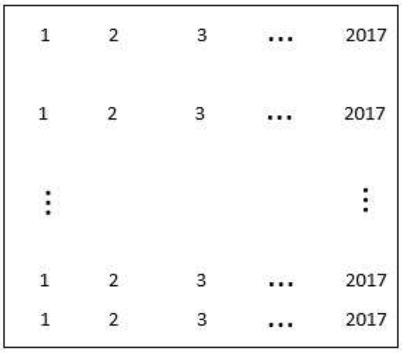
Slika 2.5: Brojevi u kvadratima

$$X' = X + b_k + b_l + b_m + b_n.$$

Vidimo da se nakon transformacije zbroj X uvećao za zbroj brojeva b_i u promatranom polju i svima njemu susjednim poljima. Međutim, taj zbroj je za svaki kvadrat jednak 10, tako da se broj X u svakom koraku povećava za 10 pa je X nakon svakog poteza djeljiv s 10. Kada bismo postigli da u svakom kvadratu piše broj 2011 tada bi broj X iznosio $2011 \cdot 62$ (zbroj brojeva u svim kvadratima na slici je 62). Međutim, to očito nije moguće jer broj $2011 \cdot 62$ nije djeljiv s 10. Zaključujemo da nije moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2011.

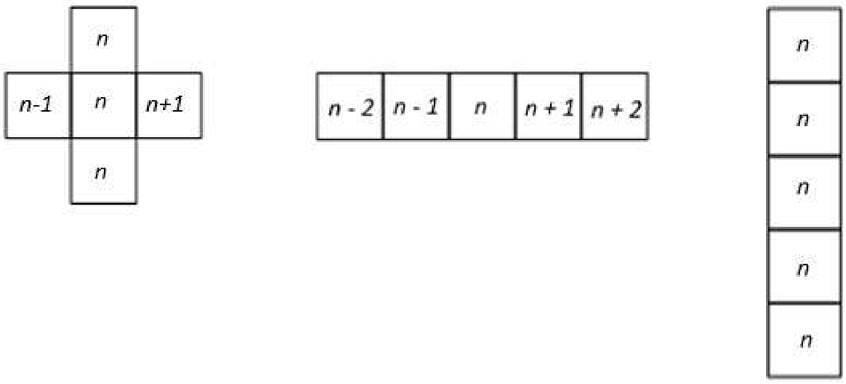
Zadatak 2.3.12. *(Državno natjecanje, 2. razred, A varijanta, 2016.)*
Dana je ploča s 2016 *redaka i* 2017 *stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjem stupcu te ploče tako da dobivenu ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika kao na slici ispod? Pločice je dozvoljeno rotirati.*

Rješenje. Primijetimo da obje pločice prekrivaju točno pet polja ploče. Na krnjoj ploči, tj. onoj koja ima dva polja manje, broj polja djeljiv je brojem 5 pa bi neki mogli pomisliti da je popločavanje na neki način moguće.
Napišimo u polja početne 2016×2017 ploče redom brojeve od 1 do 2017 rastućim redoslijedom u svaki redak. Skica takve ploče nalazi se na slici 2.6.



Slika 2.6: Ploča popunjena brojevima u rastućem redoslijedu

Primijetimo da su tada u svakom stupcu napisani isti brojevi. Svaka pločica prekriva pet brojeva: pločica oblika križa prekriva brojeve $n, n-1, n, n+1, n$ (u centralnom je polju broj n), dok pločica oblika pravokutnika prekriva ili pet uzastopnih (ukoliko je položena horizontalno) ili pet istih (ukoliko je položena vertikalno) brojeva.



Slika 2.7: Svaka pločica prekriva pet polja

Vrijedi:

$$\begin{aligned} n + (n-1) + n + (n+1) + n &= 5n, \\ (n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) &= 5n, \\ n + n + n + n + n &= 5n, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vidimo da je zbroj brojeva koje pločica pokriva uvijek djeljiv brojem 5. Kad bi željeno popločavanje bilo moguće, onda bi zbroj svih brojeva na poljima prekrivenih pločicama trebao biti višekratnik broja 5.
Odredimo zbroj brojeva na poljima krnje ploče, označimo ga sa S_z. Vrijedi:

$$1 + 2 + ... + 2017 = \frac{2018 \cdot 2017}{2}.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned} S_z &= 2016 \cdot (1 + 2 + ... + 2017) - 2 \cdot 2017 = \\ &= 2016 \cdot \frac{2017 \cdot 2018}{2} - 2 \cdot 2017 = \\ &= 2017 \cdot (2016 \cdot 1009 - 2). \end{aligned}$$

Budući je posljednja znamenka razlike $2016 \cdot 1009 - 2$ broj 2, posljednja znamenka broja S_z je broj 4, pa S_z nije djeljiv brojem 5. Dakle, traženo popločavanje nije moguće.

Monovarijante

Monovarijanta je veličina čija vrijednost pri nekoj transformaciji pada ili raste, odnosno ne raste ili ne pada, za razliku od invarijante čija se vrijednost pri nekoj transformaciji ne mijenja. Primijenimo monovarijantu pri rješavanju slijedeća dva zadatka.

Zadatak 2.3.13. *([1], str.3.)*
Neka su a, b, c i d cijeli brojevi koji su različiti. U svakom koraku brojeve a, b, c, d zamjenjujemo redom brojevima $a - b, b - c, c - d, d - a$. Dokažimo da će, nakon konačno mnogo koraka, barem jedan od brojeva postati beskonačno velik.

Rješenje. Neka je $P_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ četvorka brojeva nakon n koraka. Interpretirajmo zadatak geometrijski. Vrlo važna vrijednost točke P_n u 4-dimenzionalnom prostoru je kvadrat njene udaljenosti od ishodišta $(0, 0, 0, 0)$, a to je broj $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$. Vrijedi i

$a_n + b_n + c_n + d_n = 0, \forall n \geq 1$. Pokažemo li da navedena vrijednost raste neograničeno, riješili smo problem.

Nađimo vezu među brojevima P_n i P_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2(c_n - d_n)^2(d_n - a_n)^2 = \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n. \end{aligned}$$

Iskoristimo sada da je $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$:

$$0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2a_nb_n + 2a_nd_n + 2b_nc_n + 2c_nd_n. \tag{2.12}$$

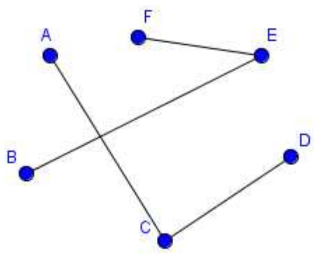
Zbrajajući (2.11) i (2.12), za $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2$, dobivamo:

$$2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \tag{2.13}$$

Iz ove nejednakosti zaključujemo da, $\forall n \geq 2$,
Udaljenost točke P_n od ishodišta neograničeno raste, što znači da barem jedan od brojeva a_n, b_n, c_n, d_n mora postati beskonačno velik.

Zadatak 2.3.14. *([1], str.2.)*
U parlamentu države Bekonije svaki član Parlamenta ima točno tri neprijatelja (neprijateljstva su uzajamna). Dokažite da se Parlament može podijeliti u dva doma ("Gornji dom" i "Donji dom") tako da svaki član Parlamenta ima najviše jednog neprijatelja u domu čiji je član (svaki član Parlamenta treba biti u točno jednom domu).

Rješenje. Podijelimo članove Parlamenta u dva doma na bilo koji način. Ukoliko svaki član Parlamenta ima najviše jednog neprijatelja u domu čiji je član, problem je riješen. Ukoliko raspored nije dobar, krećemo premještati članove s ciljem da svaki član Parlamenta u domu čiji je član ima najviše jednog neprijatelja. Označimo sa S_G ukupan broj neprijateljstava među članovima Gornjeg doma, a sa S_D ukupan broj neprijateljstava među članovima Donjeg doma. Pritom, ukoliko su dvije osobe neprijatelji, govorimo o jednom neprijateljstvu. Na slici 2.8, točke predstavljaju članove, ima ih 6. Točke su povezane dužinom ako su osobe neprijatelji. Dakle, na slici su prikazana ukupno 4 neprijateljstva.
Označimo: $S = S_G + S_D$. S je dakle zbroj ukupnog broja neprijateljstava među članovima Gornjeg doma i ukupnog broja neprijateljstava među članovima Donjeg doma. Promatrajmo osobu A iz Gornjeg doma. Postoje tri mogućnosti:



Slika 2.8: Neprijateljstva

1° Osoba A u Gornjem domu ima najviše jednog neprijatelja.
2° Osoba A u Gornjem domu ima dva neprijatelja, a u Donjem domu jednog.
3° Osoba A u Gornjem domu ima tri neprijatelja, dok u Donjem domu nema neprijatelja.

Budući želimo postići situaciju da svaka osoba u domu čiji je član ima najviše jednog, odnosno ili niti jednog ili jednog neprijatelja, u 1° se osoba A ne mora seliti.

Označimo sa S'_G i sa S'_D broj neprijateljstava među članovima Gornjeg, odnosno Donjeg doma nakon premještanja osobe A iz Gornjeg u Donji dom. Kako je osoba A u Gornjem domu imala dva neprijatelja, njenim odlaskom u Donji dom dva će se neprijateljstva među članovima Gornjeg doma ugasiti. Dolaskom osobe A u Donji dom, stvorit će se jedno novo neprijateljstvo. Dakle, u 2° će se broj neprijateljstava među članovima Gornjeg doma smanjiti za 2, dok će se broj neprijateljstava među članovima Donjeg doma povećati za 1, odnosno

$$\begin{aligned} S'_G &= S_G - 2, \\ S'_D &= S_D + 1, \\ S' = S'_G + S'_D &= S - 1. \end{aligned}$$

Dakle, broj $S = S_G + S_D$ se smanjio.

Osoba A će se u 3° također preseliti u Donji dom. U ovom će se slučaju broj neprijateljstava među članovima Gornjeg doma smanjiti za 3, dok se broj neprijateljstava među članovima

Donjeg doma neće promijeniti.

$$\begin{aligned} S'_G &= S_G - 3, \\ S'_D &= S_D, \\ S' = S'_G + S'_D &= S - 3. \end{aligned}$$

Dakle, broj $S = S_G + S_D$ se ponovno smanjio.

Premještanje provodimo na način da odaberemo jedan Dom te svakom njegovom članu brojimo neprijateljstva u tom Domu. Pritom je moguća jedna od navedene tri situacije. Ukoliko je situacija dobra, tj. član u promatranom Domu ima najviše jednog neprijatelja, ne premještamo ga već odaberemo nekog drugog člana. Premještanje se vrši dok god postoji (barem jedna) osoba koja bi nakon premještanja u drugi Dom imala manje neprijatelja. Kako u postupku premještanja više osoba mijenjamo status osoba koje smo već provjerili, pitamo se hoćemo li ikad završiti s postupkom premještanja. Pokazali smo da će se broj S smanjivati dok god premještamo osobe koje imaju 2 ili 3 neprijatelja u domu čiji su članovi. Kako se S prirodni broj i ne može se smanjivati unedogled, u jednom trenutku više nećemo moći nikoga premjestiti, odnosno svi će imati najviše jednog neprijatelja u Domu u kojem sjede.

$\square$

Bibliografija

[1] A. Engel, *Problem Solving strategies*, (1998.), The Invariance Principle, 1. - 23., Coloring Proofs, 25. - 38.

[2] I. Brnetić, *Jedna metoda rješavanja nekih zadataka logičkog tipa*, 9. - 14. , HMD, Bilten seminara iz matematike za nastavnike - mentore 7. (1998.)

[3] I. Brnetić, *Invarijante i monovarijante*, MEMO pripreme 2015., http://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2015/08/ (srpanj 2018.)

[4] Mladi nadareni matematičari Marin Getaldić, *Invarijante*, http://mnm.hr/wp-content/uploads/2015/10/invarijante.pdf (travanj 2018.)

[5] M. Bombardelli, *Invarijante ili kako odbaciti nemoguće*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/sem3/invarijante.pptx (travanj 2016.)

[6] I. Krijan, *Invarijante*, PlayMath br. 15. (2007.)

[7] Antonija Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm (srpanj 2018.)

[8] D. Ilišević, G. Muić, *Uvod u matematiku*, skripta za istoimeni kolegij na PMF - MO, https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/uum.pdf (svibanj 2019.)

[9] Šikin blog, *Šah i domino*, https://sikic.wordpress.com/2016/10/ (lipanj 2018.)

Sažetak

U ovom je diplomskom radu opisana metoda invarijante kojom se rješavaju zadaci na učeničkim natjecanjima. Ideja je bila osmisliti i strukturirati rad kao metodički priručnik za nastavnike koji se tom temom bave u radu s učenicima. Ovaj rad također može poslužiti kao literatura za detaljnije istraživanje metode invarijante.

U dva su velika poglavlja dana rješenja tipova zadataka koji se najčešće pojavljuju na natjecanjima. To su zadaci s pločama koje treba popločiti na zadani način ili zadaci u kojima se događa neka transformacija koju provodimo.

Summary

This thesis describes the invariance principle, method for solving problems in student competitions. The idea was to design the work as a methodology manual for teachers dealing with this topic during their work with students. This theses can also serve as a reference for further research on the invariance principle.

Two large chapters include solutions to most common types of problems that appear in competitions. These are problems with tiles that need to be paved in a certain way or problems that include a transformation that we have to carry out.

Životopis

Rođena sam 19. srpnja 1991. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Pavla Štoosa u Kraljevcu na Sutli. Nakon završetka osmog razreda 2006. godine upisala sam Srednju školu Zaprešić, smjer Opća gimnazija. Godine 2010. završila sam srednju školu te iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2014. godine stekla sam akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Po završetku preddiplomskog studija, iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Od 2016. godine radim u struci, predajem matematiku u Osnovnoj školi Stjepana Radića Brestovec Orehovički.