Paradoksi i učeničke konceptualne poteškoće u teoriji vjerojatnosti

Dugandžić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Dugandžić

PARADOKSI I UČENIČKE KONCEPTUALNE POTEŠKOĆE U TEORIJI VJEROJATNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, prosinac, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana __________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________, predsjednik
2. __________________________, član
3. __________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. __________________________
2. __________________________
3. __________________________

Diplomski rad posvećujem svojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje i podržavali me cijelim putem.

Zahvaljujem mentoru koji mi je predložio ovu veoma zanimljivu temu, pomogao pri formiranju ideje, strukture i samog pisanja rada te bio iznimno susretljiv tijekom cijelog postupka pisanja rada.

Zahvaljujem se svim prijateljima i dečku na strpljenju tijekom posljednje dvije godine studiranja i na kraju pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Vjerojatnost se u osnovnoj školi pojavljuje kroz osnovne koncepte vjerojatnosti, a u srednjoj školi se osnove nadograđuju i pojavljuju se složeniji zadatci i koncepti. Pri rješavanju zadataka u kojima se računa vjerojatnost, učenici se susreću s određenim konceptualnim poteškoćama.

Konceptualne poteškoće možemo nazvati još i miskoncepcijama. Do miskoncepcija u vjerojatnosti dolazi zbog oslonca na intuiciju i iskustvo pri rješavanju zadataka ili vjerovanja u utjecaj vanjskih sila na rezultat zadatka. Složena pitanja su zamijenjena jednostavnijim, čime se dolazi do netočnih odgovora na početna pitanja.

U ovom radu ćemo u prvom poglavlju vidjeti koje su miskoncepcije tipične za vjerojatnost, kako dolazi do njih i kako paradoksi mogu utjecati na prevladavanje miskoncepcija. U drugom poglavlju ćemo uvesti matematičku podlogu za rješavanje zadataka (dio Teorije vjerojatnosti) te riješiti zadatke koji bi mogli učenicima činiti poteškoće. Za kraj ćemo u trećem poglavlju predložiti aktivnosti kroz koje bi učenici mogli prevladati ove poteškoće.

Poglavlje 1

Paradoksi, problemi i poteškoće u teoriji vjerojatnosti

1.1 Miskoncepcije u nastavi vjerojatnosti

Učenici se susreću s vjerojatnosti već u osnovnoj školi kroz osnovne pojmove (npr. što je siguran događaj, što je nemoguć događaj,...), pa kasnije u 8. razredu kroz jednostavne primjere (npr. bacanje kockice). Zatim u srednjoj školi u 2. razredu nadograđuju osnove, a u 4. razredu još više proširuju znanje te rješavaju matematički zahtjevnije zadatke. Koliko detaljno će se obraditi vjerojatnost na satu u srednjoj školi ovisi o broju sati matematike koje učenik sluša. Tako će razred koji sluša 105 h matematike godišnje (3 h tjedno) obraditi zavisnu i nezavisnu vjerojatnost i ne više od toga, a onaj koji sluša 210 h (7 h tjedno) učiti o Bayesovoj formuli.

Unatoč razlikama u programu, gore navedeni razredi će obraditi isto osnovno gradivo, odnosno krenuti od istih temelja. Tako će svi učenici početi s jednostavnim pitanjima poput:

1. Bacamo simetričan novčić. Kolika je vjerojatnost da će novčić pasti na stranu na kojoj je pismo?[1]
2. Bacamo simetričnu kockicu. Kolika je vjerojatnost da će pasti broj 2?
3. Bacamo dvije simetrične kockice. Je li veća vjerojatnost da će zbroj brojeva na kockicama biti 6 ili 7?

[1] U Republici Hrvatskoj, a ni u većini drugih država, se na kovanicama ne pojavljuje ni simbol glave ni simbol pisma. Originalni izraz za „pismo ili glava” dolazi od latinskog izraza „capita aut navia”, što znači „glava ili brod”. Odnosi se na kovanicu koja na jednoj strani pokazuje lice nekog vladara, a na drugoj strani simbol nekog uspjeha, npr. brod ili pismo.

Učenici će pri rješavanju ovih zadataka raditi slične zadatke i u osnovnoj i u srednjoj školi. Zatim će se slične greške u odgovoru na bar jedno od ovih pitanja pojaviti među učenicima raznih razina znanja, od osnovne do srednje škole, strukovne ili gimnazije. Radi se o greškama koje su najčešće rezultat konceptualnog nerazumijevanja vjerojatnosti, koje se ne može promijeniti kroz učenje novih formula, definicija i postupaka računanja.

Učenik dolazi u učionicu s nekim predznanjem o gradivu, bilo na temelju iskustva ili na temelju učenja iz drugih izvora. Predznanje može poslužiti kao dobar temelj daljnjem učenju, ako se podudara s novim znanjem, no ako se nova teorija kosi s prethodnim znanjem, onda dolazi do miskoncepcija.

Učeničke poteškoće koje se javljaju u vjerojatnosti možemo zajednički nazvati miskoncepcije o vjerojatnosti. Riječ *miskoncepcija* dolazi iz engleskog pojma *misconception*. Pojam *misconception* bismo mogli prevesti na hrvatski jezik kao *kriva predodžba*, npr. kriva predodžba o načinu na koji se računa vjerojatnost, no engleski termin je sveobuhvatan i odnosi se na bilo kakve poteškoće u razumijevanju koje su se pojavile iz bilo kakvih razloga. Merriam-Webster rječnik definira miskoncepciju kao „pogrešnu ili netočnu ideju ili koncepciju", a koncepciju kao „generalnu ideju ili koncept nečega" i „složeni proizvod apstraktnog ili reflektivnog razmišljanja". Prema tome, miskoncepcija znači neshvaćanje problema, koncepta, gradiva koje se obrađuje... U kontekstu ovog rada, označava greške u učenikovom razmišljanju koje ga sprječavaju da točno riješi zadatak ili problem te da uvidi u čemu je pogriješio.

Naglasit ćemo i razliku između nerazumijevanja nekog dijela gradiva i miskoncepcije. Do nerazumijevanja, nesporazuma ili neznanja se dođe kada učeniku nedostaje znanja iz nekog gradiva. Npr. nije naučio formulu koju treba koristiti ili ne zna definiciju pojma koji koristi. U tom slučaju, učenik je voljan naučiti gradivo, jer prepoznaje da mora nadopuniti znanje. Nasuprot tome, miskoncepcije se odnose na dubinsko nerazumijevanje gradiva, koje je teško za ispraviti.

U nastavi matematike se ovo dobro vidi u gradivu s vjerojatnosti. U matematici se zadatci često svedu na apstraktnu razinu, gdje se traže nepoznanice bez konteksta. Drugim riječima, rijetko se rješavaju problemski zadatci i zadatci riječima. Time se učenici mogu fokusirati na postupak rješavanja i na korištenje matematičke logike. U gradivu vjerojatnosti su zadatci skoro isključivo problemski (npr. u udžbeniku iz matematike za 4. razred, Antoliš, Copić [12]) te su opisane situacije u kojima se većina učenika našla. Zadatci su često vezani za društvene igre (npr. bacanje kockica, vuče se karta...) ili za životne situacije („Marko kasni u školu..."), pa stoga učenici mogu automatski dati rješenje zadatka temeljeno na intuiciji ili iskustvu, bez logičke osnove, koje može biti potpuno krivo. Problem nastaje kada taj osjećaj ili iskustvo sprječava učenika da shvati točno rješenje.

Najčešće učenik nije svjestan da ne shvaća gradivo, pa stoga ni ne želi promijeniti mišljenje. Zbog toga se miskoncepcije ne mogu ispraviti forsiranjem novog znanja, nego se mora pristupiti na drugi način. Mora doći do konceptualne promjene razmišljanja u učenikovom umu.

Najčešće miskoncepcije koje se javljaju u učenju vjerojatnosti su: *equiprobability bias,* koju prevodimo kao pristranost jednakoj vjerojatnosti, zatim *representativeness bias*, koju prevodimo kao pristranost reprezentativnosti i *outcome orientation*, u prijevodu orijentacija na ishode. U ovom radu ćemo se fokusirati na ove miskoncepcije, pokušati naći razlog zašto se pojavljuju i ponuditi rješenje kako ih prevladati.

Orijentacija na ishod

Miskoncepcija koju je najlakše za prevladati je neshvaćanje da su neki događaji zaista nasumični. Orijentacija na ishod označava vjerovanje da događaji nisu nasumični, nego na njih utječe viša sila ili mi sami. Kada se osoba previše fokusira na predviđanje ishoda, onda može pritom zanemariti cijeli koncept vjerojatnosti.

Jednostavan primjer bi bio: „Našao sam djetelinu s 4 lista pa ću danas sigurno osvojiti *EuroJackpot*", iako je vjerojatnost da se u lutriji dobije glavni dobitak s jedim listićem jednaka za sve: najviše $4.3 \cdot 10^{-9}\%$, no lutrija se igra više iz zabave nego iz iskrenog uvjerenja o dobitku. Primjer ozbiljnog neshvaćanja pojma vjerojatnosti je dan u istraživanju na jednom sveučilištu gdje je studentima prikazana sljedeća situacija: meteorolog je deset dana za redom svaki dan prognozirao da je 70% vjerojatnost da će pasti kiša. Ako pretpostavimo da je meteorolog dobro prognozirao, od tih 10 dana će 7 dana padati kiša, no pola studenata u učionici je smatralo da meteorolog ne zna raditi svoj posao, jer ako je svaki dan prognoza s vjerojatnosti 70%, kiša bi trebala padati svaki dan.([16])

Kako se ova miskoncepcija pojavljuje u školi? U istraživanju u osnovnoj školi u Turskoj ([15]) koje je proučavalo miskoncepcije iz vjerojatnosti među učenicima od 5. do 8. razreda, učenici su rješavali razne zadatke na zaokruživanje iz vjerojatnosti. Jedan od zadataka je glasio: „Koja je veća vjerojatnost, ako postoji veća vjerojatnost: Da će ti pri bacanju novčića novčić pasti na stranu gdje je glava, ili da će ti pri bacanju kockice pasti parni broj? Što bi ti bacio/la?", a jedan od odgovora je glasio: „Novčić, jer s novčićem mogu varati i uvijek dobiti glavu, a s kockicom ne mogu." Učenik je smatrao da može promijeniti ishode pokusa vlastitim utjecajem na novčić, tako da ne budu nasumični. Odbio je prihvatiti koncept vjerojatnosti, odnosno nasumičnog rezultata.

Ovaj problem nastaje jer učenik svoje razmišljanje temelji na iskustvu, kojeg mladi učenik nema. S obzirom na dob (osnovna i srednja škola), malo je vjerojatno da je ponovio slučajni pokus velik broj puta te da je zaista vidio koncept slučajnosti. Ova miskoncepcija se najbrže savlada, jer tijekom vremena učenici shvate koncept slučajnog ili stohastičkog pokusa, nakon što im se pokaže velik broj primjera.

Pristranost jednakoj vjerojatnosti

Mnogo zadataka iz vjerojatnosti obuhvaćaju koncept jednako vjerojatnih rezultata pokusa. Npr. bacanje simetrične kockice ili novčića, koje smo spomenuli u pitanjima na početku poglavlja. Riječ „simetričan" znači da je predmet (kockica ili novčić) napravljen tako da su svi rezultati jednako vjerojatni. Npr. vjerojatnost da kockica pokaže bilo koji broj (1,2,3,4,5,6) je međusobno jednaka. Intuitivno lako shvaćamo ovaj koncept te da je tada vjerojatnost za svaki rezultat omjer jednog rezultata od svih mogućih (npr. za kokcice: $\frac{1}{6}$, tj. 0.167 = 16.7%). Kod ovakvih zadataka je s riječi „simetričan" naglašeno da su u pitanju jednako vjerojatni rezultati. Poteškoće mogu nastati kada učenik vjeruje da se ovaj koncept odnosi na sve situacije, odnosno slučajne pokuse.

Pogledajmo još jedan primjer s vremenskom prognozom: „Sutra ili hoće padati kiša ili neće. Prema tome, vjerojatnost da će padati kiša je 50%", no kao što znamo, iako postoje samo dvije mogućnosti, nisu nužno jednako vjerojatne. Zato postoje meteorolozi koji će pokazati vjerojatnost padanja kiše.

Pristranost jednakoj vjerojatnosti je sklonost pretpostavljanja da svaki proces vezan na slučajnost mora biti uniforman (tj. da svaki mogući ishod ima jednaku vjerojatnost) ([13]), što nije nužno istina. Obilježje slučajnog ili stohastičkog pokusa, o kojem se govori u vjerojatnosti, je da rezultat ne možemo predvidjeti, bez obzira na uvjete. Kada je rezultat slučajan, znači da ima neku vjerojatnost, koja nije nužno jednaka kao vjerojatnost ostalih rezultata.

Ova miskoncepcija se pokazala najtežom za otkloniti, jer se protivi intuiciji. Uz ovo, nekada kada događaji jesu jednako vjerojatni, njihova kombinacija nije. Pokazalo se da što učenici više uče o vjerojatnosti, imaju više problema s ovom miskoncepcijom. U istraživanju o miskoncepcijama u vjerojatnosti u srednjoj školi, provedenom u Nizozemskoj, $20-38\%$ učenika u dobi od 15 do 17 godina je pokazalo ovaj tip miskoncepcije. Više istraživanja provedena od iste osobe u srednjim školama su pokazala da se ova miskoncepcija pojavljuje u preko 50% slučajeva.([18]) U istraživanju na istu temu na fakultetu u New Yorku je 83% ispitanika pokazalo ovu miskoncepciju ([17]), a u istraživanju na fakultetu u Wisconsonu njih 79%.([10])

Pokažimo primjere zadataka iz navedenih istraživanja. Pogledajmo zadnje pitanje s početka poglavlja kao zasebni zadatak.

Zadatak 1.1.1. *Bacamo dvije simetrične kockice. Je li veća vjerojatnost da će zbroj brojeva na kockicama biti 6 ili 7? Izračunajte.*

Zadatak pokazuje sljedeću situaciju: Bacaju se dvije kockice. Kockice su simetrične, što znači da je jednako vjerojatno da se svaki broj na kocki, od 1 do 6, pojavi nakon bacanja. Nakon što smo bacili dvije kockice, dobit ćemo dva broja, koja zbrajamo.

Počnimo od zbroja 6. Učenik će ili intuitivno razumjeti ili se prisjetiti formule da se vjerojatnost u ovom slučaju računa kao omjer mogućih slučajeva kad su kockice dale zbroj 6 i svih mogućih slučajeva.

Da bi učenik izračunao vjerojatnost, potrebno je prebrojiti koliko ima slučajeva kad će zbroj brojeva na kockicama biti 6. Zatim isto ponovi za zbroj 7, pa usporedi broj slučajeva. Koji zbroj ima više slučajeva, odnosno veći broj kombinacija brojeva na kockicama, bit će i vjerojatniji za ponavljanje. Poteškoće kod ovog zadatka se pojavljuju u trenutku kada se treba izračunati koliki je broj kombinacija. Učenik može razmišljati na sljedeći način:

Kombinacije za zbroj 6 su:

$$1 \text{ i } 5,\ \ 2 \text{ i } 4,\ \ 3 \text{ i } 3,$$

gdje npr. „1 i 5” znači na kockicama su se pojavili brojevi 1 i 5, a njihov zbroj je 6.

Kombinacije za zbroj 7 su:

$$1 \text{ i } 6,\ \ 2 \text{ i } 5,\ \ 3 \text{ i } 4.$$

Budući da u oba slučaja imamo tri kombinacije, učenik zaključuje da je vjerojatnost za pojavljivanje zbroja 6 jednaka vjerojatnosti za zbroj 7.

Kada se ovaj zadatak provede kao pokus ili kao simulacija pokusa s velikim brojem bacanja dobili bismo drugačije rješenje: u više slučajeva će zbroj na kockicama biti 7. Točnije, u 17% slučajeva bi zbroj bio 7, naspram 14% slučajeva kada bi zbroj bio 6. Intuitivno razumijemo da bi rezultat velikog broj pokusa trebao odgovarati rješenju koje smo izračunali.

U čemu je bila greška? Iako se na prvi pogled zapis kombinacija čini dobrim, ovdje učenik nije napisao sve mogućnosti, odnosno nije dobro slučajevima pridružio vjerojatnosti. Naime, bacamo dvije različite kockice, pa i njihove rezultate moramo tretirati kao različite i neovisne. Ovo se može ilustrirati tako da kockice označimo da se razlikuju. Npr. prva kockica će biti plave boje, a druga crvene boje. Tada se kombinacija „1 i 5” može dobiti na dva načina:

$$\text{plava kockica } \rightarrow\ 1, \text{ crvena kockica } \rightarrow 5$$

ili

$$\text{plava kockica } \rightarrow 5, \text{ crvena kockica} \rightarrow 1.$$

Elegantniji zapis bi bio da rezultate na kockicama napišemo kao uređene parove, gdje je pozicija broja bitna. Napišimo kombinacije u obliku (p, c), gdje p označava rezultat na plavoj kockici, a c označava rezultat na crvenoj kockici.

Točan zapis mogućnosti je:

$$\text{Zbroj je 6: } (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$$

$$\text{Zbroj je 7: } (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

$$\text{Sve moguće kombinacije: } (p, c), p, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Usporedimo omjere:

$$\frac{\text{Broj mogućnosti za zbroj 6}}{\text{Broj svih mogućnosti}} = \frac{5}{36} = 0.13\dot{8} < 0.1\dot{6} = \frac{6}{36} = \frac{\text{Broj mogućnosti za zbroj 7}}{\text{Broj svih mogućnosti}}$$

Prema tome, veća je vjerojatnost da će zbroj biti 7.

Pristranost jednakoj vjerojatnosti se ovdje pojavljuje kada učenik vjeruje da su svi zbrojevi jednako vjerojatni jer je to svojstvo vjerojatnosti u slučajnim pokusima. U zadatku je moglo pisati: „Usporedite vjerojatnost da zbroj bude 2 u odnosu da zbroj bude 7.” Da bi zbroj brojeva na kockicama bio 2, na kockicama moraju biti točno dvije jedinice. Ovo je jedina mogućnost za zbroj 2, pa je vjerojatnost za zbroj 7 veća, no učeniku s pristranosti jednakoj vjerojatnosti neće biti očito i pomislit će da je vjerojatnost jednaka za oboje. Još jedan primjer je poznati paradoks Montya Halla, kojeg ćemo opisati kasnije.

Pristranost reprezentativnosti

U vjerojatnosti u srednjoj školi su česti zadatci u kojima se pokus ponavlja. Npr. bacanje simetričnog predmeta nekoliko puta za redom. Relativno lagano i intuitivno shvaćamo da kada ponovimo pokus, vjerojatnost rezultata se ne mijenja. Npr. svaki put kada se baci simetričan novčić, vjerojatnost da će pasti na stranu na kojoj je glava je 50%. Tako je novčić napravljen. Unatoč tom razumijevanju, učenici imaju poteškoće kada uspoređuju rezultate višestrukog bacanja novčića.

Npr. učenik očekuje da će pri bacanju novčića šest puta za redom biti veća vjerojatnost za niz „PGPGPG” nego „GGGGGG”, gdje slovo „P” označava da je novčić pao na stranu s pismom, a „G” da je pao na stranu s glavom. Razlozi za to su razni: „’PGPGPG’, jer rezultati trebaju biti ravnomjerno raspoređeni” ili „’PGPGPG’, jer se meni nikad nije dogodilo da je novčić pao na jednaku stranu šest puta za redom.” ([9]) U stvarnosti je točan odgovor da je vjerojatnost za oba slučaja jednaka, jer prethodno bacanje novčića ne utječe na sljedeće, a vjerojatnost za „P” i „G” je jednaka.

Pristranost reprezentativnosti označava sklonost učenika da predviđaju vjerojatnost događaja na temelju toga koliko ishod i uzorak ishoda odgovaraju učestalim uzorcima.

Ova miskoncepcija se također pokazala kao čestom među učenicima, ali i studentima. U istraživanju o miskoncepcijama u vjerojatnosti na fakultetu u New Yorku ([17]) je 67% ispitanika pokazalo ovu miskoncepciju, a u istraživanju na fakultetu u Wisconsonu s boljim rezultatom njih 28% ([10]). Istraživanje u srednjoj školi u Bruneju je pokazalo da je oko 30% sudionika imalo ovu miskoncepciju.([9])

Najpoznatiji primjer ove miskoncepcije je Kockareva greška ili greška *Monte Carlo*.[2] Kockareva greška je pogrešno razmišljanje da prethodni rezultati pokusa utječu na sljedeće. Npr. ako je 10 puta za redom novčić pao na stanu s glavom, sljedeći put mora pasti na stranu s pismom, jer se pismo nije dugo pojavilo.

Moguće objašnjenje ove miskoncepcije je ljudska navika na promjene. Živimo s uvjerenjem da je jedina konstanta u životu promjena,[3] da je promjena norma, a ne iznimka. Prema tome, skloni smo vjerovati da će nakon mnogo istih rezultata rezultat u sljedećem pokusu biti drugačiji, bez obzira na zadanu vjerojatnost. Da bi učenici savladali ovu miskoncepciju, potrebno je razmišljati protivno vlastitoj intuiciji.

Oslonac na intuiciju

Generalno intuicija u životu može biti korisna, no kada je u pitanju određivanje vjerojatnosti, pokazuje se kao loš oslonac. Do sada smo već nekoliko puta spomenuli negativan utjecaj intuicije na miskoncepcije.

Rječnik Merriam-Webster donosi sljedeću definiciju intuicije: „Moć ili sposobnost postizanja izravnog znanja ili spoznaje bez jasnog racionalnog razmišljanja i zaključka". Hrvatska enciklopedija intuiciju definira kao: „Neposredno, izravno sagledavanje, bez diskurzivnoga mišljenja; izravno spoznavanje" i „Manje ili više točan osjećaj za ono što se ne može provjeriti, ili pak za ono što se još nije zbilo, što tek predstoji." Na temelju ovih definicija možemo zaključiti da je intuicija osjećaj na koji se oslanjamo, iako se ne može opisati ni objasniti. Kada se unutar učenika sukobe osjećaj i logičan slijed misli, tada učenik osjeti poteškoće u razmišljanju. Učenik mora odabrati jedno ili drugo, pa najčešće prevlada intuicija nasuprot razumu.

Mogli bismo sve ostale greške pri rješavanju zadataka iz vjerojatnosti, koje nisu povezane s prethodnim miskoncepcijama, pripisati netočnoj intuiciji. Postavljaju se pitanja, zašto se onda oslanjamo na intuiciju i kada nam se to isplati? Psiholog D. Kahneman je u svojem djelu „*Thinking: fast and slow*" ponudio odgovor na ova pitanja uvođenjem dva sustava razmišljanja kojima se donose odluke: *Sustav 1*, koji je brži i povezujemo ga s intuicijom, te *Sustav 2*, koji je sporiji i povezujemo ga s analitičkim razmišljanjem. Kahneman je ovim sustavima opisao razmišljanje svih ljudi, pa se prema tome odnosi i na razmišljanja učenika.

Navodi primjer: Izračunajte $17 \cdot 24$.

[2] Eng: *Gamblers fallacy* ili *Monte Carlo fallacy*. Naziv dolazi od navodnog događaja 1913. godine kada je u kasinu Monte Carlo u Las Vegasu u igri rulet nekoliko puta pobijedila crvena boja. Igrači su bili uvjereni, budući da je više puta za redom kuglica pala na crveno polje, sljedeći put mora pasti na crno, pa su se masovno kladili na crnu boju. Tek 27. put je kuglica pala na crno polje, a kasino je taj dan dobilo milijune dolara.

[3] Heraklitova izreka, 500 god. pr. Kr.

Sustav 1 će brzo zaključiti da je umnožak sigurno veći od 100, ali i manji od 1000, te nam dati aproksimaciju, odnosno okvir za rješenje. Da bi dobili točan umnožak, trebamo pomnožiti brojeve nekom metodom, koja zahtjeva više vremena i energije za razmišljanje. Tu ulogu preuzima *Sustav 2,* koji će dati konkretno rješenje: 408. Oba načina razmišljanja su dobra, jer svaki ima svoju svrhu. Za matematički zadatak prikladno je koristiti *Sustav 2*, no on zahtjeva više energije, pa učenici prije koriste *Sustav 1* koji se oslanja na intuiciju, a pritom ne daje garanciju da će biti točan.

Zato je u matematičkim zadatcima s vjerojatnosti prikladnije koristiti *Sustav 2* i bolje razmisliti o pitanju i rješenju. S druge strane, ako se osoba nalazi u opasnoj situaciji, npr. dogodi se potres, bolje je osloniti se na *Sustav 1*, koji u sekundi odluči da je najbolji potez: „izađi na otvoreno“.

Prema tome, greške u zadatcima kod učenika ponekad nastaju radi štednje energije. Učenički mozak će prihvatiti jednostavno rješenje, unatoč tome što je možda krivo. Učenik će umjesto računa koristiti procjenu, a teže pitanje zamijeniti lakšim. Tada se ne računa preko zaključaka, nego po osjećaju, što nazivamo intuicijom.

Prevladavanje miskoncepcija

Kada se intuicija, odnosno intuitivno objašnjenje učenika, i stvarni rezultati ponovljenih pokusa ili točno objašnjenje rješenja sukobe, dolazi se do kognitivnog konflikta. Intuitivno razmišljanje učenik prihvati kao točno, čime nastaju miskoncepcije. Budući da su poteškoće konceptualne, u učenikovom umu treba doći do konceptualne promjene u razmišljanju.

Prema istraživanju Dyrenfurth i Goris, za uspješnu konceptualnu promjenu novi koncept mora biti:

a) razumljiv - nova koncepcija mora biti očita kako bi imala smisla za učenika;

b) uvjerljiv - nova koncepcija mora se smatrati razumno istinitom;

c) plodan - nova koncepcija mora se činiti potencijalno produktivnom za učenika za rješavanje trenutnih problema.

Razna istraživanja (sva citirana do sada) se slažu oko jednog: potrebna je intervencija nastavnika i kontinuirano rješavanje zadataka i problema kojima se potiču učenikova razmišljanja. Time će se ispuniti navedeni kriteriji.

Khazanov i Prado su u svom istraživanju o miskoncepcijama u vjerojatnosti zaključili da je pokretanje kognitivnog konflikta moćan pristup pri rješavanju miskoncepcija. Recimo, nakon što učenik krivo riješi zadatak, pokazati računalnu simulaciju problema i prepustiti učeniku da se uvjeri da je pogriješio. Jedan od načina kojima se mogu potaknuti kognitivni konflikti su promatranje paradoksa.

1.2 Paradoksi

Hrvatska enciklopedija definira paradoks[4] kao iskaz suprotan očekivanomu, uobičajenomu; zaključak koji protuslovi (često samo prividno) zdravomu smislu shvaćanja, ispravnomu rasuđivanju. Naizgled logičnim načinom razmišljanja se dolazi do netočnih rješenja. Kada se učenik nađe u takvoj situaciji, pojavit će se konflikt misli, te će problem zaintrigirati učenika da potraži objašnjenje paradoksa. Povijesno su se kroz razvoj teorije vjerojatnosti javljali razni paradoksi, a neke od njih ćemo iskoristiti u ovom radu, da bi prikazali učeničke miskoncepcije.

Primjer 1.2.1 (Paradoks rođendana)**.** *Kolika je vjerojatnost da će u razredu od 30 učenika barem dvije osobe imati isti datum rođendana?*

Učenik bi mogao razmišljati: što je veći broj ljudi u razredu, veća je vjerojatnost da se datumi podudaraju. Budući da je 30 relativno mali broj ljudi, vjerojatnost da će se dva datuma podudarati je mala.

Ako izračunamo vjerojatnost matematičkim računom, uz pretpostavku da je vjerojatnost da je osoba rođena na pojedini datum jednaka za sve datume, dobijemo da je vjerojatnost podudaranja: 70.6%, što je relativno velik broj. Detaljan račun ćemo prikazati u drugom poglavlju.

U Tablici 1.2 je prikazana vjerojatnost za nekoliko vrijednosti n, gdje je n broj učenika u razredu. Vidimo da je već u razredu od 23 učenika vjerojatnost veća od 50%.

n	Vjerojatnost
10	11.7%
20	41.1%
23	50.7%
30	70.6%
75	99.97%

Tablica 1.1: Vjerojatnost da će dvije od n osoba imati rođendan na isti datum.

Zašto bi onda učenik prvo pomislio da je mala vjerojatnost? Moguće je da je originalno pitanje zamijenio drugim: „Koja je vjerojatnost da „ja” imam rođendan na isti datum kao netko drugi?”, a tada je vjerojatnost mnogo manja: 0.2% za 30 učenika u razredu.

Pokažimo još jedan poznati paradoks. Paradoks Montya Halla je poznata mozgalica koja je dobila svoje ime po voditelju popularnog američkog televizijskog kviza, *Let's Make a Deal* („Dogovorimo se“).

[4] Grč. neočekivan.

Primjer 1.2.2 (Paradoks Montya Halla)**.** *Iza troje vrata se nalaze tri nagrade: iza jednih vrata se nalazi automobil, a iza ostalih su koze. Igrač odabire vrata i dobiva nagradu koja se nalazi iza njih. Prije nego što se otvore, voditelj igre otvori druga vrata, iza kojih se nalazi koza. Zatim nudi igraču izbor: može ostati pri prvom izboru, ili promijeniti izbor i otvoriti preostala vrata.*

Pitanje je: Isplati li se igraču promijeniti prvobitni izbor? Postoji li strategija za dobitak automobila?

Slika 1.1: Paradoks Montya Halla.

Pitanje se svodi na računanje vjerojatnosti da će se iza određenih vrata nalaziti automobil. Igrač će odabrati neka vrata. Budući da ih ne razlikujemo, vjerojatnost da je odabrao automobil je 1:2, odnosno $\frac{1}{3}$ ili 33%, jer se od troje vrata automobil nalazi iza jednih. Nakon toga će voditelj, bez obzira na izbor igrača, otvoriti jedna od dvoje preostalih vrata, iza kojih se nalazi koza.

Od troje vrata, dvoje su ostala zatvorena. Iza jednih se nalazi koza, a iza drugih automobil. U tom trenutku voditelj nudi igraču da može promijeniti izbor.

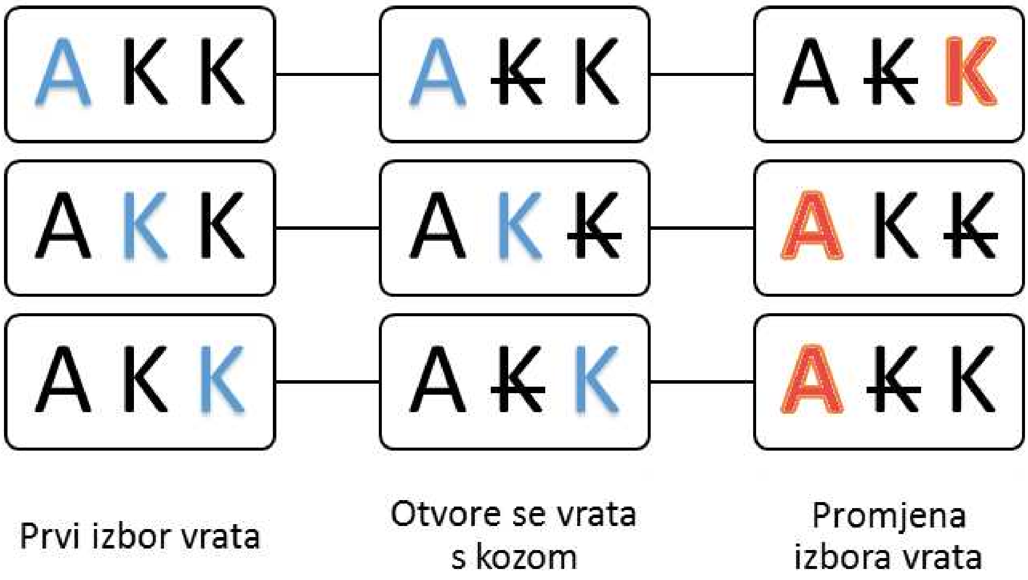
Većina igrača na kvizu su imali stav da je svejedno hoće li promijeniti izbor ili ne. Budući da su preostali jedna koza i jedan automobil, mogućnost dobitka jednaka je za oboje: 50%. Prema tome, ne postoji strategija za dobitak. Većina igrača je zaključilo krivo.

Simulacijom se može provjeriti, ako se igra strategijom „Promijeni izbor svaki put", vjerojatnost dobitka automobila će biti $\frac{2}{3} = 66.7\%$.

Ovaj paradoks je primjer pristranosti jednakoj vjerojatnosti. Iako su zaista ostale dvije mogućnosti (automobil ili koza), one nisu jednako vjerojatne. Štoviše, vjerojatnosti se uopće nisu promijenile. Vizualno objašnjenje vidimo na Slici 1.2. U dvije trećine slučajeva (66.7%) smo odabrali kozu, pa ako promijenimo izbor, dobit ćemo automobil.

Primijetimo, da je Monty prvi otvorio vrata s kozom, onda bi igrač morao birati između dvoje vrata s jednom kozom i jednim automobilom. Tada je vjerojatnost izbora za oba rezultata 50%.

U prethodnim zadatcima smo vidjeli da je problem bio u učenikovom razmišljanju: prvo zbog oslonca na intuiciju, a zatim zbog miskoncepcije o vjerojatnosti događaja. Oba zadatka se mogu riješiti konkretnim računom s objašnjenjem bez kontradiktornih izjava. Zato se ovi „paradoksi" nekad zovu i „problemi" ili „dileme".



Slika 1.2: Paradoks Montya Halla. Vidimo da je veća vjerojatnost da ćemo dobiti automobil ako promijenimo izbor.

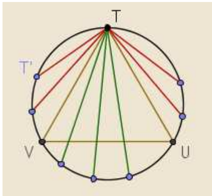
Rječnik Merriam-Webster definira paradoks kao: „Argument koji očigledno proizlazi iz kontradiktornih zaključaka valjanom dedukcijom iz prihvatljivih premisa". Pokažimo dva paradoksa gdje matematičkim računom dolazimo do kontradiktornih izjava.

Francuski matematičar Joseph Bertrand je postavio pitanje:

Primjer 1.2.3 (Bertrandov paradoks)**.** *Ako odaberemo neku tetivu u krugu, kolika je vjerojatnost da će duljina tetive biti veća od duljine stranice upisanog jednakostraničnog trokuta?*

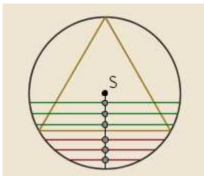
Na ovo jednostavno pitanje je Bertrand ponudio tri odgovora, tako da je zadatak riješio na tri načina.

Prvi način: Odaberimo nasumično dvije točke na kružnici kao krajeve tetive (Slika 1.3). Neka je prva od te dvije točke vrh upisanog jednakostraničnog trokuta. Tetiva će biti dulja od stranice trokuta ako se drugi kraj tetive nalazi na luku nasuprot vrhu. Prema tome, vjerojatnost da će duljina tetive biti veća od duljine stranice je 33%.



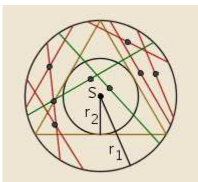
Slika 1.3: Prvo rješenje. Izvor slike: [19]

Drugi način: Umjesto da biramo točke, odaberimo nasumično pravac koji siječe krug (Slika 1.4). Njihov presjek je tetiva. Nacrtajmo trokut tako da jedna stranica bude paralelna s tetivom te radijus koji je okomit na stranicu i tetivu. Duljina tetive će biti veća od duljine stranice, ako se nalazi bliže središtu nego stranica. Tada će vjerojatnost da će duljina tetive biti veća od duljine stranice biti 50%.



Slika 1.4: Drugo rješenje. Izvor slike: [19]

Treći način: Umjesto pravca, odaberimo nasumično točku unutar kruga (Slika 1.5). Neka je ta točka polovište tetive. Nacrtajmo jednakostraničan trokut s jednom stranicom paralelnom tetivi. Upišimo trokutu krug. Vidimo, ako se polovište tetive nalazi na kružnici upisanog kruga, tetiva i stranice će imati jednake veličine duljina. Ako se nalazi unutar kruga, tetiva će imati veću duljinu, a izvan kruga, manju. Vjerojatnost da će tetiva imati veću duljinu je 25%.



Slika 1.5: Treće rješenje. Izvor slike: [19]

Dobili smo tri različita rješenja za isti problem: 33%, 50% te 25%. Gdje je bila pogreška? Svaka metoda je logična i točna, a „pogreška“ je u lošoj definiciji problema. Naime, u svakoj metodi smo na različit način odabrali tetivu:

1. Odabrali smo dvije točke na kružnici.
2. Odabrali smo pravac koji siječe krug.
3. Odabrali smo točku unutar kruga.

Zbog različitog početka zadatka, dobili smo različita rješenja. Ovaj paradoks može poslužiti kao pouka učenicima da se treba obratiti pozornost na definiciju problema. Pogledajmo još jedan paradoks s istim problemom, Simpsonov paradoks.

Primjer 1.2.4 (Simpsonov paradoks)**.** *Pogledajte tablicu 1.2. Koji učenik ima bolji rezultat?*

Simpsonov paradoks je najbolje pokazati na primjeru. Recimo da dva učenika dva dana rješavaju zadatke iz matematike. Petar je prvi dan rješavao 2 zadatka, a drugi dan 8 zadataka. Šimun je prvi dan rješavao 7 zadataka, a drugi dan 3 zadatka. Njihovi rezultati (koliko zadataka su točno riješili svaki dan) pišu u Tablici 1.2.

	Petar	Šimun
Prvi dan	**2/2 = 100%**	6/7 = 86%
Drugi dan	**4/8 = 50%**	1/3= 33%
Ukupno:	6/10 = 60%	**7/10 = 70%**

Tablica 1.2: Točno riješeni zadatci kroz dane.

Pitanje glasi: Koji učenik ima bolji rezultat? Ovisno o načinu na koji čitamo rezultate iz tablice, dobivamo dva različita odgovora. Petar je svaki dan riješio više točnih zadataka od Šimuna, pa bi mogli reći da on ima bolji rezultat, no ako gledamo ukupnu riješenost zadataka, Šimun je riješio više točnih zadataka (70% u odnosu na Petrovih 60%).

Greška je slična kao u prethodnom paradoksu. U pitanju nije definirano što se podrazumijeva kao „bolji rezultat”. Ovaj paradoks se često pojavljuje u svijetu, npr. pri zbrajanju glasova na političkim izborima. Paradoks nije toliko vezan na vjerojatnost koliko na statistiku, ali može poslužiti učeniku da provjeri svoje razumijevanje omjera i postotaka, koji prevladavaju u gradivu vjerojatnosti.

Za razliku od paradoksa rođendana i paradoksa Montya Halla, u Bertrandovom i Simpsonovom paradoksu smo došli iz prihvatljivih premisa do kontradiktornih rješenja. Greška se nalazila u definiciji zadatka, a ne u razmišljanju učenika koji rješava zadatak.

Kako izbjeći greške u razmišljanju pri rješavanju zadataka s vjerojatnosti te time prevladati miskoncepcije? D. Kahneman nudi jednostavno rješenje: prepoznati situaciju u kojoj se zahtijevaju veće kognitivne funkcije, usporiti, pa uz *Sustav 1* tražiti podršku *Sustava 2*. U kontekstu zadataka s računanjem vjerojatnosti ovo znači da se treba provjeriti prvi intuitivni zaključak preciznim matematički postupkom, a zatim donijeti odluku o rješenju. Točno to ćemo napraviti u ostatku rada. Navedene primjere i još nekoliko drugih ćemo riješiti cjelovitim postupkom.

Poglavlje 2

Teorija vjerojatnosti

Problemi pri rješavanju zadataka nastaju zbog nerazumijevanja vjerojatnosti, krivog shvaćanja zadatka ili prevelikoga oslonca na osjećaj umjesto na razum. Ove poteškoće ćemo riješiti tako da prvo dobro definiramo što se traži u zadatku, a zatim ga riješimo procedurom u kojoj krećemo od onoga što znamo (istinitih tvrdnji), pa deduktivno dođemo do rješenja. Da bismo to napravili, potrebno je dobro utemeljiti teoriju.

U ovom poglavlju ćemo objasniti kako se računa vjerojatnost počevši od klasičnih definicija vjerojatnosti, zatim pomoću Kolmogorovljeve aksiomatike, a onda ćemo proći teoriju potrebnu za rješavanje zadataka u razredima s više sati matematike. Čak i kada učenici znaju teoriju, može doći do grešaka u primjeni teorije pri rješavanju zadataka. Štoviše, povijesno je bilo poteškoća u samom stvaranju teorije, a kamoli tek razumijevanju. Zato ćemo u svakom podnaslovu proći tipične zadatke u kojima učenici imaju poteškoće.

2.1 Klasična vjerojatnost

Počnimo s jednostavnim primjerom. Kolika je vjerojatnost da će nakon bacanja novčića, novčić pasti na stranu s pismom? Intuitivno razumijemo da je vjerojatnost za pismo naspram glave u omjeru $1 : 1$, jer znamo ako su strane jednake i ni po čemu se ne razlikuju osim po izgledu (novčić je simetričan), nema razloga da jedna strana ima prednost pred drugom. Ovu tvrdnju također potkrepljuje iskustvo - ako dovoljno puta bacimo novčić, otprilike jednak broj puta će pasti na obje strane. Ova dva načina razmišljanja su vezana na prve dvije klasične definicije vjerojatnosti.

Računanje vjerojatnosti događaja na temelju velikog broja ponavljanja eksperimenta nazivamo vjerojatnost *a posteriori*, odnosno vjerojatnost temeljena iskustvom ili **eksperimentalna vjerojatnost**. S druge strane, ako ne želimo eksperimentalno pristupiti problemu, možemo izračunati kolika je vjerojatnost unaprijed. Postupak računanja unaprijed opisuje vjerojatnost *a priori*, odnosno **teorijska vjerojatnost**.[1] Pretpostavljamo da su od dvije mogućnosti ishoda obje (pismo ili glava) jednako vjerojatne, a od moguća dva ishoda povoljan nam je jedan. Dakle vjerojatnost je: $\frac{1}{2}$, odnosno 50%.

Vjerojatnost *a posteriori*

Kažemo da provodimo ***slučajni*** **pokus** ili **eksperiment**, ako njegov **ishod** ili **rezultat** nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se izvodi pokus ([20]). Drugim riječima, ne očekujemo da će ishod biti konstantan, nego da će varirati. Npr: *pismo, glava, pismo, pismo, glava...* Ne znamo unaprijed koji od mogućih ishoda će se pojaviti.

Događaj je skup nekih ishoda slučajnog pokusa, ovisno kako je događaj opisan. U početnom primjeru imamo samo dva moguća ishoda, pa i događaja: {*Novčić je pao na stranu na kojoj je pismo*} ili {*Novčić je pao na stranu na kojoj je glava*}. Ako gledamo 4 bacanja novčića, ishodi su više raznoliki: {*Palo je: pismo - pismo - pismo - pismo, Palo je: pismo - pismo - pismo - glava,...*}, pa sada ima 2^4 mogućih ishoda. Ovdje događaj može biti: „U 4 bacanja je dva puta pala strana na kojoj je pismo", a njemu odgovaraju više ishoda, npr. *pismo - pismo - glava - glava*, *pismo - glava - pismo - glava* i drugi. Svaki ishod koji odgovara događaju, odnosno nakon kojeg možemo reći da se dogodio taj događaj, zovemo **dobitkom.**

Kada pokus ponovimo n puta, neki događaj A (odnosno dobitci za A) će se pojaviti n_A puta. Taj broj pojavljivanja događaja A se zove **frekvencija** događaja, a omjer $\frac{n_A}{n}$ se zove relativna frekvencija događaja A u danih n ponavljanja pokusa. Kada ponovimo pokus veliki broj puta, relativne frekvencije n_A će se grupirati oko nekog realnog broja. Ovo svojstvo nazivamo svojstvo **statističke stabilnosti relativnih frekvencija** ([20]).

Pokažimo na primjeru u Tablici 2.1. Recimo da je pokus bacanje novčića, a događaj A glasi: A = {Novčić je pao na stranu na kojoj je pismo}. Tada će relativna frekvencija događaja A biti jednaka omjeru $\frac{n_P}{n}$, gdje je n broj bacanja novčića, a n_P broj puta kada je novčić pao na stranu na kojoj je pismo. Pokus nije proveden eksperimentalno uživo, već kao računalna simulacija, radi bržeg dobivanja rezultata. Vidimo, što je n veći, relativna frekvencija se grupira oko broja $0.5 = 50\%$.

Ovaj način računanja vjerojatnosti se temelji na jednoj od klasičnih definicija funkcije vjerojatnosti.

Definicija 2.1.1 (Vjerojatnost *a posteriori*)**.** *Ako slučajni pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada se vjerojatnost a posteriori proizvoljnog događaja A vezanog uz taj pokus definira kao realan broj* $P(A)$, $0 \leq P(A) \leq 1$, *oko kojeg se grupiraju, odnosno kojemu teže relativne funkcije tog događaja.* ([20])

Dakle, $P(A) = P(\{\text{Novčić je pao na stranu na kojoj je pismo}\}) = 0.5$.

[1] Latinski *a priori* znači unaprijed, bez iskustva. Nasuprot tome, *a posteriori* znači poslije, s iskustvom.

n	n_P	n_G	n_P/n	n_G/n
5	3	2	60%	40%
5	4	1	80%	20%
5	2	3	40%	60%
10	7	3	70%	30%
10	4	6	40%	60%
10	4	6	40%	60%
100	53	47	53%	47%
100	50	50	50%	50%
100	54	46	54%	46%
10000	4851	5149	49%	51%
10000	5077	4923	51%	49%
10000	4885	5115	49%	51%
1000000	500006	499994	50%	50%
1000000	500727	499273	50%	50%
1000000	499762	500238	50%	50%

Tablica 2.1: Simulacija bacanja novčića n puta.

Ovdje se pojavio problem: kako provjeriti uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija? U primjeru s bacanjem novčića, u Tablici 2.1, svaki niz bacanja novčića smo ponovili 3 puta. Tek kod 100 bacanja smo dobili broj blizu 0.5 (i to ne svaki put). Konvergencija prema 0.5 se najbolje vidi nakon 10000 bacanja, no ovi pokusi su napravljeni kao računalna simulacija koja je trajala par sekundi. U stvarnosti bi bacanje novčića 10000 puta trajalo predugo. Osim toga, ovaj pokus je relativno lagano za izvesti. Što ako je u pitanju složeniji pokus, u kojem se ne može brzo provesti isti niz pokusa? Drugi pristup definiranju vjerojatnosti da je novčić pao na određenu stranu je teorijski. Uvedimo definiciju vjerojatnosti za koju neće biti potrebno obavljanje pokusa.

Vjerojatnost *a priori*

Za početak, sve moguće ishode nekog pokusa ćemo nazvati **elementarni događaji**. Oni su nerazloživi i uzajamno s isključuju, što znači da se ne mogu dogoditi istodobno dva ili više ([20]). Skup svih elementarnih događaja ćemo nazvati **prostor elementarnih događaja**, a označiti s Ω. U primjeru s bacanjem novčića, elementarni događaji su *Pismo* i *Glava*, a prostor elementarnih događaja je:

$$\Omega = \{Pismo, Glava\}$$

ili

$$\Omega = \{P, G\}.$$

Nadalje, osim elementarnih događaja ćemo definirati i **složene događaje.** Elementarnom događaju odgovara samo jedan ishod, a složenom događaju može odgovarati više njih. Složeni događaj A je skup ishoda koji odgovaraju tom događaju. Vrijedi:

$$A \subseteq \Omega.$$

U primjeru s novčićem se podudarilo da nema složenih događaja. Pogledajmo primjer s bacanjem simetrične kockice. Tada će prostor elementarnih događaja biti:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

U ovom prostoru svi događaji su jednako vjerojatni. Vjerojatnost da padne broj $1, 2, 3, 4, 5$ ili 6 je jednaka $\frac{1}{6}$. Primjer jednog složenog događaja je:

$$D_1 = \{\text{Na kockici je parni broj}\} = \{2, 4, 6\},$$

a drugog složenog događaja je:

$$D_2 = \{\text{Na kockici je broj veći od 2}\} = \{3, 4, 5, 6\},$$

Događaji D_1 i D_2 se podudaraju u dva elementa: 2 i 6.

Kažemo da je elementarni događaj (ishod) koji povlači da se dogodio događaj A **povoljan** za A. Broj 2 je paran broj, pa je elementarni događaj „Na kockici je broj 2” povoljan za D_1, a nije povoljan za D_2. Na kraju, vjerojatnost složenog događaja ćemo izračunati formulom:

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za } A}{\text{broj ukupnih elementarnih događaja}}.$$

Budući da su A i Ω skupovi, onda ovu formulu možemo napisati kao:

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)},$$

gdje je $k(A)$ kardinalni broj skupa A, a $k(\Omega)$ kardinalni broj skupa Ω. Ovaj model računanja nazivamo **Laplaceov model.**[2]

Ako je $A = \Omega$, svi ishodi su povoljni. Ovo zovemo **siguran događaj**, kojem će svaki ishod biti dobitak. Vrijedi: $P(\Omega) = 1$. Ako je $A = \emptyset$, radi se o **nemogućem događaju**. Vrijedi: $P(\emptyset) = 0$.

Ova formula je uvedena na temelju druge klasične definicije vjerojatnosti.

[2]Pierre-Simon Laplace, francuski matematičar i astronom.

Definicija 2.1.2 (Vjerojatnost *a priori*)**.** *Neka imamo slučajni pokus s konačno mnogo elementarnih događaja i neka su svi ti elementarni događaji jednako mogući. Tada je vjerojatnost proizvoljnog događaja vezanog uz taj pokus broj elementarnih događaja povoljnih za taj događaj podijeljen s ukupnim brojem elementarnih događaja. ([20])*

Primijetimo odmah problem u ovoj definiciji; matematički je neprecizna. Izraz „jednako mogući” u biti znači „koji imaju jednaku vjerojatnost”, što znači da je u pitanju kružna definicija. Unatoč tome, određene zadatke možemo riješiti pomoću Laplaceovog modela.

Primjer 2.1.3. *Bacamo simetričnu kockicu. Kolika je vjerojatnost da će na kockici biti broj 2?*

Odredimo prostor elementarnih događaja Ω te događaj A:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{\text{Pao je broj } 2\} = \{2\}.$$

Izračunajmo vjerojatnost događaja:

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{1}{6} = 16.\dot{6}\%.$$

Primijetimo, analogno možemo dobiti da je za svaki broj vjerojatnost $\frac{1}{6}$. Izračunali smo da su elementarni događaji jednako mogući (kružna definicija). Riješimo jedan netrivijalan primjer.

Primjer 2.1.4. *Bacamo dva novčića. Kolika je vjerojatnost da će se pojaviti pismo?*

Odredimo prostor elementarnih događaja Ω i događaj A:

$$\Omega = \{(P, P), (P, G), (G, P), (G, G)\}, k(\Omega) = 4,$$

$$A = \{\text{Pojavilo se pismo}\} = \{(P, P), (P, G), (G, P)\}, k(A) = 3,$$

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Primijetimo da je ovaj primjer sličan problemu sa sumom brojeva na bačenim kockicama, koji smo spomenuli u prvom poglavlju. Učenik bi mogao pomisliti da postoje tri ishoda pokusa koja su jednake vjerojatnost: „Jedan novčić je pao na stranu s pismom, a drugi novčić je pao na stranu s glavom”, „Oba novčića su pali na stranu s pismom” i „Oba novčića su pali na stranu s glavom.” Zapišimo ove ishode kao $\{P \text{ i } G\}$, $\{P \text{ i } P\}$ i $\{G \text{ i } G\}$. Tada bi učenik mogao pomisliti da je vjerojatnost za pojavljivanje pisma $\frac{2}{3}$, što je netočno.

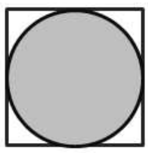
Točno je da su ishodi (P, G) i (P, P) jednako vjerojatni, a $\{P \text{ i } G\}$ je događaj s ishodima (P, G) i (G, P). Ovdje je u pitanju pristranost jednakoj vjerojatnosti.

Definicijom *a priori* možemo riješiti većinu zadataka iz vjerojatnosti koji se javljaju u osnovnoj i srednjoj školi, no uočimo njena ograničenja: vjerojatnost je definirana na konačnom skupu Ω, u kojem su elementarni događaji jednako vjerojatni. Što ako elementarni događaji nisu jednako mogući?

Npr. bacamo nesimetričan novčić kojem je jedna strana teža od druge. Ako provedemo pokus nekoliko puta, primijetit ćemo da će novčić češće padati na stranu koja je teža. Prema vjerojatnosti *a posteriori*, veća je vjerojatnost da će novčić pasti na težu stranu, pa prema tome ishodi nisu jednako vjerojatni. Kako onda izračunati npr. da je u tri bacanja novčić dva puta pao na težu stranu?

Nadalje, što ako je prostor elementarnih događaja beskonačan ili elementarni događaji nisu prebrojivi? Do sada smo kao primjere spominjali samo bacanje kockica i novčića, gdje su elementi prebrojivi, no u Primjeru 2.1.5 vidimo primjer vjerojatnosti u neprebrojivo beskonačnom prostoru koji se radi u školama: geometrijska vjerojatnost.

Primjer 2.1.5. *Nasumično biramo točku u kvadratu duljine stranice a. Kolika je vjerojatnost da će nasumično odabrana točka biti u krugu upisanom u kvadrat?*



Slika 2.1: Krug upisan kvadratu.

Prostor elementarnih događaja je površina kvadrata, a elementarni događaji su točke unutar njega. Skup Ω je omeđen i beskonačan, s neprebrojivo mnogo elemenata. Zadatak ne možemo riješiti pomoću definicije *a priori*.

Ako ovaj zadatak provedemo kao pokus, dobit ćemo vjerojatnost približnu omjeru:

$$P(A) = \frac{\textit{Površina kruga}}{\textit{Površina kvadrata}} = \frac{r^2\pi}{a^2} = \frac{a^2\pi}{4a^2} = \frac{\pi}{4} = 0.79,$$

koja naliči na Laplaceovu formulu. Nedostatke definicije *a priori* nadopunjava definicija *a posteriori*, i obrnuto. U praksi su ove dvije definicije bile dovoljne za rješavanje većinu problema, no kroz povijest su se pojavili problemi koji se nisu znali objasniti.

Pogledajmo primjer iz povijesti matematike. Pariški kockar C. de Méré[3] je u 17. stoljeću postavio zadatak koji je i sam riješio, no primijetio je da se u praksi rezultati ne preklapaju s njegovim rješenjem.

[3]Chevalier de Méré, što na francuskom doslovno znači *morski vitez*.

Primjer 2.1.6 (De Méré - dvostruka šestica)**.** *Isplati li se kladiti da će u 24 uzastopna bacanja para kockica barem jednom pasti dvostruka šestica?*

Priča glasi: De Méré se uvijek kladio za, jer je smatrao da je vjerojatnost za dobitak jednaka kao u slučaju „Isplati li se kladiti da će se u 4 bacanja jedne kockice pojaviti barem jedna šestica?", za koji je znao da se isplati kladiti. Njegovo razmišljanje je bilo:

1. Isplati se kladiti da će se u 4 bacanja kockice pojaviti barem jedna šestica.
2. Vjerojatnost da padne šestica u bacanju jedne kockice je $\frac{1}{6}$.
3. Vjerojatnost da padne par šestica u dva bacanja kockice je $\frac{1}{36}$.
4. Kada jedan par kockica bacamo 6 puta, vjerojatnost da će tada pasti par šestica će biti $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$, jednaka kao u 2. koraku.
5. Ako se u 4 bacanja jedne kockice isplati kladiti da će se pojaviti broj 6, onda se u $6 \cdot 4 = 24$ bacanja para kockica isplati kladiti u par šestica.

Ispada da je ipak više gubio nego dobivao, to jest da je bio u krivu. S ovim problemom se De Méré obratio B. Pascalu i P. de Fermatu, u nadi da će mu pomoći. Oni su zauzvrat shvatili da vjerojatnost nije dobro definirana te da nema smisla rješavati ove zadatke prije nego što se uvede precizna definicija. Skoro 300 godina nakon De Méréovog problema, uvedena je aksiomatika koja bi obuhvatila obje klasične definicije *a priori* i *a posteriori* te uvela konkretan način računanja vjerojatnosti.

2.2 Aksiomi vjerojatnosti

U ovom potpoglavlju ćemo uvesti teoriju koja će ujediniti obje klasične definicije vjerojatnosti te „dokazati" kredibilnost Laplaceovog modela. Prvo ćemo dobro definirati prostor svih događaja $\mathcal{A}$ (koji se razlikuje od prostora elementarnih događaja Ω), a onda funkciju vjerojatnosti P, koja svakom događaju iz $\mathcal{A}$ pridružuje realan broj.

Prostor događaja

Prostor svih složenih događaja ćemo označiti s $\mathcal{A}$. Rekli smo da su elementi složenih događaja skup nekih ishoda pokusa. Prema tome, skup svih složenih događaja je podskup partitivnog skupa od Ω. Vrijedi: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Nadalje, želimo definirati prostor tako da u njemu skupovne operacije budu zatvorene. Zato ćemo početi s definicijom σ **- algebre skupova**:

Definicija 2.2.1. *Kažemo da je skup $\mathcal{A}$ σ-algebra skupova na Ω ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$,
3. $A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$.

Pomoću ove definicije se mogu iskazati svojstva σ-algebre koja će nam biti važna za funkciju vjerojatnosti:

Teorem 2.2.2. *Neka je algebra skupova $\mathcal{A}$ σ-algebra. Tada vrijedi:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$,
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \backslash B \in \mathcal{A}$.

Dokažimo tvrdnje iz prethodnog teorema na načinu opisanom u udžbeniku Teorija vjerojatnosti ([20]):

1. $$\Omega = \emptyset^C \in \mathcal{A}.$$

2. $$A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C \in \mathcal{A}.$$

3. $$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \implies B^C \in \mathcal{A},$$
$$A \backslash B = A \cap B^C \in \mathcal{A}.$$

□

U ovako definiranom prostoru događaja prostor elementarnih događaja Ω ne mora biti konačan.

Funkcija vjerojatnosti

Ruski matematičar A. Kolmogorov je 1933. godine, oko 300 godina nakon početka razvoja teorije vjerojatnosti, donio ove aksiome koje čine funkciju vjerojatnosti.

Definicija 2.2.3 (Kolmogorovljevi aksiomi vjerojatnosti)**.** *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω. Kažemo da je funkcija $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vjerojatnost, ako zadovoljava svojstva:*

(K1) Nenegativnosti: $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq 0$,

(K2) Normiranosti: $P(\Omega) = 1$,

(K3) σ-aditivnosti:

$$A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$
$$\implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Iz njih se mogu iskazati svojstva vjerojatnosti koja nam koriste u rješavanju većinu zadataka:

Teorem 2.2.4. *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, a $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vjerojatnost na $\mathcal{A}$. Tada vrijedi:*

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. A_1 *i* A_2 *disjunktni* $\implies P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$,
3. $P(A^C) = 1 - P(A), \forall A \in \mathcal{A}$,
4. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B), \forall A, B \in \mathcal{A}$,
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Dokažimo istinitost tvrdnji iz prethodnog teorema na načinu opisanom u udžbeniku Teorija vjerojatnosti ([20]):

1. Koristimo (K3) tako da vrijedi $A_1 = \Omega$ i $A_i = \emptyset, i \geq 2$. Tada uz (K2) vrijedi:
$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + ... \implies 1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset)... \implies P(\emptyset) = 0.$$

2. Koristimo (K3) tako da vrijedi $A_i = \emptyset, i \geq 3$. Tada zbog 1. svojstva teorema vrijedi:
$$P(A_1 \cup A_2) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(\emptyset) + ...$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + 0 + 0 + ... = P(A_1) + P(A_2).$$

3. A i A^C su disjunktni, pa prema 2. svojstvu teorema i uz (K2) vrijedi:

$$A \cup A^C = \Omega \implies P(A) + P(A^C) = 1.$$

4. $$A \subseteq B \implies B = A \cup (B \backslash A).$$

   A i $(B \backslash A)$ su disjunktni, pa zbog 2. svojstva teorema i zbog (K1) vrijedi:

$$P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A).$$

5. $$A \cup B = A \cup (B \backslash A),\ A \text{ i } (B \backslash A) \text{ su disjunktni.}$$

$$(A \cap B) \cup (B \backslash A) = B,\ (A \cap B) \text{ i } (B \backslash A) \text{ su disjunktni.}$$

   Sada zbog 2. svojstva u teoremu vrijedi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\iff P(A) + P(B \backslash A) = P(A) + P(B) - P(B) + P(A \backslash B)$$

$$\iff P(A) + P(B \backslash A) = P(A) + P(A \backslash B).$$

□

Vjerojatnost je funkcija P, a vjerojatnost događaja A je broj $P(A)$.

Definicija 2.2.5. *Uređenu trojku* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *zovemo vjerojatnosni prostor. Skup* Ω *je prostor elementarnih događaja, skup* $\mathcal{A}$ *je prostor događaja, a funkcija* P *je funkcija vjerojatnosti.*

Definirali smo prostore događaja i funkciju vjerojatnosti. Sada ove definicije želimo povezati s klasičnim definicijama vjerojatnosti. Obilježja *a priori* definicije vjerojatnosti su:

1. Elementarnih događaja ima konačno mnogo (Ω je konačan skup). Napišimo:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}, n \in \mathbb{N},$$

   gdje su ω_i elementarni događaji.

2. Svi elementarni događaji su jednako mogući.

Kod *a priori* definicije se javio problem kružne definicije, jer smo vjerojatnost elementarnih događaja izračunali pomoću njih samih. Sada nemamo taj problem. Ishodi su jednako vjerojatni, pa vrijedi:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n),$$
$$P(\Omega) \overset{K3}{=} \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) \overset{K2}{\Longrightarrow} 1 = n \cdot P(\omega_i)$$
$$\Longrightarrow P(\omega_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{k(\Omega)}.$$

Iz prvog i drugog obilježja se izvodi Laplaceov model računanja vjerojatnosti, odnosno Laplaceova formula. Neka je A proizvoljan događaj čiju vjerojatnost želimo izračunati.

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}, k \in N, k \leq n.$$

Vrijedi:

$$P(A) \overset{K3}{=} \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Obilježja *a posteriori* vjerojatnosti su:

1. Vjerojatnost je realan broj $P(A)$, za koji vrijedi $0 \leq P(A) \leq 1$.
   Zbog monotonosti vjerojatnosti vrijedi:

   $$0 \overset{K1}{\leq} P(A) \leq P(\Omega) \overset{K2}{=} 1.$$

   Dakle vrijedi: $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$, vjerojatnost događaja je broj od 0 do 1.

2. Slučajni pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, odnosno relativna frekvencija događaja se grupira oko nekog relativnog broja. Ovo je posljedica Zakona velikih brojeva kojeg nećemo obraditi, no može se pokazati ([20]) da je taj realni broj jednak $P(A)$:

   $$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{n \to \infty} P(A).$$

Prema tome, opravdali smo obje klasične definicije vjerojatnosti.

2.3 Diskretni vjerojatnosni prostor

Vjerojatnost u srednjoj školi je uglavnom ograničena na **diskretni vjerojatnosni prostor**. Obilježje vjerojatnosnog prostora je da prostor elementarnih događaja Ω ima prebrojivo mnogo elemenata. Prostor događaja će tada biti partitivni skup prostora elementarnih događaja, odnosno $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pogledajmo definiciju i neka svojstva ovog prostora.

Definicija 2.3.1. *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zovemo diskretni vjerojatnosni prostor. Prostor elementarnih događaja Ω je konačan ili prebrojiv skup, prostor događaja $\mathcal{P}(\Omega)$ je partitivni skup od Ω, a funkcija $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ je vjerojatnost.*

Diskretni vjerojatnosni prostor ima korisno svojstvo koje ćemo navesti. Prostor ima prebrojivo mnogo elementarnih događaja:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...\}, i \in \mathbb{N},$$

a svaki elementarni događaj ima zadanu vjerojatnost p_i:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, i \in \mathbb{N}.$$

Tada je zbroj svih elementarnih događaja:

$$1 \overset{K2}{=} P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) \overset{K3}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i.$$

Dakle suma svih vjerojatnosti elementarnih događaja je jednaka 1. Da bismo provjerili je li neka funkcija P vjerojatnost, trebali bismo provjeriti sve aksiome, što može biti naporno zbog svojstva aditivnosti. Tada ova formula dobro dođe.

Kada koristimo Laplaceov model, ako su događaji A i B disjunktni vrijedi:

$$P(A \cup B) = \frac{k(A \cup B)}{k(\Omega)} = \frac{k(A) + k(B)}{k(\Omega)} = \frac{k(A)}{k(\Omega)} + \frac{k(B)}{k(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

Ako A i B nisu disjunktni, onda vrijedi:

$$P(A \cup B) = \frac{k(A \cup B)}{k(\Omega)} = \frac{k(A) + k(B) - k(A \cap B)}{k(\Omega)} = \frac{k(A)}{k(\Omega)} + \frac{k(B)}{k(\Omega)} - \frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Na temelju ovog svojstva je dobivena vjerojatnost unije, odnosno formula zbroja:

Propozicija 2.3.2 (Formula zbroja)**.** *Vjerojatnost unije događaja A i B je dana formulom:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ako se događaji A i B međusobno isključuju, vrijedi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Formula zbroja je 5. svojstvo Teorema 2.2.4, ali u diskretnom prostoru.

Nadalje, primijetimo da za suprotni događaj vrijedi:

$$A \cup A^C = \Omega,$$

$$P(A^C) = \frac{k(A^C)}{k(\Omega)} = \frac{k(\Omega \backslash A)}{k(\Omega)} = \frac{k(\Omega) - k(A)}{k(\Omega)} = \frac{k(\Omega)}{k(\Omega)} - \frac{k(A)}{k(\Omega)} = 1 - P(A).$$

Na temelju ovog svojstva je dobivena formula vjerojatnosti suprotnog događaja:

Propozicija 2.3.3 (Formula suprotnog događaja)**.** *Vjerojatnost suprotnog događaja A^C se dobiva formulom:*

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

Formula suprotnog događaja je 3. svojstvo u teoremu 2.2.4 u diskretnom vjerojatnosnom prostoru. Primijenimo formulu suprotnog događaja na paradoks rođendana.

Primjer1.2.1: *Kolika je vjerojatnost da će u razredu od n učenika barem dvije osobe imati isti datum rođendana?*

Prvo trebamo napisati prostor elementarnih događaja. Jedna godina ima 365 dana, pa imamo ukupno 365 mogućih datuma za rođendan. Umjesto datuma ćemo svakom od n učenika pridružiti jedan broj.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \{1, 2, 3, ..., 365\}, i \in \{1, 2, ..., n\}\},\ k(\Omega) = 365^n.$$

Traženi događaj ćemo označiti s A:

$$A = \{\text{Bar dvije osobe imaju isti datum rođendana.}\}$$

Zadatak možemo riješiti na više načina. Jedan način je direktno pomoću formule zbroja. Tada trebamo gledati slučajeve kada po dvije osobe imaju isti dan rođendan, pa po 3, pa po 4 itd. čiju je vjerojatnost teško za izračunati. Zato ćemo riješiti zadatak na drugi način, koristeći formulu suprotnog događaja.

$$A^C = \{\text{Nijedan par osoba nema isti datum rođendana.}\}$$

$$= \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \{1, 2, 3, ..., 365\}, i \in \{1, 2, ..., n\},\ i \neq j \implies x_i \neq x_j\}$$

Da bi izračunali $k(A)$, potrebno nam je znanje iz kombinatorike. Ako nijedan par nema isti datum rođendana, onda svaka osoba ima jedinstveni datum rođendana. Prva osoba (x_1) ima 365 mogućnosti za datum, druga osoba (x_2) ima jednu mogućnost manje, što je 364 mogućnosti, itd. Zadnja osoba, (x_n), će imati $365 - n + 1$ mogućnosti.

$$k(A^C) = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365 - n)!},$$

pa vrijedi:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}.$$

Pomoću ove formule dobijemo vrijednosti iz Tablice 1.2. Za $n = 23$ imamo vjerojatnost veću od 50%.

Rekli smo da je moguće da učenik jedno pitanje intuitivno zamjeni drugim. Riješimo drugu verziju problema.

Primjer 1.2.1.b: *Kolika je vjerojatnost da će u razredu od n učenika barem jedna osoba imati isti datum rođendana kao ja?*

Prostor elementarnih događaja je ostao isti, no događaj A se promijenio:

$$A_2 = \{\text{Bar jedna osoba ima isti datum rođendana kao ja.}\}$$

$${A_2}^C = \{\text{Nijedna osoba nema isti datum rođendana kao ja.}\}$$

Ako sam ja x_1, a nijedna osoba nema isti datum rođendana kao ja, onda je datum rođendana ostalih jedna od preostalih 364 mogućnosti.

$$k({A_2}^C) = 364 \cdot 364 \cdot ... \cdot 364 = 364^{n-1},$$

što daje bitno drugačiji odgovor:

$$P(A_2) = 1 - P({A_2}^C) = 1 - \frac{364^{n-1}}{365^n}.$$

Za $n = 30$ imamo:

$$P(A_2) = \frac{364^{29}}{365^{30}} = 0.0025.$$

Većina zadataka u osnovnoj i srednjoj školi se rješavaju u diskretnom vjerojatnosnom prostoru s jednako vjerojatnim elementarnim događajima. Stoga ih se većina mogu riješiti pomoću ovih formula i dobrog znanja iz kombinatorike.

U ovom dijelu gradiva učenici imaju poteškoće ako ne znaju kombinatoriku ili ako neprecizno nauče formulu zbroja. Učenik može formulu zapamtiti kao izreku: „Ako računamo vjerojatnost događaja A **ili** događaja B, onda se vjerojatnosti događaja zbrajaju.”, što je istina samo ako se događaji međusobno isključuju. Izraz „A ili B” ne znači nužno „$P(A) + P(B)$”. Uz dovoljan broj primjera će učenici uvidjeti grešku u razmišljanju.

2.4 Nezavisnost

U svim školama se radi vjerojatnost do nezavisnosti, a u razredima s više sati matematike se obrađuje naprednije gradivo poput uvjetne vjerojatnosti, ponavljanje pokusa, potpunog sustava događaja i Bayesove formule. U ovom potpoglavlju ćemo pokazati ove teme i poteškoće koje bi učenici mogli imati pri rješavanju pripadajućih zadataka.

Nekad ćemo pri računanju vjerojatnosti događaja primijetiti da događaji utječu jedan na drugog, odnosno zavise jedan o drugome.

Definicija 2.4.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnosni prostor, $A_i \in \mathcal{A}$ familija događaja te i indeks. Kažemo da je A_i nezavisna familija događaja ako za svaki konačni podskup različitih indeksa $i_1, ..., i_k$ vrijedi:*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

U srednjoškolskoj matematici se najčešće koristi nezavisnost dva događaja, odnosno:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Koncept nezavisnosti se relativno lako shvati. Dva događaja su nezavisna ako ne utječu jedan na drugog. Najjednostavniji primjer bi bio uzastopno ponavljanje pokusa. Ako ponavljamo isti pokus za redom, svaki pokus će biti nezavisan, odnosno neće utjecati jedan na drugog. Npr. „Bacamo novčić n puta za redom...", ili „U vreći su raznobojne kuglice. Nasumično izvlačimo jednu pa je vratimo nazad. Kolika je vjerojatnost da izvučemo..." Uz ovo znanje možemo riješiti De Méréov problem.

Primjer 2.1.6: Izračunajmo vjerojatnost da će u 24 uzastopna bacanja para simetričnih kockica barem jednom pasti dvostruka šestica.

Ranije smo naveli razmišljanje De Méréa. Imao je nekoliko grešaka, a prva je bila u njegovom 4. koraku: *„Kada par kockica bacamo* 6 *puta, vjerojatnost da će bar jednom pasti par šestica će biti* $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$*, jednaka kao u 2. koraku."*

De Méré je vjerojatno smatrao da je 6 ponavljanja pokusa jednako zbrajanju vjerojatnosti. Koristio je formulu zbroja u obliku: „Ili će pasti u prvom bacanju, ili u drugom, ili u trećem...", pa dobio: $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

Ovo je potpuno krivo. Trebao je uzeti u obzir da par šestica može pasti u više bacanja. Dakle računati vjerojatnost za „Ili će pasti samo u prvom bacanju, ili samo u prvom i drugom, ili ..." itd. Tada je račun kompliciraniji. Čak i da je računao vjerojatnost za pojavljivanje točno jednog para, nije dovoljno samo pomnožiti s brojem ponavljanja pokusa, nego se više faktora mora uzeti u obzir. Moguće je da je zamijenio koncept nezavisnih događaja s konceptom događaja koji se međusobno isključuju.

Riješimo zadatak pomoću nezavisnosti i formule suprotnog događaja. Umjesto da računamo vjerojatnost da je pao bar jedan par šestica, izračunajmo vjerojatnost da nijednom nije pao.

$$A = \{\text{U 24 bacanja parova kockica, bar jednom je pao par šestica.}\}$$

$$A^C = \{\text{U 24 bacanja parova kockica, nijednom nije pao par šestica.}\}$$

$$P(A^C) = \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot ... \cdot \frac{35}{36} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.509$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 0.491,$$

što znači da se ne isplati kladiti.

S druge strane, vjerojatnost da je u 4 bacanja pala jedna šestica je:

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.517,$$

što znači da je u vezi ove situacije De Méré bio u pravu. De Méré je pogriješio u ekvivalencijama jer nije imao dovoljno dobro razumijevanje vjerojatnosti.

Poteškoće koje se javljaju u ovom dijelu gradiva kod učenika je korištenje svojstva nezavisnosti kod računanja presjeka događaja, kada se ne bi trebalo. Slično kao kod formule zbroja, postoji pogrešna izreka: „Ako računamo vjerojatnost događaja A **i** događaja B, onda se vjerojatnosti množe", što nije nužno istina. Vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

ali samo ako su A i B nezavisni događaji. Inače formula glasi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Umjesto događaja B gledamo B uz uvjet A. Ovu formulu ćemo objasniti u kasnijem podnaslovu.

Ponavljanje pokusa s dva ishoda

Specifičan slučaj nezavisnosti je ponavljanje pokusa s dva ishoda, uspjeh i neuspjeh. Jedan pokus je $\Omega_1 = \{0, 1\}$, a $P_1 : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ je vjerojatnost na Ω_1 tako da vrijedi:

$$P_1(\{1\}) = p, \; P_1(\{0\}) = q = 1 - p.$$

Tada je više pokusa za redom: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1 \times ... \times \Omega_1 = \Omega_1^n$, tj. niz brojeva 1 ili 0, uspjeha ili neuspjeha:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}\},$$

a vjerojatnost je $P = {P_1}^n$.

Vjerojatnost događaja u ovakvim pokusima je lakše izračunati pomoću Bernoullijeve sheme.

Teorem 2.4.2 (Bernoullijeva shema)**.** *Bernoullijeva shema je matematički model gdje pokus* Ω_1 *ponavljamo n puta u istim uvjetima. Tada je vjerojatnost da će točno k pokusa završiti uspjehom jednaka:*

$$P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n, n \in \mathbb{N}.$$

Učenici bi mogli imati poteškoća pri pamćenju teorema. Zato je bolje da učenici rješavanjem konkretnih primjera, a zatim generalnim primjerom, samostalno dođu do formule. Generalni primjer možemo pokazati na sljedeći način:

Pokus se ponavlja n puta. Napišimo rezultate nekog pokusa kao niz brojeva 0 i 1:

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ ...\ 1.$$

Njihove vjerojatnosti su:

$$p\ q\ q\ p\ p\ q\ p\ ...\ p.$$

Budući da se pokusi ponavljaju, nezavisni su, pa je vjerojatnost ovog niza uspjeha i neuspjeha jednaka:

$$p^m \cdot q^{n-m},$$

gdje je m broj uspjeha. Bez obzira na redoslijed uspjeha i neuspjeha u nizu, za jednak broj m će svaki niz imati jednaku vjerojatnost: $p^m \cdot q^{n-m}$. U n bacanja se niz od m uspjeha može pojaviti na $\binom{n}{m}$ načina. Prema tome, ako želimo izračunati vjerojatnost da će biti k uspješnih rezultata u n ponavljanja pokusa, koristimo formulu:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

S ovim teoremom rješavamo zadatke koji imaju uzastopna ponavljanja pokusa gdje imamo dva suprotna rezultata, npr. *pismo - glava, kasni - ne kasni, radi - ne radi...* U slučaju *pismo - glava* su ishodi jednake vjerojatnosti, no ovo ne mora vrijediti za ostale slučajeve.

U prvom poglavlju smo za primjer miskoncepcije reprezentativnosti uzeli odgovore na pitanje: „Je li veća vjerojatnost da će pri bacanju novčića šest puta za redom novčić pasti na stranu redoslijedom „PGPGPG” ili „GGGGGG”?”

Točnu vjerojatnost možemo izračunati pomoću formule nezavisnosti. Budući da se pokusi ponavljaju nezavisni su. Možemo računati svaki događaj „P” ili „G” posebno, pa ih pomnožiti. Vjerojatnost za „P” ili „G” je jednaka, pa vrijedi:

$$P('PGPGPG') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1.5\%,$$

$$P('GGGGGG') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1.5\%.$$

Vidimo da su vjerojatnosti jednake.

U jednom istraživanju o miskoncepcijama u vjerojatnosti ([9]) među učenicima je na 5 varijacija na ovo pitanje u prosjeku 19.6% učenika netočno riješilo zadatke. Česti odgovori su bili da se mora jednak broj puta ponoviti pad na stranu s pismom i pad na stranu s glavom.

Moguće je da su učenici početno pitanje zamijenili s: „Je li veća vjerojatnost da će pri bacanju novčića šest puta za redom novčić tri puta pasti na stranu s pismom i tri puta na stranu s glavom, ili šest puta na stranu s glavom?" Drugim riječima, moguće je da su učenici računali vjerojatnost bez obzira na redoslijed pojavljivanja pisma ili glave.

Tada vjerojatnost $P('GGGGGG')$ ostaje ista, ali se vjerojatnost $P('PGPGPG', \textit{bez obzira na redoslijed})$ mijenja. Recimo da je „P" uspjeh. Tada pomoću Bernoulliejeve sheme računamo:

$$P('PGPGPG', \textit{ bez obzira na redoslijed}) = P(3) = \binom{6}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^3 = 15.6\%,$$

što je znatno više nego prije te bi objasnilo učenikovu intuiciju.

Uvjetna vjerojatnost

Rekli smo da su događaji nezavisni ako ne utječu jedan na drugog. S druge strane, zavisni su ako utječu jedan na drugog. Ako znamo utjecaj jednog događaja na drugi, tu informaciju možemo iskoristiti za računanje vjerojatnosti. Uvjetnu vjerojatnost je najlakše shvatiti na primjeru, kada se napišu elementi događaja.

Primjer 2.4.3. *Učiteljica je rekla učenicima da pogode koji broj će odabrati od 1 do 10. Marko rekao da će broj biti 7. Učiteljica je rekla da je broj veći od 4, a manji od 10. Kolika je vjerojatnost da je Marko pogodio broj ako je:*

1. *Marko rekao broj prije učiteljice?*
2. *Marko rekao broj nakon učiteljice?*

Pitanja impliciraju da razlika u odgovoru postoji, odnosno da nova informacija od učiteljice utječe na vjerojatnost točnog odgovora. Napišimo prostor Ω i događaje:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10\}, k(\Omega) = 10,$$

$$A = \{7\},\ k(A) = 1,$$
$$B = \{5, 6, 7, 8, 9\},\ k(B) = 5.$$

Rješenja su:

1. Marko nije čuo što je učiteljica rekla, pa je vjerojatnost jednaka nasumičnom biranju broja.
$$P(A) = \frac{1}{10} = 0.1.$$
2. Marko je čuo što je učiteljica rekla, pa zna da mora birati broj između 4 i 10. Više ne bira jedan od 10 brojeva, nego jedan od 5 brojeva između 4 i 10. Ovu vjerojatnost ćemo označiti s P_B, da se razlikuje od prethodne.
$$P_B(A) = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Ako ni sada učeniku nije jasno zašto postoji razlika, može se postaviti pitanje: Ako je učiteljica rekla da je broj između 4 i 10, kolika je vjerojatnost da je odabran broj 3? Očito je ovo nemoguć događaj i vjerojatnost je 0. Učiteljičina izjava je utjecala na računanje vjerojatnosti odabira broja.

Primijetimo da smo koristili Laplaceov model na drugačiji način. Broj ukupnih iznosa smo zamijenili s onim uvjetovanim s izjavom učiteljice, odnosno s $k(B)$. Broj povoljnih je presjek obje izjave. Koristili smo formulu:

$$P_B(A) = \frac{k(A \cap B)}{k(B)}.$$

Definirajmo generalnu uvjetnu vjerojatnost:

Definicija 2.4.4 (Uvjetna vjerojatnost)**.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tako da je $P(B) \neq 0$. Tada je funkcija $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$,*

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

vjerojatnost. Zovemo ju uvjetna vjerojatnost uz uvjet B, a broj $P(A|B)$ zovemo vjerojatnost od A uz uvjet B.

Pokažimo da je uvjetna vjerojatnost zaista vjerojatnost prema Kolmogorovljevim aksiomima. Neka je $P(A|B)$ uvjetna vjerojatnost uz uvjet B, definirana kao u prethodnom teoremu.

(K1) Nenegativnost:
Vrijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

pri čemu je razlomak nenegativan, jer su i brojnik i nazivnik negativni, za svaki $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(K2) Normiranost:
Vrijedi:

$$P(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(K3) σ-aditivnost:
Neka su $A_i \in \mathcal{P}(\Omega),\ i \in \mathbb{N}$, međusobno disjunktni. Vrijedi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)}{P(B)} \overset{K3}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

□

Formula za Laplaceov model se može izvesti iz generalnog oblika forumle:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{k(A \cap B)}{k(B)}.$$

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti vidimo da vrijedi općenita formula za presjek događaja:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Za nezavisne događaje vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A),$$

odnosno:

$$P(A|B) = P(A).$$

Kada su događaji nezavisni, uvjetna vjerojatnost je jednaka vjerojatnosti bez uvjeta.

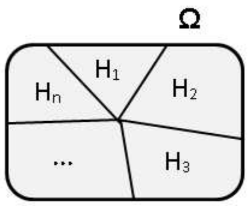
Formula potpune vjerojatnosti

Uvjetna vjerojatnost se pokazuje posebno korisnom u specifičnom slučaju vjerojatnosti, kada imamo potpun sustav događaja.

Definicija 2.4.5 (Potpun sustav događaja)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *vjerojatnosni prostor. Događaji* $H_i \in \mathcal{P}(\Omega), i \in \mathbb{N}$ *čine potpun sustav događaja ako vrijedi:*

1. $P(H_i) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n,$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset,\ \forall i, j = 1, ...n,\ i \neq j,$
3. $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$

Događaje $H_1, H_2, ..., H_n$ *zovemo hipoteze.*



Slika 2.2: Potpun sustav događaja.

U potpunom sustavu događaja vrijedi:

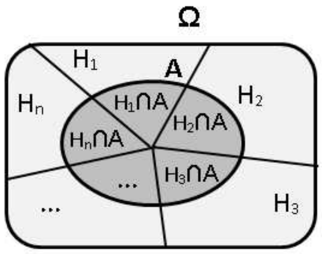
$$P(H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n) = P(\Omega)$$

$$\stackrel{K2,K3}{\Longrightarrow} P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1.$$

Potpun sustav događaja nam koristi kada pomoću hipoteza želimo izračunati vjerojatnost proizvoljnog događaja A, ako znamo $P(A|H_i)$.

Teorem 2.4.6 (Formula potpune vjerojatnosti)**.** *Neka je* $H_1, H_2, ..., H_n$ *potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$*. Za proizvoljan događaj A vrijedi:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$



Slika 2.3: Vennov dijagram koji pokazuje formulu potpune vjerojatnosti.

Dokaz teorema, odnosno izvod formule je:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i)\right) \overset{K3}{=} \sum_{i=1}^{n}(A \cap H_i).$$

Presjek događaja $A \cap H_i$ možemo zapisati pomoću uvjetne vjerojatnosti, pa dobijemo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

□

U ovom gradivu bi učenici mogli imati poteškoća pri razumijevanju ili prisjećanju formula. Zato je poželjno ilustrirati potpun sustav događaja i izvod formulne potpune vjerojatnosti pomoću Vennovih dijagrama, kao na Slici 2.2 i Slici 2.3.

Bayesova formula

Potpun sustav događaja je koristan kada želimo izračunati $P(A)$, ako znamo hipoteze H_i i $P(A|H_i)$. S druge strane, nekad ne znamo hipoteze, a želimo doći do njih, odnosno:

$$P(H_i|A) = ?$$

Ovo je uvjetna vjerojatnost, pa vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

a vjerojatnost od A možemo izračunati pomoću potpune formule vjerojatnosti. Na temelju ovoga je izvedena Bayesova formula za izračunavanje $P(H_i|A)$.

Teorem 2.4.7 (Bayesova formula)**.** [4] *Neka je $H_1, H_2, ..., H_n$ potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Neka je A proizvoljan događaj za koji vrijedi $P(A) \neq 0$. Tada vrijedi Bayesova formula:*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Bayesova formula je korisna jer u praksi ne možemo lako odrediti $P(H|A)$, iako relativno lagano možemo odrediti $P(A|H)$. Često se koristi za određivanje je li pacijent bolestan ili zdrav na temelju testiranja. Npr. ako na testiranju osoba dobije pozitivni nalaz, a pouzdanost testa na neku bolest je 95%, ne znači da je osoba sigurno bolesna. Pogledajmo na konkretnom primjeru.

Primjer 2.4.8. *2020. godine je provedeno testiranje na 2019-nCoV virus. Ako je pouzdanost testa* 95%, *a* 10% *populacije je zaraženo, kolika je vjerojatnost da je osoba bolesna ako je test pokazao da je pozitivan?*

Prije svega moramo pojasniti neke pojmove. Pouzdanost testova ne daje odgovor na traženo pitanje. Naime, ona se mjeri na osobama za koje znamo jesu li ili nisu bolesne. Ako označimo:

$$B = \{\text{Osoba je bolesna}\},$$

$$Z = \{\text{Osoba je zdrava}\},$$

$$Poz = \{\text{Osoba je na testiranju pozitivna na bolest}\},$$

$$Neg = \{\text{Osoba je na testiranju negativna na bolest}\}.$$

Tada pouzdanost testa označava:

$$P(Poz|B) = 95\%,$$

$$P(Neg|Z) = 95\%.$$

U praksi želimo obrnuto:

$$P(B|Poz) = \{\text{Vjerojatnost da je osoba bolesna ako je test pozitivan.}\}$$

I sada ćemo koristiti Bayesovu formulu. Budući da je osoba ili bolesna ili zdrava, možemo označiti:

$$\Omega = \{\text{osoba je bolesna, osoba je zdrava}\} = \{B, Z\}.$$

[4] T. Bayes je jedan od matematičara koji je pridonio razvitku teorije vjerojatnosti.

Na temelju podatka o postotku zaražene populacije zaključujemo:

$$P(B) = 10\% = 0.1,$$

$$P(H) = 1 - 0.1 = 0.9.$$

Budući da su B i Z ujedino elementarni događaji, disjunktni su i zajedno čine Ω, pa je u pitanju potpun sustav vjerojatnosti. Preostaje izračunati:

$$P(B|Poz) = \frac{P(B) \cdot P(Poz|B)}{P(B) \cdot P(Poz|B) + P(Z) \cdot P(Poz|Z)}$$

$$= \{P(Poz|Z) = 1 - P(Neg|Z)\} = \frac{0.1 \cdot 0.95}{0.1 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.05} = 0.68.$$

Iako je pouzdanost testa 95%, ako je 10% populacije zaraženo, test je točan uz vjerojatnost od 68%. Na temelju ove formule možemo napraviti Tablicu 2.2, koja pokazuje vjerojatnosti bolesnih osoba uz pozitivan rezultat testa i zdravih osoba uz negativan rezultat testa ako mijenjamo broj zaraženih u populaciji.

Broj bolesnih u populaciji	**Bolestan uz pozitivan test**	**Zdrav uz negativan test**
10%	68%	99%
20%	83%	99%
30%	89%	98%
50%	95%	95%
60%	97%	93%
70%	98%	89%
90%	99%	68%
99%	100%	16%

Tablica 2.2: Točnost testa u odnosu na broj zaraženih u populaciji.

Vjerojatnost da je osoba zaista bolesna se drastično mijenja ovisno o populaciji razboljelih, što ima smisla. Ako je 90% populacije zaraženo, onda je velika vjerojatnost da je osoba zaražena, unatoč negativnom rezultatu testiranja.

Pokažimo primjer koji smo predstavili u prvom poglavlju, paradoks Montya Halla.

Primjer 2.4.9 (Paradoks Montya Halla)**.** *Iza jednih vrata se nalazi automobil, a iza ostalih su koze. Igrač odabire vrata, a nakon njega voditelj igre otvori vrata s kozom. Zatim nudi igraču mogućnost da promijeni izbor vrata.*

Isplati li se igraču promijeniti prvobitni izbor? Postoji li strategija za dobitak automobila?

Pokažimo rješenje pomoću uvjetne vjerojatnosti. Odredimo prostor elementarnih događaja. Igrač bira vrata, pa voditelj otvara vrata s kozom.

$$\Omega = \{\text{Odabrali smo vrata s kozom, odabrali smo vrata s automobilom.}\}$$

Tada za $H_1 = \{\text{Odabrali smo automobil}\}$ i $H_2 = \{\text{Odabrali smo kozu}\}$ vrijedi:

$$P(H_1) = \frac{1}{3},\ P(H_2) = \frac{2}{3}$$

te H_1 i H_2 čine potpun sustav događaja.

Označimo s E događaj: $E = \{\text{Monty Hall je od preostalih vrata otvorio vrata s kozom.}\}$ Budući da Monty zna gdje je koza, uvijek pokaže kozu bez obzira na naš izbor, pa vrijedi:

$$P(E) = P(E|H_1) = P(E|H_2) = 1.$$

Mi želimo znati kolika je vjerojatnost da smo na početku odabrali auto, ako je Monty nakon nas odabrao kozu?

$$P(H_1|E) =?$$

$$= \frac{P(E \cap H_1)}{P(E)} = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{P(E)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Nakon što igrač odabere vrata i Monty pokaže kozu iza jednih od preostalih dvoje vrata, igrač ima pravo birati. Budući da su samo dvoje vrata preostala zatvorena, postoje samo dva ishoda: iza prvih vrata je automobil ili je koza, no vjerojatnost za automobil se nije promijenila. Zato kada promijenimo izbor, biramo druga vrata uz $P(H_2|E)$, vjerojatnost za automobil, što je $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 66.7\%$.

Još bolje ćemo ilustrirati ovaj račun kada pretpostavimo da se igra sastoji od 100 vrata, od kojih se iza jednih nalazi automobil, a iza preostalih koze. Igrač bira automobil s vjerojatnosti od $\frac{1}{100} = 1\%$. Nakon toga Monty otvori 98 vrata iza kojih se nalaze koze. Vjerojatnost da se automobil nalazi iza preostalih vrata je $\frac{99}{100} = 99\%$.

Pogledajmo još dvije varijacije na zadatak.

Recimo da Monty ne zna gdje se nalazi koza, pa nasumično bira preostala vrata. Onda bi vrijedilo:

$$P(E|H_1) = 1, P(E|H_2) = 0.5,$$

$$P(E) = P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 = \frac{2}{3},$$

što znači:

$$P(H_1|E) = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Da Monty nasumično bira vrata, zaista bi bilo 50%, no da odaberemo kozu, a Monty nasumično otvori automobil, igra ne bi bila zabavna. Pogledajmo slučaj kada Monty prvo bira vrata, a nakon njega vrata bira igrač. Kolika je tada vjerojatnost za auto? Ako je Monty već otvorio kozu, onda mi imamo početna dva izbora, a ne tri. Tada se sam prostor promijenio:

$$\Omega = \{\text{Jedan automobil, jedna koza}\} = \{H_1, H_2\},$$

a elementarni događaji su:

$$P(H_1) = P(\{\text{Odabrali smo vrata s autom}\}) = \frac{1}{2},$$

$$P(H_2) = P(\{\text{Odabrali smo vrata s kozom}\}) = \frac{1}{2}.$$

Sada nam je svejedno mijenjamo li izbor. Kako se promijenio prostor elementarnih događaja, tako se promijenilo rješenje.

2.5 Geometrijska vjerojatnost

Do sada smo radili zadatke iz diskretnog vjerojatnosnog prostora, za koji vrijedi da je Ω prebrojiv ili konačan prostor. U srednjoj školi je jedina iznimka ovome geometrijska vjerojatnost. Kada računamo geometrijsku vjerojatnost, kao prostor elementarnih događaja biramo skup točaka u ravnini ili prostoru. Elementarni događaji su točke, kojih ima neprebrojivo beskonačno mnogo. Prema tome, ne možemo koristiti Laplaceov model računanja vjerojatnosti.

Iako skup točaka nije prebrojiv, on je mjeriv u duljini, površini ili obujmu. Mjera generalizira vjerojatnost i navedene geometrijske koncepte. Kada je prostor Ω izmjeriv ili mjeriv, znači da postoji njegova mjera $m(\Omega) < \infty$, koja je za $n = 1$ duljina, za $n = 2$ površina i za $n = 3$ obujam. Nećemo ulaziti dublje u značenje mjere, ali učenici imaju intuitivne predodžbe o ovim veličinama. Pri računanju vjerojatnosti u zadacima ćemo koristiti formulu sličnu Laplaceovom modelu, koja vrijedi u geometrijskoj vjerojatnosti.

Definicija 2.5.1 (Geometrijska vjerojatnost)**.** *Neka je prostor elementarnih događaja Ω ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ koji je izmjeriv. Geometrijska vjerojatnost proizvoljnog izmjerivog podskupa $A \subseteq \Omega$ je dana s formulom:*

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

gdje oznaka m označava mjeru događaja.

Pokažimo da je geometrijska vjerojatnost zaista vjerojatnost. Neka je Ω prostor elementarnih događaja, a $\mathbb{R}^n$ prostor događaja.

(K1) Nenegativnost:
Budući da je mjera događaja nenegativan broj, onda je razlomak:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

također nenegativan broj, za svaki $A \in \mathbb{R}^n$.

(K2) Normiranost:
Vrijedi:

$$P(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{m(\Omega)} = 1.$$

(K3) σ-aditivnost:
Neka su $A_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$ međusobno disjunktni. Zbog svojstva mjere vrijedi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{m(\Omega)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)}{m(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(A_i)}{m(\Omega)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

□

Geometrijska vjerojatnost se također intuitivno lako shvaća. Poteškoće mogu nastati kada se pokuša izračunati vjerojatnost da se nasumičnim odabirom odabere konkretna točka.

Primjer 2.5.2. *Nasumično biramo točku u krugu s duljinom radijusa* 45 *cm. Kolika je vjerojatnost da će nasumično odabrana točka biti središte kruga?*

Odredimo prostor Ω:

$$\Omega = \{\text{Točka je u krugu}\},$$

$$A = \{\text{Točka je središte kruga}\}.$$

Budući da točka nema duljinu, površinu ili obujam, vrijedi $m(\{točka\}) = 0$. Dakle:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{0}{45^2\pi} = 0.$$

Učenicima bi se činilo da je došlo do greške, no odgovor je točan. Do ovog nerazumijevanja dolazi kada se učenici previše fokusiraju na Laplaceov model. U ovom vjerojatnosnom prostoru skup Ω nije prebrojiv, pa nema smisla gledati jedan element skupa. Moguće je da učenici središte zamišljaju kao krug male površine umjesto točke. Tada možemo preformulirati zadatak kao: Kolika je vjerojatnost da će nasumično odabrana točka biti unutar radijusa duljine 5 mm oko središta kruga?

$$P(A') = \frac{m(A')}{m(\Omega)} = \frac{0.5^2\pi}{45^2\pi} = 0.0001 = 0.01\%.$$

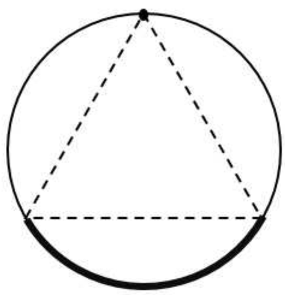
Vjerojatnost je mala, ali veća od 0. Vidjet će da smo zadali dva različita zadatka. Učenici se mogu sresti sa sličnim poteškoćama pri računanju vjerojatnosti odabira pravca u ravnini ili ravnine u prostoru, jer pravac nema površinu, a ravnina nema obujam.

Riješimo sada Bertrandov paradoks pomoću geometrijske vjerojatnosti.

Primjer 2.5.3. *Ako odaberemo neku tetivu u krugu, kolika je vjerojatnost da će duljina tetive biti veća od duljine stranice upisanog jednakostraničnog trokuta?*

Rekli smo da je „greška" u načinu na koji se birala tetiva. Tetiva može biti definirana pomoću točke ili pravca.

U prvom slučaju smo birali dvije nasumične točke na kružnici, što se svelo na biranje jedne točke na kružnici. Prema tome, prostor elementarnih događaja je kružnica. Prva od te dvije točke je vrh upisanog jednakostraničnog trokuta, a druga točka T' se nalazi na na kružnici. Ako je T' na luku nasuprot vrhu trokuta, onda će duljina tetive biti veća od duljine stranice trokuta (Slika 2.4).



Slika 2.4: Biramo dvije točke.

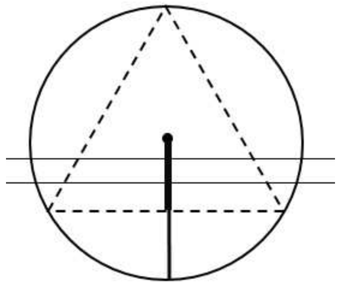
$$\Omega_1 = \{T' \text{ se nalazi bilo gdje na kružnici}\},\ m(\Omega_1) = O(krug) = 2r\pi,$$

$$A_1 = \{T' \text{ se nalazi na luku}\}, m(A_1) = r\pi\frac{\alpha}{180^o} = r\pi\frac{120^o}{180^o} = r\pi\frac{2}{3},$$

$$P(A_1) = \frac{m(A_1)}{m(\Omega_1)} = \frac{\frac{2}{3}r\pi}{2r\pi} = \frac{1}{3} = 33.3\%.$$

Primijetimo: mjera je u ovom slučaju bila duljina.

Drugi način rješavanja zadatka je biranjem nasumičnog pravca koji siječe krug. Presjek pravca i kruga je tetiva. Za svaku takvu tetivu možemo nacrtati trokut tako da jedna stranica bude paralelna tetivi. Duljina tetive će biti veća od duljine stranice, ako se nalazi bliže središtu nego stranica upisanog trokuta (Slika 2.5). Sada je prostor elementarnih događaja skup tetiva paralelnih sa stranicom trokuta.



Slika 2.5: Biramo pravac.

$$\Omega_2 = \{\text{Skup tetiva okomitih na radijus r}\}, m(\Omega_2) = d(radijus) = r,$$

$$A_2 = \{\text{Skup tetiva koje se nalaze bliže središtu nego stranica trokuta}\},\ m(A_2) = \frac{r}{2},$$

$$P(A_2) = \frac{m(A_2)}{m(\Omega_2)} = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

U ovom slučaju je mjera također bila duljina.

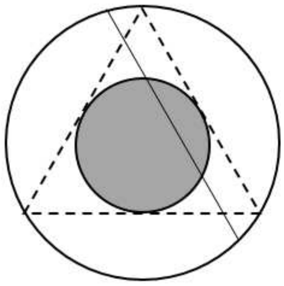
Treći način rješavanja zadatka je biranjem točke unutar kruga. Neka ta točka bude polovište tetive (Slika 2.6). Ako se polovište tetive nalazi unutar kruga upisanog trokutu, tetiva će imati veću duljinu od stranice trokuta. Prostor elementarnih događaja je površina kruga.

$$\Omega_3 = \{\text{Bilo koja točka unutar kruga}\},\ m(\Omega_3) = P(krug) = r^2\pi,$$

$$A_3 = \{\text{Točka unutar kruga upisanog trokutu}\},$$

$$m(A_3) = P(k_2) = r_2^2\pi = \frac{r^2}{2^2}\pi = \frac{r^2}{4}\pi,$$

$$P(A_3) = \frac{m(A_3)}{m(\Omega_3)} = \frac{\frac{1}{4}r^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4} = 25\%.$$



Slika 2.6: Biramo točku.

U ovom slučaju mjera nije duljina, nego površina.

Različit način određivanja tetive odgovara različitoj definiciji prostora elementarnih događaja i mjera događaja. Vrijedi:

$$\Omega_1 \neq \Omega_2 \neq \Omega_3,$$

pa zato ne bi trebalo biti iznenađujuće što smo dobili:

$$P(A_1) \neq P(A_2) \neq P(A_3).$$

Miskoncepcije u vjerojatnosti su često povezane s definicijom prostora elementarnih događaja, kao što smo vidjeli u ovom primjeru i u nekoliko ranijih.

Poglavlje 3

Vjerojatnost u srednjoj školi

Kao što smo rekli u prvom poglavlju, vjerojatnost se radi u osnovnoj školi u 8. razredu, a u srednjoj školi u 2. i u 4. razredu. Miskoncepcije koje se najčešće javljaju u vjerojatnosti su sklonost vjerovanju da su svi događaji jednako vjerojatni, miskoncepcija reprezentativnosti odnosno mišljenje da rezultati moraju imitirati neki uzorak te orijentacija na ishode, odnosno vjerovanje da možemo utjecati na rezultat. Da bi učenicima razjasnili miskoncepcije i pomogli im prevladati poteškoće pri razumijevanju gradiva, potrebno je pokazati im primjere koje će ih potaknuti na razmišljanje.

U ovom poglavlju ćemo navesti aktivnosti vezane za gradivo koje se obrađuje u školama te koje će pomoći učenicima da razumiju vjerojatnost i uvide svoje greške u razmišljanju.

3.1 O aktivnostima

Gradivo vjerojatnosti je idealno za korištenje metode eksperimenta. Većina zadataka koja se pojavljuju u gradivu srednje škole su vezane za igre na sreću. Zato se mnogo zadataka može pretvoriti u eksperimente koje učenici mogu raditi na satu. U prvom poglavlju smo naveli da je kognitivni konflikt u učenikovom umu važan korak prema svladavanju miskoncepcija. U većini aktivnosti učenik može prije provođenja eksperimenta pokušati sam riješiti zadatak, a nakon provođenja eksperimenta usporediti rezultate s predviđenom vjerojatnosti. Time će usporediti *a priori* i *a posteriori* rezultate računa te provjeriti svoje znanje i razumijevanje računanja vjerojatnosti. Kada učenik vidi razliku između svojih pretpostavki i rezultata, doći će do konflikta i učenik će propitkivati svoje znanje iz vjerojatnosti.

Pokusi se ne moraju provoditi uživo. U zadatcima s Laplaceovim modelom se umjesto eksperimenta mogu relativno lagano napisati programi za računalne simulacije. Računalne simulacije se mogu provesti brzo i s mnogobrojnim pokusima, npr. pokus od: $100, 1000$, 100000, 1000000, itd. ponavljanja. Povećavanjem broja pokusa mogu vidjeti kako je postotak vjerojatnosti konstantniji što je veći broj pokusa, odnosno mogu vidjeti statističku stabilnost relativnih frekvencija. Ovo je i velika prednost u odnosu na provođenje eksperimenta uživo. U Aktivnosti 4 su navedena dva primjera koda u programskom jeziku *Python*.

Provođenje eksperimenta nije jedini način da se učenika potakne na razmišljanje. Po D. Kahnemanu konceptualne poteškoće nastaju jer se teža pitanja zamjenjuju s lakšim, tako da nekad nije u pitanju stvarna težina zadatka, nego formulacija rečenice. Zadatci u vjerojatnosti su generalno formulirani u obliku: *Kolika je vjerojatnost da ...?*, pa samim preformuliranjem pitanja možemo potaknuti učenike da razmisle o načinu rješavanja zadatka ili odgovoru koji su dali. Npr. postavljanjem „da-ne" pitanja, učenik nesvjesno bira odgovor na temelju osjećaja, prije nego što riješi zadatak. Time može usporediti svoj intuitivni odgovor i računski odgovor na pitanje, a ako se razlikuju, razmisliti zašto. Pitanja u kojima se uspoređuju vjerojatnosti događaja na način da učenici biraju koji od niza događaja je najvjerojatniji su se pokazala kao dobrim za provjeravanje miskoncepcija o jednako vjerojatnim događajima i o reprezentativnosti.

Nisu sve aktivnosti smišljene isključivo u svrhu prevladavanja poteškoća. Učenici često uče matematiku „reda radi", bez ikakvog konteksta o vremenu i prostoru. Sve definicije i teoremi koje učenici obrađuju su u povijesti matematike nastali s nekim razlogom. Nekad je razlog puka znatiželja matematičara, a nekad je postojao konkretan problem kao motivacija za uvođenje teorije. Buffonova znatiželja ga je dovela do zanimljivog eksperimenta u vjerojatnosti koja dovodi do broja π. De Méréov problem je inspirirao velike matematičare da počnu proučavati teoriju vjerojatnosti, što je kasnije dovelo do uvođenja aksiomatike. Učenici će teoriju vjerojatnosti smjestiti u vremenski kontekst, da se matematika ne prikaže kao predmet u vakumu nego dio povjesti matematike.

Zadnja aktivnost sadrži zadatke preuzete iz istraživanja o miskoncepcijama u vjerojatnosti. Pomoću nje se učenici mogu testirati imaju li česte miskoncepcije o vjerojatnosti.

3.2 Aktivnosti

Neke aktivnosti su vremenski zahtjevne te se ne očekuje od nastavnika da ih provede sve, nego prilagodi po potrebi.

Aktivnost 1: Početak Teorije vjerojatnosti

Cilj aktivnosti:	učenici će vidjeti kako je nastala potreba za stvaranjem grane matematike - vjerojatnosti te usporediti *a priori* i *a posteriori* vjerojatnost
Nastavni oblik:	rad u grupi, rad u parovima
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda analize i sinteze
Potrebni materijal:	kockice

Učenici će se susresti s De Méréovim problemom: „Je li preporučljivo kladiti se da će u 24 uzastopna bacanja para kocaka barem jednom pasti dvostruka šestica?"

Nastavnik će dati kratku povijesnu podlogu iza ovog zadatka, a zatim tražiti učenike da grupnim radom zaista provedu eksperiment. Ovaj zadatak se smatra povezanim s početkom teorije vjerojatnosti. Nakon kratkog povijesnog uvoda, nastavnik će objasniti De Méréovo razmišljanje. Zatim će se učenici podijeliti u grupe i provesti eksperiment. Nakon izvođenja pokusa će se zbrojiti ukupni rezultati. Učenici će izračunati vjerojatnost dobitka formulom:

$$P(A) = \frac{\text{povoljni ishodi}}{\text{svi ishodi}}.$$

Zatim će usporediti svoje pretpostavke s dobivenim rezultatom. Nastavnik će pokazati točno rješenje, pa započeti diskusiju s učenicima o greški u razmišljanju De Mera.

Nastavna aktivnost se može provesti kao motivacijski uvod u vjerojatnost, bez da se objasni De Méréova greška, a nakon nekoliko sati vratiti se na zadatak u svrhu ponavljanja gradiva. Učenici će ga analizirati i opisati gdje je bila greška (ili više njih).

Aktivnost 2: Pitanja

Cilj aktivnosti:	učenici će vidjeti koliko intuicija može biti kriva na problemskim zadatcima
Nastavni oblik:	individualni rad
Nastavna metoda:	metoda dijaloga, metoda usporedbe
Potrebni materijal:	ploča, kreda

Učenici će dobiti nekoliko izjava i prvo razmisliti o odgovoru, a zatim računanjem provjeriti jesu li točne ili netočne.

1. Ako se bace dvije simetrične kockice, vrlo vjerojatno će na bar jednoj pasti broj 6. (Netočno.)
2. Lakše je dobiti broj 6 ako se bace 3 kockice, nego 2 kockice. (Netočno.)
3. Lakše je dobiti zbroj 8 ili više ako se bace 2 kockice nego 11 ili više ako se bace 3 kockice. (Točno.)
4. Ako se baci jedna kockica, teže je dobiti broj 6 nego bilo koji drugi broj. (Netočno.)
5. Ako se igra par-nepar, isplativije je biti nepar. (Netočno.)

Pitanja „točno-netočno" su varijanta na pitanja „da-ne", kojima se učenike potiče da automatski odgovore na pitanja. Ako je učenik krivo odgovorio, objasnit će svoj način razmišljanja koji ga je doveo do tog rješenja te uz pomoć nastavnika ustanoviti u čemu je bila greška.

Aktivnost 3: Paradoks rođendana

Cilj aktivnosti:	učenici će diskutirati o utjecaju netočne intuicije na rješavanje zadataka
Nastavni oblik:	rad u grupi (cijeli razred)
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda dijaloga
Potrebni materijal:	papir

Nastavnik će na početku aktivnosti pitati učenike: Kolika je vjerojatnost da dvoje ljudi imaju rođendan isti dan? Preko ili ispod 50%? Zatim će proslijediti papir po učionici. Na papiru će pisati uputa za zadatak. Svaki učenik treba napisati datum svog rođendana na sljedeći način:

1. *Ako datum nije napisan, onda ga napiši.*
2. *Ako je datum napisan, onda dopiši '+' kraj datuma.*

Papir će biti redom proslijeđen po razredu, a nakon što svi napišu svoj datum, usporedit će mišljenje učenika s rezultatom na papiru. Nakon toga će izračunati vjerojatnost. Ako su neki učenici procjenu temeljili na svom iskustvu (miskoncepcija orijentacija na ishode), moguće je da će njihova procjena biti bitno različita od točne vjerojatnosti. Nastavnik će diskutirati s učenicima o razlozima zbog kojih dolazimo do loših procjena, kako one utječu na rješavanje zadataka i kako učenici to mogu spriječiti.

Aktivnost 4: Računalne simulacije

Cilj aktivnosti:	učenici će usporediti *a priori* i *a posteriori* račun te vidjeti posljedice Zakona velikih brojeva
Nastavni oblik:	rad u grupi
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda usporedbe
Potrebni materijal:	radni listić, računala

Za dosta zadataka s kockicama i kartama se eksperiment ne mora provesti uživo, nego se može obaviti jednostavnim kodom u programskom jeziku, npr. u *Pythonu*. Učenici će napisati program za neke eksperimente te provesti računalnu simulaciju s različitim brojem pokusa. Npr. vjerojatnost da će pri bacanju 2 kockice suma brojeva biti 6.

1. Pokus se ponovi 100 puta. Nekoliko puta se učita program i usporedi rezultat.
2. Pokus se ponovi 1000 puta. Nekoliko puta se učita program i usporedi rezultat.
3. Pokus se ponovi 1000000 puta. Nekoliko puta se učita program i usporedi rezultat. Jesu li rezultati međusobno sličniji?

Učenici će vidjeti, što je broj pokusa veći, to je rezultat precizniji. U matematičkim razredima je ova aktivnost idealna kao korelacija između predmeta Matematika i Informatika. Primjer kodova:

```python
from random import randint

def simulacija_6_ili_7():
    suma6 = 0
    suma7 = 0
    for x in range(1000000):
        i = randint(1, 6)
        j = randint(1, 6)
        if i + j == 6:
            suma6 += 1
        elif i + j == 7:
            suma7 += 1
    print("Suma je bila 6: ", round(suma6 / 1000000,2))
    print("\n Suma je bila 7: ", round(suma7 / 1000000,2))
```

```
from random import randint

def simulacija_2_kockice(a):
    a = int(a)
    suma = 0
    for x in range(100000):
        i = randint(1, 6)
        j = randint(1, 6)
        if (i == a or j == a):
            suma += 1
    print("Vjerojatnost da se pojavi a: ", round(suma /
  100000,2))
```

Aktivnost 5: Buffonova igla

Cilj aktivnosti:	učenici će vježbati računanje geometrijske vjerojatnosti
Nastavni oblik:	rad u paru
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda analize i sinteze
Potrebni materijal:	radni listić, čačkalice, označeni stol ili karta

Poznati Buffonov problem glasi:

Stol je podijeljen usporednim linijama koje su međusobno jednako udaljene (za duljinu d). Igla duljine l je bačena na stol na slučajan način. Kolika je vjerojatnost da je igla presjekla neku od linija?

Problem je poznat po tome što se čini da je vjerojatnost teško za izračunati, no moguće ju je izračunati i gradivom u srednjoj školi. Učenici će prvo sami pokušati izračunati ili pretpostaviti kolika je vjerojatnost, a onda ponavljati pokus 5-10 minuta i zapisivati rezultate. Zatim će zaista uz pomoć nastavnika izračunati kolika je vjerojatnost i usporediti rezultate. Nekoliko načina rješavanja zadatka možemo pronaći u literaturi ([8]).

Aktivnost 6: Bertrandov paradoks

Cilj aktivnosti:	učenici će vježbati računanje geometrijske vjerojatnosti te uvidjeti koliko je važno dobro definirati problem
Nastavni oblik:	rad u grupi
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda usporedbe
Potrebni materijal:	krugovi od papira, crni papir, kreda, štapići

Betrandov paradoks smo objasnili u prvom poglavlju. Nastavnik će objasniti da je Betrand rješio zadatak na tri različita načina. Sukladno tome, učenici će se podijeliti u tri grupe, a svaka grupa će provesti pokus na jedan način.

Greška u Betrandovim rješenjima je što se problem postavlja i rješava na različite načine, pa će sukladno tome biti provodeni pokusi:

Grupa 1 Prvi način rješavanja je nasumično odabiranje dvije točke na kružnici. Ovo se može ostvariti tako da izrežemo krug, označimo jednu točku, zavrtimo ga i označimo drugu točku tamo gdje krug stane.

Grupa 2 Drugi način rješavanja je nasumično odabiranje tetive na krugu. To će ostvariti bacanjem štapića na krug, pa mjerenjem duljine štapića koji leži unutar kruga.

Grupa 3 Treći način rješavanja je nasumično odabiranje točke unutar kruga. Ovo se može ostvariti tako da se izreže krug od papira crne boje, a zatim se baca komadić krede na krug. Tamo gdje kreda padne, označit će točku.

Učenici će prije pokusa izračunati duljinu upisanog jednakostraničnog trokuta, da bi kasnije mogli provjeriti je li bio dobitak. Nakon pokusa će jedan predstavnik grupe na ploči objasniti kako su ostvarili pokus, pokazati rezultate, pa potvrditi razultat matematičkim računom.

Grupe će usporediti rezultate i vidjeti da su različiti. Nakon ovoga slijedi diskusija, pa objašnjenje nastavnika u čemu je bila „greška”.

Aktivnost 7: Paradoks Montya Halla

Cilj aktivnosti:	učenici će provjeriti svoje razumijevanje vjerojatnosti
Nastavni oblik:	rad u grupi
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda usporedbe
Potrebni materijal:	dvije slike koze, jedna slika auta

Paradoks Montya Halla je objašnjen u prvom poglavlju.

Za početak će nastavnik odigrati igru tako da bira učenika dobrovoljca koji će otvoriti jedna vrata. U skladu s objašnjenjem problema, nastavnik će otvoriti preostala vrata iza kojih je koza. Nakon toga će pitati dobrovoljca, pa i ostale učenike, kolika je vjerojatnost da će auto biti iza vrata ako zamijenimo izbor? Točan odgovor je: 66%, no očekujemo da će većina učenika reći 50%.

Zatim otvorimo vrata, bez obzira na rezultat. Pitamo učenike postoji li strategija, a nakon kratke diskusije, provodimo tri strategije:

1. uvijek ostani pri prvom izboru,
2. uvijek promjeni izbor ili
3. naizmjenično mijenjaj izbor vrata.

U skladu s ovim ćemo podijeliti učenike u 3 grupe. Nakon nekoliko provedenih pokusa ćemo usporediti rezultate. Učenici će uočiti da je vjerojatnost za dobitak auta:

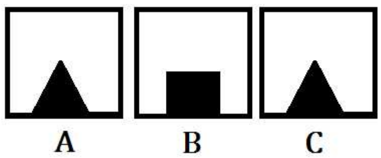
1. u prvoj grupi: 33%,
2. u drugoj grupi: 66%,
3. u trećoj grupi: 50%.

Nakon diskusije o razlozima zašto su različite vjerojatnosti, učenici će računom potkrijepiti rješenja. Vjerojatnost u zadatku će izračunati pomoću vjerojatnosnog stabla ili uvjetne vjerojatnosti, ovisno o razini znanja.

Aktivnost 8: Miskoncepcije

Cilj aktivnosti:	učenici će ustanoviti svoje miskoncepcije u vjerojatnosti
Nastavni oblik:	individualni rad
Nastavna metoda:	metoda eksperimenta, metoda usporedbe
Potrebni materijal:	radni listić

Učenici će rješavati radne listiće napravljeni specifično za provjeru miskoncepcija o jednako vjerojatnim događajima i o reprezentativnosti. U literaturi ([9], [18]) su navedena istraživanja o miskoncepcijama u vjerojatnosti među učenicima, a u njima su navedena pitanja i zadatci kojima su se provjerile miskoncepcije. Primjer pitanja za provjeru pristranosti jednakoj vjerojatnosti (*equiprobability bias*):



Slika 3.1: Karte za prvo pitanje.

1. pitanje U kutiji su tri karte kao na Slici 3.1. Pomoću karte A i B te B i C možeš napraviti kuću, a pomoću karte A i C možeš napraviti romb. Vuku se dvije karte. Misliš li da je:

a) Jednaka vjerojatnost za dobivanje kuće i romba?
b) Veća vjerojatnost za dobivanje kuće od romba?
c) Veća vjerojatnost za dobivanje romba od kuće?

Obrazloži svoj odgovor. Ako ne možeš odgovoriti, objasni zašto.

2. pitanje U kutiji se nalaze tri bombona; dva su s okusom naranče, a jedan s okusom limuna. Iz kutije se izvuku dva bombona.

Misliš li da je:

a) Vjerojatnost da dobiješ jedan bombon s okusom limuna i jedan s okusom naranče jednaka vjerojatnosti za dobivanje dva bombona s okusom naranče?
b) Veća vjerojatnost da dobiješ jedan bombon s okusom limuna i jedan s okusom naranče?
c) Veća vjerojatnost da dobiješ dva bombona s okusom naranče?

Obrazloži svoj odgovor. Ako ne možeš odgovoriti, objasni zašto.

Ako učenik na oba pitanja zaokruži odgovor a) s objašnjenjem da moraju biti jednako vjerojatni, onda možda ima miskoncepcije o tome. Primjer pitanja za provjeru miskoncepcije o reprezentativnosti:

3. pitanje Ako se simetričan novčić baci pet puta, koji će se od sljedećih nizova pojavljivanja glave (G) i pisma (P), najvjerojatnije dogoditi?

a) G P G P P
b) P G G G G
c) G P G P G
d) Nizovi a) i c) su jednako vjerojatni.
e) Svi gore navedeni nizovi su jednako vjerojatni.

Točan odgovor je e). Ako učenik odgovori drugačije s objašnjenjem da rezultati moraju biti ravnomjerno raspodijeljeni, onda možda ima miskoncepcije o reprezentativnosti. Nakon što učenici riješe nekoliko ovakvih zadataka, obrazložit će svoj način razmišljanja, a pomoću simulacije vidjeti jesu li u pravu.

Kao što smo rekli u prvom poglavlju, istraživanja nisu našla definitivno rješenje za prevladavanje poteškoća i miskoncepcija u vjerojatnosti, ali su se složili oko jednog: rješavanje zadataka koji potiču razmišljanje će nakon nekog vremena pokazati pozitivne promjene.

Bibliografija

[1] *intuicija*, Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020., Pristupljeno: 15.11.2020., http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=27697.

[2] *paradoks*, Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020., Pristupljeno: 15.11.2020., https://enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=46587.

[3] *conception*, Riječnik Merriam-Webster.com, n.d., Pristupljeno: 15.11.2020., https://www.merriam-webster.com/dictionary/conception.

[4] *intuition*, Riječnik Merriam-Webster.com, n.d., Pristupljeno: 15.11.2020., https://www.merriam-webster.com/dictionary/intuition.

[5] *misconception*, Riječnik Merriam-Webster.com, n.d., Pristupljeno: 15.11.2020., https://www.merriam-webster.com/dictionary/misconception.

[6] *EuroJackpot*, https://www.lutrija.hr/cms/Eurojackpot.

[7] A. Aaniya, P. Han Goh i I. Koswara, *Simpson's Paradox*, https://brilliant.org/wiki/simpsons-paradox/.

[8] M. Aigner i G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 2004.

[9] L.H. Ang i M. Shahrill, *Identifying Students' Specific Misconceptions in Learning Probability*, (2014), https://www.researchgate.net/publication/263363207.

[10] D. Anway i E. Bennett, *Common Misperceptions in Probability among Students in an Elementary Statistics Class*, (2004.), https://www.researchgate.net/publication/267716435.

[11] A. Bogomolny, *Chevalier de Méré's Problem*, https://www.cut-the-knot.org/Probability/ChevalierDeMere.shtml.

[12] A. Copić i S. Antoliš, *Matematika 4, I. polugodište, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska Knjiga, 2006.

[13] N. Gauvrit i K. Morsanyi, *The Equiprobability Bias from a Mathematical and Psychological Perspective*, (2014.), https://www.researchgate.net/publication/272188544.

[14] T. Goris i M. Dyrenfurth, *Students' Misconceptions in Science, Technology, and Engineering.*, (2010.).

[15] R. Gürbüz, O. Birgin i H. Çatlıoğlu, *Usporedba pogrješnih predodžaba o konceptima vjerojatnosti kod učenika različitog stupnja obrazovanja*, (2017), https://www.researchgate.net/publication/268269097.

[16] P.T. Humphrey i J. Masel, *Outcome Orientation: A Misconception of Probability That Harms Medical Research and Practice*, (2016.), https://www.researchgate.net/publication/269636308.

[17] L. Khazanov i L. Prado, *Correcting Students' Misconceptions about Probability in anIntroductory College Statistics Course*, (2010.), https://eric.ed.gov/?id=EJ1068215.

[18] MP. Lecoutre, *Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations*, (1992), https://www.researchgate.net/publication/226075396.

[19] I. Plavčić, T. Škrtić i D. Pavrlišak, *Bertrandov paradoks*, (2010.), http://e.math.hr/math_e_article/br16/plavcic_skrtic_pavrlisak/bertrand.

[20] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska Knjiga, 2002.

[21] C. Williams, A. Strandberg i A. Bhatt, *Monty Hall problem*, https://brilliant.org/wiki/monty-hall-problem/.

[22] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html/.

[23] Z. Šikić, *Kolika je vjerojatnost da ste bolesni ako je test pozitivan? Dva jednostavna pravila*, (2020), http://ideje.hr/kolika-je-vjerojatnost-da-ste-bolesni-ako-je-test-pozitivan//-dva-jednostavna-pravila/.

Sažetak

Vjerojatnost je gradivo koje se u Republici Hrvatskoj obrađuje u osnovnoj i u srednjoj školi. Učenici se pritom susreću s konceptualnim poteškoćama koje mogu biti specifične za vjerojatnost.

Konceptualne poteškoće se razlikuju od nesporazuma ili nedostatka znanja po tome što predstavljaju dubinsko nerazumijevanje koncepta u vjerojatnosti te su teške za ukloniti. Zato konceptualne poteškoće možemo nazvati miskoncepcijama. Miskoncepcije koje se najčešće javljaju u vjerojatnosti su pristranost jednakoj vjerojatnosti (*equiprobability bias*), pristranost reprezentativnosti (*representativeness bias*) i orijentacija na ishode (*outcome orientation*).

Pristranost jednakoj vjerojatnosti je sklonost učenika da automatski smatra da su u nekom pokusu svi događaji jednako vjerojatni, iako nema razloga za to. Pristranost reprezentativnosti je sklonost učenika da očekuje da rezultati pokusa moraju odgovarati nekom uobičajenom uzorku ili poznatom uzorku. Orijentacija na ishode je sklonost učenika da se fokusira na ishod pokusa, a ne na vjerojatnost ishoda pokusa, pa time odbija prihvatiti da je pokus slučajan i smatra da na rezultat pokusa može utjecati vanjska sila.

Istraživanja pokazuju da se navedene miskoncepcije pojavljuju u svim dijelovima obrazovanja, dakle u osnovnoj i srednjoj školi te u višem obrazovanju. Moguće miskoncepcije nastaju zbog učeničkog oslonca na intuiciju. Budući da se u vjerojatnosti često javljaju problemski zadatci s kojima se učenik možda susreo u životu, učenik može na temelju iskustva ili osjećaja procijeniti vjerojatnost događaja, a pritom zanemariti matematičku logiku iza rješavanja zadatka. Osim toga, učenik može jedno pitanje zamijeniti drugim, na koje mu je lakše odgovoriti, pa time dobiti krivo rješenje.

Miskoncepcije i oslonac na intuiciju se mogu ukloniti susretanjem sa zadatcima koji navode učenike na razmišljanje i propitkivanje svog razmišljanja, jer učenik često nije ni svjestan koliko ne razumije gradivo. Jedan od načina da se učenika dovede do razmišljanja je proučavanje paradoksa. U ovom radu su opisani paradoks rođendana, paradoks Montya Halla, Bertrandov paradoks i Simpsonov paradoks. Neki paradoksi se mogu zvati i problemima ili dilemama, jer nije problem u zadatku koliko u učenikovim miskoncepcijama. Drugi paradoksi su primjeri kontradiktornih izjava iz istih premisa, pa time nije problem u učeniku nego u samoj definiciji problema. Obje vrste paradoksa potiču učenika

na razmišljanje i fokusiranje na razumijevanje problema.

Da bi učenici razumjeli rješenja zadataka, potrebno je dobro razumijevanje vjerojatnosti. U drugom poglavlju se obrađuje dio teorije vjerojatnosti koja je potrebna za zadatke u srednjoj i osnovnoj školi. U samom stvaranju teorije vjerojatnosti su matematičari imali poteškoća, jer klasične definicije vjerojatnosti (*a priori* i *a posteriori*) nisu bile precizno definirane i imale su ograničenja. Nakon uvođenja Kolmogorovljeve aksiomatike, funkcija vjerojatnosti i vjerojatnosni prostor su se mogli precizno definirati te njima rješavati zadatci. U srednjoj školi je vjerojatnost ograničena na diskretni vjerojatnosni prostor, uz iznimku geometrijske vjerojatnosti.

Učenici mogu naletiti na poteškoće u zadatcima zbog spomenutih miskoncepcija ili zbog nepotpunog znanja definicija i formula. Npr. česta greška je krivo korištenje pravila zbroja: „Ako gledamo događaj A ili događaj B, vjerojatnosti događaja se zbrajaju" te krivo korištenje formule presjeka: „Ako gledamo događaj A i događaj B, vjerojatnosti događaja se množe." Još jedna česta greška je netočno definiranje ili nerazumijevanje prostora elementarnih događaja. Prostor elementarnih događaja može biti konačan ili beskonačan, prebrojiv ili neprebrojiv, a ovisno o prostoru se mijenja način računanja vjerojatnosti. Npr. u paradoksu Montya Halla, učenici se mogu zbuniti jer pomisle da se prostor promijenio usred zadatka pa time utjecao na vjerojatnost događaja. U geometrijskoj vjerojatnosti učenici se mogu zbuniti kada vide da je vjerojatnost odabiranja točke u ravnini jednaka nuli.

Od gradiva srednje i osnovne škole smo obradili teme: klasične definicije vjerojatnosti, aksiomi vjerojatnosti, formula zbroja i suprotnog događaja, nezavisnost, ponavljanje pokusa, uvjetna vjerojatnost, formula potpune vjerojatnosti i geometrijska vjerojatnost. Uz svaku temu smo naveli poteškoće koje su mogu javiti vezane za tu temu.

Na kraju rada smo napisali nastavne aktivnosti kojima bi mogli potaknuti učenike na razmišljanje o svojem načinu razmišljanja te pomoći im uočiti vlastite miskoncepcije. Većina aktivnosti se mogu provesti kao teorijsko rješavanje zadatka, a zatim rješavanje kao eksperiment, što odgovara vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori*. Uspoređivanjem rezultata učenici mogu uočiti greške u razmišljanju. Pokusi se ne moraju nužno provoditi uživo, nego pomoću računalnih simulacija. Time učenici mogu vidjeti uvjet koji se javlja u vjerojatnosti *a posteriori*. Paradoksi navedeni u radu se mogu provesti kao eksperimentalne aktivnosti koje uključuju cijeli razred.

Na kraju poglavlja u zadnjoj aktivnosti su navedeni konkretni zadatci iz istraživanja koja su pokušala pomoći učenicima prevladati miskoncepcije, odnosno pristranost jednakoj vjerojatnosti i pristranost reprezentativnosti.

Summary

In the Republic of Croatia, probability is covered in primary and secondary schools. In doing so, students encounter conceptual difficulties which are specific to probability.

Conceptual difficulties differ from lack of knowledge in that they represent a profound misunderstanding of the concept in probability and are difficult to overcome. That is why we can call them misconceptions. The misconceptions that occur most often in probability are equiprobability bias, representativeness bias and outcome orientation.

Equiprobability bias is a student's tendency to automatically assume that in an experiment all events are equally probable, although there is no reason to do so. Representativeness bias is the tendency of students to expect that the results of an experiment must match a common pattern or a known pattern. Outcome orientation is the student's tendency to focus on the outcome of the experiment rather than the probability of the outcome of the experiment, thus refusing to accept that the experiment is random and believes that the outcome of the experiment may be influenced by an external factor.

Research shows that these misconceptions occur in all parts of education; primary and secondary school and in higher education. Possible misconceptions arise due to the student's reliance on intuition. Because a student may have encountered in life problems that occur in probability, the student can assess the probability of an event based on experience or feelings, rather then the mathematical logic behind solving the problem. In addition, the student can replace one question with another easier to answer, and thus get the wrong solution.

Misconceptions and reliance on intuition can be overcome by encountering tasks that lead students to think and question their thinking, because the student is often not even aware of how much he or she does not understand the material. One way to get students to think is to study paradoxes. This paper describes the birthday paradox, the Monty Hall paradox, the Bertrand paradox and the Simpson paradox. Some paradoxes can also be called problems or dilemmas, because the problem is not as much in the task as in the student's misconceptions. Other paradoxes are an example of contradictory statements coming from the same premises, so it is not a problem in the student but in the very definition of the task. Both types of paradoxes encourage students to think and focus on the definition of the problem.

In order for students to understand the solutions of the problems, a good understanding of probability is required. The second chapter in this paper deals with part of the probability theory in high school and elementary school. Mathematicians had difficulty in creating probability theory itself, because the classical definitions of probability (*a priori* and *a posteriori*) were not precisely defined and had limitations. After the introduction of Kolmogorov's axioms, the probability function and the probability space could be precisely defined and thus used for solving problems. In high school, probability is limited to a discrete probability space, with the exception of geometric probability.

Students may encounter difficulties in exercises due to the mentioned misconceptions or due to incomplete knowledge of definitions and formulas. Eg. a common mistake is the misuse of the sum formula: "If we look at event A or event B, the probabilities of the events add up" and the misuse of the intersection formula: "If we look at event A and event B, the probabilities of the events multiply." Another common mistake is to misdefine or misunderstand the space of elementary events or the sample space. The sample space can be countable or uncountable, finite or infinite, and depending on the space, the way of calculating probabilities changes. Eg. in the Monty Hall paradox, students may be confused because they think that sample space has changed in the middle of the task and thus affected the probability of the event. In geometric probability, students may be confused when they see that the probability of selecting a point in a plane is equal to zero.

From high school and elementary school materials, we covered topics: classical definitions of probability, axioms of probability, formula of sum and opposite events, independence of events, repetition of experiments, conditional probability, law of total probability and geometric probability. For each topic, we have listed student difficulties that may arise related to that topic.

At the end of the paper, we wrote teaching activities that could encourage students to think about their way of thinking and help them notice their own misconceptions. Most of the activities can be done as solving the problem theoreticaly and then as an experiment, which corresponds to the probabilities *a priori* and *a posteriori*. By comparing the results, students can spot their errors in thinking. The experiments do not necessarily have to be performed live, but using computer simulations. In this way, students can see the condition that must occur for the *a posteriori* probability. The paradoxes listed in the paper can be implemented as experimental activities involving the whole class.

At the end of the chapter in the last activity we mentioned specific tasks from research that tried to help students overcome equiprobability and representativeness.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 17. ožujka 1996. godine, a u istom gradu sam ostvarila svo dosadašnje obrazovanje. Završila sam Osnovnu školu Dragutina Tadijanovića 2010. godine, pa upisala matematički smjer u Gimnaziji Lucijana Vranjanina. Nakon završetka srednje škole 2014. godine sam upisala prvi izbor, preddiplomski studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.

Na preddiplomskom studiju sam otkrila velik interes za programiranje i računarstvo, pa sam 2018. godine upisala diplomski studij Matematika i informatika; nastavnički smjer.

Na zadnjoj godini studiranja sam postala član Studentskog Zbora PMF-a, pravobraniteljica na PMF-u i studentska predstavnica na nekoliko vijeća i time stekla raznolika iskustva. Iste godine (2020.) sam dobila Dekaničinu nagradu za izuzetan uspjeh na studiju.

Uz matematiku sam se konstantno kroz obrazovanje bavila likovnom umjetnosti u svim oblicima, ali s najvećim interesom u digitalnom i tradicionalnom slikarstvu.