# Metode dekompozicije domene

**Nužda, Patricia**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Patricia Nužda

# METODE DEKOMPOZICIJE DOMENA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, prosinac, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Ovaj diplomski želim posvetiti svojoj obitelji, osobama koji su najviše pomogli da dođem do ovoga.*

*Mojim dečkima: Alenu, Ianu i Noelu, s vama je sve moguće.*

*Najboljim roditeljima na svijetu, Dragici i Danku, i najboljoj sestri Emi.*

*Hvala vam na svemu.*

# Sadržaj

# Uvod

Najčešća jednadžba koju susrećemo u problemima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je Poissonova jednadžba:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f, \quad \text{za } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{u } \Omega \tag{1}$$

gdje je $\Omega$ otvorena domena u $\mathbb{R}^2$. Jednadžba (1) je zadovoljena samo za točke koje se nalaze u unutrašnjosti domene $\Omega$. Jednako bitni su i uvjeti koji moraju biti zadovoljeni na rubu $\Gamma$ od $\Omega$, ti uvjeti se nazivaju rubni uvjeti, a najčešći su:

1. Dirichletov uvjet $\quad u(x) = \phi(x)$
2. Neumannov uvjet $\quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0$
3. Cauchyjev uvjet $\quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \alpha(x)u(x) = \gamma(x)$

Za dani jedinični vektor $\vec{v}$, s komponentama $v_1$ i $v_2$, usmjerena derivacija $\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}$ definirana je

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\vec{v}) - u(x)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)v_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)v_2 \tag{2}$$

Metode dekompozicija su zapravo tehnike koje se oslanjaju na pravilo podijeli pa vladaj. Početni koncepti su dobiveni iz parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a u ovom radu gledat ćemo to iz kuta linearne algebre. Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{3}$$

se naziva Laplaceov operator. Često nas problemi dovode do generalnijih eliptičkih operatora oblika

$$L = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \nabla \cdot (a\nabla) \tag{4}$$

gdje skalarna funkcija $a$ ovisi o koordinatama i može predstavljati neki specifičan parametar. Operator $\nabla$ je vektor koji se sastoji od komponenti $\frac{\partial}{\partial x_1}$ i $\frac{\partial}{\partial x_2}$, a kada djeluje na funkciju $u$, onda je to gradijent, te dobivamo

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Najjednostavniji način za aproksimaciju prve derivacije funkcije jedne varijable $u$ u točki $x$ je

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \tag{6}$$

za dovoljno mali $h$. Kada je $u$ derivabilna u $x$, onda je limes gornje aproksimacije kada $h$ teži ka 0 derivacija $u$ u $x$. Za funkciju koja je klase $C^4$ u susjedstvu $x$, imamo Taylorovu formulu

$$u(x+h) = u(x) + h\frac{du(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3u(x)}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(\xi_+)}{dx^4}, \tag{7}$$

za neki $\xi_+$ u intervalu $(x, x+h)$. Zato aproksimacija (6) zadovoljava

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + O(h^2). \tag{8}$$

Onda formulu (7) možemo zapisati tako da $h$ supstituiramo s $-h$

$$u(x-h) = u(x) - h\frac{du(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{6}\frac{d^3u(x)}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(\xi_-)}{dx^4}, \tag{9}$$

za neki $\xi_-$ u intervalu $(x-h, x)$. Ako zbrojimo jednadžbe (7) i (9), podijelimo to s $h^2$, te primijenimo teorem o međuvrijednostima za četvrti red derivacija koji kaže da postoji $\xi$ takav da je $\frac{d^4u(\xi)}{dx^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^4u(\xi_-)}{dx^4} + \frac{d^4u(\xi_+)}{dx^4}\right)$, onda dobivamo

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{d^4u(\xi)}{dx^4}, \tag{10}$$

gdje je $\xi_- \leq \xi \leq \xi_+$. Gornju formulu nazivamo centralnom diferencijom druge derivacije jer trenutak u kojem aproksimiramo derivaciju je centralni od točki korištenih u aproksimaciji. Aproksimacija (6) za prvu derivaciju je diferencija unaprijed. Također, može se koristiti i diferencija unazad tako da se $h$ u (6) supstituira s $-h$. Analogno prethodnom računu, iz te dvije formule možemo dobiti formulu za centralnu diferenciju:

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{11}$$

Ako aproksimaciju (10) iskoristimo za $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ i $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ u terminima Laplaceovog operatora, koristeći $h_1$ za određivanje veličine mreže za $x_1$, odnosno $h_2$ za $x_2$ dobivamo aproksimaciju reda točnosti 2

$$\begin{aligned} \Delta u(x) \approx & \frac{u(x_1+h_1,x_2)-2u(x_1,x_2)+u(x_1-h_1,x_2)}{h_1^2}+ \\ & \frac{u(x_1,x_2+h_2)-2u(x_1,x_2)+u(x_1,x_2-h_2)}{h_2^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

U posebnim slučajevima u kojima su $h_1$ i $h_2$ jednaki, te ih označimo s $h$, aproksimacija postane

$$\Delta u(x) \approx \frac{1}{h^2}[u(x_1+h,x_2)+u(x_1-h,x_2)+u(x_1,x_2+h)+u(x_1,x_2-h)-4u(x_1,x_2)], \tag{13}$$

centralna diferencija Laplacea u pet točaka. Promotrimo sada problem

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) &= f \quad \text{u } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma \end{aligned} \tag{14}$$

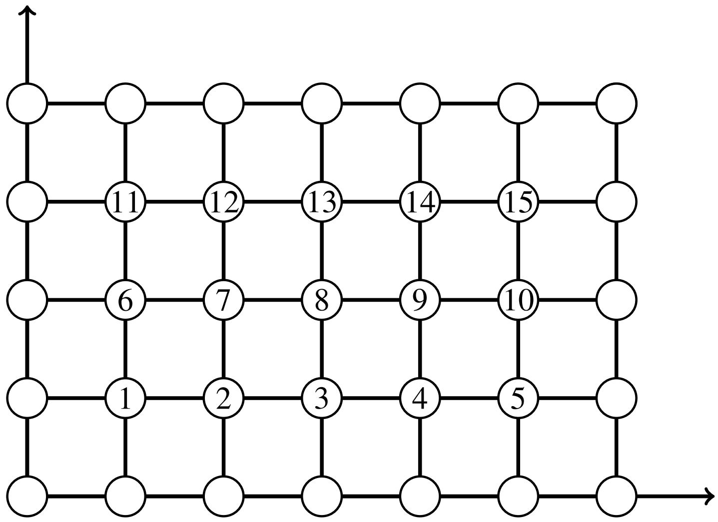
gdje je $\Omega$ pravokutna domena $(0,l_1)\times(0,l_2)$, a $\Gamma$ rub domene $\Omega$. Oba intervala domene mogu biti diskretizirana neformalno tako da uzmemo $n_1+2$ točaka za $x_1$, te $n_2+2$ za $x_2$ tako da

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= i\times h_1, \quad i=0,\dots,n_1+1 \\ x_{2,j} &= j\times h_2, \quad j=0,\dots,n_2+1 \end{aligned}$$

gdje je

$$h_1=\frac{l_1}{n_1+1} \quad h_2=\frac{l_2}{n_2+1}.$$

Kako su nam vrijednosti na rubu domene poznate, promatramo samo unutrašnje točke, odnosno točke oblika $(x_{1,i},x_{2,j})$ gdje su $0<i<n_1$ i $0<j<n_2$. Točke označavamo od dna prema vrhu, jednu po jednu horizontalnu liniju. To označavanje nazivamo prirodnim poretkom.




Slika 0.1: Prirodni poredak nepoznanica

U slučaju kada je $h_1 = h_2 = h$, matrica ima sljedeću blok strukturu

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} B & -I & \\ -I & B & -I \\ & -I & B \end{pmatrix} \quad \text{gdje je} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Promotrimo problem Laplaceove jednadžbe na domeni $\Omega$. Metode koje koriste dekompoziciju domene pokušati će riješiti problem na cijeloj domeni $\Omega$ pomoću rješenja problema na poddomenama $\Omega_i$ gdje je

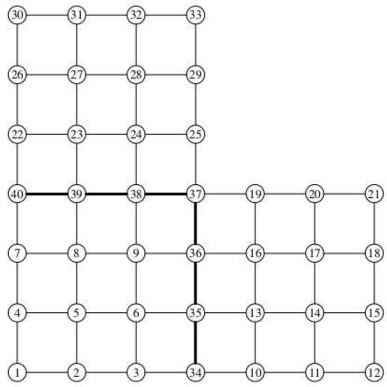
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{s} \Omega_i.$$

Nas će najviše zanimati Dirichletov rubni uvjet gdje ćemo dobiti $s$ Poissonovih jednadžbi. Ako znamo rješenje na rubovima onda znamo riješiti te Poissonove jednadžbe i time dobiti rješenje za unutarnje točke. Kako bi ukazali na probleme i tehnike kojima ćemo se baviti promotrimo rješavanje problema:

$$\Delta u = f \;\; na \;\; \Omega$$

$$u = u_\Gamma \;\; na \;\; \Gamma = \partial\Omega$$

Metode dekompozicija domena se implicitno ili eksplicitno baziraju na različitim načinima odnosa prema nepoznanicama na granicama između dviju poddomena. Pretpostavimo da je dani problem diskretiziran s centralnim diferencijama. Označimo vrhove kao na slici (0.2)




Slika 0.2: Dekompozicija domene

gdje uočavamo da su vrhovi na granicama označeni posljednji. Za opće particioniranje na $s$ poddomena linearni sustav je oblika:

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & E_1 \\ & B_2 & & & E_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & B_s & E_s \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_s & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_s \\ g \end{pmatrix} \tag{15}$$

Gdje $x_i$ predstavlja podvektor nepoznanica koji su u unutrašnjosti poddomene $\Omega_i$, a $y$ vektor svih nepoznanica na granicama. Možemo to napisati i u jednostavnijoj formi:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad \text{gdje je} \quad A = \begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix} \tag{16}$$

gdje $E$ predstavlja poddomenu u odnosu na granice iz gledišta poddomena, a $F$ granice u odnosu na poddomenu iz gledišta graničnih vrhova. Promatrat ćemo tipove particioniranja i tipove tehnika koje možemo koristiti za dekompoziciju domena. Za oba slučaja koristit ćemo reprezentaciju pomoću grafova. Schwarzove alternirajuće metode alterniraju između poddomena rješavajući novi problem na jednoj poddomeni u svakoj alteraciji s rubnim uvjetima izmijenjenima pomoću posljednjeg rješenja na ostalim poddomenama. U toj tehnici dopuštamo da se poddomene sijeku. Tehnike dekompozicije domena se razlikuju po četiri obilježja:

1. *Tip particioniranja*
   Da li particioniranje provodimo po bridovima, vrhovima ili elementima?
   Da li je unija poddomena jednaka originalnoj domeni ili njenom nadskupu?

2. *Preklapanje poddomena*
   Da li dopuštamo preklapanje ili ne? Ako da, koliko?

3. *Procesuiranje vrijednosti na granicama*
   Da li koristimo metodu Schurovog komplementa? Da li trebamo izmijeniti vrijednosti na granicama?

4. *Rješenja na poddomenama*
   Da li trebamo riješiti probleme na poddomenama egzaktno ili aproksimativno uz pomoć iterativne metode?

Općenito metode ćemo podijeliti u četiri skupine:

1. *Direktne metode*

2. *Schwarzove alternirajuće metode*

3. *Metode bazirane na prekondicioniranju sustava Schurovog komplementa*

4. *Metode za rješavanje sustava s matricom A koristeći prekondicioniranje bazirano na konceptu dekompozicije domene*

# Poglavlje 1

# Diretkno rješenje i Schurov komplement

## 1.1 Blok Gaussova eliminacija

Ako imamo linearni sustav oblika (15) uz pretpostavku da je $B$ regularna matrica

$$\begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Bx + Ey \\ Fx + Cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

onda dobivamo vrijednost nepoznanice $x$:

$$Bx + Ey = f$$

$$x = B^{-1}(f - Ey). \tag{1.1}$$

Ako uvedemo tu supstituciju u drugu jednadžbu dobivamo reducirani sustav:

$$(C - FB^{-1}E)y = g - FB^{-1}f \tag{1.2}$$

gdje matricu ovog sustava označavamo sa:

$$S = C - FB^{-1}E \tag{1.3}$$

i nazivamo matrica Schurovog komplementa. Sada se metoda rješavanja može provesti u tri koraka:

1. Izračunati desnu stranu, $g - FB^{-1}f$, za sustav Schurovog komplementa
2. Riješiti reducirani sustav Schurovog komplementa $Sy = g - FB^{-1}f$ kako bismo dobili rješenje na rubu, $y$

3. Supstituirati dobiveni $y$ u jednadžbu za $x$ rješavajući (1.1) i time dobijemo nepoznanice unutrašnjosti

Sada možemo iskoristiti to što je matrica $B$ blok dijagonalna gdje je svaki blok povezan s određenom poddomenom. Onda je jednostavno dobiti inverz:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{\Omega_1}^{-1} & & & \\ & B_{\Omega_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\Omega_s}^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Reducirani sustav (1.3) možemo riješiti iterativnim metodama iz Krylovljevih potprostora. Pozitivna strana je odbacivanje skupog računa s eksplicitnom formulacijom Schurovog komplementa, $S$, jer trebamo samo operacije množenja matrica s vektorom, $y = Sx$.

**Teorem 1.1.1.** ***Simetrična pozitivna definitnost Schurovog komplementa***
*Neka su $n, m \in \mathbb{N}$*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

*simetrična pozitivno definitna matrica s blokovima $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Onda je Schurov komplement*

$$S := C - B^\top A^{-1} B \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

*također simetrična pozitivno definitivna.*

*Dokaz.* Simetričnost proizlazi direktno iz simetrije matrice $M$, dakle $A = A^\top$, $C = C^\top$ i $A^{-1} = (A^{-1})^\top$.

$$S^\top = C^\top - (B^\top A^{-1} B)^\top = C^\top - B^\top (A^{-1})^\top B = C - B^\top A^{-1} B = S$$

Preostaje pokazati da je $S$ pozitivno definitna. Neka je $0 \neq z \in \mathbb{R}^m$ proizvoljan vektor i

$y := -A^{-1}Bz \in \mathbb{R}^n$. Kako je $M$ pozitivno definitna i $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
0 < \begin{pmatrix} y^\top & z^\top \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^\top & z^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\
&= y^\top Ay + y^\top Bz + z^\top B^\top y + z^\top Cz \\
&= y^\top Ay + 2y^\top Bz + z^\top Cz \\
&= (-A^{-1}Bz)^\top A(-A^{-1}Bz) + 2(-A^{-1}Bz)^\top Bz + z^\top Cz \\
&= z^\top B^\top (A^{-1})^\top AA^{-1}Bz - 2z^\top B^\top (A^{-1})^\top Bz + z^\top Cz \\
&= z^\top Cz - z^\top B^\top (A^{-1})^\top Bz \\
&= z^\top Cz - z^\top B^\top A^{-1}Bz \\
&= z^\top (C - B^\top A^{-1}B)z \\
&= z^\top Sz.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Kako nismo napravili nikakve dodatne pretpostavke na $z$ Schurov komplement $S$ je pozitivno definitna matrica. □

Prema tome je Schurov komplement $S$ simetrična pozitivno definitna ako je $A$ simetrična pozitivno definitna. Metoda konjugiranih gradijenta je najbolji pristup problemu $Sy = g - FB^{-1}f$ u slučaju ako je $S$ simetrična pozitivno definitna, a ako nije simetrična onda mogu funkcionirati GMRES ili BiCGstab metode. Možemo elegantnije zapisati rješenje za linearni sustav s $B$. Definiramo $E' = B^{-1}E$, $f' = B^{-1}f$. Gdje matricu $E'$ i vektor $f'$ trebamo u koracima 1. i 2. algoritma. Prepravimo 3. korak kao $x = B^{-1}f - B^{-1}Ey = f' - E'y$. Tako dobijemo algoritam blok Gaussove eliminacije:

**Algoritam 1.1.2.** ***Blok Gaussova eliminacija***

1. *Riješi $BE' = E$ i $Bf' = f$ za $E'$ i $f'$, redom.*
2. *Izračunaj $g' = g - Ff'$.*
3. *Izračunaj $S = C - FE'$.*
4. *Riješi $Sy = g'$.*
5. *Izračunaj $x = f' - E'y$*

U praktičnoj implementaciji sve su $B_i$ matrice faktorizirane i pomoću njih se rješavaju pripadni sustavi. Općenito mnogi stupci od $E_i$ su nula i oni odgovaraju granicama koji nisu susjedni s poddomenom $i$. Zato je najjefikasniji kod baziran na danom algoritmu onaj koji prvo detektira stupce koji nisu nula.

## 1.2 Svojstva Schurovog komplementa

Želimo promotiriti poveznicu Schurovog komplementa i standardne Gaussove eliminacije. Krenuti ćemo s blok LU faktorizacijom matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ FB^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ 0 & S \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Iz toga slijedi da ako je $A$ regularna, pa je po tome i matrica $S$ regularna, tj Schurov komplement. $S$ je zapravo onda (2, 2) blok u $U$ dijelu LU faktorizacije od $A$. Odredimo inverz od $A$ pomoću gornjeg izraza.

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix}^{-1} &= \left( \begin{pmatrix} I & 0 \\ FB^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ 0 & S \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}ES^{-1} \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -FB^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1}ES^{-1}FB^{-1} & -B^{-1}ES^{-1} \\ -S^{-1}FB^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Onda je $S^{-1}$ (2, 2) blok u blok inverzu matrice $A$. Ako je $A$ simetrična pozitivno definitna, onda je i $A^{-1}$, analogno vrijedi i za $S$ i $S^{-1}$.

**Propozicija 1.2.1.** *Neka je A regularna, oblika* (1.6)*, takva da je podmatrica B regularna. Neka je $R_y$ operator restrikcije na varijable na granicama.*

$$R_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y, \tag{1.8}$$

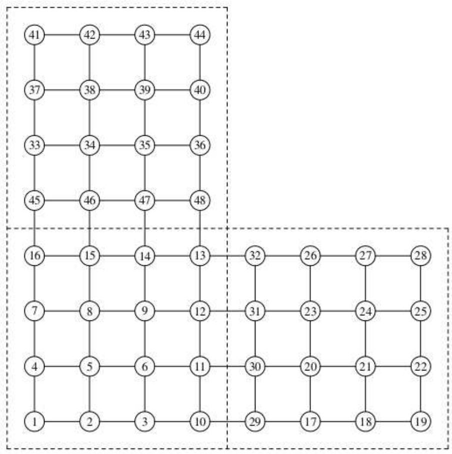
*gdje je operator restrikcije $R_y$ dimenzije $n_y \times n$, gdje je $n_y$ broj graničnih varijabli i oblika $R_y = [0 \;\; I]$. Onda vrijedi:*

1. *Schurov komplement, matrica $S$ je regularna.*
2. *Ako je $A$ simetrična pozitivno definitna matrica onda je i $S$ simetrična pozitivno definitna matrica.*
3. *Za svaki y vrijedi $S^{-1}y = R_y A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.*

Iz prve tvrdnje slijedi da metoda koja koristi gornji algoritam blok Gaussove eliminacije je moguća jer je $S$ regularna. Kada je A pozitivno definitna algoritam kao što je metoda konjugiranih gradijenta se može koristiti za rješavanje reduciranog sustava (1.2), to je posljedica druge tvrdnje propozicije. Treća tvrdnja daje relaciju koja dopušta definiticiju prekondicioniranja za $S$ baziranu na tehnikama rješavanja s matricom $A$.

## 1.3 Schurov komplement za particije bazirane na vrhovima

Particioniranje domene na slici 0.2 bazirano na vrhovima prikazano je na slici 1.1:




Slika 1.1: Diskretizacija problema

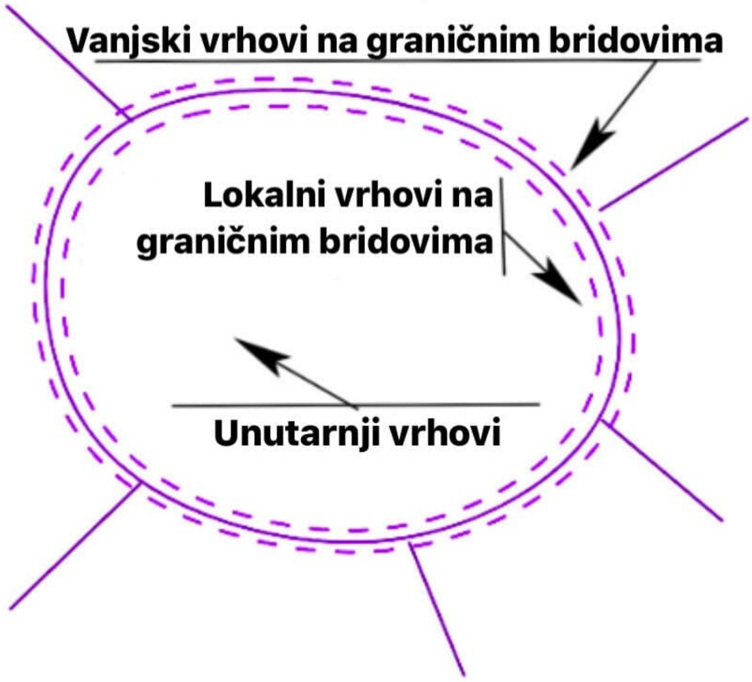
Sve bridove koji povezuju vrhove koji ne pripadaju istim poddomenama nazivat ćemo granični bridovi. Ako se poddomene preklapaju onda preklapajući vrh, odnosno brid, pripada istoj poddomeni. Granični bridovi su samo oni koji spajaju vrh s vrhom koji nije već u istoj poddomeni. Granični vrhovi su oni vrhovi u danoj poddomeni koji se nalaze na graničnim bridovima. Na slici (1.1) vidimo da su granični vrhovi označeni posljednji u svakoj poddomeni. Broj graničnih vrhova je otprilike dvostruko veći od onih u particijama baziranima na bridovima koja je prikazana na (0.2). Iz perspektive poddomena razlikujemo tri vrste nepoznanica:

1. nepoznanice u unutrašnjosti domene

2. lokalne nepoznanice na graničnim bridovima

3. vanjske nepoznanice na graničnim bridovima

Nepoznanice u unutrašnjosti su povezane samo s lokalnim nepoznanicama, lokalne nepoznanice na graničnim bridovima su povezane s vanjskim i lokalnim nepoznanicama, a vanjske nepoznanice na graničnim bridovima su one koje pripadaju drugim poddomenama i povezane su s lokalnim nepoznanicama na graničnim bridovima. Promotrimo sustav




Slika 1.2: Nepoznanice

Schurovog komplementa s novim oznakama. Možemo ga zapisati slično kao onom baziranom na bridovima, jedino što moramo je staviti sve varijable na graničnim bridovima iz jedne poddomene kao posljednje za tu poddomenu. Ako uzmemo da imamo 3 poddomene, tj. $s = 3$, kao u našem primjeru (1.1), onda matrica $A$ ima blok strukturu:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_3 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

U svakoj poddomeni varijable su oblika:

$$z_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

gdje su $x_i$ unutarnji vrhovi, a $y_i$ granični vrhovi poddomene $i$. Lokalnu matricu $A_i$ na poddomeni $\Omega_i$ možemo zapisati:

$$A_i = \begin{pmatrix} B_i & E_i \\ F_i & C_i \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

gdje su $B_i$ matrice koje se odnose na unutarnje vrhove poddomene $\Omega_i$, $E_i$ i $F_i$ se odnose na povezanost unutarnjih s graničnim vrhovima, a $C_i$ je lokalna matrica graničnih bridova te predstavlja odnose između graničnih bridova. Uočimo da imamo dodatnu strukturu blokova $A_{ij}$, za $i \neq j$. Gdje svaki od podblokova je nul-blok u dijelu koji se odnosi na $x_j$ i kod jednadžbi za $x_i$. Zato je $A_{ij}$ oblika:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Sada možemo zapisati lokalni linearni sustav na poddomeni $\Omega_i$:

$$\begin{aligned} B_i x_i + E_i y_i &= f_i \\ F_i x_i + C_i y_i + \sum_{j \in N_i} E_{ij} y_j &= g_i. \end{aligned} \tag{1.13}$$

$E_{ij} y_j$ je izraz koji doprinosi jednadžbi iz susjednih poddomena $\Omega_j$, a $N_i$ je skup svih poddomena koje graniče s poddomenom $\Omega_i$. Pretpostavimo da su $B_i$ regularne matrice onda iz prve jednadžbe dobivamo $x_i = B_i^{-1}(f_i - E_i y_i)$, a to nam daje u drugoj jednadžbi:

$$S_i y_i + \sum_{j \in N_i} E_{ij} y_j = g_i - F_i B_i^{-1} f_i \tag{1.14}$$

gdje $S_i$ nazivamo lokalnim Schurovim komplementom

$$S_i = C_i - F_i B_i^{-1} E_i. \tag{1.15}$$

Kada bi raspisali jednadžbu (1.14) po svim poddomenama $\Omega_i$, gdje $i = 1, \ldots, s$, dobili bismo sustav koji se odnosi samo na granične vrhove $y_j$, gdje $j = 1, \ldots, s$, i koji ima blok strukturu:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & E_{12} & E_{13} & \ldots & E_{1s} \\ E_{21} & S_2 & E_{23} & \ldots & E_{2s} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ E_{s1} & E_{s2} & E_{s3} & \ldots & S_s \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Dijagonalne matrice $S_i$ su općenito guste, dok su blokovi $E_{ij}$ općenito rijetke matrice, a mnoge od njih su i nul matrice. Posebno, $E_{ij} \neq 0$ samo ako poddomene $i$ i $j$ imaju barem jednu jednadžbu koja ih povezuje.

# Poglavlje 2

# Schwarzove izmjenične metode

Prve Schwarzove izmjenične metode koje su nastale 1870. sastojale su se od tri dijela:

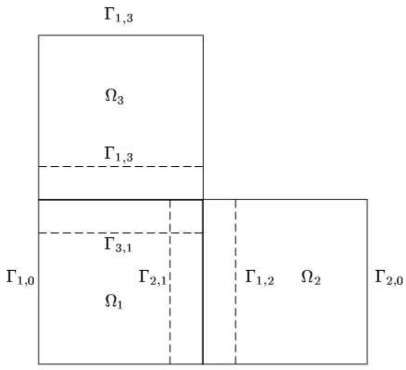
1. izmjena između dvije preklapajuće domene
2. rješavanje Dirichletovog problema na jednoj domeni u svakoj iteraciji
3. uzimanje rubnih uvjeta bazirano na posljednjem rješenju dobivenom iz druge domene.

To nazivamo multiplikativnom Schwarzovom metodom koja je suštinski vrlo slična blok Gauss-Saidelovoj iteraciji s preklapanjem definiranom pomoću projektora. Aditivna Schwarzova metoda definira se kao preklapajuće blok Jacobijeve metode.

.

## 2.1 Multiplikativna Schwarzova metoda

Ideja je da se na svakoj poddomeni sekvencijalno dolazi do rješenja koristeći trenutne rubne uvjete iz iteracija iz susjednih domena. Neka je rub poddomene $\Omega_i$ koja je sadržana i u poddomeni $\Omega_j$ označena sa $\Gamma_{i,j}$. Slika 2.1 je jedan primjer takve podijele. $\Gamma_i$ je granica poddomene $\Omega_i$ koja se sastoji od originalnog ruba označenog sa $\Gamma_{i,0}$ i $\Gamma_{i,j}$ granica, a $u_{i,j}$ je restrikcija rješenja $u$ na granicu $\Gamma_{i,j}$.




Slika 2.1: Primjer poddomena koje se preklapaju

Opišimo sada Schwarzovu izmjeničnu metodu:

**Algoritam 2.1.1.** ***Schwarzova izmjenična metoda***

1. *Odaberi inicijalnu aproksimaciju za rješenje u*
2. *Until konvergencija Do:*
3. *For $i = 1, \ldots, s$ Do:*
4. *Riješi $\nabla u = f$ na $\Omega_i$ sa $u = u_{i,j}$ na $\Gamma_{i,j}$*
5. *Prepravi vrijedonst $u$ na $\Gamma_{j,i}$, $\forall j$*
6. *EndDo*
7. *EndDo*

Algoritam prolazi kroz $s$ poddomena i riješava početnu jednadžbu koristeći u svakoj rubne uvjete dobivene iz posljednje vrijednosti $u$. Kako svaki podproblem možemo riješiti pomoću iterativne metode, možemo iskoristiti prednost da možemo odabrati dobro inicijalno rješenje. Prirodno je odabrati inicijalno rješenje danog podproblema kao posljednju aproksimaciju. Kako je naša lokalna matrica $A_i$ oblika (1.11) svako rješenje u 4. liniji algoritma je zapravo oblika:

$$u_i := u_i + \delta_i, \tag{2.1}$$

gdje korekcija $\delta_i$ riješava sustav:

$$A_i \delta_i = r_i, \tag{2.2}$$

a $r_i$ je lokalni dio posljednjeg globalnog rezidualnog vektora $b - Ax$, a gornji sustav predstavlja sustav povezan s problemom u 4. liniji algoritma. Neka je:

$$u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \delta_i = \begin{pmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \end{pmatrix}, r_i = \begin{pmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

onda je novo rješenje za trenutni korak algoritma:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i & E_i \\ F_i & C_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Nakon ovog koraka trebali bi izračunati novi rezidual $r$ kako bi mogli preći na poddomenu $\Omega_{i+1}$. Zapravo jedine komponente reziduala koje trebamo mijenjati su one na koje smo utjecali prethodnim korakom, odnosno trebamo izmijeniti rezidual $r_{yj}$ za svaku poddomenu $\Omega_j$ za koju je $i \in N_j$:

$$r_{yj} := r_{yj} - E_{ji}\delta_{yi}. \tag{2.5}$$

Ovo je implicitno izvođenje 5. linije algoritma. Kako smo pretpostavili da je matrica simetrična onda skup indeksa $j$ takvih da $i \in N_j$, odnosno $N_i^* = \{j \mid i \in N_j\}$, je identično $N_i$. Sada petlju koja počinje u 3. liniji, i koju nazivamo petljom domena, možemo zapisati drugačije:

**Algoritam 2.1.2.** ***Multiplikativna Schwarzova metoda - matrična forma***

1. *For* $i = 1, \ldots, s$ *Do:*
2. *Riješi* $A_i\delta_i = r_i$
3. *Izračunaj* $x_i := x_i + \delta_{xi}$*,* $y_i := y_i + \delta_{yi}$ *i stavi* $r_i := 0$
4. $\forall j \in N_i$ *izračunaj* $r_{yj} := r_{yj} - E_{ji}\delta_{yi}$
5. *EndDo*

Ako gledamo samo $y$ iteracije, algoritam podsjeća na Gauss-Seidelovu metodu na Schurovom komplementu (1.16).

**Teorem 2.1.3.** ***Chan Goovaertsov teorem***
*Neka je inicijalno rješenje* $\begin{pmatrix} x_i^{(0)} \\ y_i^{(0)} \end{pmatrix}$ *za Schwazovu metodu u svakoj poddomeni odabrano tako da*

$$x_i^{(0)} = B_i^{-1}[f_i - E_i y_i^{(0)}]. \tag{2.6}$$

*Onda su iteracije y dobivene u gornjem algoritmu identične onima dobivenima u Gauss-Seidelovim iteracijama primijenjenom na sustav Schurovog komplementa* (1.14).

*Dokaz.* Pokazat ćemo da s odabirom (2.6) $y$ komponente inicijalnih reziduala dobivene algoritmom su identične onima iz sustava Schurovog komlementa (1.14). Promotrimo relaciju (1.12) koja definira $E_{ij}$ iz blok strukture (1.9) globalne matrice. Uočimo da $A_{ij}u_j = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{ij}y_j \end{pmatrix}$ i iz (1.13) slijedi da je globalni sustav $y$ komponenti inicijalnih reziduala:

$$
\begin{aligned}
r_{yi}^{(0)} &= g_i - F_i x_i^{(0)} - C_i y_i^{(0)} - \sum_{j \in N_i} E_{ij} y_j^{(0)} \\
&= g_i - F_i B^{-1}[f_i - E_i y_i^{(0)}] - C_i y_i^{(0)} - \sum_{j \in N_i} E_{ij} y_j^{(0)} \\
&= g_i - F_i B^{-1} f_i - S_i y_i^{(0)} - \sum_{j \in N_i} E_{ij} y_j^{(0)}.
\end{aligned}
$$

To je upravo izraz rezidualnog vektora povezanog sa sustavom Schurovog komplementa (1.14) s inicijalnim rješenjem $y_i^{(0)}$. Uočimo da je inicijalna aproksimacija za rješenje odabrana tako da je $r_{xi}^{(0)} = 0, \forall i$. Kako mijenjamo samo $y$ komponente rezidualnog vektora po 4. liniji algoritma ovo svojstvo vrijedi kroz cijelu iteraciju. Ako ažuriramo sustav (2.4) i koristimo relaciju (1.7) dobivamo:

$$y_i := y_i + S_i^{-1} r_{yi}. \tag{2.7}$$

Time smo dobili korak Gauss-Seidelovog prolaska na sustavu (1.16), gdje algoritam za blok Gauss-Seidelovu iteraciju glasi:

1. Until konvergencija Do:
2. For $i = 1, ..., s$ Do:
3. Riješi $S_i z_{yi} = r_{yi}$
4. Definiraj $y_i := y_i + z_{yi}$
5. EndDo
6. EndDo

$\square$

Promotrimo sada algoritam u terminima projektora. Neka je $\mathcal{S}_i$ skup indeksa takvih da

$$\mathcal{S}_i = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_i}\}, \tag{2.8}$$

gdje su indeksi $j_k$ u unutrašnjosti poddomene $\Omega_i$. Uočimo da unija $\mathcal{S}_i$ čini skup indeksa takvih da

$$\bigcup_{i=1,\dots,s} \mathcal{S}_i = \{1, \dots, n\}$$

gdje $\mathcal{S}_i$ i $\mathcal{S}_j$, za $i \neq j$, nisu nužno disjunktni. Neka je matrica $R_i$ je operator restrikcije cijele domene $\Omega$ na poddomenu $\Omega_i$, dimenzije $n_i$. $R_i x$ pripada $\Omega_i$ i sadrži samo one dijelove vektora $x$ koje su u $\Omega_i$. Reprezentiran je s $n_i \times n$ matricom nula i jedinica. Neka je $R_i$ operator restrikcije na $n_i \times n$ matrici formiranoj transponiranjem stupca $e_j$ iz matrice identiteta $n \times n$, gdje se indeks $j$ nalazi u skupu indeksa $\mathcal{S}_i$. Onda je $A_i = R_i A R_i^\top$ restrikcija matrice $A$ na poddomenu $\Omega_i$, gdje je $R_i^\top$ operator produljenja koji uzima varijable iz $\Omega_i$ te ih proširuje do ekvivalentne varijable u $\Omega$. Sada možemo provesti algoritam multiplikativne Schwazove metode na lokalnoj matrici $A_i$.

1. For $i = 1, \dots, s$ Do
2. $x := x + R_i^\top A_i^{-1} R_i (b - Ax)$
3. EndDo

gdje drugi korak možemo zapisati:

$$x_{new} = x + R_i^\top A_i^{-1} R_i (b - Ax). \tag{2.9}$$

Ako je greška $d = x_* - x$, gdje je $x_*$ egzaktno rješenje, onda je $b - Ax = A(x_* - x)$, te u svakoj iteraciji moramo izračunati novu grešku:

$$d_{new} = d - R_i^\top A_i^{-1} R_i A d. \tag{2.10}$$

Početna greška je $d_0 = x_* - x_0$, pa u svakoj poditeraciji dolazimo do novog vektora greške koji zadovoljava:

$$d_i = d_{i-1} - R_i^\top A_i^{-1} R_i A d_{i-1}, \tag{2.11}$$

gdje je $i = 1, \dots, s$. Iz toga slijedi da je

$$d_i = (I - P_i) d_{i-1} \tag{2.12}$$

gdje je

$$P_i = R_i^\top A_i^{-1} R_i A. \tag{2.13}$$

Operator $P_i$ je projektor jer vrijedi

$$(R_i^\top A_i^{-1} R_i A)^2 = R_i^\top A_i^{-1} (R_i A R_i^\top) A_i^{-1} R_i A = R_i^\top A_i^{-1} R_i A. \tag{2.14}$$

Jedan prolazak kroz algoritam nam daje grešku

$$d_s = (I - P_s)(I - P_{s-1})\dots(I - P_1)d_0. \tag{2.15}$$

Kasnije ćemo koristiti oznaku

$$Q_s = (I - P_s)(I - P_{s-1})\dots(I - P_1) = \prod_{i=s}^{1}(I - P_i). \tag{2.16}$$

## 2.2 Prekondicioniranje multiplikativnom Schwarzovom metodom

Kako je multiplikativna Schwarzova metoda ekvivalentna blok Gauss-Seidelovoj iteraciji možemo zapisati jedan prolazak kroz multiplikativni Schwarzov algoritam u obliku iteracije globalne fiksne točke, $x_{new} = Gx + f$. Ovo je iteracija fiksne točke za rješavanje prekondicioniranog sustava $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ gdje je $M$ matrica prekondicioniranja, a $G = I - M^{-1}A$. Kako bi interpretirali operaciju s $M^{-1}$ identificirajmo vektor greške dobiven iteracijom (2.15), gdje je $x_{new} - x_* = Q_s(x - x_*)$, odnosno

$$x_{new} = Q_s x + (I - Q_s)x_*.$$

Iz toga slijedi da je

$$G = Q_s \quad f = (I - Q_s)x_*. \tag{2.17}$$

Uočimo da je onda prekondicionirana matrica $M^{-1}A = I - Q_s$.

**Propozicija 2.2.1.** *Multiplikativna Schwarzova metoda je ekvivalentna iteraciji fiksne točke za prekondicionirani problem*

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b,$$

*gdje je*

$$\begin{aligned} M^{-1}A &= I - Q_s \\ M^{-1}b &= (I - Q_s)x_* = (I - Q_s)A^{-1}b. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Transformirana desna strana u propoziciji nam nije poznata eksplicitno pošto je izražena u smislu egzaktnog rješenja, iako možemo naći metodu koja će to izračunati. Drugim riječima, možemo računati s $M^{-1}$ bez poziva $A^{-1}$, a uz to uočimo $M^{-1} = (I - Q_s)A^{-1}$. Pokažimo da se $M^{-1}$, to jest $M^{-1}A$, mogu izračunati rekurzivno.

**Lema 2.2.2.** *Definirajmo matrice*

$$Z_i = I - Q_i \tag{2.19}$$

$$M_i = Z_i A^{-1} \tag{2.20}$$

$$T_i = P_i A^{-1} = R_i^\top A_i^{-1} R_i \tag{2.21}$$

*gdje $i = 1, \dots, s$. Onda je $M^{-1} = M_s$, $M^{-1}A = Z_s$, te matrice $Z_i$ i $M_i$ zadovoljavaju rekurzivne relacije:*

$$\begin{aligned} Z_1 &= P_1 \\ Z_i &= Z_{i-1} + P_i(I - Z_{i-1}), \quad i = 2, \dots, s \end{aligned} \tag{2.22}$$

*i*

$$\begin{aligned} M_1 &= T_1 \\ M_i &= M_{i-1} + T_i(I - AM_{i-1}), \quad i = 2, \dots, s. \end{aligned} \tag{2.23}$$

*Dokaz.* Jasno je iz definicija (2.19) i (2.20) da je $M_s = M^{-1}$, te da je $M_1 = T_1$, $Z_1 = P_1$. U slučajevima kada je $i > 1$, onda je po definiciji $Q_i$ i $Q_{i-1}$

$$Z_i = I - (I - P_i)(I - Z_{i-1}) = P_i + Z_{i-1} - P_i Z_{i-1} \tag{2.24}$$

pa smo time dobili relaciju (2.22). Kada pomnožimo (2.24) s desne strane s $A^{-1}$ dobivamo

$$M_i = T_i + M_{i-1} - P_i M_{i-1}.$$

Kada zapišemo $P_i$ pomoću $T_i A$ dobivamo (2.23). □

Iskoristimo sada (2.22)

$$\begin{aligned} Z_1 &= P_1 = P_1 Q_0 \\ Z_2 &= Z_1 + P_2(I - Z_1) = P_1 Q_0 + P_2(I - P_1 Q_0) = P_1 Q_0 + P_2(I - P_1) = P_1 Q_0 + P_2 Q_1 \\ Z_3 &= Z_2 + P_3(I - Z_2) = P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + P_3(I - P_1 Q_0 - P_2 Q_1) \\ &= P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + P_3(I - P_1 - P_2 Q_1) = P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + P_3(I - P_1 - P_2(I - P_1)) \\ &= P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + P_3(I - P_1 - P_2 + P_1 P_2) = P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + P_3(I - P_2)(I - P_1) \\ &= P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + P_3 Q_2 \\ &\vdots \\ Z_i &= P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + \cdots + P_i Q_{i-1} \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili definiciju (2.16). Uočimo da smo time dobili bitnu relaciju

$$Z_i = \sum_{j=1}^{i} P_j Q_{j-1} \quad \text{gdje je} \quad Q_0 = I. \tag{2.25}$$

Ako relaciju (2.23) pomnožimo zdesna s vektorom $v$ i ako vektor $M_i v$ označimo sa $z_i$, onda iz toga slijedi rekurzija:

$$z_i = z_{i-1} + T_i(v - Az_{i-1}).$$

Kako je $z_s = (I - Q_s)A^{-1}v = M^{-1}v$ znači da $M^{-1}v$ možemo dobiti, uz proizvoljan vektor $v$, pomoću algoritma multiplikativnog Schwarzovog prekondicioniranja:

**Algoritam 2.2.3.** ***Multiplikativno Schwarzovo prekondicioniranje***

1. *Ulaz: v; Izlaz:* $z = M^{-1}v$
2. $z := T_1 v$
3. *For* $i = 2, \dots, s$ *Do:*
4. $z := z + T_i(v - Az)$
5. *EndDo*

Sa sličnim argumentom možemo zapisati metodu koja računa vektore oblika $z = M^{-1}Av$:

**Algoritam 2.2.4.** ***Primjena operatora prekondicioniranog multiplikativnom Schwarzovom metodom***

1. *Ulaz: v; Izlaz:* $z = M^{-1}Av$
2. $z := P_1 v$
3. *For* $i = 2, \dots, s$ *Do*
4. $z := z + P_i(v - z)$
5. *EndDo*

Zaključujemo da je multiplikativna Schwarzova metoda ekvivalentna rješavanju prekondicioniranog sustava

$$(I - Q_s)x = g \tag{2.26}$$

gdje $z = (I - Q_s)v$ možemo izračunati pomoću algoritma 2.2.4, a $g = M^{-1}b$ pomoću 2.2.3. Oba ta algoritma možemo koristiti u GMRES-u. Prvo kako bi dobili desnu stranu, to jest $g$, prekondicioniranog sustava (2.26), trebamo primijeniti algoritam 2.2.3 na originalnu desnu stranu, odnosno $b$. Nakon toga GMRES primijenimo na (2.26) u kojem prekondicionirane operacije $I - Q_s$ dobivamo pomoću algoritma 2.2.4.

## 2.3 Aditivna Schwarzova metoda

Aditivna Schwarzova metoda slična je blok Jacobijevoj iteraciji, te se sastoji od ažuriranja svih novih komponenti pomoću istog reziduala. Razlikuje se od multiplikativne Schwarzove metode jer komponente u svakoj poddomeni nisu izmijenjene dok sve promijene kroz sve domene nisu dovršene. Osnovna aditivna Schwarzova iteracija glasi:

1. For $i = 1, \dots, s$ Do
2. Izračunaj $\delta_i = R_i^\top A_i^{-1} R_i (b - Ax)$
3. EndDo
4. $x_{new} = x + \sum_{i=1}^{s} \delta_i$

Nova aproksimacija nakon prolaska kroz algoritam je

$$x_{new} = x + \sum_{i=1}^{s} R_i^\top A_i^{-1} R_i (b - Ax).$$

Svaki prolazak kroz petlju iznova definira druge komponente nove aproksimacije i podproblemi petlje međusobno ne ovise jedan o drugome. Sada ćemo dobiti matricu prekondicioniranja. Koristeći oznake za matricu iz prošlog poglavlja, dobivamo pomoću nove iteracije relaciju

$$x_{new} = x + \sum_{i=1}^{s} T_i (b - Ax) = \left( I - \sum_{i=1}^{s} P_i \right) x + \sum_{i=1}^{s} T_i b.$$

Koristeći istu analogiju kao u prethodnom poglavlju, ova iteracija odgovara iteraciji fiksne točke $x_{new} = Gx + f$ gdje je

$$G = I - \sum_{i=1}^{s} P_i, \quad f = \sum_{i=1}^{s} T_i b.$$

Uz relaciju između $G$ i matrice prekondicioniranja $M$, $G = I - M^{-1}A$, dolazimo do

$$M^{-1}A = \sum_{i=1}^{s} P_i,$$

te

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^{s} P_i A^{-1} = \sum_{i=1}^{s} T_i.$$

Tako dolazimo do metode za računanje primjene operatora $M^{-1}$, odnosno do algoritma za aditivno Schwarzovo prekondicioniranje

**Algoritam 2.3.1.** ***Aditivno Schwarzovo prekondicioniranje***

1. *Ulaz:* $v$*; Izlaz:* $z = M^{-1}v$
2. *For* $i = 1, \dots, s$ *Do:*
3. *Izračunaj* $z_i = T_i v$
4. *EndDo*
5. *Izračunaj* $z := z_1 + z_2 + \cdots + z_s$

Metoda za $M^{-1}Av$ je identična, samo što $T_i$ u 3. liniji algoritma trebamo zamijeniti s $P_i$.

## 2.4 Konvergencija

Pretpostavimo da je $A$ simetrična pozitivno definitna matrica. Projektori $P_i$ definirani kao (2.13) važni su za teoriju konvergencije i za aditivnu i multiplikativnu Schwarzovu metodu. Kako je $A$ simetrična pozitivno definitna matrica onda definiramo $A$-skalarni produkt:

$$(x, y)_A = (Ax, y) \quad \forall x, y$$

Normu povezanu s danim $A$-skalarnim produktom nazivamo $A$-norma. Ključno je da su projektori $P_i$ ortogonalni s obzirom na $A$-skalarni produkt. Dovoljno je pokazati da je $P_i$ hermitski s obzirom na $A$-skalarni produkt

$$(P_i x, y)_A = (AR_i^\top A_i^{-1} R_i Ax, y) = (Ax, R_i^\top A_i^{-1} R_i Ay) = (x, P_i y)_A. \tag{2.27}$$

Promotrimo sada operator

$$A_J = \sum_{i=1}^{s} P_i. \tag{2.28}$$

Kako je svaki $P_i$ hermitski s obzirom na $A$-skalarni produkt slijedi da je i njihova suma hermitska, odnosno $A_J$ je $A$-hermitski.

**Propozicija 2.4.1.** *Neka je $H$ $A$-hermitska matrica. Onda su sve svojstvene vrijednosti matrice $H$ realne.*

*Dokaz.* Neka je $\lambda$ proizvoljna svojstvena vrijednost marice $H$, a $x$ pripadni svojstveni vektor. Onda je:

$$\lambda(x, x)_A = (\lambda x, x)_A = (Hx, x)_A = (x, Hx)_A = (x, \lambda x)_A = \bar{\lambda}(x, x)_A.$$

Dijeljenjem s $(x, x)_A$, različitim od nule, jer je $x$ svojstveni vektor, dobivamo $\lambda = \bar{\lambda}$, odnosno $\lambda$ je realni broj. □

Proučimo sada direktnu posljedicu toga da su $P_i$ projektori.

**Teorem 2.4.2.** *Najveća svojstvena vrijednost $A_J$ je takva da*

$$\lambda_{max}(A_J) \leq s,$$

*gdje je $s$ broj poddomena.*

*Dokaz.* Za bilo koju matričnu normu, $\lambda_{max}(A_J) \leq ||A_J||$. Definirajmo $A$-normu:

$$||B||_A = max_{||z||_A} ||Bz||_A.$$

Posebno, ako koristimo $A$-normu imamo

$$\lambda_{max}(A_J) \leq \sum_{i=1}^{s} ||P_i||_A.$$

Pokazali smo da su $P_i$ ortogonalni projektori iz čega slijedi da za svaki $y$ koji je okomit na sliku $P_i$ vrijedi da je $P_i y = 0$. Prema tome ako svaki vektor $z \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kao $z = x + y$ gdje je $x$ iz slike od $P_i$, a $y$ okomit na nju, onda slijedi da je $P_i z = P_i x + P_i y = P_i x = x$. Iz toga dobivamo da vrijedi $||P_i z||_A^2 = ||x||_A^2 = x^\top A x \leq x^\top A x + y^\top A y = (x+y)^\top A(x+y) = z^\top A z = ||z||_A^2$, to jest $||P_i z|| \leq ||z||_A$ za svaki $z$. Posebno, to vrijedi i za maksimum po svim $||z||_A = 1$. Time smo pokazali da je $||P_i||_A \leq 1$ i tvrdnju teorema. □

Ovaj rezultat možemo poboljšati tako da uočimo da projektori mogu biti grupirani u skupove koji imaju disjunktne slike. Kako bismo procjenili najmanju svojstvenu vrijednost matrice prekondicioniranja, moramo napraviti pretpostavku s obzirom na dekompoziciju proizvoljnog vektora $x$ u komponente iz $\Omega_i$.

**Pretpostavka 2.4.3.** *Postoji konstanta $K_0$ takva da je nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{s} (Au_i, u_i) \leq K_0(Au, u),$$

*zadovoljena, uz reprezentaciju $u \in \Omega$ kao sume*

$$u = \sum_{i=1}^{s} u_i, \quad u_i \in \Omega_i.$$

**Teorem 2.4.4.** *Ako vrijedi gornja pretpostavka, onda*

$$\lambda_{min}(A_J) \geq \frac{1}{K_0}.$$

*Dokaz.* Krenemo s proizvoljnim vektorom $u$ dekomponiranog kao $\sum_{i=1}^{s} u_i$:

$$(u, u)_A = \sum_{i=1}^{s}(u_i, u)_A = \sum_{i=1}^{s}(P_i u_i, u)_A = \sum_{i=1}^{s}(u_i, P_i u)_A.$$

Posljednja jednakost vrijedi jer je $P_i$ $A$-ortogonalan projektor na $\Omega_i$ pa je zbog toga $A$-hermitski. Sada koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost dobivamo

$$(u, u)_A = \sum_{i=1}^{s}(u_i, P_i u)_A \leq \left(\sum_{i=1}^{s}(u_i, u_i)_A\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{s}(P_i u, P_i u)_A\right)^{1/2}.$$

Po prethodnoj pretpostavci, dobivamo

$$\|u\|_A^2 \leq K_0^{1/2}\|u\|_A \left(\sum_{i=1}^{s}(P_i u, P_i u)_A\right)^{1/2},$$

iz čega kvadriranjem dobivamo

$$\|u\|_A^2 \leq K_0 \sum_{i=1}^{s}(P_i u, P_i u)_A.$$

Konačno, uočimo kako je svaki $P_i$ $A$-ortogonalan projektor, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{s}(P_i u, P_i u)_A = \sum_{i=1}^{s}(P_i u, u)_A = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i u, u\right)_A.$$

Iz toga slijedi, da za svaki $u$, vrijedi nejednakost

$$(A_J u, u)_A \geq \frac{1}{K_0}(u, u)_A$$

iz čega slijedi traženi odnos po min-max teoremu. □

U samom dokazu koristili smo ovaj oblik Cauchy-Schwarzove nejednakosti:

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i, y_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{p}(x_i, x_i)\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{p}(y_i, y_i)\right)^{1/2}.$$

Želimo procijeniti svojstvene vrijednosti od $A_J$ jer pomoću njih možemo procijeniti sprektralni radijus od $G = I - A_J$, o čemu nam ovisi konvergencija. Sada ćemo napraviti analizu multiplikativne Schwarzove metode. Krenimo s greškom koju dobijemo nakon svake vanjske iteracije:

$$d = Q_s d_0.$$

Želimo naći gornju ogradu za $||Q_s||_A$. Prvo uočimo da iz (2.22) slijedi:

$$Q_i = Q_{i-1} - P_i Q_{i-1}$$

iz čega dobivamo, koristeći $A$-ortogonalnost projektora $P_i$

$$||Q_i v||_A^2 = ||Q_{i-1}v||_A^2 - ||P_i Q_{i-1} v||_A^2.$$

Ta jednakost vrijedi i za $i = 1$ gdje je $Q_0 = I$. Kada zbrojimo sve te jednakosti za $i$ od 1 do $s$ dobivamo

$$||Q_s v||_A^2 = ||v||_A^2 - \sum_{i=1}^{s} ||P_i Q_{i-1} v||_A^2. \tag{2.29}$$

Čime smo pokazali da $A$-norma greške se ne povećava svakim korakom u algoritmu.

**Pretpostavka 2.4.5.** *Za svaki podskup $S$ od $\{1, 2, \ldots, s\}^2$, te za svaki $u_j, v_j \in \Omega$ vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\sum_{(i,j)\in S} (P_i u_i, P_j v_j)_A \leq K_1 \left( \sum_{i=1}^{s} ||P_i u_i||_A^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^{s} ||P_j v_j||_A^2 \right)^{1/2}. \tag{2.30}$$

**Lema 2.4.6.** *Ako vrijede pretpostavke 2.4.3 i 2.4.5, onda vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2 \leq (1 + K_1)^2 \sum_{i=1}^{s} ||P_i Q_{i-1} v||_A^2. \tag{2.31}$$

*Dokaz.* Počnimo s relacijom koja slijedi iz činjenice da je $P_i$ $A$-ortogonalan projektor

$$(P_i v, P_i v)_A = (P_i v, P_i Q_{i-1} v)_A + (P_i v, P_i (I - Q_{i-1}) v)_A$$

što daje, uz pomoć (2.25):

$$\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2 = \sum_{i=1}^{s} (P_i v, P_i Q_{i-1} v)_A + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} (P_i v, P_j Q_{j-1} v)_A \tag{2.32}$$

Za prvi izraz s desne strane iskoristimo Cauchy-Schwarzovu nejednakost pa dobijemo

$$\sum_{i=1}^{s} (P_i v, P_i Q_{i-1} v)_A \leq \left( \sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^{s} ||P_i Q_{i-1} v||_A^2 \right)^{1/2}$$

Za drugi izraz s desne strane, iskoristimo pretpostavku 2.4.5 i dobivamo

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}(P_i v, P_j Q_{j-1} v)_A \leq K_1 \left(\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{s} ||P_j Q_{j-1} v||_A^2\right)^{1/2}$$

Zbrajanjem te dvije nejednakosti, te kvadriranjem dobivenog, nakon što iskoristimo (2.32) dolazimo do tražene nejednakosti. □

Iz (2.29) možemo zaključiti da ako vrijedi pretpostavka 2.4.5 onda vrijedi

$$||Q_s v||_A^2 \leq ||v||_A^2 - \frac{1}{(1+K_1)^2}\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2. \tag{2.33}$$

Sada možemo iskoristiti pretpostavku 2.4.3 kako bismo došli do donje međe za $\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2$.

**Teorem 2.4.7.** *Pretpostavimo da vrijede pretpostavke 2.4.3 i 2.4.5, onda*

$$||Q_s||_A \leq \left[1 - \frac{1}{(K_0(1+K_1)^2}\right]^{1/2}. \tag{2.34}$$

*Dokaz.* Relacija $||P_i v||_A^2 = (P_i v, v)_A$ nam daje

$$\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2 = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i v, v\right)_A = (A_J v, v)_A.$$

Po teoremu 2.4.4, $\lambda_{min}(A_J) \geq \frac{1}{K_0}$, slijedi da je $(A_J v, v)_A \geq (v, v)_A / K_0$. Tako

$$\sum_{i=1}^{s} ||P_i v||_A^2 \geq \frac{(v,v)_A}{K_0},$$

što nakon supstitucije (2.33) daje nejednakost

$$\frac{||Q_s v||_A^2}{||v||_A^2} \leq 1 - \frac{1}{K_0(1+K_1)^2}.$$

Preostalo je još napraviti maksimum po svim vektorima $v$. □

$A$-norma od $d = Q_s d_0$ će se samnjiti u odnosu na $A$-normu od $d_0$ kao posljedica prethodnog teorema.

# Poglavlje 3

# Metode bazirane na Schurovom komplementu

Metode Schurovog komplementa zasnivaju se na rješavanju reduciranog sustava (1.2) nekom prekondicioniranom metodom Krylovljevog potprostora. Takve metode se izvode u tri koraka:

1. Izračunaj desnu stranu $g' = g - FB^{-1}f$.
2. Riješi reducirani sustav $Sy = g'$ pomoću iterativne metode.
3. Vratiti supstituciju, odnosno $x = B^{-1}(f - Ey)$.

Uočimo da matrica $S$ ne mora biti eksplicitno dana kako bi se riješio reducirani sustav pomoću iterativne metode. Na primjer ako koristimo metodu Krylovljevih potprostora bez prekondicioniranja, onda operacije koje se vrše sa $S$ su samo matrica s vektorom, $w = Sv$. Ovako možemo takve operacije izvoditi:

1. Izračunaj $v' = Ev$.
2. Riješi $Bz = v'$.
3. Izračunaj $w = Cv - Fz$.

Gornja metoda uključuje samo množenja matrice s vektorom i jedan linearni sustav s matricom $B$. Taj linearni sustav se sastoji od $s$ nezavisnih linearnih sustava, uz to sustav mora biti riješen egzaktno preko direktnog rješenja ili iterativne tehnike s velikom točnošću. Puno je teže prekondicionirati matricu $S$ nego riješiti množenje matrice s vektorom jer često cijela matrica nije eksplicitno dostupna. Ima mnogo metoda za prekondicioniranje Schurovog komplementa koje većinom dolaze iz spektra parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a mi ćemo ovdje proučavati one koje dolaze iz gledišta linearne algebre.

## 3.1 Inducirano prekondicioniranje

Jedan od najlakših načina da dođemo do aproksimacije matrice $S$ je da iskoristimo propoziciju (1.2.1) i relaciju između Schurovog komplementa i Gaussove eliminacije. Iz propozicije slijedi da operator prekondicioniranja $M$ matrice $S$ može biti definiran iz aproksimativnog rješenja dobivenog s $A$. Kako bi prekondicionirali vektor $v$, odnosno izračunali $w = M^{-1}v$, gdje je $M$ željena matrica prekondicioniranja $S$, prvo moramo izračunati

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

onda uzmimo $w = y$. Kako bi izračunali gornji sustav možemo iskoristiti bilo koju aproksimativnu metodu. Neka je $M_A$ neka matrica prekondicioniranja za $A$. Ako koristimo oznake koje smo prije definirali, onda je $R_y$ operator restrikcije na granične varijable, kao što je definirano u propoziciji (1.2.1). Operacija prekondicioniranja za $S$ koja je inducirana s $M_A$ definirana je kao

$$M_S^{-1}v = R_y M_A^{-1} R_y^\top v.$$

Kada je $M_A$ egzaktna matrica prekondicioniranja, to jest $M_A = A$, onda je po propoziciji (1.2.1) $M_S$ također egzaktna matrica prekondicioniranja, to jest $M_S = S$. Induciranu matricu prekondicioniranja $M_S$ možemo izraziti

$$M_S = (R_y M_A^{-1} R_y^\top)^{-1}. \tag{3.2}$$

Iako prekondicioniranje matrice $S$ može biti definirano iz prekondicioniranja matrice $A$, linearni sustav rješavamo za varijable na granicama što je općenito puno manje nego rješavati cijeli sustav. Kada je $M_A$ nekompletna LU (ILU) faktorizacija od $A$, $M_S$ može biti izražena eksplicitno pomoću elemenata faktora od $M_A$. Time dobivamo matricu prekondicioniranja za $S$ koja je inducirana kanonski iz nepotpune LU faktorizacije matrice $A$. Pretpostavimo da je matrica prekondicioniranja $M_A$ faktorizirana u obliku $M_A = L_A U_A$, gdje je

$$L_A = \begin{pmatrix} L_B & 0 \\ F U_B^{-1} & L_S \end{pmatrix} \quad U_A = \begin{pmatrix} U_B & L_B^{-1}E \\ 0 & U_S \end{pmatrix}.$$

Onda je invrz od $M_A$:

$$\begin{aligned} M_A^{-1} &= U_A^{-1} L_A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & U_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & L_S^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & U_S^{-1} L_S^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gdje $*$ označavaju matrice za koje nam prava vrijednost nije potrebna. Po definiciji (1.8) slijedi da je:

$$R_y M_A^{-1} R_y^\top = U_S^{-1} L_S^{-1}$$

pa je po (3.2), $M_S = L_S U_S$. Taj rezultat je formuliran u propoziciji.

**Propozicija 3.1.1.** *Neka je $M_A = L_A U_A$ ILU faktorizacija od $A$. Onda je matrica prekondicionirnja $M_S$ od $S$ inducirana s $M_A$, kao što je definirana u* (3.2)*, dana sa*

$$M_S = L_S U_S, \quad s \quad L_S = R_y L_A R_y^\top,\ U_S = R_y U_A R_y^\top.$$

Propozicija zapravo kaže da su $L$ i $U$ faktori za $M_S$ $(2, 2)$ blokovi $L$ i $U$ blokova u ILU faktorizaciji od $A$. Bitna posljedica te ideje je da paralelna Gaussova eliminacija može biti iskorištena za dobivanje ILU matrice prekondicioniranja za $S$ koriteći klasičnu ILU faktorizaciju. $L$ i $U$ faktori od $M_A$ su ove strukture:

$$A = L_A U_A - R$$

gdje je

$$L_A = \begin{pmatrix} L_1 & & & & \\ & L_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_s & \\ F_1 U_1^{-1} & F_2 U_2^{-1} & \dots & F_s U_s^{-1} & L \end{pmatrix}$$

$$U_A = \begin{pmatrix} U_1 & & & & L_1^{-1} E_1 \\ & U_2 & & & L_2^{-1} E_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & U_s & L_s^{-1} E_s \\ & & & & U \end{pmatrix}.$$

Svaki $L_i, U_i$ par je nepotpuna LU faktorizacija lokalne matrice $B_i$. Te ILU faktorizacije mogu biti izračunate nezavisno. Slično, matrice $L_i^{-1} E_i$ i $F_i U_i^{-1}$ mogu biti nezavisno izračunate kada imamo LU faktore.

## 3.2 Prekondicioniranje Schurovog komplementa bazirano na vrhovima

Kao što smo već spomenuli, ova je struktura odlična u kontekstu direktnog rješenja jer dopušta da Schurov komplement bude formiran iz lokalnih dijelova. Kako LU faktorizacija koristi istu strukturu i u tom slučaju je dobro iskoristiti prekondicioniranje Schurovog komplementa bazirano na vrhovima. Neka je $P$ kanonska injekcija s lokalnih graničnih vrhova u lokalne vrhove. Ako je $n_i$ broj lokalnih vrhova, a $m_i$ broj lokalnih graničnih vrhova, onda je $P$ $n_i \times m_i$ matrica čiji su stupci zadnjih $m_i$ stupaca matrice identiteta $n_i \times n_i$. Onda lako vidimo:

$$S_i = (P^\top A_{loc,i}^{-1} P)^{-1}. \tag{3.3}$$

Ako je $A_{loc,i} = LU$ LU faktorizacija od $A_{loc,i}$, onda vrijedi:

$$S_i^{-1} = P^\top U^{-1} L^{-1} P = P^\top U^{-1} P P^\top L^{-1} P, \tag{3.4}$$

iz čega uočavamo da bi računali s $P^\top L^{-1} P$, zadnja $m_i \times m_i$ glavna podmatrica od $L$ mora biti iskorištena. Slično vrijedi za $P^\top U^{-1} P$, ono zahtjeva samo blok rješenje sa zadnjih $m_i \times m_i$ glavnom podmatricom od $U$. Iz toga slijedi da je potrebna samo LU faktorizacija od $A_{loc,i}$ da bi se riješio sustav s matricom $S_i$.

# Poglavlje 4

# Metode pune matrice

Sve metode koje iteriraju na originalnom sustavu (16) nazivamo metodama pune matrice. Na isti način na koji dobijemo matrice prekondicioniranja za Schurov komplement iz LU faktorizacije od $A$, matrice prekondicioniranja za $A$ se mogu dobiti i iz aproksimiranih graničnih vrijednosti. Utvrdimo par relacija između iteracija koje uključuju $A$ i $S$.

**Propozicija 4.0.1.** *Neka je*

$$L_A = \begin{pmatrix} I & O \\ FB^{-1} & I \end{pmatrix}, \quad U_A = \begin{pmatrix} B & E \\ O & I \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

*i pretpostavimo da je metoda Krylovljevih potprostora primijenjena na originalni sustav* (15) *s matricom prekondicioniranja $L_A$ slijeva i zdesna s $U_A$, te inicijalnim rješenjem oblika*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(f - Ey_0) \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

*Onda ta prekondicionirana Krylovljeva iteracija daje iteraciju oblika:*

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(f - Ey_m) \\ y_m \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

*u kojoj je niz $y_m$ rezultat iste metode iz Krylovljevih potprostora primijenjene na neprekondicionirani reducirani linearni sustav $Sy = g'$ gdje $g' = g - FB^{-1}f$ koja kreće od vektora $y_0$.*

*Dokaz.* Dokaz je posljedica faktorizacije

$$\begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ FB^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ O & I \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Ako primijenimo iterativnu metodu na originalni sustav, prekondicioniran slijeva s $L_A$ i zdesna s $U_A$, je ekvivalentno primijeni iterativne metode na

$$L_A^{-1} A U_A^{-1} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & S \end{pmatrix} = A'. \tag{4.5}$$

Inicijalni rezidual prekondicioniranog sustava je

$$\begin{aligned} L_A^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - (L_A^{-1} A U_A^{-1}) U_A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & O \\ -FB^{-1} & I \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ FB^{-1}(f - Ey_0) + Cy_0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ g' - Sy_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kao rezultat, Krylovljevi vektori mogu se dobiti iz prekondicioniranog linearnog sustava povezanog s matricom $A'$ koji su oblika

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Sr_0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ S^{m-1} r_0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

i s aproksimiranim rješenjem oblika

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}E \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i S^i r_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}(f - Ey_0) - B^{-1}E(y_m - y_0) \\ y_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}(f - Ey_m) \\ y_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdje je $y_m = y_0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i S^{-1} r_0$. Konačno, skalari $\alpha_i$, koji daju aproksimativno rješenje u Krylovljevoj bazi, dobivaju se implicitno pomoću skalarnih produkta vektora iz niza vektora (4.6). Ti skalarni produkti su identični onima niza $r_0, Sr_0, \dots, S^{m-1}r_0$. Onda će ti koeficijenti dati isti rezultat kao ista Krylovljeva metoda primijenjena na reducirani sustav $Sy = g'$ ako inicijalno rješenje daje inicijalni rezidual $r_0$. □

Sljedeća propozicija nam pokazuje da matrica $S$ može biti prekondicionirana.

**Propozicija 4.0.2.** *Neka je $S = L_S U_S - R$ aproksimativna faktorizacija matrice $S$, te deifinirajmo*

$$L_A = \begin{pmatrix} I & O \\ FB^{-1} & L_S \end{pmatrix}, \quad U_A = \begin{pmatrix} B & E \\ O & U_S \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

*Pretpostavimo da je iskorištena metoda Krylovljevih potprostora na originalni sustav* (15) *s matricom prekondicioniranja $L_A$ slijeva i zdesna s $U_A$, te inicijalnim rješenjem oblika*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(f - Ey_0) \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

*Onda ta prekondicionirana Krylovljeva iteracija daje iteraciju oblika:*

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(f - Ey_m) \\ y_m \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

*Štoviše, niz $y_m$ je rezultat istih metoda Krylovljevih potprostora korištenih na sustavu $Sy = g - FB^{-1}f$ gdje smo slijeva prekondicionirali s matricom $L_S$, a zdesna s $U_S$, s početnim vektorom $y_0$.*

*Dokaz.* Krenimo s jednakošću:

$$\begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ FB^{-1} & L_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & L_S^{-1} S U_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ O & U_S \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Ostatak dokaza je analogan dokazu propozicije 4.0.1. □

Postoje još dvije verzije u kojima je dopušteno da $S$ bude prekondicionirana slijeva ili zdesna. Neka je $M_S$ matrica prekondicioniranja za $S$, iskoristimo ove jednakosti

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B & E \\ F & C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & O \\ FB^{-1} & M_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & M_S^{-1} S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ O & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O \\ FB^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & S M_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ O & M_S \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.11}$$

kako bismo izveli odgovarajuće lijeve ili desne matrice prekondicioniranja. Uočimo da kada je matrica prekondicioniranja $M_S$ od $S$ egzaktna, odnosno $M = S$, onda blok matrica prekondicioniranja $L_A$, $U_A$ od $A$ inducirane od $M_S$ su također egzaktne. Iako prethodni rezultati govore da je iteracija prekondicioniranog Schurovog komplementa matematički ekvivalentna određenoj metodi prekondicioniranja pune matrice, postoje neke praktične prednosti iteriranja s nereduciranim sustavima. Glavna prednost je potreba u tehnikama Schurovog komplementa da se egzaktno izračuna $Sx$ u svakoj iteraciji Krylovljevog potprostora. Doista, matrica $S$ predstavlja matricu koeficijenata linearnog sustava, te netočnosti u operacijama matrice s vektorom mogu rezultirati gubitkom konvergencije. U metodama s punom matricom sama operacija $Sx$ nikada nije potrebna eksplicitno. Uz to, to otvara mogućnost prekondicioniranja originalne matrice s aproksimativnim rješenjima s matricom B u operacijama prekondicioniranja $L_A$ i $U_A$.

# Bibliografija

[1] Yousef Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, SIAM, 2003

[2] Ruipeng Li, Yuanzhe Xi and Yousef Saad, *Schur complement-based domain decomposition preconditioners with low-rank corrections*, Numerical Linear Algebra with Applications Volume 23, Issue no. 4, pp. 706-729, 2016, Wiley Online Library

[3] André Gaul, *Domain Decomposition Method for a Finite Element Algorithm for Image Segmentation*, Diploma thesis, Chair of Applied Mathematics III, Department of Mathematics, Section Modeling, Simulation, Optimization, University of Erlangen-Nürnberg, 2009

# Sažetak

Na samom početku ovog rada cilj je bio definirati osnovne jednadžbe i odnose iz parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje ćemo koristiti u particiji na poddomene. Pri tome smo se dotakli osnovih podijela tehnika dekompozicija domena, te smo spomenuli koje ćemo sve metode proučiti u ovom radu. Promatrali smo direktno rješenje i kakav je odnos matrice $A$ te Schurovog komplementa $S$ i promatrali slučaj kada je $A$, odnosno $S$ simetrična pozitivno definitna matrica. Kod samog Schurovog komplementa koncentrirali smo se na particije koje su se bazirale na vrhovima. Multiplikativna Schwarzova metoda na svakoj poddomeni sekvencijalno dolazi do rješenja i pri tome koristi rubne uvjete za trenutni korak koje dobiva iz posljednje vrijednosti rješenja. Aditivna Schwarzova metoda ne mijenja komponente u svakoj poddomeni dok nisu dovršene sve promijene kroz sve domene. Promatrali smo uvjete konvergencije Schwarzove izmjenične metode u slučaju kada je $A$ simetrična pozitivno definitna matrica. Inducirano prekondicioniranje se bazira na Schurovom komplementu i u samoj suštini koristi ILU faktorizaciju polazne matrice $A$, a prekondicioniranje Schurovog komplementa bazirano na vrhovima koristi LU faktorizaciju lokalne matrice $A$. Na posljetku, dotakli smo se i metoda punih matrica. Te metode se baziraju na iteriranju na originalnom sustavu gdje se prekondicioniranje matrice $A$ dobiva iz aproksimiranih graničnih vrijednosti.

# Summary

At the beginning of this thesis our main goal was to define fundamental equations and relations from Partial Differential Equations which we will use here. Essential classification of domain decomposition techniques we mentioned here, and we specified which ones are going to be in our focus. We studied direct solution and checked relations between matrix $A$ and its Schur complement $S$, and analized those when $A$ and $S$ were symmetric positive definite matrices. Regarding the Schur complement we concentrated on vertex-based partitions. Multiplicative Schwarz procedure on each subdomain sequentially gets solution while using boundary conditions for current step which we get from last value of the solution. Additive Schwarz procedure doesn't update components in each subdomain until a whole cycle of updates through all domains are completed. When $A$ is symmetric positive definite matrix we checked what are convergence conditions for Schwarz alternating methods. Induced preconditioners are based on Schur complement and it basically uses ILU factorization of original matrix $A$, while preconditioning of vertex-based Schur complements is based on using LU factorization of local $A$ matrix. At the end we checked full matrix method, these methods are based on iterations on the original system, here we also use approximating interface values to get preconditioners of $A$ while for Schur complement we use LU factorization.

# Životopis

Rođena sam 16.02.1993. godine u Zagrebu. Završila sam Osnovnu školu Jordanovac u Zagrebu, a godine 2007. upisujem prirodoslovno-matematički smjer u XV gimnaziji u Zagrebu. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja bila sam aktivna atletičarka u disciplini skok u dalj. Godine 2011. upisujem preddiplomski studij inženjerske matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2017. nastavljam školovanje na diplomskom studiju Primijenjene matematike na istom odsjeku. Sljedeće godine se udajem i postajem majka Ianu, a 2019. još jednom dječaku, Noelu.