Određivanje cijena izvedenica Monte Carlo simulacijama

Rubčić, Sara

Određivanje cijena izvedenica Monte Carlo simulacijama

Rubčić, Sara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sara Rubčić

ODREĐIVANJE CIJENA IZVEDENICA MONTE CARLO SIMULACIJAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Azra Tafro

Zagreb, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Monte Carlo metodom nazivamo skup algoritama koji pomoću velikog broja izračuna i ponavljanja predviđaju ponašanje složenih slučajnih sustava u matematici, fizici, ekonomiji i drugim znanostima. Premda nema službenih zapisa o tome, ovu metodu je već 1933. godine koristio Enrico Fermi i vrlo vjerojatno je pridonijela otkriću novih radioaktivnih elemenata ozračivanjem neutronima i otkriću nuklearnih reakcija uzrokovanih sporim neutronima zbog kojih je osvojio Nobelovu nagradu 1938. godine [1]. Termin "Monte Carlo" prvi se put pojavio 1947. godine prilikom rada Stanislawa Ulama, Nicolasa Metropolisa i Johna von Neumanna na nuklearnom naoružanju u Los Alamosu. Prijedlog za taj naziv dao je Metropolis koji je inspiraciju za ideju pronašao u Ulamovom ujaku kockaru koji je često posuđivao novac od obitelji kako bi mogao posjetiti kockarnice u Monte Carlu [10]. Ulam je prvi put pokušao upotrijebiti ovu metodu kako bi izračunao šansu za pobjedu u kartaškoj igri pasijans. Pitao se bi li najjednostavniji način za izračun te vjerojatnosti bio podijeliti karte sto puta i samo promotriti broj pobjeda [6].

Daljnjim razvojem računala generiranje velikog broja slučajnih varijabli postaje puno brže i jednostavnije, stoga se Monte Carlo metode sve češće koriste za rješavanje raznih problema. U osnovi se te metode primjenjuju na probleme koji se mogu svesti na probleme aproksimacije integrala. Metoda se bazira na činjenici da se integrali mogu interpretirati kao matematičko očekivanje.

Monte Carlo metode imaju vrlo važnu primjenu u financijskoj matematici. Jedna od glavnih implikacija teorije određivanja cijena financijske imovine je da se pod određenim pretpostavkama cijena izvedenice može prikazati kao očekivanje. Stoga se određivanje cijena izvedenica svodi na računanje danih očekivanja. Ako bismo to očekivanje zapisali kao integral, u većini slučajeva bismo dobili da mu je dimenzija vrlo velika, a aproksimacija takvih integrala je upravo ono čime se bavi Monte Carlo metoda.

U ovom radu definirat ćemo osnovna načela Monte Carlo metode kao i osnovne teoreme i posljedice teorije određivanja cijena financijske imovine. Zatim ćemo povezati to dvoje i pokazati na nekoliko primjera kako se Monte Carlo simulacije koriste za određivanje cijena izvedenica.

U prvom poglavlju ukratko predstavljamo ideju Monte Carlo metode i navodimo dva važna teorema na kojima se metoda bazira. Pokazujemo kako se metoda koristi za aproksimaciju jednodimenzionalnih i višedimenzionalnih integrala i definiramo Monte Carlo procjenitelj. Za kraj analiziramo učinkovitost samog procjenitelja uzimajući u obzir vrijeme izvršenja, pristranost i varijancu.

U drugom poglavlju bavit ćemo se određivanjem cijena izvedenica. Objasnit ćemo što su izvedenice i prikazati neke najvažnije primjere. Zatim ćemo definirati Brownovo gibanje koje će nam poslužiti za modeliranje kretanja cijena dionica. Objasnit ćemo uvjete pod kojima cijenu izvedenica možemo računati kao očekivanje diskontiranih budućih isplata te izvedenice i uvesti Black-Scholes-Mertonov model.

U trećem poglavlju povezujemo Monte Carlo simulacije i izračun cijena izvedenica te na tri primjera demonstriramo upotrebu prethodno navedene teorije. Kao referentan vrijednosni papir izabrali smo dionicu Podravke. Na temelju kretanja njenih cijena u prošlosti odredit ćemo cijenu europske call opcije, azijske opcije i opcije izbora.

U četvrtom i posljednjem poglavlju definirat ćemo neke od najpoznatijih Grka. Grcima mjerimo rizike na financijskim tržištima. Objasnit ćemo kako se Grci računaju koristeći Monte Carlo simulacije te primijeniti naučeno na primjeru jedne europske call opcije.

Poglavlje 1

Monte Carlo metoda

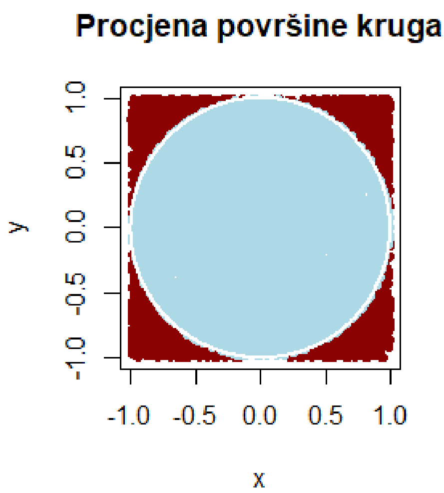
1.1 Uvod

Monte Carlo simulacije su metode procjenjivanja vrijednosti neke nepoznate varijable koristeći principe statističkog zaključivanja koje donosi zaključke o populaciji na temelju izabranog uzorka. Kod Monte Carlo simulacija, populaciju predstavljaju svi mogući ishodi nekog događaja, dok je uzorak podskup populacije. Bitna stvar je da uzorak bude slučajno generiran podskup skupa svih mogućih događaja jer tada on nasljeđuje ista statistička obilježja kao populacija. Monte Carlo metode baziraju se na generiranju velikog broja takvih slučajnih uzoraka za koje onda računamo vrijednosti varijable koju želimo procijeniti. Zatim donosimo zaključak za populaciju koristeći aritmetičku sredinu dobivenih rezultata.

Kako bi bilo malo jasnije o čemu je zapravo riječ, ukratko ćemo opisati jedan od najosnovnijih primjera korištenja Monte Carlo metode. Želimo procijeniti površinu jediničnog kruga C u $\mathbb{R}^2$ (znamo da mu je površina jednaka π). Za točku $U \sim Unif(-1, 1)^2$ vrijedi da je vjerojatnost da će upasti u krug jednaka

$$p = \mathbb{P}(U \in C) = \frac{\pi}{4},$$

pa p računamo kao $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{U \in C}]$. Ono što trebamo napraviti je generirati nezavisne uniformno distribuirane točke $U_i \sim Unif(-1, 1)^2$, $i = 1, \ldots, N$, gdje je N neki veliki broj. Zanima nas koji postotak tih točaka će upasti unutar kružnice, odnosno tražimo omjer broja točaka koji su upali u kružnicu i ukupnog broja simuliranih točaka. Taj broj je procjena za p i pomnožen s 4 daje procjenu površine kruga. Detaljniji opis ovog primjera može se pronaći u [3]. Kad bismo imali vrlo mali broj generiranih točaka, procjena ne bi bila točna, međutim zakon velikih brojeva nam osigurava da procjena konvergira prema točnoj vrijednosti kako se broj generiranih podataka povećava. Drugi vrlo važan teorem koji će nam biti potreban je centralni granični teorem koji nam daje informacije o mogućoj pogrešci u



Slika 1.1: Procjena površine jediničnog kruga Monte Carlo simulacijama

procjeni. Kako će nam ta dva teorema trebati u daljnjem radu, navodimo ih ovdje. Dokazi ovih teorema mogu se pronaći u [13].

Teorem 1.1.1. (Jaki zakon velikih brojeva) *Neka je* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je* $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. *Tada*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu.$$

Teorem 1.1.2. (Centralni granični teorem) *Neka je* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem* μ *i zajedničkom varijancom* σ^2. *Za* $n \in \mathbb{N}$, *definirajmo* $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. *Tada za sve* $x \in R$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

gdje je ϕ *funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe. Drugim riječima, niz*

$$\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\in N}$$

konvergira po distribuciji ka $N(0, 1)$.

Monte Carlo metode najčešće se koriste za rješavanje tri klase problema: integraciju, optimizaciju i generiranje slučajnih uzoraka iz vjerojatnosne distribucije. Ono na što ćemo se bazirati u ovom radu je Monte Carlo integracija. Razlog takvog odabira postat će jasniji u drugom poglavlju nakon što se uvjerimo da se cijene izvedenica računaju kao očekivanje. U nastavku ovog poglavlja, koje se bazira na knjizi Paula Glassermana *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* [7], formulirat ćemo problem integracije i objasniti kako vrednujemo Monte Carlo procjenitelje.

1.2 Formulacija problema integracije

Monte Carlo integracija je tehnika numeričke integracije pomoću slučajnih brojeva. Dok drugi numerički algoritmi obično procjenjuju integrand koristeći pravilnu mrežu točaka, Monte Carlo nasumično bira točke u kojima se on procjenjuje. Ova metoda posebno je korisna za procjenu integrala viših dimenzija jer brzina konvergencije algoritma ne ovisi o dimenziji integrala.

Jednodimenzionalni slučaj

Promotrimo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je $I = [0, 1]$. Naš cilj je procijeniti integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ na I. Nadalje, pretpostavljamo da je $\mathbb{E}|f(U)| < +\infty$, pri čemu je $U : \Omega \to \mathbb{R}$ uniformno distribuirana slučajna varijabla na skupu I. Tada integral funkcije f na jediničnom intervalu I možemo interpretirati kao očekivanje $\mathbb{E}[f(U)]$, odnosno vrijedi

$$\alpha = \int_0^1 f(x)dx = \mathbb{E}[f(U)]. \tag{1.1}$$

Stoga je problem numeričke integracije sveden na problem procjene vrijednosti matematičkog očekivanja. Kako bismo mogli procijeniti očekivanje, trebamo simulirati niz nezavisnih slučajnih varijabli $U_1, \dots, U_n$ s uniformnom distribucijom na $[0, 1]$. Uzimanjem funkcije f u ovih n slučajnih točaka i računanjem prosjeka tih vrijednosti dobivamo upravo *Monte Carlo procjenitelj* za α

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i). \tag{1.2}$$

Ako je f integrabilna na $[0, 1]$, onda prema zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\hat{\alpha}_n \xrightarrow{g.s.} \alpha \;\; kad \;\; n \to +\infty. \tag{1.3}$$

Ako je funkcija f kvadratno integrabilna, možemo definirati

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx. \tag{1.4}$$

Tada je greška Monte Carlo procjenitelja $\hat{\alpha}_n - \alpha$ asimptotski normalno distribuirana s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom $\sigma_f/\sqrt{n}$. Taj zaključak smo izveli iz prethodno navedenog centralnog graničnog teorema. Niz $f(U_1), \dots, f(U_n)$ zadovoljava sve uvjete i koristeći oznake iz iskaza teorema imamo $S_n = \sum_{i=1}^n f(U_i) = n\hat{\alpha}_n$ i $\mu = \mathbb{E}[f(U_i)] = \alpha$. Sada vrijedi

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma_f\sqrt{n}} = \frac{n(\hat{\alpha}_n - \alpha)}{\sigma_f\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_f}(\hat{\alpha}_n - \alpha).$$

Teorem tvrdi da gornji izraz konvergira po distribuciji ka $N(0, 1)$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma_f\sqrt{n}} \le x\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_f}(\hat{\alpha}_n - \alpha) \le x\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\hat{\alpha}_n - \alpha \le \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}x\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy\\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-ny^2}{2\sigma_f^2}}\,dy
\end{aligned}$$

pa $\hat{\alpha}_n - \alpha$ konvergira po distribuciji ka $N(0, \sigma_f^2/n)$. Iz toga zaključujemo da je procjena bolja što je n veći.

S obzirom na to da je parametar σ_f najčešće nepoznat, u većini slučajeva procjenjujemo ga uzoračkom standardnom devijacijom definiranom sa

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2}. \tag{1.5}$$

Koristeći centralni granični teorem, možemo dati približno $(1-\delta)\cdot 100\%$ interval pouzdanosti za $\hat{\alpha}_n$

$$\left[\hat{\alpha}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}},\ \ \hat{\alpha}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}\right]. \tag{1.6}$$

U slučaju da je σ_f nepoznat, u gornjem intervalu zamjenjujemo ga uzoračkom standardnom devijacijom s_f.

Možemo se pitati na koji način ćemo simulirati slučajne varijable iz neke distribucije. U nekim slučajevima potrebno je generirati samo varijable iz uniformne distribucije na jediničnom intervalu što nam uvelike olakšava generiranje slučajnog uzorka. Promotrimo neku slučajnu varijablu X i njenu funkciju distribucije $F : (a, b) \to (0, 1)$, gdje je $-\infty \le a < b \le +\infty$. U slučaju da F ima inverz, za $U \sim Unif(0, 1)$ vrijedi $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le x) = \mathbb{P}(U \le$

$F(x)) = F(x)$. Prema tome je $F^{-1}(U) \sim F$ zbog čega je X moguće simulirati koristeći inverz funkcije distribucije F i varijable iz uniformne distribucije. Opisanu metodu nazivamo *metoda inverzne transformacije* (vidi [2]).

Iz oblika standardne greške možemo zaključiti da bi za smanjenje greške za pola bilo potrebno povećati broj točaka (odnosno n) točno 4 puta. Prema tome, konvergencija greške Monte Carlo procjenitelja je $O(n^{-1/2})$. S druge strane, greška numeričke integracije ima konvergenciju $O(n^{-2})$. Možemo zaključiti da je Monte Carlo metoda inferiorna numeričkoj integraciji u jednodimenzionalnom slučaju, no u većim dimenzijama situacija se mijenja.

Višedimenzionalni slučaj

Problem koji smo gore prikazali u jednodimenzionalnom slučaju može se generalizirati najprije na procjenu očekivanja na d-dimenzionalnom skupu $I^d = [0,1]^d$, a zatim i na procjenu očekivanja na općenitom skupu A u odnosu na Lebesgueovu ili neku drugu mjeru.

Promotrimo ponovno vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je $\mathbb{X}$ slučajni vektor na $(\Omega, \mathcal{F})$ i $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi $\int_\Omega |f(\mathbb{X})| d\mathbb{P} < +\infty$. Općenita formula Monte Carlo integracije glasi

$$\alpha = \int_\Omega f(\mathbb{X}) d\mathbb{P} = \mathbb{E}[f(\mathbb{X})], \tag{1.7}$$

stoga je Monte Carlo procjenitelj za α definiran s

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbb{X}_i), \tag{1.8}$$

gdje su $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ nezavisni slučajni vektori distribuirani kao $\mathbb{X}$.

Ako je $\mathbb{X}$ neprekidan d-dimenzionalan slučajni vektor i g njegova funkcija gustoće, tada je

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[f(\mathbb{X})]. \tag{1.9}$$

Specijalan slučaj dobijemo ukoliko je $\mathbb{X}$ uniformno distribuiran d-dimenzionalan slučajan vektor na jediničnoj kocki I^d. Tada vrijedi

$$\alpha = \int_{\mathbb{I}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[f(\mathbb{X})]. \tag{1.10}$$

Definiramo σ_f^2 analogno kao u 1.4. Greška procjenitelja $\hat{\alpha}_n - \alpha$ i dalje konvergira po distribuciji ka $N(0, \sigma_f/\sqrt{n})$ stoga je konvergencija $O(n^{-1/2})$ neovisna o dimenziji. Za razliku od nje, kod numeričke integracije za d-dimenzionalni slučaj konvergencija je $O(n^{-2/d})$ pa nije pogodna za korištenje ako je d velik. Iz tog razloga se Monte Carlo metode vrlo često koriste za aproksimaciju integrala velikih dimenzija.

1.3 Učinkovitost Monte Carlo procjenitelja

Kako bismo mogli odrediti učinkovitost Monte Carlo procjenitelja, moramo definirati kriterije s obzirom na koje ih vrednujemo. Tri glavna kriterija su varijanca, vrijeme izvršavanja i pristranost.

Varijanca

Započinjemo s proučavanjem nepristranih procjenitelja. Prema definiciji, procjenitelj $\hat{\alpha}_n$ je nepristrani procjenitelj parametra α ako vrijedi $\mathbb{E}[\hat{\alpha}_n] = \alpha$. Također ćemo pretpostaviti da je procjenitelj aritmetička sredina n nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih uzoraka jer je to najčešći slučaj u praksi.

Dakle, pretpostavljamo da vrijedi $\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$, gdje su α_i nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable, $\mathbb{E}[\alpha_i] = \alpha$ i $Var[\alpha_i] = \sigma_\alpha^2 < +\infty$. Centralni granični teorem (1.1.2) tvrdi da kako se povećava broj simulacija n, standardizirani procjenitelj $(\hat{\alpha}_n - \alpha)/(\sigma_\alpha/\sqrt{n})$ konvergira po distribuciji standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli ili ekvivalentno

$$\sqrt{n}\,[\hat{\alpha}_n - \alpha] \;\Rightarrow\; N(0,\ \sigma_\alpha^2).$$

Ista tvrdnja vrijedi ako σ_α zamijenimo s uzoračkom standardnom devijacijom s_α, što nam je osobito važno jer teorijsku standardnu devijaciju σ_α u praksi rijetko znamo, dok uzoračku možemo izračunati iz simulacije. Tu zamjenu možemo opravdati činjenicom da s_α/σ_α teži u 1 kada n ide u beskonačnost. Ova tvrdnja slijedi iz toga što s_α, kao procjenitelj od σ_α, po distribuciji teži ka σ_α kada $n \to +\infty$ (detaljno objašnjenje može se pronaći u [7]). Centralni granični teorem nam daje i interval pouzdanosti (1.6). Kada se broj simulacija n približava beskonačnosti, vjerojatnost da dani interval sadrži pravu vrijednost parametra α je približno $(1-\delta)$. Teorem 1.1.2 nam također daje i distribuciju greške našeg procjenitelja

$$\hat{\alpha}_n - \alpha \sim N(0, \sigma_\alpha^2/n).$$

Iz ovoga se može zaključiti da, ukoliko su sve ostale stvari nepromijenjene, prilikom uspoređivanja dva Monte Carlo procjenitelja (za isti broj simulacija n) treba izabrati onoga koji ima manju varijancu.

Vrijeme izvršavanja

Pretpostavimo sada da moramo birati između dva nepristrana procjenitelja. Prema prethodno navedenom jasno je da želimo odabrati onog s manjom varijancom, ali nije jasno što napraviti u slučaju da onaj s manjom varijancom ima duže vrijeme izvršavanja. Uzmimo da simuliranje varijable α_i traje neko fiksno vrijeme τ. Neka s označava vrijeme koje nam je dostupno za izvršiti cijelu simulaciju (tj. za simuliranje svih n slučajnih varijabli), s je mjereno u istoj vremenskoj jedinici kao τ. U tom slučaju je broj ponavljanja, odnosno varijabli koje možemo simulirati, jednak $\lfloor s/\tau \rfloor$, a procjenitelj koji dobijemo je $\hat{\alpha}_{\lfloor s/\tau \rfloor}$. Isto kao prije, dobijemo da kada $s \to +\infty$

$$\sqrt{\lfloor s/\tau \rfloor}\, [\hat{\alpha}_{\lfloor s/\tau \rfloor} - \alpha] \;\Rightarrow\; N(0, \sigma_\alpha^2).$$

Zbog $\lfloor s/\tau \rfloor / s \;\to\; 1/\tau$, slijedi da je, kada $s \to +\infty$,

$$\sqrt{s}\, [\hat{\alpha}_{\lfloor s/\tau \rfloor} - \alpha] \;\Rightarrow\; N(0, \sigma_\alpha^2 \tau). \tag{1.11}$$

Dakle, uz dano s, greška procjenitelja je asimptotski normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $\sigma_\alpha^2 \tau / s$. Koristeći ovo svojstvo, možemo uspoređivati alternativne nepristrane procjenitelje.

Pretpostavimo da imamo dva nepristrana procjenitelja i da je varijanca po simulaciji jedne varijable σ_1^2 prvog procjenitelja veća od varijance po simulaciji jedne varijable drugog procjenitelja σ_2^2, dok je za vremena izvršavanja po simulaciji jedne varijable obrnuta situacija ($\tau_1 < \tau_2$). Iz 1.11 je odmah vidljivo da će preciznije rješenje dati onaj procjenitelj s manjom vrijednošću $\sigma_i^2 \tau_i$.

Primijetimo da je u 1.11 vrijeme izvršavanja konstantno. Za većinu problema određivanja cijena izvedenica to zaista i jest istina. Međutim postoje i slučajevi u kojima vrijeme izvršavanja značajno varira za različite simulacije (npr. kod određivanja cijene opcije s barijerom). U tom slučaju svakoj od simuliranih varijabli pridružujemo njeno vrijeme izvršavanja $(\alpha_1, \tau_1), (\alpha_2, \tau_2), \ldots$. Na sličan način kao prije, može se pokazati da prilikom uspoređivanja alternativnih procjenitelja treba izabrati onaj za koji je produkt varijance po simulaciji i očekivanog vremena izvršavanja po simulaciji najmanji.

Pristranost

Prethodna usporedba efikasnosti oslanja se na činjenicu da su procjenitelji koje uspoređujemo prosjeci nepristranih simuliranih varijabli. Dakle, u slučaju da su procjenitelji koje promatramo nepristrani, njihova varijabilnost i vrijeme potrebno da se izvrše simulacije su najvažnije stvari na koje treba obratiti pažnju. Međutim, nema smisla smanjivati varijancu ili vrijeme izvršavanja ako će zbog toga procjenitelj težiti prema krivoj vrijednosti. Iako je u nekim slučajevima pristranost neizbježna (npr. kod malih uzoraka), nas zanimaju samo oni procjenitelji kod kojih pristranost možemo ukloniti tako da povećamo vrijeme izvršavanja.

Pristranost je prosječna razlika između procjenitelja i prave vrijednosti parametra, odnosno

$$Bias(\hat{\alpha}) \;=\; \mathbb{E}[\hat{\alpha} - \alpha].$$

Neki procjenitelji su pristrani za sve konačne veličine uzorka, ali postaju asimptotski nepristrani kako se broj simuliranih varijabli n povećava. Osim njih, postoje i procjenitelji kod kojih pristranost neće nestati bez obzira na to koliko velik n odaberemo. Jedan od mogućih primjera nezanemarivih pristranosti prilikom određivanja cijena financijskih izvedenica navest ćemo u trećem poglavlju (vidi 3.2) nakon što uvedemo definicije potrebne za razumijevanje izvedenica i svega vezanog uz njih.

Pristranost možemo smanjiti tako da povećamo vrijeme izvršavanja svake pojedine varijable. Ako bi pritom vrijeme koje nam je dostupno za izvršiti cijelu simulaciju bilo ograničeno, morali bismo smanjiti broj simuliranih varijabli. Posljedica toga bila bi povećanje varijance procjenitelja. Iz tog razloga nam je vrlo važna *srednjekvadratna greška MSE*[1] koja nam govori u kakvom su odnosu pristranost i varijanca. Ako je $\hat{\alpha}$ procjenitelj parametra α, tada

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\alpha}) &= \mathbb{E}[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{\alpha} - \mathbb{E}[\hat{\alpha}])^2] + (\mathbb{E}[\hat{\alpha}] - \alpha)^2 \\ &= Var(\hat{\alpha}) + Bias^2(\hat{\alpha}). \end{aligned}$$

Dakle, srednjekvadratna greška je jednaka sumi varijance i kvadrata pristranosti. Iz druge jednakosti je vidljivo da je, ukoliko je naš procjenitelj nepristran, srednjekvadratni procjenitelj jednak varijanci procjenitelja $\hat{\alpha}$. Specijalno, za nepristrane Monte Carlo procjenitelje vrijedi $MSE(\hat{\alpha}) = 0^2 + Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2/n$.

Dok je točan izračun srednjekvadratne greške uglavnom nepraktičan, često se koristi omjer procijenjenih MSE vrijednosti kao mjera relativne preciznosti. Uobičajeno je staviti MSE procjenitelja kojeg smatramo boljim u brojnik, tako da omjer srednjekvadratnih greška manji od 1 označava relativnu neučinkovitost procjenitelja čiji MSE je u nazivniku.

1.4 Uzorkovanje po važnosti

Kao što smo već vidjeli, greška Monte Carlo procjenitelja smanjuje se s povećanjem faktora $\sqrt{n}$, gdje je n broj simuliranih varijabli. Osim toga, postoje brojne tehnike koje nam omogućuju smanjenje greške bez da povećamo broj simulacija. Nazivamo ih tehnikama redukcije varijance. Mi ćemo prezentirati jednu od njih koja se naziva *uzorkovanje po važnosti*. Literatura koja će nam pomoći pri tome je [7].

Glavna ideja uzorkovanja po važnosti je smanjivanje varijance promjenom vjerojatnosne mjere u odnosu na koju se računa integral. Zamjena mjere često se koristi u financijskoj matematici gdje stvarnu vjerojatnosnu mjeru zamjenjujemo ekvivalentnom martingalnom mjerom kako bismo lakše mogli izračunati očekivanje. Takvu zamjenu vidjet ćemo u idućem poglavlju.

[1] eng. Mean squared error

Neka je $V \subseteq \mathbb{R}^d$ i neka je X slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f : V \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da želimo procijeniti

$$\alpha = \mathbb{E}[\psi(X)] = \int_V \psi(x)f(x)dx$$

za neku funkciju $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Kao i prije, Monte Carlo procjenitelj za α definiramo sa $\hat{\alpha}_f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi(X_i)$, gdje su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom gustoće f. Pretpostavimo da je $\hat{\alpha}_f$ nepristran.

Neka je g neka druga funkcija gustoće na V takva da vrijedi $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$, za svaki $x \in V$. Tada možemo zapisati

$$\mathbb{E}_f[\psi(X)] = \int_V \psi(x)f(x)dx = \int_V \psi(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx = \mathbb{E}_g\left[\psi(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right], \tag{1.12}$$

gdje smo sa $\mathbb{E}_g$ označili očekivanje u odnosu na gustoću g. Pretpostavimo da su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom gustoće g. Monte Carlo procjenitelj za α je tada

$$\hat{\alpha}_g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}.$$

Lako se pokaže da je $\hat{\alpha}_g$ nepristrani procjenitelj za α. Vrijedi

$$\mathbb{E}_g[\hat{\alpha}_g] = \mathbb{E}_g\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}\right] = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_g\left[\psi(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}\right]\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_f\left[\psi(X_i)\right]\right) = \frac{1}{n}(n\alpha) = \alpha,$$

gdje treća jednakost slijedi iz 1.12.

Postupak uzorkovanja po važnosti često koristimo ako ne znamo simulirati slučajne varijable iz gustoće f ili ako želimo smanjiti varijancu procjenitelja. U tom slučaju treba odabrati g tako da vrijedi

$$Var_f(\psi(X)) > Var_g\left(\psi(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right).$$

Posao nam olakšava činjenica da su $\hat{\alpha}_f$ i $\hat{\alpha}_g$ nepristrani procjenitelji pa im je očekivanje jednako. Prema tome, dovoljno je usporediti samo druge momente. Zbog $\mathbb{E}_g\left[(\psi(X)\frac{f(X)}{g(X)})^2\right] = \mathbb{E}_f\left[\psi(X)^2\frac{f(X)}{g(X)}\right]$, dovoljno je pronaći funkciju gustoće g tako da je

$$\mathbb{E}_f[\psi(X)] > \mathbb{E}_f\left[\psi(X)^2\frac{f(X)}{g(X)}\right].$$

Do sada smo već uvidjeli da je glavna ideja Monte Carlo metode procjenjivanje neke vrijednosti iz generiranih slučajnih uzoraka. U osnovi Monte Carlo metode prate vrlo jednostavan algoritam:

1. Odrediti statistička obilježja varijabli koje promatramo.

2. Simulirati skupove varijabli koje imaju gornja obilježja.

3. Izračunati tražene procjenitelje koristeći ove skupove.

4. Usporediti različite procjenitelje i statistički analizirati rezultate.

Kao što smo već naveli, Monte Carlo metoda često se koristi u financijskoj matematici za određivanje cijena izvedenica. Konkretnije primjere korištenja ovog algoritma dat ćemo u kasnijim poglavljima nakon što iznesemo osnovne definicije vezane uz izvedenice i njihovo vrednovanje.

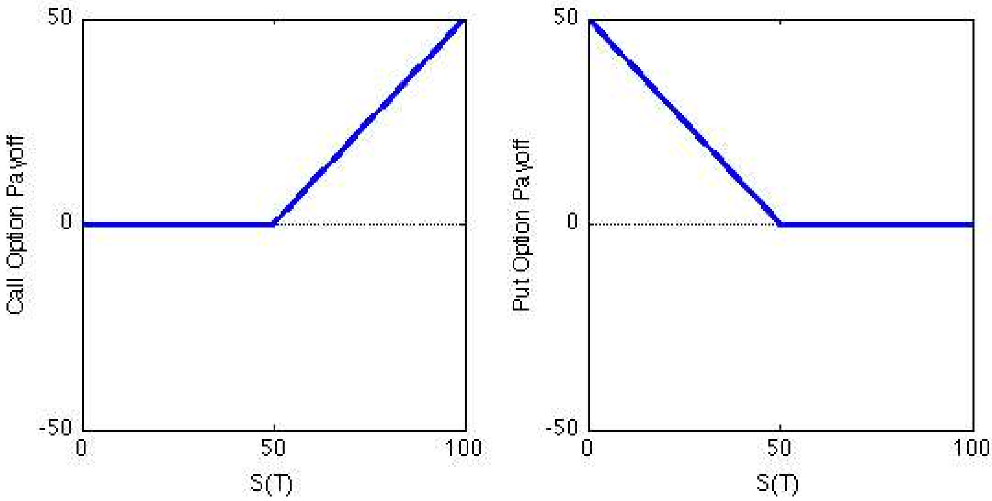
Poglavlje 2

Osnovni principi određivanja cijena izvedenica

Izvedenice možemo definirati kao financijske instrumente čija je vrijednost određena vrijednošću nekog drugog financijskog instrumenta. Najčešće ih vežemo uz kretanje cijena dionica, obveznica, valuta i kamatnih stopa, premda taj drugi financijski instrument može biti bilo što, kao na primjer cijena žita po kilogramu. Jedan od glavnih razloga uvođenja izvedenica bilo je smanjenje rizika, odnosno transfer rizika s jedne osobe na drugu. Na financijskim tržištima sudjeluju investitori koji žele preuzeti tuđe rizike, ali očekuju da za to budu nagrađeni. Neki od najčešćih oblika izvedenica su unaprijedni ugovori (eng. forward) i opcije.

Unaprijedni ugovor daje pravo i obvezu da se određeni vrijednosni papir kupi (ili proda) po unaprijed određenoj cijeni u nekom unaprijed određenom trenutku u budućnosti. Najtipičniji primjer unaprijednog ugovora je unaprijedni ugovor na valute. Unaprijedni ugovor ima dvije strane. Jedna strana zauzima dugu poziciju u ugovoru i obavezuje se kupiti vrijednosni papir na određeni datum u budućnosti, dok druga strana zauzima kratku poziciju i obvezuje se prodati vrijednosni papir. Vrijeme do prodaje/kupnje vrijednosnog papira označavamo s T i nazivamo vrijeme do dospijeća, unaprijed dogovorena cijena po kojoj će se prodati vrijednosni papir naziva se cijena izvršenja K, a sa S_T označavamo cijenu vrijednosnog papira u trenutku T. Stoga će isplata osobi koja ima dugu poziciju u ugovoru iznositi $S_T - K$. S druge strane, isplata osobi koja ima kratku poziciju u ugovoru iznosi $K - S_T$. Očito je da ne mogu obje isplate biti pozitivne. U slučaju kada je $S_T > K$, investitor koji ima dugu poziciju zarađuje jer može kupiti vrijednosni papir po cijeni K i prodati po cijeni S. U isto vrijeme investitor koji ima kratku poziciju gubi taj iznos. Ako je $S_T < K$, situacija je obrnuta.

Opcija daje pravo da se određena vrijednosnica u određenom trenutku (europska opcija) ili do određenog trenutka (američka opcija) kupi (*call*) ili proda (*put*) po unaprijed



Slika 2.1: Vrijednost call i put opcije na dan dospijeća s cijenom izvršenja $K = 50$ (preuzeto iz [9])

određenoj cijeni. Osnovno svojstvo opcije je da, za razliku od unaprijednog ugovora, vlasnik opcije ne mora kupiti vrijednosni papir na koji je opcija napisana. Uz oznake kao gore vrijednost call opcije na dan dospijeća je $C_T = \max(0, S_T - K) = (S_T - K)^+$, dok je vrijednost put opcije na dan dospijeća $P_T = \max(0, K - S_T) = (K - S_T)^+$. Na slici 2.1 prikazan je odnos cijene vrijednosnog papira S_T i vrijednosti call i put opcije na dan dospijeća s cijenom izvršenja $K = 50$.

Promotrimo call opciju na neku dionicu. U slučaju da je na dan dospijeća $S_T > K$, kupac call opcije (investitor koji ima dugu poziciju) iskoristit će svoje pravo i kupiti jednu dionicu. Zatim će tu dionicu prodati po cijeni S_T i zaraditi $S_T - K$. U isto vrijeme će pisac call opcije (investitor koji ima kratku poziciju) morati prodati tu dionicu po cijeni manjoj od tržišne i tako ostvariti gubitak od $K - S_T$. U slučaju da je $S_T < K$, vlasnik opcije neće iskoristiti mogućnost da kupi dionicu po cijeni K jer ju na tržištu može nabaviti po nižoj cijeni. Kako vlasnik opcije ne koristi svoje pravo, pisac opcije ne gubi ništa. Kao što smo vidjeli u ovom primjeru, vlasnik opcije može samo dobiti ugovorom, dok pisac opcije može samo izgubiti. Prema tome pisac opcije na sebe preuzima rizik za što će tražiti nagradu ili premiju. Ta premija je upravo cijena opcije koju kupac mora platiti. Postavlja se pitanje kako izračunati tu cijenu.

U ovom poglavlju bavit ćemo se računanjem cijena izvedenica. Definirat ćemo Brownovo gibanje, Itôv integral i zatim preko Girsanovljevog teorema doći do formula za računanje cijene financijske imovine. Za kraj ćemo prikazati kako se sve od navedenog primjenjuje na Black-Scholes-Mertonov model. Definicije i iskazi teorema navedeni u nastavku poglavlja preuzeti su iz [14] i [15] te se tamo mogu pronaći i dokazi. Osim toga, literatura korištena u ovom poglavlju je [8], [4] i [5].

2.1 Brownovo gibanje

Brownovo gibanje jedan je od najvažnijih procesa u modernoj teoriji slučajnih procesa. Ime je dobilo po škotskom botaničaru Robertu Brownu, koji je pomoću mikroskopa otkrio da se čestice peluda raspršene u tekućini gibaju neprekidno i nepravilno. Neovisno o njegovom radu, Louis Bachelier radio je na teoriji fluktuacije cijena opcija. Kako bismo mogli opisati kretanje cijena izvedenica, moramo znati kako opisati kretanje cijena financijske imovine o kojoj ovisi izvedenica. Slučajan proces kretanja tih cijena u neprekidnom vremenu opisujemo Brownovim gibanjem.

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B_t : t \geq 0)$ *je* Brownovo gibanje *ako vrijedi:*

1. *Putovi* $t \mapsto B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*
2. $B_0 = 0$.
3. *Za sve* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti* $B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ *nezavisni.*
4. *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $B_t - B_s$ *normalno distribuiran s očekivanjem* 0 *i varijancom* $t - s$.

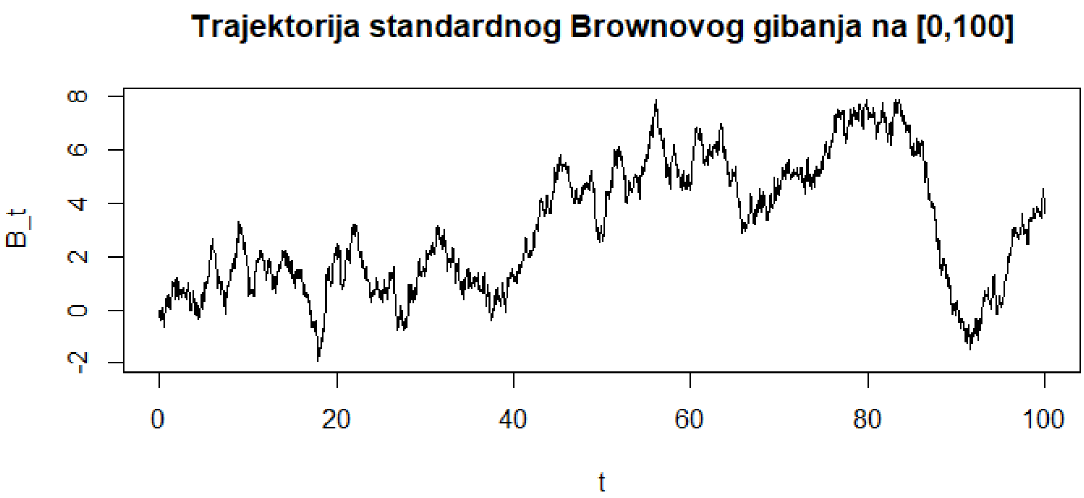
Na slici 2.2 prikazana je jedna trajektorija standardnog Brownovog gibanja na segmentu $[0, 100]$, gdje smo točke t_j dobili koristeći ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0, 100]$ s korakom 0.05.

Iz četvrtog uvjeta iz definicije slijedi da je $\forall t \geq 0,\ B_t$ normalno distribuiran s očekivanjem $\mathbb{E}[B_t] = 0$ i varijancom $Var[B_t] = t$. Iz ovoga slijedi da je i $\mathbb{E}[B_t^2] = t$. Dodatna svojstva koja slijede iz prethodne definicije su da putovi Brownovog gibanja nisu diferencijabilne funkcije te da Brownovo gibanje gotovo sigurno nije proces konačne varijacije. Od ostalih svojstava Brownovog gibanja za nas su još posebno važni martingalno i Markovljevo svojstvo. Sada ćemo ih redom detaljnije objasniti.

Definicija 2.1.2. Varijaciju prvog reda *funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[0, T]$ *definiramo kao*

$$V_T(f) := \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|,$$

gdje je Π *particija intervala* $[0, T]$*, tj.* $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$*, a* $\|\Pi\| = max_{i=1,\ldots,n}|t_i - t_{i-1}|$.



Slika 2.2: Standardno Brownovo Gibanje na segmentu $[0, 100]$

Brownovo gibanje je gotovo sigurno proces neograničene varijacije što se vrlo jednostavno pokaže. Uzmimo particiju $t_j = \frac{jT}{n}, j = 0, 1, \ldots, n$ intervala $[0, T]$ i definirajmo $h_j = \frac{1}{\sqrt{T/n}}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}), j = 1, \ldots, n$. Primijetimo da su h_j nezavisne normalno distribuirane slučajne varijable. Tada je varijacija prvog reda Brownovog gibanja B oblika

$$\sum_{j=1}^{n} |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}| = \sqrt{\frac{T}{n}} \sum_{j=1}^{n} |h_j| = \sqrt{nT} \sum_{j=1}^{n} \frac{|h_j|}{n}.$$

Kada $n \to +\infty$, gornji izraz također ide u $+\infty$ jer prema 1.1.1 zadnja suma konvergira prema $\mathbb{E}[|h_1|]$, a $\sqrt{nT}$ teži u beskonačnost.

Prema tome, stohastički integral $\int_0^t f(s)dB_s$ ne može biti definiran po trajektorijama Brownovog gibanja jer je Brownovo gibanje neomeđene varijacije.

Definicija 2.1.3. *Za slučajan proces* $X = (X_t : t \geq 0)$ *kažemo da je* konačne kvadratne varijacije *ako postoji slučajan proces* $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t : t \geq 0)$ *za koji vrijedi*

$$\langle X \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^2,$$

pri čemu je Π *particija intervala* $[0, T]$.

Za Brownovo gibanje $B = (B_t : t \geq 0)$ vrijedi da (L^2) $\lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 = t$. Stoga je Brownovo gibanje konačne kvadratne varijacije i $\langle B \rangle_t = t$ *g.s.* Neformalan zapis ove tvrdnje je $dB_t dB_t = d\langle B\rangle_t = dt$. Vidjet ćemo da će nam takav zapis biti koristan prilikom definiranja Itove formule.

Definicija 2.1.4. Filtracija za Brownovo gibanje *je familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ *σ-algebri koja zadovoljava*

1. *Za sve* $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t)$.
2. *Za svaki* $t \geq 0$, B_t *je* $\mathcal{F}(t)-$*izmjeriva slučajna varijabla.*
3. *Za sve* $0 \leq s < t$, *prirast* $B_t - B_s$ *nezavisan je od* $\mathcal{F}(s)$.

Drugi uvjet iz prethodne definicije naziva se adaptiranost i tvrdi nam da je, u filtraciji za Brownovo gibanje, informacija dostupna u trenutku t dovoljna za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku. Treći uvjet traži da svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena s bude nezavisan od informacije dostupne u trenutku s. Najjednostavniji primjer ovakve filtracije je prirodna filtracija za Brownovo gibanje definirana s $\mathcal{F}(t) = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$.

Definicija 2.1.5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ *filtracija. Slučajni proces* $M = (M_t, t \geq 0)$ *je* martingal *ako je* $\mathbb{F}-$*adaptiran, ako je* $\mathbb{E}|M_t| < +\infty$ *za sve* $t \geq 0$ *i ako za sve* $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}(s)] = M_s$ *g.s.*

Na vrlo jednostavan način pokaže se da je Brownovo gibanje $B = (B_t : t \geq 0)$ martingal u odnosu na filtraciju za to Brownovo gibanje. Očito imamo $\mathbb{F}-$adaptiranost i $\mathbb{E}|B_t| < +\infty$. Uzmimo $0 \leq s \leq t$ i iskoristimo svojstvo nezavisnosti prirasta $B_t - B_s$ od $\mathcal{F}(s)$. Vrijedi

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s.$$

Još jedno od svojstava Brownovog gibanja koje ćemo navesti je Markovljevo svojstvo. Markovljevo svojstvo nam kaže da je za predviđanje budućih vrijednosti neke varijable bitna samo sadašnja vrijednost te varijable, dok su prošle vrijednosti zanemarive.

Definicija 2.1.6. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ *filtracija. Adaptiran slučajan proces* $X = (X_t : t \geq 0)$ *je* Markovljev proces, *ako za sve* $0 \leq s \leq t$ *i za sve Borel-izmjerive funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *postoji Borel-izmjeriva funkcija* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da je* $\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}(s)] = g(X_s)$ *g.s.*

Uz martingalnost i Markovljevo svojstvo, neka od važnih svojstava Brownovog gibanja su skalirajuće svojstvo, svojstvo simetrije i princip refleksije. Skalirajuće svojstvo nam kaže da je Brownovo gibanje invarijantno na skaliranje, odnosno da se skaliranjem ne mijenja distribucija Brownovog gibanja. Svojstvo simetrije ukazuje na to da je, u slučaju da je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, proces $X = (X_t : t \geq 0)$ definiran s $X_t = -B_t$, $t \geq 0$ također Brownovo gibanje. Princip refleksije kaže da je Brownovo gibanje, koje se u nekom vremenu zaustavljanja krene reflektirati, i dalje Brownovo gibanje.

2.2 Itôv integral

U ovom potpoglavlju definirat ćemo Itôv integral i njegova svojstva. Cilj Itôvog integrala je dati smisao izrazu $\int_0^t H_s dB_s$, gdje je B Brownovo gibanje, $\mathbb{F}$ filtracija za to Brownovo gibanje i H $\mathbb{F}$-adaptiran slučajan proces. Kao što smo već naveli, Brownovo gibanje je proces beskonačne varijacije pa taj integral ne možemo računati kao klasični Riemann-Stieltjesov integral. Dok je rezultat Riemann-Stieltjesovog integrala broj, rezultat ovakve integracije je ponovno slučajan proces.

Do razvoja Itôvog integrala došlo je zbog potrebe za razvojem računa koji će omogućiti rješavanje diferencijalnih jednadžbi koje uključuju stohastičke procese. Kasnije je postao vrlo bitan u financijama gdje se koristi za računanje dobitka kojeg ostvarujemo od držanja neke financijske imovine. H_t interpretiramo kao broj jedinica financijske imovine koje posjedujemo u trenutku t, B_t predstavlja kretanje cijene te financijske imovine, a integral predstavlja dobitak od trgovanja tom financijskom imovinom u svakom trenutku t. S obzirom na ovakvu interpretaciju, jasno je da slučajan proces H mora biti adaptiran jer pozicija u financijskoj imovini u trenutku t može ovisiti samo o informaciji dostupnoj do tog trenutka.

U nastavku ćemo definirati Itôv integral za jednostavne i opće integrande te ćemo navesti Itôvu formulu za Itôv proces koja će nam biti potrebna za diferencijalni račun.

Za početak, trebamo definirati jednostavne procese i Itôv integral za jednostavan proces. Fiksirajmo $T > 0$. Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$ filtracija za to Brownovo gibanje. Neka je $H = (H_t : t \in [0, T])$ slučajan proces adaptiran s obzirom na $\mathbb{F}$.

Definicija 2.2.1. *Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ zove se* jednostavan proces *ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1}\rangle}(t)$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \dots, n-1$, takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva.

Definicija 2.2.2. *Za jednostavan $\mathbb{F}$-adaptiran slučajan proces H definiran kao u 2.2.1 definiramo slučajan proces $I = (I_t : t \in [0, T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}), \tag{2.1}$$

gdje $t_j \wedge t = min(t_j, t)$.

Taj proces nazivamo Itôv integral *jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo s*

$$I_t = \int_0^t H_s dB_s = (H \cdot B)_t.$$

Svojstva Itôvog integrala za jednostavne integrande nećemo navoditi, već će nam ono samo poslužiti za definiranje Itôvog integrala za opće integrande. S obzirom na to da je integral za opće integrande samo poopćenje integrala za jednostavne integrande, slijedit će da oni imaju ista svojstva.

Prostor općih integranda označavamo s $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. To je familija slučajnih procesa $H = (H_t : 0 \le t \le T)$ koji su $\mathbb{F}$-adaptirani i zadovoljavaju uvjet $\mathbb{E}\int_0^T H_t^2 dt < +\infty$. Za slučajan proces H iz skupa općih integranda postoji niz jednostavnih procesa $(H^{(n)})_{n\in N}$ takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\displaystyle\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2 dt = 0$, odnosno taj niz aproksimira H i on je Cauchyjev u $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Za taj niz definiramo $I_t^{(n)} = \int_0^t H_s^{(n)} dB_s$. Sada zbog činjenice da je niz Cauchyjev u $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ i Itove izometrije (2.3)

$$\lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = \lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2 dt = 0.$$

Prema tome je niz $(I^{(n)})_{n\in N}$ Cauchyjev u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ i zato ima limes.

Definicija 2.2.3. Itôv integral procesa H s obzirom na Brownovo gibanje B *je slučajan proces* $I = (I_t : t \in [0,T])$ *definiran sa*

$$I_t = \int_0^t H_s dB_s = (L^2) \lim_{n\to+\infty} \int_0^t H_s^{(n)} dB_s. \tag{2.2}$$

Neformalno, Itôv integral zapisujemo kao $dI_t = H_t dB_t$, a kvadratnu varijaciju Itôvog integrala zapisujemo sa $dI_t dI_t = H_t^2 dB_t dB_t = H_t^2 dt$.

Svojstva Itôvog integrala

- **Neprekidnost**
  Funkcija $t \mapsto I_t$ je $g.s.$ neprekidna na $[0,T]$.

- **Izmjerivost**
  I_t je $\mathcal{F}(t)$-izmjeriv za svaki $t \in [0,T]$.

- **Linearnost**
  Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i H *i* G iz $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Tada je i $(aH + bG)$ iz $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ i vrijedi $((aH + bG)\cdot B)_t = a(H\cdot B)_t + b(G\cdot B)_t$.

- **Martingalnost**
  Itôv integral $I = (I_t : t \in [0, T])$ je martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Martingalno svojstvo i $I_0 = 0$ nam daju da je $\mathbb{E}[I_t] = \mathbb{E}[I_0] = 0, \forall t \in [0.T]$. Iz toga je očito $VarI_t = \mathbb{E}[I_t^2] - (\mathbb{E}[I_t])^2 = \mathbb{E}[I_t^2]$.

- **Itôva izometrija**
  Itôv integral zadovoljava
  $$\mathbb{E}[I_t^2] = \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds. \tag{2.3}$$

- **Kvadratna varijacija**
  Kvadratna varijacija do trenutka t Itôvog integrala I_t jednaka je $\langle I \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Itôva formula

Zbog nenul kvadratne varijacije Brownovog gibanja, derivaciju kompozicije funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ ne možemo računati koristeći standardni diferencijalni račun. Na sreću, Itôva formula nam daje način kako riješiti taj problem.

Definicija 2.2.4. *Itôva formula za Brownovo gibanje je*

$$f(B_T) - f(B_0) = \int_0^T f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(B_t) dt,$$

gdje je f neka funkcija klase C_2.

Formula se češće koristi u diferencijalnom obliku

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt.$$

Postoji i općenitiji oblik Itôve formule za Itôv proces. Kako ne mora uvijek vrijediti da je funkcija Itôvog integrala i sama Itôv integral, definira se šira klasa slučajnih procesa u koje pripadaju i Itôvi integrali.

Definicija 2.2.5. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija.* Itôv proces *je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t G_s ds,$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$ neslučajan, $H = (H_t : t \geq 0)$ $\mathbb{F}$-adaptiran proces za koji vrijedi $H \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$, $G = (G_t : t \geq 0)$ $\mathbb{F}$-adaptiran proces za koji je $\int_0^t |G_s| ds < +\infty$ g.s. $\forall t \geq 0$.

Jednadžba se zapisuje u diferencijalnom obliku kao $dX_t = H_t dB_t + G_t dt$. Za diferencijalni račun, trebamo znati i kako izračunati kvadratnu varijaciju Itôvog procesa. Računamo

$$d\langle X\rangle_t = dX_t dX_t = H_t^2 dB_t dB_t + H_t G_t dB_t dt + G_t^2 dt dt = H_t^2 dt.$$

Moramo još pokazati kako izračunati integral nekog slučajnog procesa u odnosu na Itôv proces.

Definicija 2.2.6. *Neka je* $X = (X_t : t \geq 0)$ *Itôv proces i neka je* $K = (K_t : t \geq 0)$ *adaptiran proces koji zadovoljava* $\mathbb{E}\int_0^t K_s^2 H_s^2 ds < +\infty$ *i* $\int_0^t |K_s G_s| ds < +\infty$ $\forall t \geq 0$. Stohastički integral od K s obzirom na Itôv proces X *definiran je s*

$$\int_0^t K_s dX_s = \int_0^t K_s H_s dB_s + \int_0^t K_s G_s d_s.$$

Sada imamo sve potrebno za definiranje Itôve formule za Itôve procese.

Definicija 2.2.7. (Itôva formula za Itôv proces)
Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ *Itôv proces i neka je* $f(t, x)$ *funkcija koja ima neprekidne derivacije* f_t, f_x, f_{xx}. *Za svaki* $T \geq 0$ *vrijedi,*

$$\begin{aligned} f(T, X_T) - f(0, X_0) &= \int_0^T f_t(t, X_t)dt + \int_0^T f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t \\ &= \int_0^T \left[f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)G_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)H_t^2 \right] dt + \int_0^T f_x(t, X_t)H_t dB_t. \end{aligned}$$

Za kraj ćemo ovu formulu zapisati u diferencijalnom obliku

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}(t, X_t)dX_t dX_t.$$

2.3 Girsanovljev teorem

Girsanovljev teorem opisuje kako se mijenja dinamika stohastičkih procesa kada originalnu mjeru zamijenimo ekvivalentnom mjerom. Ovaj teorem je posebno važan u financijskoj matematici jer nam govori kako stvarnu vjerojatnost možemo zamijeniti s vjerojatnošću neutralnom na rizik što će nam uvelike pomoći kod računanja cijena izvedenica.

Teorem 2.3.1. (Girsanovljev teorem)
Neka je $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ *Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, te*

neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Neka je $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq T)$ $\mathbb{F}$-adaptiran slučajan proces. Definiramo

$$Z_t = exp\left\{-\int_0^t \Theta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_u^2 du\right\}$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_u du,$$

te pretpostavimo da je $\mathbb{E}\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 du < +\infty$. Stavimo $Z = Z_T$. Tada je $\mathbb{E}[Z] = 1$ te je uz vjerojatnost P^* definiranu s

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Z], A \in \mathcal{F}$$

slučajni proces $B^* = (B_t* : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje.

Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ definirana u gornjem teoremu ekvivalentna je vjerojatnosnoj mjeri $\mathbb{P}$. Za dvije vjerojatnosti $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{P}^*$ kažemo da su *ekvivalentne* na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako za svaki $A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$. Pokažimo da su $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne mjere. Iz definicije procesa $(Z_t : 0 \leq t \leq T)$ vidimo da za slučajnu varijablu Z uvijek vrijedi $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$. Uzmimo da je $\mathbb{P}(A) = 0$. Tada iz definicije vjerojatnosti $\mathbb{P}^*$ odmah vidimo da mora biti i $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Pretpostavimo sada suprotno, tj. $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Tada je i $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A Z] = 0$. Zbog pretpostavke da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$, mora vrijediti $\mathbb{P}(A) = 0$. Vidimo da su $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne mjere. Mjeru $\mathbb{P}^*$ nazivat ćemo *mjerom neutralnom na rizik*. Njen naziv opravdat ćemo već u idućem potpoglavlju.

2.4 Određivanje cijena financijske imovine u BSM modelu

U neprekidnom modelu financijskog tržišta, financijskim instrumentima trguje se neprekidno, za razliku od diskretnih modela u kojima se trguje samo u unaprijed određenim vremenskim trenutcima. Kako se trgovanje na modernim tržištima može obavljati u vrlo malim vremenskim razmacima, model dobro aproksimira stvarno tržište. U ovom radu bavit ćemo se Black-Scholes-Mertonovim modelom u kojem je cijena dionice modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem. Scholes i Merton su 1997. dobili Nobelovu nagradu za taj model te se on do danas smatra jednim od najvažnijih modela za određivanje cijena dionica.

Uzmimo fiksan $T > 0$. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T)$. Promatrat ćemo neprekidni model financijskog tržišta na kojem postoje dvije financijske imovine. Prva je nerizična imovina (najčešće novac) koja se ukamaćuje po konstantnoj kamatnoj stopi r. Označavat ćemo ju s $\beta = (\beta_t : 0 \leq t \leq T)$, diferencijalna jednadžba dana je s $d\beta_t = r\beta_t dt$. Rješenje te jednadžbe je $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$. Pretpostavljamo da je $\beta_0 = 1$. Druga financijska imovina je dionica. U Black- Scholes-Mertonovom modelu cijenu dionice $S = (S_t : 0 \leq t \leq T)$ modelirat ćemo geometrijskim Brownovim gibanjem

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{2.4}$$

gdje α označava srednju stopu povrata, a σ volatilnost dionice. Rješenje te diferencijalne jednadžbe dano je formulom

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}. \tag{2.5}$$

Iz ove formule lako zaključujemo da S_t ima lognormalnu distribuciju za svaki $t \in [0, T]$ (jer su prirasti Brownovog gibanja normalno distribuirani).

Kako bismo došli do cijene izvedenica, što je glavni cilj ovog poglavlja, za početak moramo navesti niz definicija.

Definicija 2.4.1. Portfelj ili strategija trgovanja *je $\mathbb{F}$-adaptiran slučajan proces $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : 0 \leq t \leq T)$, gdje ϕ_t^0 predstavlja količinu novca u trenutku t, a ϕ_t^1 broj dionica.*
Vrijednost portfelja *u trenutku $t \in [0, T]$ je slučajna varijabla $V_t^\phi = \phi_t^0 \beta_t + \phi_t^1 S_t$.*
Kažemo da je portfelj samofinancirajući *ako promjena u njegovoj vrijednosti dolazi samo od promjene cijene dionice.*
Strategija *ϕ je arbitraža ako je $V_0(\phi) = 0$, $V_t(\phi) \geq 0$ i $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$.*

Kažemo da postoji prilika za arbitražu ako netko s pozitivnom vjerojatnošću može ostvariti pozitivan povrat bez rizika ili gubitka. Očiti primjer arbitraže je situacija u kojoj je moguće nešto istovremeno kupiti i prodati po različitim cijenama. Kako takva situacija ne može dugo opstati na financijskom tržištu, uobičajeno modeli financijskih tržišta pretpostavljaju da arbitraža nije moguća.

Osim stvarnih vrijednosti dionice i portfelja, zanimat će nas i njihove diskontirane vrijednosti. Diskontiranje je proces svođenja na sadašnju vrijednost za što koristimo diskontni faktor e^{-rt}. Proces diskontirane vrijednosti dionice definiramo sa $\tilde{S} = (e^{-rt} S_t : 0 \leq t \leq T)$, a proces diskontirane vrijednosti portfelja s $\tilde{V}^\phi = (e^{-rt} V_t^\phi : 0 \leq t \leq T)$. Može se pokazati da za diskontiranu cijenu dionice vrijedi $d\tilde{S}_t = (\alpha - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t$, a za diskontiranu vrijednost portfelja $d\tilde{V}_t^\phi = \phi_t^1 d\tilde{S}_t$.

Sada možemo navesti jedan od fundamentalnih teorema teorije određivanja cijena imovine koji nam daje nužan i dovoljan uvjet za tržište bez arbitraže. Dokaz teorema se može pronaći u [14].

Teorem 2.4.2. (1. fundamentalni teorem određivanja cijena imovine)
Tržište ne dopušta arbitražu (uz vjerojatnost $\mathbb{P}$) ako i samo ako postoji vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ takva da je $\mathbb{P}^*_{|\mathcal{F}_T} \sim \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$ i $\tilde{S}$ je $\mathbb{P}^*$-martingal. Tu mjeru nazivamo ekvivalentna martingalna mjera *ili* mjera neutralna na rizik.

Uočimo da je u tom slučaju i diskontirana vrijednost portfelja $\tilde{V}^\phi$ također $\mathbb{P}^*$-martingal.

Definicija 2.4.3. Slučajan zahtjev *s dospijećem T je $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla C takva da je $0 \le C < +\infty$ $\mathbb{P} - g.s.$.*
Samofinancirajući portfelj ϕ je replicirajući portfelj *za slučajni zahtjev C ako je $V_T^\phi = C$ i $V_t^\phi \ge 0$ $\mathbb{P} - g.s.$*
Ako takav portfelj ϕ postoji, slučajni zahtjev C je dostižan.
Model tržišta bez arbitraže je potpun *ako je svaki slučajan zahtjev dostižan.*

Sada možemo navesti i drugi fundamentalni teorem čiji se dokaz također može pronaći u [14].

Teorem 2.4.4. (2. fundamentalni teorem određivanja cijena imovine)
Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalenta martingalna mjera.

Odsustvo arbitraže i potpunost modela su nam izrazito bitni jer, ako su zadovoljena ta dva uvjeta, možemo pronaći jedinstvenu cijenu dostižnih slučajnih zahtjeva. Kao što ćemo pokazati u nastavku, cijena slučajnog zahtjeva za koji postoji replicirajuća strategija jednaka je očekivanoj vrijednosti isplate tog zahtjeva, diskontiranog bezrizičnom kamatnom stopom. No tu očekivanu vrijednost nećemo računati u odnosu na stvarnu vjerojatnost $\mathbb{P}$, nego u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru ili mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$.

Kao što smo već spomenuli u uvodu ovog poglavlja, jedno od važnih pitanja u financijskom modeliranju je kako izračunati pravednu cijenu za neki slučajan zahtjev C. Pretpostavljamo da je tržište koje promatramo bez arbitraže i potpuno. Tada za svaki slučajan zahtjev C postoji replicirajući portfelj ϕ. Označimo sa V_0^ϕ početnu cijenu replicirajućeg portfelja u trenutku $t = 0$. Tada cijena zahtjeva C mora biti jednaka V_0^ϕ, inače postoji mogućnost za arbitražu. Pokažimo zašto to vrijedi. Pretpostavimo da je cijena slučajnog zahtjeva koji prilikom dospijeća isplaćuje vrijednost C veća od cijene V_0^ϕ portfelja koji ga replicira. Tada možemo prodati taj slučajan zahtjev, kupiti portfelj za cijenu V_0^ϕ, a ostatak novca uložiti u banku. U trenutku dospijeća možemo prodati portfelj za iznos $V_T^\phi = C$ te s tim novcem namiriti svoja dugovanja, a u banci nam ostaje uložen novac. Dakle, rezultat je arbitraža. Obrnuto, pretpostavimo da je cijena slučajnog zahtjeva manja od V_0^ϕ. Prvo možemo posuditi iznos V_0^ϕ iz banke, kupiti slučajan zahtjev, a ostatak novca ostaviti u banci. Po dospijeću, banci ćemo morati vratiti iznos C, što je upravo iznos koji ćemo dobiti od slučajnog zahtjeva, i još ćemo imati novac uložen u banku. Dakle, rezultat je ponovno arbitraža.

Iz gornjeg razmatranja jasno nam je da cijena slučajnog zahtjeva u svakom trenutku mora biti jednaka vrijednosti replicirajućeg portfelja. Uzmimo proizvoljan slučajan zahtjev C i njegov replicirajući portfelj ϕ, dakle $V_T^\phi = C$. S obzirom na to da je tržište koje promatramo bez arbitraže i potpuno, postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Tada je niz diskontiranih vrijednosti portfelja $(\tilde{V}_t^\phi : 0 \leq t \leq T)$ $\mathbb{P}^*$-martingal (jer je i niz diskontiranih cijena $\mathbb{P}^*$-martingal) pa je

$$\tilde{V}_t^\phi = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T^\phi | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[e^{-rT} C | \mathcal{F}_t], \tag{2.6}$$

odnosno

$$V_t^\phi = e^{rt} \mathbb{E}^*[e^{-rT} C | \mathcal{F}_t]. \tag{2.7}$$

V_t^ϕ nazivamo cijenom slučajnog zahtjeva C u trenutku t. Specijalno je, u trenutku $t = 0$,

$$C_0 = V_0^\phi = \mathbb{E}^*[e^{-rT} C].$$

Kao primjer, koristeći ovu formulu cijena europske call opcije iznosi $C_0 = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_T - K)^+]$.

Primijenimo sada sve navedene tvrdnje na Black-Scholes-Mertonovom modelu. Kao što smo već rekli imamo jednu nerizičnu imovinu koja raste po kamatnoj stopi r i dionicu čiju cijenu modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem pa je cijena u diferencijalnom obliku dana s $dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t$, gdje je $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija generirana tim Brownovim gibanjem. Bitno nam je da je filtracija generirana Brownovim gibanjem jer u suprotnom BSM model ne mora biti potpun. Također pretpostavljamo da je volatilnost σ različita od nule. Diferencijalna jednadžba diskontirane cijene dionice je tada oblika

$$d\tilde{S}_t = d(e^{-rt} S_t) = (\alpha - r) e^{-rt} S_t dt + \sigma e^{-rt} S_t dB_t = \sigma e^{-rt} S_t [\Theta dt + dB_t].$$

Vrijednost

$$\Theta = \frac{\alpha - r}{\sigma}$$

se zove *tržišna cijena rizika* ili *Sharpeov omjer*.

Vratimo se sada na Girsanovljev teorem (2.3.1) u kojemu smo definirali vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ i pokažimo da je to ekvivalentna martingalna mjera u odnosnu na vjerojatnost $\mathbb{P}$. Neposredno nakon iskaza teorema smo pokazali da su $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne mjere pa je samo potrebno pokazati da je diskontirana cijena dionica $\tilde{S}$ martingal u odnosu na $\mathbb{P}^*$. Prisjetimo se definicije procesa $B^* = (B_t^* : 0 \leq t \leq T)$. Za $t \in [0, T]$ vrijedi $B_t^* = B_t + \Theta t$. (Mi smo pretpostavili da su volatilnost i srednja stopa povrata u modelu konstantni pa je tako i tržišna cijena rizika konstantna. Ta pretpostavka se lako može zamijeniti pretpostavkom da su oni adaptirani slučajni procesi.) Diferencijalni oblik ove jednadžbe glasi $dB_t^* = dB_t + \Theta dt$ i prema Girsanovljevom teoremu slijedi da je proces B^* Brownovo gibanje. Diskontiranu cijenu dionice sada možemo zapisati kao

$$d\tilde{S}_t = \sigma e^{-rt} S_t dB_t^*$$

stoga je uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ diskontirana cijena dionice martingal (kao Itôv integral Brownovog gibanja). Kada uvrstimo $dB_t = -\Theta dt + dB_t^*$ u diferencijalnu formulu za cijenu dionice, dobijemo

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^*.$$

Primjećujemo da je sada srednja stopa povrata na dionicu jednaka r, odnosno jednaka je povratu na nerizičnu imovinu. Iz tog razloga vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ nazivamo *vjerojatnost neutralna na rizik*. Rješenje prethodne diferencijalne jednadžbe dano je formulom

$$S_t = S_0 exp\left\{\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right\}.$$

Postojanje ekvivalentne martingalne mjere nam kaže da je model tržišta bez arbitraže. Uz pretpostavke da je filtracija generirana Brownovim gibanjem B i da je volatilnost različita od nule, model tržišta je i potpun. To nam garantira postojanje jedinstvene cijene za slučajne zahtjeve, odnosno kao i prije vrijedi da cijenu slučajnog zahtjeva računamo po formuli $V_t^\phi = e^{rt}\mathbb{E}^*[e^{-rT}C|\mathcal{F}_t]$. Formule za cijene izvedenica u BSM modelu mogu se i eksplicitno izračunati, međutim u našem radu to neće biti potrebno. U idućem poglavlju bavit ćemo se simuliranjem cijena izvedenica Monte Carlo metodom za što nam je dovoljno znati da se one računaju kao očekivanja u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru.

Poglavlje 3

Određivanje cijena izvedenica korištenjem Monte Carlo metode

U ovom poglavlju ćemo prethodno napisanu teoriju primijeniti u praksi. Procijenit ćemo cijene nekih izvedenica koristeći Monte Carlo simulacije. Literatura koja će nam u tom pomoći je [8] i [7]. Daljnju analizu radit ćemo na dionici Podravke, stoga će ona predstavljati vrijednosnicu o kojoj ovisi cijena izvedenice. Podravka je jedna od vodećih prehrambenih tvrtki u regiji, a njene dionice su na Zagrebačku burzu uvedene 1998. godine. Danas je dionica Podravke sastavni dio indeksa CROBEX10 koji uključuje 10 dionica s najvećom free float tržišnom kapitalizacijom [1] i prometom na Zagrebačkoj burzi.

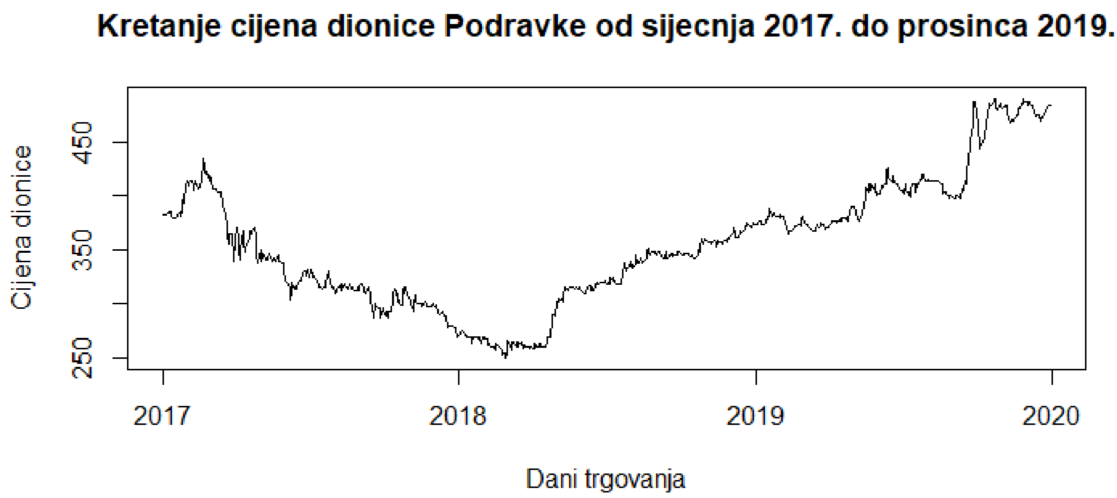
Našu analizu bazirat ćemo na kretanju cijene dionice Podravke u periodu od 1. siječnja 2017. do 31. prosinca 2019.[2] te ćemo zanemariti novonastalu financijsku krizu uzrokovanu covidom-19 koja započinje u veljači 2020. Na grafu 3.1 prikazano je kako su se cijene dionice kretale u tom periodu. Vidimo da se veći pad cijene dogodio početkom 2018., no nakon toga cijena raste i dostiže iznos od 484 HRK po dionici. Dionica isplaćuje dividendu, no mi ćemo to zanemariti za potrebe naše analize.

Da bismo mogli izračunati cijenu izvedenica, moramo odrediti kako će se u budućnosti kretati cijena dionice Podravke. Kao što smo pokazali u prethodnom poglavlju, cijenu dionice u BSM modelu modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem, a uz vjerojatnost neutralnu na rizik vrijedi da je

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}, \tag{3.1}$$

[1] Free float tržišna kapitalizacija je tržišna kapitalizacija dionica koje su dostupne investitorima za trgovanje (tzv. *free float* dionice). Tržišnu kapitalizaciju računamo kao umnožak izdanih dionica i tržišne cijene tih dionica.

[2] Podaci o cijenama su preuzeti sa stranice Zagrebačke burze.



Slika 3.1: Kretanje cijena dionice Podravke u periodu od 1.1.2017. do 31.12.2019.

gdje je S_0 početna cijena dionice, σ volatilnost, r kamatna stopa na nerizičnu imovinu i $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje. Za procjenu kretanja cijene dionice u budućnosti, morat ćemo simulirati Brownovo gibanje za što ćemo koristiti program R ([12]). Cijenu S_0 lako iščitamo iz preuzetih cijena dionice i ona iznosi $S_0 = 484$ kn (to je cijena na datum 30.12.2019.). Pretpostavit ćemo da je kamatna stopa konstantna i da ona iznosi $r = 2\%$. To je zapravo realna kamatna stopa koju možemo ostvariti na bezrizičnu investiciju. Nju često aproksimiramo dugoročnom stopom rasta BDP-a koja, prema povijesnim podacima, u prosjeku iznosi 2% godišnje. Iako je u posljednje vrijeme vidljiv trend snažnog pada kamatnih stopa te se one sve više približavaju 0%, mi ćemo u našoj simulaciji koristiti povijesno referentnu kamatnu stopu $r = 2\%$.

Ono za što su nam najpotrebniji podaci o kretanju cijena u prošlosti je procjena volatilnosti. Volatilnost (oznaka σ) je mjera rizičnosti povrata na dionicu, a računamo je koristeći log-povrate dionice. Što je σ veća, to je dionica rizičnija za ulaganje. Pretpostavimo da promatramo cijene dionice do trenutka T i neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ particija intervala $[0, T]$. Ako logaritmiramo 3.1, dobijemo da je u trenutku t_j

$$\log S_{t_j} = \log S_0 + \sigma B_{t_j} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_j.$$

Zapišemo li tu jednadžbu za trenutak t_{j-1} i oduzmemo od prethodne, dobit ćemo log-povrate

$$\log \frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} = \sigma(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1}). \tag{3.2}$$

Realiziranu volatilnost računamo po formuli

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\log \frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}}\right)^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 + 2\sigma \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sum_{j=1}^{n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(t_j - t_{j-1}) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})^2.$$

Kada pustimo $||\Pi|| \to 0$, prva suma teži prema T, dok druge dvije konvergiraju prema 0. Zbog toga volatilnost možemo procijeniti koristeći formulu

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{n} \left(\log \frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}}\right)^2. \tag{3.3}$$

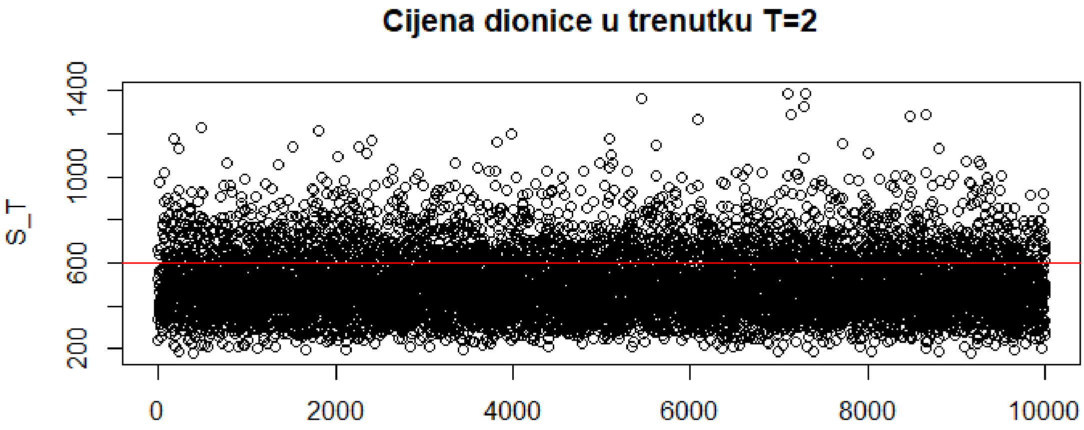
Mi raspolažemo podacima za 3 godine, stoga je u našem slučaju $T = 3$. Kada sve uvrstimo u formulu dobijemo da je $\hat{\sigma}^2 = 0.042746$, a $\hat{\sigma} = 0.206752$. Dakle, procijenjena volatilnost dionice Podravke iznosi 20.6752%.

3.1 Europska call opcija

Prvi primjer na kojem ćemo prikazati kako funkcioniraju Monte Carlo simulacije je izračun cijene europske call opcije. Kao što smo već naveli, call opcija vlasniku daje pravo da kupi dionicu u trenutku T u budućnosti po unaprijed dogovorenoj cijeni K. Stoga je isplata vlasniku opcije u trenutku T jednaka $C = (S_T - K)^+$. U prethodnom poglavlju smo pokazali da cijenu slučajnog zahtjeva C u trenutku $t = 0$ računamo kao $C_0 = \mathbb{E}^*[e^{-rT} C]$. Specijalno, u slučaju europske call opcije imamo

$$C_0 = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_T - K)^+].$$

Naš cilj je odrediti cijenu call opcije s dospijećem za $T = 2$ godine, odnosno dospijećem 31.12.2021. Cijena izvršenja K određuje se ovisno o tome koliki je rizik kupac opcije spreman preuzeti i koliko novca želi potrošiti na njenu kupnju. Prilikom kupnje call opcije, veća cijena izvršenja znači da ćemo opciju platiti jeftinije i obratno. Ako zanemarimo pad cijene u 2018., iz prošlih cijena vidimo da cijena dionice Podravke raste otprilike za 100 kn po godini. Pretpostavimo da smo mi kupac koji ne želi preuzeti veliki rizik, ali također želi proći što jeftinije. Jasno je da veća cijena izvršenja call opcije znači veći rizik jer se, ukoliko cijena dionice ipak ne naraste onoliko koliko smo očekivali, opcija neće aktivirati. Za cijenu izvršenja odabiremo $K = 600$ kn. Dakle, pretpostavljamo da će cijena nastaviti rasti kao protekle dvije godine, ali kako bismo ipak nešto smanjili rizik, pretpostavljamo



Slika 3.2: Simulirane cijene dionice u trenutku $T = 2$

da će tempo rasta biti sporiji. Kao što smo već naveli, pretpostavljamo da je kamatna stopa fiksna i iznosi $r = 2\%$. Iz prethodne formule je vidljivo da je isplata europske call opcije određena samo završnom cijenom dionice S_T i ne ovisi o kretanju cijena između trenutka 0 i T. Stoga je jedino što nam preostaje za izračunati cijena dionice u trenutku T, odnosno

$$S_T = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B_T\right\}.$$

B_T je normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom T. Stoga B_T možemo simulirati kao $\sqrt{T}Z$, gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla.

Kako sada koristimo Monte Carlo simulacije? Iz gornjeg razmatranja, vidimo da je dovoljno znati generirati veliki uzorak $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ nezavisnih slučajnih varijabli iz standardne normalne distribucije. Mi ćemo uzeti da je $N = 10000$. Zatim izračunamo cijenu dionice S_T po formuli

$$S_T = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right\}$$

i stavimo

$$C_i = e^{-rT}(S_T - K)^+$$

za svaku od slučajnih varijabli $Z_i, i = 1, \ldots, N$. Koristeći Monte Carlo procjenitelj $\hat{C}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} C_0$ očekivanja $\mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_T - K)^+]$, dobijemo aproksimaciju cijene opcije. Procjenitelj je jako konzistentan, što znači da $\hat{C}_0 \to C_0$ s vjerojatnošću 1 kada $n \to +\infty$. Ovaj procjenitelj je također i nepristran. Dokazi ovih tvrdnji mogu se pronaći u [7].

Navedenu simulaciju smo proveli u programu R, a kod se nalazi u dodatku A. Na grafu 3.2 prikazane su simulirane cijene dionice u trenutku $T = 2$ te je crvenom linijom označena cijena izvršenja $K = 600$. Vidimo da se veći broj cijena grupirao ispod crvene linije što znači da je u više slučajeva simulirana cijena dionice u trenutku T manja od cijene izvršenja (točnije manja je u 72.6% slučajeva). To znači da bi u 72.6% slučajeva kupac call opcije bio na gubitku jer bi isplata od opcije iznosila 0 kn. Zaključujemo da je naša procjena vezana za cijenu izvršenja K bila pomalo preoptimistična. Dobili smo da cijena opcije iznosi $C_0 = 25.36$ kn, dok je 95% interval pouzdanosti za C_0 jednak [24.01, 26.71]. Za usporedbu, izračunali smo i cijenu call opcije ukoliko je kamatna stopa $r = 0.5\%$ što je realnije na današnjem tržištu. Dobili smo da je cijena opcije 21.64 kn. Dakle, u ovom slučaju cijena opcije je manja, ali je i postotak slučajeva u kojima bi opcija donijela zaradu manji, točnije 19.67%.

3.2 Azijska call opcija

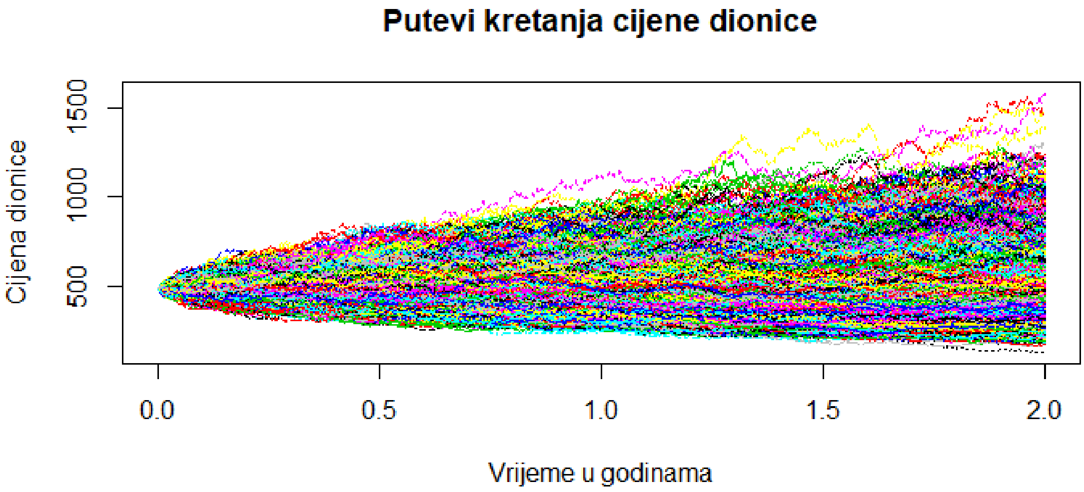
Azijske opcije su vrsta egzotičnih opcija kod kojih isplata ovisi o aritmetičkoj sredini cijena dionice za vrijeme trajanja opcije. Za razliku od standardnih europskih opcija kod kojih isplata ovisi samo o cijeni dionice u trenutku izvršenja opcije, azijske opcije su *path-dependant* što znači da cijena opcije ovisi o kretanju cijene dionice od početnog trenutka do trenutka izvršenja T. Isplata vlasniku azijske call opcije iznosi $(\bar{S} - K)^+$, a vlasniku azijske put opcije $(K - \bar{S})^+$, gdje je $\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S_{t_j}$ za neke fiksne vremenske trenutke $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$. Azijske opcije su često jeftinije od standardnih (europskih) opcija za što je glavni argument činjenica da je prosječna cijena dionice manje volatilna od cijene dionice u nekom određenom trenutku.

Kako bismo mogli izračunati cijenu azijske call opcije Monte Carlo metodom, odnosno očekivanu sadašnju vrijednost isplate opcije $\mathbb{E}^*[e^{-rT}(\bar{S} - K)^+]$, moramo simulirati prosjeke $\bar{S}$. To radimo tako da u velikom broju ponavljanja simuliramo put $S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_m}$ i izračunamo prosjek duž tog puta. Pretpostavimo da smo za točke t_j uzeli ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0, T]$, dakle $t_{j+1} - t_j = h$, za $h = \frac{T}{m}$. Cijenu duž puta možemo izračunati koristeći formulu

$$S_{t_{j+1}} = S_{t_j} exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma\sqrt{h}Z_{j+1}\right\},$$

gdje su $Z_1, \ldots Z_m$ nezavisne normalno distribuirane slučajne varijable.

Kao kod europske call opcije, uzimamo da je $r = 2\%$, $K = 600$ kn i $S_0 = 484$ kn. Također koristimo procjenu volatilnosti koja iznosi $\hat{\sigma} = 0.206752$. Ponovno simulaciju



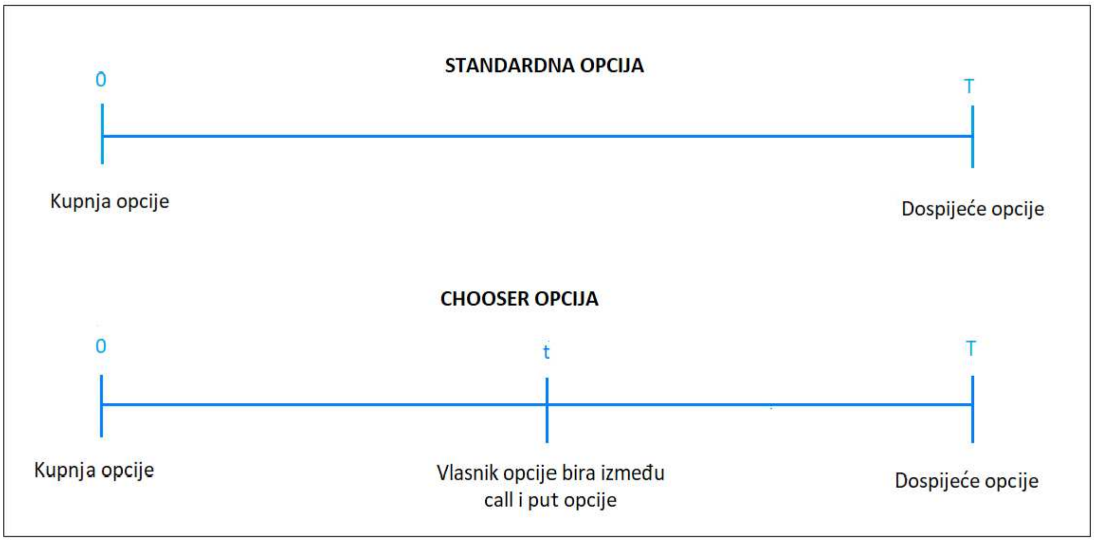
Slika 3.3: Simulirani putevi kretanja cijene dionice

provodimo u R-u, a kod se može pronaći u dodatku A. Sljedeći algoritam prikazuje korake koje moramo provesti za simuliranje N puteva od kojih svaki ima m koraka:

za $i = 1, \ldots, N$ **čini**
  za $j = 1, \ldots, m$ **čini**
    Generiraj $Z_{ij} \sim N(0, 1)$
    $S_i(t_j) = S_i(t_{j-1}) exp\left\{\left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right] h + \sigma h Z_{ij}\right\}$
  kraj
  $\bar{S} = (S_i(t_1) + \cdots + S_i(t_m))/m$
  $C_i = e^{-rT}(\bar{S} - K)^+$
kraj
$C_0 = (C_1 + \cdots + C_N)/N$

Na grafu 3.3 prikazani su simulirani putevi kretanja cijena dionice. S obzirom na to da je broj simuliranih puteva jako velik (uzeli smo da je $N = 10000$), ne možemo najbolje razaznati puteve. Cijena azijske opcije koju smo dobili ovom simulacijom je $C_0 = 5.85$ kn, a 95% interval pouzdanosti je $[5.38, 6.33]$. Kao što smo već pretpostavili, cijena azijske call opcije je manja od cijene europske call opcije s istim parametrima.

Monte Carlo procjenitelj kojim smo odredili cijenu opcije i u ovom slučaju je nepristran. Međutim, to ne bi bilo tako da je $\bar{S}$ definiran kao $\bar{S} = \frac{1}{T}\int_0^T S(u)du$. U tom slučaju $\bar{S}$ ne možemo točno izračunati, nego moramo koristiti diskretnu aproksimaciju kojom $\bar{S}$ računamo kao prije generirajući cijene S_t u diskretnim vremenima t_j. Takav procjenitelj



Slika 3.4: Razlika između standardne i chooser opcije

cijene opcije C_0 primjer je pristranog procjenitelja o kojima smo govorili u prvom poglavlju.

3.3 Chooser opcija

Chooser opcija ili opcija izbora jedna je od vrsta egzotičnih opcija koja dozvoljava vlasniku opcije da u nekom unaprijed određenom trenutku u budućnosti odluči hoće li opcija koju posjeduje biti vrednovana kao europska call ili europska put opcija. S obzirom na to da vlasniku daju pravo izbora, chooser opcije najčešće koštaju više nego obične europske opcije. Chooser opcije su dobar izbor kada pretpostavljamo da će doći do velikih promjena cijene dionice u budućnosti, ali nismo sigurni u kojem smjeru. Na slici 3.4 prikazana je glavna razlika između standardnih opcija i chooser opcije.

Za određivanje vrijednosti chooser opcije, bit će nam potreban put-call paritet kojeg izvodimo na sljedeći način. Pretpostavljamo da imamo dva portfelja. U prvom se nalaze call opcija s cijenom izvršenja K i dospijećem T i obveznica s isplatom K u trenutku T. U drugom portfelju se nalaze put opcija s cijenom izvršenja K i dospijećem T i jedna dionica S. Pretpostavimo da je $S_T > K$. Tada će call opcija biti isplaćena i vrijednost prvog portfelja će biti $S_T - K + K = S_T$. U isto vrijeme vrijednost drugog portfelja će biti S_T jer se put opcija neće aktivirati. U slučaju da je $S_T < K$, vrijednost prvog portfelja će biti K jer se call opcija neće aktivirati, a vrijednost drugog portfelja će biti $K - S_T + S_T = K$.

Dakle, u oba slučaja će vrijednost prvog i drugog portfelja u trenutku T biti jednaka i ona iznosi $\max(S_T, K)$. Kako bi se izbjegla mogućnost arbitraže, portfelji i na početku moraju imati jednaku vrijednost, stoga mora vrijediti $C_0 + e^{-rT}K = P_0 + S_0$. Iz te relacije dobivamo *put-call paritet* koji glasi

$$C_t - P_t = S_t - e^{-r(T-t)}K, \tag{3.4}$$

za sve $t \in [0, T]$.

Mi ćemo se baviti primjerom jednostavne chooser opcije kod koje su vrijeme dospijeća i cijena izvršenja isti za call i put opciju. Pretpostavljamo da je cijena izvršenja za call i put opciju $K = 600$, vrijeme dospijeće je $T_2 = 2$, dok je $T_1 = 1$ trenutak u kojem vlasnik može izabrati između call i put opcije. Izračunat ćemo cijenu chooser opcije u trenutku t za $t \leq T_1 \leq T_2$. Vrijednost chooser opcije u trenutku T_1 je maksimum vrijednosti call i put opcije u tom trenutku, odnosno $v_{T_1} = \max(C_{T_1}, P_{T_1})$. Znamo da je $\max(a, b) = b + (a - b)^+$, stoga je $v_{T_1} = P_{T_1} + (C_{T_1} - P_{T_1})^+$. Korištenjem put-call pariteta (3.4) slijedi $v_{T_1} = P_{T_1} + (S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+$. Cijenu chooser opcije u trenutku t tada računamo kao

$$\begin{aligned}
V_t &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}(P_{T_1} + (S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+)|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}P_{T_1}|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}(S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}\,\mathbb{E}^*[e^{-r(T_2-T_1)}(K - S_{T_2})^+|\mathcal{F}_{T_1}]\,|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}(S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+|\mathcal{F}_t] \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (3.5) \\
&= \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}e^{-r(T_2-T_1)}(K - S_{T_2})^+|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}(S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+|\mathcal{F}_t] \qquad (3.6) \\
&= \mathbb{E}^*[e^{-r(T_2-T_1)}(K - S_{T_2})^+|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}^*[e^{-r(T_1-t)}(S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

U (3.5) smo raspisali cijenu za P_{T_1}, a u (3.6) smo iskoristili činjenicu da je $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{T_1}$. Dobili smo da je cijena chooser opcije u trenutku t jednaka zbroju cijene put opcije u trenutku t s cijenom izvršenja K i dospijećem T_2 i cijene call opcije u trenutku t s cijenom izvršenja $e^{-r(T_2-T_1)}K$ i dospijećem T_1.

Ono što nas zanima je cijena chooser opcije u trenutku $t = 0$. Nju računamo prema formuli

$$C_0 = V_0 = \mathbb{E}^*[e^{-r(T_2-T_1)}(K - S_{T_2})^+] + \mathbb{E}^*[e^{-rT_1}(S_{T_1} - e^{-r\,(T_2-T_1)}K)^+].$$

Koristeći Monte Carlo simulacije zasebno ćemo izračunati cijenu put opcije u trenutku 0 s cijenom izvršenja K i dospijećem T_2 i cijenu call opcije u trenutku 0 s cijenom izvršenja $e^{-r(T_2-T_1)}K$ i dospijećem T_1. Cijena chooser opcije u trenutku $t = 0$ bit će zbroj te dvije cijene. Kao i prije, uzimamo da je T_2=2, $K = 600$, $S_0 = 484$, $r = 2\%$ i $\hat{\sigma} = 0.20675$ te stavljamo da je $T_1 = 1$, odnosno vlasnik opcije bira između call i put opcije nakon godinu dana. Proveli smo simulaciju u R-u (kod u A) i dobili da je cijena chooser opcije u trenutku $t = 0$ jednaka 132.24 kn, a 95% interval pouzdanosti $[130.37, 134.11]$. Kao što smo pretpostavili, ta cijena veća je od cijene europske call opcije s istim dospijećem i cijenom izvršenja.

U ovom poglavlju smo na tri primjera pokazali kako možemo izračunati cijene izvedenica Monte Carlo metodom. Iako Monte Carlo metoda možda nije najbrži način za izračun cijena, vidimo da je poprilično jednostavna za upotrebu. Za kraj navodimo općeniti recept za korištenje Monte Carlo metode prilikom izračuna cijena izvedenica:

1. Generirati put kretanja cijena dionice S uz pretpostavku da je povrat na dionicu jednak bezrizičnoj kamatnoj stopi.
2. Izračunati isplatu izvedenice.
3. Ponavljati prvi i drugi korak kako bi dobili što veći uzorak isplata izvedenice.
4. Izračunati prosjek uzoračkih isplata izvedenice da bi dobili procjenu očekivane isplate izvedenice.
5. Diskontirati očekivanu isplatu kako bi se dobila procjena vrijednosti, odnosno cijene izvedenice.

Poglavlje 4

Grci i zaštita od rizika

Sudionici financijskih tržišta koji prodaju opcije suočeni su s problemom upravljanja rizikom. Razlog tome je ponajprije taj što ne možemo sa sigurnošću znati kako će se u budućnosti kretati cijena dionice o kojoj opcija ovisi, ali i moguća pogrešna specifikacija parametara u modelu. Zbog toga nam je vrlo važno znati kako se naš portfelj ponaša s obzirom na promjene u cijeni dionice i promjene u parametrima modela. U tu svrhu koristimo *Grke*. Svoj naziv dobili su po tome što se najčešće korišteni od njih označavaju grčkim slovima. Grci su ključan alat u upravljanju rizicima. Svaki od Grka mjeri osjetljivost vrijednosti portfelja na male promjene u cijenama dionice i parametrima modela. U nastavku ovog poglavlja definirat ćemo neke od najpoznatijih Grka, objasniti kako se Grci računaju koristeći Monte Carlo simulacije te primijeniti naučeno na primjeru iz prethodnog poglavlja.

4.1 Grci

Pretpostavimo da je model koji promatramo Black-Scholes-Mertonov model u kojem cijenu dionice modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem. Ukratko ćemo opisati neke od najčešće korištenih Grka: deltu, gamu, ro, thetu i vegu. Pretpostavit ćemo da se portfelj koji promatramo sastoji od jedne europske call opcije. Literatura koju ćemo koristiti u ovom potpoglavlju je [8] i [5].

Delta

Delta opcije mjeri osjetljivost vrijednosti opcije na promjenu u cijeni dionice. Definira se sa

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \tag{4.1}$$

gdje je C vrijednost europske call opcije, a S cijena dionice na koju je opcija napisana. Analogno, deltu portfelja definiramo kao promjenu vrijednosti portfelja u odnosu na promjenu cijene dionice. Cilj je stvoriti portfelj koji će biti neosjetljiv na promjene u cijeni dionice, stoga želimo da delta bude što manji. Za portfelj kažemo da je *delta neutralan* ako je njegova delta jednaka nuli. Jedna od strategija upravljanja rizikom je *delta zaštita* (eng. delta hedging). Prateći tu strategiju želimo postići da je portfelj koji imamo delta neutralan u svakom trenutku. Pretpostavimo da smo prodali jednu call opciju na neku dionicu i da želimo stvoriti portfelj kojim ćemo se zaštiti od proizašlih obaveza. Za to možemo iskoristiti upravo dionicu na koju je napisana opcija, no pitanje je koliko takvih dionica je potrebno. Neka je z broj dionica i x cijena dionice u trenutku t. Vrijednost portfelja u trenutku t je tada $-C(t, x) + z \cdot x$ pa je delta portfelja jednaka $-\partial C/\partial x + z = -\Delta_C + z$. Nakon što izjednačimo ovu jednadžbu s nulom, zaključujemo da je delta portfelja jednaka nuli ako portfelj sadrži točno Δ_C jedinica dionice, pri čemu je Δ_C delta call opcije.

Ono što je važno primijetiti je da se delta opcije s vremenom mijenja (jer se mijenja cijena dionice), stoga će portfelj biti delta neutralan samo određeni period vremena. Iz tog razloga potrebno je provoditi rebalansiranje portfelja, odnosno mijenjati broj dionica u portfelju kako bi portfelj ostao delta neutralan. Kada bismo to rebalansiranje provodili neprekidno, vrijednost portfelja na dan dospijeća bila bi jednaka vrijednosti opcije. Međutim, u praksi se rebalansiranje vrši u diskretnom vremenu pa može doći do odstupanja od delta neutralnog portfelja. Kako bismo ta rebalansiranja morali vršiti što rjeđe, želimo imati portfelj za koji je delta neosjetljiv na promjenu cijene dionice. Mjera za osjetljivost delte s obzirom na cijenu dionice je gama.

Gama

Gama portfelja mjeri promjenu delte portfelja u odnosu na promjenu u cijeni dionice. Definira se sa

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}, \tag{4.2}$$

gdje je S cijena dionice, a Π vrijednost portfelja. Ako je gama mala, delta se sporo mijenja, što znači da ne trebamo često rebalansirati portfelj. Ako je gama velika, portfelj je jako osjetljiv na male promjene u cijeni dionice pa je potrebno često vršiti rebalansiranje kako bismo zadržali delta zaštitu. Idealan portfelj imao bi gamu jednaku nuli, odnosno bio bi gama neutralan. Pitanje je kako možemo postići da portfelj koji se sastoji od jedne opcije bude gama neutralan. Gama dionice jednaka je nuli (jer je delta dionice jednaka 1) pa dodavanje dionica u portfelj ne mijenja gamu portfelja. Portfelj može postati gama neutralan ako mu dodamo neki broj izvedenica čija ovisnost o cijeni dionice nije linearna. Pretpostavimo da imamo portfelj koji se sastoji od jedne europske call opcije čija je vrijednost u trenutku t jednaka $C(t, S_t)$. Možemo mu dodati z jedinica europske put opcije čija je vrijednost u trenutku t jednaka $P(t, S_t)$. Tada je gama portfelja jednaka $\Gamma_C + z\,\Gamma_P$ iz čega je jasno da će portfelj biti gama neutralan ako je $z = \frac{-\Gamma_C}{\Gamma_P}$. Ukoliko tako dobiven portfelj nije i delta neutralan, možemo mu dodati ili oduzeti određeni broj dionica. To neće narušiti gama neutralnost jer je gama dionice jednaka nuli.

Theta

Theta mjeri osjetljivost portfelja na promjenu vremena i računa se po formuli

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{4.3}$$

Theta nam govori za koliko će se vrijednost opcije smanjiti kako se vrijeme do dospijeća smanjuje. U ovoj formuli vrijeme se računa u godinama, stoga se često rezultat dijeli s brojem dana u godini.

Vega

U BSM modelu pretpostavljamo da je volatilnost cijene dionice konstantna. Međutim, u stvarnosti se ona mijenja s vremenom, pa je vrijednost opcije podložna promjeni kao rezultat promjena u volatilnosti. *Vega* opcije je mjera promjene vrijednosti opcije u odnosu na promjenu volatilnosti dionice i računa se kao

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \tag{4.4}$$

gdje je C vrijednost opcije. Kada je vega jako pozitivna ili jako negativna, promjene volatilnosti imaju velik utjecaj na vrijednost opcije. Kada je vega jako blizu nule, promjene volatilnosti gotovo da nemaju utjecaj na promjenu vrijednosti opcije.

Ro

Ro mjeri osjetljivost vrijednosti opcije u odnosu na promjene u kamatnoj stopi i računa se po formuli

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}, \tag{4.5}$$

gdje je C vrijednost opcije, a r kamatna stopa.

4.2 Računanje Grka Monte Carlo simulacijama

Računanje Grka, odnosno osjetljivosti portfelja na promjene u parametrima modela, vrlo je važno jer se, za razliku od cijena samih izvedenica, vrijednosti Grka ne mogu uočiti na stvarnom tržištu. Monte Carlo metode za računanje Grka su zahtjevnije i kompleksnije od metoda za računanja cijena izvedenica. Te metode možemo podijeliti u dvije velike skupine. Prva skupina su metode konačnih razlika (eng. *finite difference approximations*). Njih je lako implementirati, ali zahtijevaju da se simulacije izvrše za više različitih vrijednosti parametara i daju pristrani procjenitelj s velikom srednjekvadratnom greškom. Metode u drugoj skupini se ponekad nazivaju direktnim Monte Carlo metodama. Njihova najveća prednost je što su im procjenitelji nepristrani. Dvije poznate metode u ovoj kategoriji su metoda izračuna po putu (eng. *pathwise method*) i metoda omjera vjerodostojnosti (eng. *likelihood ratio method*). Metoda izračuna po putu diferencira isplatu, odnosno funkciju isplate, u odnosu na svaki parametar od interesa, dok metoda omjera vjerodostojnosti diferencira funkciju gustoće referentne financijske imovine u odnosu na parametre. U nastavku ovog potpoglavlja detaljnije ćemo objasniti metodu izračuna po putu. Literatura koja će nam pri tome pomoći je [7].

Metoda izračuna po putu

Opišimo prvo metodu u općenitom slučaju. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ vjerojatnosni prostor, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja iz Ω i $\mathbb{P}^*$ mjera neutralna na rizik. Pretpostavljamo da promatramo neki model u kojem je Θ skup svih mogućih vrijednosti parametra θ i pretpostavljamo da je $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ interval. Nadalje, neka je skup slučajnih varijabli $\{Y(\theta), \theta \in \Theta\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$, $Y(\theta)$ nam predstavlja vrijednost modela u parametru θ. Za bilo koji $\omega \in \Omega$, definiramo preslikavanje $\theta \mapsto Y(\theta, \omega)$ koje je slučajna funkcija na Θ. Označimo s $\alpha(\theta) = \mathbb{E}^*[Y(\theta)]$. Naš cilj je pronaći procjenu za $\alpha'(\theta)$. U slučaju da derivacija od $Y(\theta)$ postoji, procjenitelj za $\alpha'(\theta)$ možemo dobiti koristeći

$$Y'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}.$$

$Y'(\theta)$ nazivamo procjenitelj po putu za $\alpha'(\theta)$, a očekivanje mu je $\mathbb{E}^*[Y'(\theta)]$. U slučaju da je opravdana zamjena očekivanja i derivacije

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{d}{d\theta} Y(\theta) \right] = \frac{d}{d\theta} \mathbb{E}^*[Y(\theta)] = \alpha'(\theta), \tag{4.6}$$

procjenitelj je nepristran.

Objasnimo sada kako se to primjenjuje na računanje Grka portfelja koji se sastoji od jedne opcije. U tom slučaju, $Y(\theta)$ je diskontirana isplata opcije, $\alpha(\theta)$ je njena cijena, a parametar θ je bilo koji parametar u modelu o kojem ovisi cijena opcije. U slučaju da je θ početna cijena dionice na koju je opcija napisana, $\alpha'(\theta)$ je delta te opcije, a $\alpha''(\theta)$ je gama opcije. Ako je θ vrijeme t, onda je $\alpha'(\theta)$ theta opcije. U slučaju da je θ volatilnost, $\alpha'(\theta)$ predstavlja vegu opcije, a u slučaju da je θ kamatna stopa, $\alpha'(\theta)$ je ro opcije.

Uvjeti pod kojima je procjenitelj nepristran

Kako ćemo kasnije vidjeti, metoda izračuna po putu uglavnom nije primjenjiva ukoliko funkcija isplate ima prekide. Zato ćemo sada nabrojati koje uvjete ona mora zadovoljavati kako bi vrijedilo 4.6 i kako bi procjenitelj bio nepristran.

Primijetimo prvo da je 4.6 ekvivalentno

$$\mathbb{E}^*\left[\lim_{h\to 0}\frac{Y(\theta+h)-Y(\theta)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\mathbb{E}^*\left[\frac{Y(\theta+h)-Y(\theta)}{h}\right]. \tag{4.7}$$

Pretpostavimo da je diskontirana isplata funkcija slučajnog vektora $X(\theta) = (X_1(\theta),\dots,X_m(\theta))$ koji je funkcija parametra θ. Tada je $Y(\theta) = f(X_1(\theta),\dots,X_m(\theta))$, gdje je $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ funkcija kojom definiramo isplatu. Pretpostavimo da f zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Za svaki θ iz Θ postoji i dobro je definirana derivacija $X_i'(\theta)$.

2. Neka je $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ skup svih točaka u kojima je f diferencijabilna i neka je $\mathbb{P}(X(\theta) \in D_f) = 1$ za svaki θ iz Θ. Onda postoji $Y'(\theta)$ i vrijedi

$$Y'(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(\theta))X_i'(\theta).$$

3. Zahtijevamo da je f Lipschitzova, odnosno da postoji konstanta k_f tako da je

$$\|f(x)-f(y)\|\le k_f\|x-y\|, \forall x,y\in\mathbb{R}^m.$$

4. Postoje slučajne varijable $\kappa_i, i = 1,\dots,m$ tako da je

$$|X_i(\theta_2)-X_i(\theta_1)|\le \kappa_i|\theta_2-\theta_1|, \forall\theta_1,\theta_2\in\Theta$$

   i $\mathbb{E}^*[\kappa_i] < +\infty, i = 1,\dots,m.$

Pokažimo sada da je uz gornje uvjete procjenitelj nepristran. Ključan teorem koji će nam biti potreban da bismo mogli opravdati zamjenu limesa i očekivanja je Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. Ovdje ćemo navesti samo iskaz teorema, a dokaz se može pronaći u [11].

Teorem 4.2.1. (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji) *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $X \to \mathbb{R}$ i neka je $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$. Pretpostavimo da postoji integrabilna funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ takva da je $|f_n| \le g$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je f integrabilna i*

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

Iz prvog i drugog uvjeta slijedi da je funkcija $Y(\theta)$ neprekidna i diferencijabilna u svakoj točki $\theta \in \Theta$. Kako kompozicija čuva Lipschitzovo svojstvo, treći i četvrti uvjet nam kažu da je $Y(\theta)$ gotovo sigurno Lipschitzova u θ. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} |Y(\theta_2) - Y(\theta_1)| &= |f(X_1(\theta_2), \dots, X_m(\theta_2)) - f(X_1(\theta_1), \dots, X_m(\theta_1))| && (4.8) \\ &\leq k_f \|X(\theta_2) - X(\theta_1)\| && (4.9) \\ &\leq k_f \sum_{i=1}^{m} \kappa_i \, |\theta_2 - \theta_1|. && (4.10) \end{aligned}$$

Uvedimo sada oznaku $\kappa_Y = k_f \sum_{i=1}^{m} \kappa_i$ i uočimo da je tada $\mathbb{E}^*[\kappa_Y] < +\infty$. Onda gornji izraz možemo zapisati kao

$$\left| \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right| \leq \kappa_y.$$

Prema tome, zadovoljeni su uvjeti Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergeniciji pa vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \mathbb{E}^* \left[\frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right] &= \lim_{h \to 0} \int_{\Omega} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} d\mathbb{P}^* \\ &= \int_{\Omega} \lim_{h \to 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} d\mathbb{P}^* \\ &= \mathbb{E}^* \left[\lim_{h \to 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je, ukoliko su zadovoljena sva četiri uvjeta, procjenitelj nepristran.

Procjenitelji po putu za europsku call opciju

Sada ćemo ukratko prikazati kako se računaju procjenitelji po putu za europsku call opciju. Prisjetimo se da je diskontirana vrijednost call opciju u trenutku $t = 0$ dana s

$$Y = e^{-rT} [S(T) - K]^+,$$

gdje je

$$S(T) = S(0) \exp\left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right\}, \; Z \sim N(0, 1).$$

Za početak, izračunajmo deltu opcije. Dakle, uzmimo da je parametar θ jednak $S(0)$ i pretpostavimo da su ostali parametri r, T, σ i K konstantni i veći od 0. Kako bismo izračunali pathwise procjenitelj, računamo

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{dS(0)}.$$

Promotrimo prvi faktor. Vrijedi da je

$$\frac{d}{dx}\max(0, x - K) = \begin{cases} 0, & x < K \\ 1, & x > K. \end{cases}$$

Derivacija ne postoji ako je $x = K$, ali to ne narušava derivabilnost funkcije jer je vjerojatnost događaja $\{S(T) = K\}$ jednaka 0. Zbog toga je Y gotovo sigurno derivabilan u odnosu $S(T)$ i

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}.$$

Iz definicije cijene $S(T)$ odmah slijedi da je

$$\frac{dS(T)}{dS(0)} = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\} = \frac{S(T)}{S(0)}.$$

Sada možemo zaključiti da je procjenitelj po putu za deltu jednak

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}\mathbb{1}_{S(T)>K}. \tag{4.11}$$

Preostaje provjeriti vrijede li uvjeti koji nam garantiraju nepristranost procjenitelja.

1. Cijena dionice $S(T)$ je derivabilna za svaku vrijednost od $S(0)$.

2. Kao što smo gore pokazali, funkcija isplate Y je derivabilna za gotovo svaki $S(T)$.

3. Funkcija isplate Y je Lipschitzova kao funkcija cijene $S(T)$.
   Označimo sa x_1 i x_2 dvije različite cijene dionice $S(T)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x_1 < x_2$.

   - Pretpostavimo da su x_1 i x_2 veće od K. Tada vrijedi
   $$\begin{aligned} \|e^{-rT}\max(0, x_2 - K) - e^{-rT}\max(0, x_1 - K)\| &= |e^{-rT}|\,\|x_2 - K - x_1 + K\| \\ &= |e^{-rT}|\,\|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

   - Prepostavimo da su x_1 i x_2 manji od K. Tada vrijedi
   $$\begin{aligned} \|e^{-rT}\max(0, x_2 - K) - e^{-rT}\max(0, x_1 - K)\| &= |e^{-rT}|\|0 - 0\| \\ &= 0\|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

   - Prepostavimo da je $x_2 > K$ i $x_1 < K$. Vrijedi
   $$\begin{aligned} \|e^{-rT}\max(0, x_2 - K) - e^{-rT}\max(0, x_1 - K)\| &= \|e^{-rT}(x_2 - K) - 0\| \\ &\le |e^{-rT}|\,\|x_2 - x_1\|, \end{aligned}$$

     gdje smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili činjenicu da je $x_1 < K$ pa je $x_2 - x_1 > x_2 - K$.

4. Cijena dionice $S(T)$ je Lipschitzova u odnosu na $S(0)$.
   Pretpostavimo da imamo dvije različite početne cijene $S(0)_1$ i $S(0)_2$. Označimo sa S_1 cijenu u trenutku T za koju je početne cijena $S(0)_1$ i sa S_2 cijenu dionice u trenutku T za koju je početna cijena $S(0)_2$. Tada imamo

$$\begin{aligned}|S_2 - S_1| &= |S(0)_2 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\} - S(0)_1 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\}| \\ &= |\kappa||S(0)_2 - S(0)_1|,\end{aligned}$$

   gdje je $\kappa = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\}$ konstanta.

Dakle, procjenitelj po putu za delta ispunjava sva četiri uvjeta pa je nepristran.

Na isti način možemo izračunati procjenitelj po putu za ro opcije. Vrijedi

$$\frac{dY}{dr} = \frac{dY}{dS(T)}\frac{dS(T)}{dr}.$$

Prema tome, prvi faktor ostaje isti kao prije, dok je drugi jednak

$$\frac{dS(T)}{dr} = S(0)T\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\} = TS(T).$$

Stoga je procjenitelj po putu za ro jednak

$$\frac{dY}{dr} = e^{-rT}TS(T)\mathbb{1}_{S(T)>K}. \tag{4.12}$$

Na sličan način dobijemo procjenitelje za thetu i vegu i kao za deltu možemo pokazati da su ti procjenitelji nepristrani.

Problem se javlja kod računanja procjenitelja po putu za gamu. Promotrimo prvo opciju kod koje je isplata dana s $Y = e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}$. Takvu opciju nazivamo digitalnom. Na Y gledamo kao na funkciju od $S(T)$, dok su svi ostali parametri konstantni. Vidimo da je Y derivabilan svugdje osim u $S(T) = K$, ali kao što smo već rekli događaj $\{S(T) = K\}$ ima vjerojatnost nula pa je Y derivabilna u gotovo svim točkama. Također, Y je po dijelovima konstantna funkcija u $S(T)$ pa je njegova derivacija po $S(T)$ jednaka nuli svugdje gdje ona postoji. Isto vrijedi i ako bi Y gledali kao funkciju od $S(0)$. Zbog toga je $\mathbb{E}^*[dY/dS(0)] = 0$. S druge strane, promjena u $\mathbb{E}^*[Y]$ u odnosu na promjenu u $S(0)$ nam govori kako će se promijeniti očekivana vrijednost isplate u slučaju male promjene početne cijene $S(0)$ i ona zapravo izražava mogućnost da mala promjena u $S(0)$ utječe na to da $S(T)$ prijeđe cijenu izvršenja K. Prema tome, vrijedi

$$\frac{d}{dS(0)}\mathbb{E}^*[Y] \neq \mathbb{E}^*\left[\frac{dY}{dS(0)}\right] = 0.$$

Vidimo da možemo definirati procjenitelj, ali informacija koju on daje nije točna i procjenitelj nije nepristran. Stoga deltu digitalne opcije ne možemo računati koristeći procjenitelj po putu.

Gama europske call opcije dana je sa

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dS(0)^2}\mathbb{E}^*[Y] &= \frac{d}{dS(0)}\left(\frac{d}{dS(0)}\mathbb{E}^*[Y]\right)\\ &= \frac{d}{dS(0)}\mathbb{E}^*\left[\frac{dY}{dS(0)}\right]\\ &= \frac{d}{dS(0)}\mathbb{E}^*\left[e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}\mathbb{1}_{S(T)>K}\right].\end{aligned}$$

Budući da u ovom slučaju isplata Y ne zadovoljava uvjete, ne možemo zamijeniti očekivanje i derivaciju. U gornjem primjeru vidimo kako bismo u tom slučaju dobili krivu informaciju. Na isti način zaključujemo da gamu europske call opcije ne možemo procijeniti koristeći procjenitelj po putu.

4.3 Primjer delta zaštite europske call opcije

U ovom potpoglavlju prikazat ćemo kako funkcionira metoda delta zaštite jedne europske call opcije pomoću pathwise procjenitelja. U praksi se delta zaštita najčešće koristi za skup opcija ili za cijele portfelje. Međutim, važno je razumjeti kako metoda funkcionira na primjeru jedne financijske imovine jer se isti principi primjenjuju i za delta zaštitu portfelja.

Koristit ćemo iste podatke kao u trećem poglavlju. Dakle, promatramo dionicu Podravke s početnom cijenom $S_0 = 484$ kn i procijenjenom volatilnosti $\hat{\sigma} = 0.20675$. Pretpostavit ćemo da je bezrizična kamatna stopa $r = 2\%$. Da pojednostavimo račun, uzimamo da je vrijeme dospijeća 20 tjedana, odnosno $T = 20/52$. Zbog toga, moramo promijeniti i cijenu izvršenja jer pretpostavljamo da u kraćem roku cijena neće toliko brzo rasti pa uzimamo $K = 510$ kn. Na isti način kao i prije izračunamo da je tada cijena call opcije 15.68 kn. Koristeći pathwise procjenitelj, deltu call opcije možemo izračunati po formuli

$$\Delta = \mathbb{E}^*\left[e^{-rT}\frac{S_T}{S_0}\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\right]. \tag{4.13}$$

Dakle, Δ možemo procijeniti Monte Carlo simulacijama tako da za dane parametre S_0, T, K, r i σ velik broj puta (u našem slučaju $N = 10000$) simuliramo cijenu dionice u trenutku T. Za svaku od tih simulacija izračunamo vrijednost funkcije $e^{-rT}\frac{S_T}{S_0}\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}$ te zatim izračunamo aritmetičku sredinu svih dobivenih vrijednosti. Koristeći program R, izračunali smo da je delta europske call opcije na jednu dionicu Podravke jednaka $\Delta = 0.3865712$. Iz razmatranja koja smo izveli u prethodnom potpoglavlju zaključujemo da bismo, ukoliko smo

Tablica 4.1: Simulacija delta zaštite

Tjedan	**Cijena dionice**	**Cijena call opcije**	**Delta**	**Broj kupljenih dionica**	**Trošak kupljenih dionica**	**Ukupni trošak (uključujući kamate)**	**Kamate**
0	484.00 kn	15.68 kn	0.3865712	38.65712	18,710.05 kn	18,710.05 kn	7.35 kn
1	476.27 kn	12.26 kn	0.3353042	-5.1267	-2,441.69 kn	16,275.71 kn	1.28 kn
2	473.13 kn	10.63 kn	0.3097843	-2.55199	-1,207.42 kn	15,069.56 kn	5.92 kn
3	494.74 kn	18.01 kn	0.4403187	13.05344	6,458.06 kn	21,533.54 kn	8.20 kn
4	495.73 kn	17.68 kn	0.4431276	0.28089	139.25 kn	21,680.99 kn	8.26 kn
5	497.55 kn	17.71 kn	0.4509832	0.78556	390.86 kn	22,080.10 kn	8.41 kn
6	522.62 kn	30.39 kn	0.6314012	18.0418	9,429.01 kn	31,517.52 kn	12.00 kn
7	529.56 kn	34.07 kn	0.6822365	5.08353	2,692.03 kn	34,221.56 kn	13.03 kn
8	510.68 kn	21.59 kn	0.5384171	-14.38194	-7,344.57 kn	26,890.02 kn	10.24 kn
9	500.71 kn	15.68 kn	0.4559776	-8.24395	-4,127.83 kn	22,772.44 kn	8.67 kn
10	494.34 kn	12.02 kn	0.396864	-5.91136	-2,922.22 kn	19,858.89 kn	7.56 kn
11	511.98 kn	19.32 kn	0.5468831	15.00191	7,680.68 kn	27,547.13 kn	10.49 kn
12	517.28 kn	21.26 kn	0.5998886	5.30055	2,741.87 kn	30,299.49 kn	11.54 kn
13	523.24 kn	23.89 kn	0.6619483	6.20597	3,247.21 kn	33,558.25 kn	12.78 kn
14	524.89 kn	23.82 kn	0.6851778	2.32295	1,219.29 kn	34,790.32 kn	13.25 kn
15	516.58 kn	17.14 kn	0.6033232	-8.18546	-4,228.44 kn	30,575.13 kn	11.65 kn
16	543.72 kn	36.33 kn	0.8797322	27.6409	15,028.91 kn	45,615.68 kn	17.37 kn
17	551.52 kn	42.65 kn	0.9482486	6.85164	3,778.82 kn	49,411.87 kn	18.82 kn
18	521.27 kn	15.39 kn	0.7198255	-22.84231	-11,907.01 kn	37,523.68 kn	14.29 kn
19	531.84 kn	22.47 kn	0.9317838	21.19583	11,272.79 kn	48,810.77 kn	18.59 kn
20	524.67 kn	14.67 kn	1	6.82162	3,579.10 kn	52,408.46 kn	

prodali jednu call opciju na dionicu Podravke, svom portfelju trebali dodati 0.3865712 dionica kako bi on postao delta neutralan. Ono što je važno primijetiti je da se vrijednost delte mijenja s vremenom zato što se cijena dionice S mijenja. Stoga moramo redovito prilagođavati broj dionica u portfelju kako bi portfelj ostao delta neutralan. Ovaj pristup se naziva dinamičkom strategijom zaštite, za razliku od statičke strategije kod koje investitor ne mijenja broj dionica koje drži.

Pretpostavimo sada da smo mi investitor koji je u trenutku $t = 0$ prodao 100 call opcija na dionicu Podravke s prethodno navedenim parametrima po cijeni od 1568 kn (odnosno 15.68 kn za svaku). Međutim, te dionice nisu u našem vlasništvu te ćemo u trenutku dospijeća kupcu morati isplatiti $100 \cdot (S_T - K)^+$. Kako bismo uklonili rizik da nećemo moći isplatiti kupca, odlučujemo se za delta zaštitu. Druga opcija bila bi da u trenutku $t = 0$ uložimo tih 1568 kn i stvorimo replicirajući portfelj, međutim u praksi taj replicirajući portfelj rijetko vrijedi isto koliko i tražena isplata.

U tablici 4.3 prikazana je simulacija delta zaštite. Kao što smo već izračunali, delta opcije u prvom tjednu iznosi 0.38657. Prema tome, potrebno je iz banke posuditi 18710.05 kn kako bismo mogli kupiti potrebnih 38.657 dionica. Za to ćemo banci morati platiti kamatu u iznosu $18710.05 \cdot ((1 + 0.02)^{5/252} - 1) = 7.35$ kn. Pretpostavimo da je u idućem tjednu cijena dionice pala na 476.27 kn. Tada se i delta opcije smanjuje na 0.3353 pa trebamo prodati 5.1267 dionica kako bismo zadržali delta zaštitu. Nastavljamo isti postupak, dakle promatramo kako se kreće cijena dionice S, računamo delta i u ovisnosti o njemu kupujemo/prodajemo dionice. Nakon 20 tjedana ukupni trošak delta zaštite iznosi 52408.46 kn. S druge strane, posjedujemo 100 dionica Podravke koje smo dužni prodati kupcu po cijeni izvršenja od 510 kn pa ćemo prodajom dionica zaraditi 51000 kn. Prema tome stvarni trošak delta zaštite je 1408.46 kn. Nakon što ga diskontiramo na početak perioda, on iznosi 1397.67 kn. Vidimo da je taj trošak vrlo blizu cijeni iz BSM modela, tj. cijeni po kojoj smo prodali tih 100 opcija, međutim nije identičan. U idealnom slučaju, diskontirani trošak delta zaštite bio bi jednak BSM cijeni opcije. U našem slučaju to nije istina jer je portfelj rebalansiran samo jednom tjedno. Kada bismo smanjili vrijeme između rebalansiranja portfelja, diskontirani trošak delta zaštite bio bi bliži BSM cijeni opcije. Međutim, ono što ne smijemo zaboraviti je da smo ovdje zanemarili transakcijske troškove. U stvarnom životu oni postoje i veći su što je češće rebalansiranje portfelja.

Bibliografija

[1] H. L. Anderson, *Metropolis, Monte Carlo and the Maniac*, Los Alamos Science **14** (1986), 96–107.

[2] B. Basrak, *Monte Carlo metode*, 2016, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bbasrak/pdf_files/FinPrak/FPchap1.pdf`, (preuzeto 6.8.2020.).

[3] B. Basrak i H. Planinić, *Uvod u Monte Carlo metode*, 2016, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/finprakt/Materijali1920/MonteCarlo.pdf`, (preuzeto 6.8.2020.).

[4] O. Calin, *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*, Ann Arbor (2012).

[5] J. Cvitanić i F. Zapatero, *Introduction to the economics and mathematics of financial markets*, MIT press, 2004.

[6] R. Eckhardt, *Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method*, Los Alamos Science (1987), br. 15, 131–137.

[7] P. Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, sv. 53, Springer Science & Business Media, 2013.

[8] J. C. Hull, *Options futures and other derivatives*, Pearson Education India, 2003.

[9] J. Knight, *A Prospect Theory-Based Real Option Analogy for Evaluating Flexible Systems and Architectures in Naval Ship Design*, Disertacija, 2014.

[10] N. Metropolis, *The beginning*, Los Alamos Science **15** (1987), 125–130.

[11] R. Mrazović, *Mjera i integral*, 2020, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/files/mii-predavanja.pdf`, (preuzeto 8.10.2020.).

[12] R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013, `http://www.R-project.org/`.

[13] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjerojatnost*, 2019, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf, (preuzeto 6.8.2020.).

[14] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, 2008, https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/, (preuzeto 17.8.2020.).

[15] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 2*, 2020, https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/?Teaching_%2F_Nastava___Financijsko_modeliranje_2, (preuzeto 16.8.2020.).

Dodatak A

Simulacija u R-u

```
#ucitavamo podatke
podravka<-as.matrix(zse_export_11)
S<-as.numeric(podravka[,4]) #cijene dionica (zadnje u danu)
S<-S[!is.na(podravka[,4])] #izbacujem cijene koje su NA
datumi<-as.Date(podravka[,1]) #dani trgovanja
datumi<-datumi[!is.na(podravka[,4])]
n<-length(S) #727
plot(datumi, S, type="l", main="Kretanje cijena dionice Podravke od
    sije nja 2017. do prosinca 2019.", xlab="Dani trgovanja", ylab="
    Cijena dionice")
S<-rev(S) #moramo okrenuti vrijednosti od S jer su nam bile krivim
    redom

#ra unamo volatilnost cijena
log_povrati<-numeric(n-1)
for(i in 1:(n-1)) {
  log_povrati[i]<-(log(S[i+1]/S[i]))^2 #kvadrati log-povrata
}
sigma2<-1/3*(sum(log_povrati)) #dijelimo s brojem godina za koje imamo
     podatke (u mom slu aju 3)
sigma<-sqrt(sigma2) #procjena volatilnosti

S_0<-S[n] #po etna cijena je 484

#tra imo cijenu europske call opcije za T=2 godine
#dovoljno je simulirati samo S_T
N<-10000 #broj simulacija
T<-2
r<-0.02 #kamata=2%
r2<-0.005 #kamata 0.5%
K<-600 #cijena izvr enja
#generiramo Z standardne normalne
```

```
set.seed(1234)
Z<-rnorm(N,0,1)
S_T<-S_0 * exp((r- sigma2/2)*T + sigma*sqrt(T)*Z)  #cijena dionice u trenutku T
Ci<-exp(-r*T)*(S_T-K)*(S_T>K)  #cijena call opcije koju dobijemo u i-toj simulaciji
C<-mean(Ci)  #cijena europske call opcije = 25.36191
#95%-interval pouzdanosti
z<-qnorm(1-0.05/2,0,1)
sig<-sd(Ci)
c(C, C-z*sig/sqrt(N), C+z*sig/sqrt(N))
#[1] 25.36191 24.01074 26.71309

plot(S_T, main = "Cijena dionice u trenutku T=2", xlab="")
abline(h=K, col="red")
sum(S_T>K)/N  #22.74% slu ajeva je cijena ve a od K

#ako stavimo da je r=0.5%
set.seed(1234)
Z<-rnorm(N,0,1)
S_T<-S_0 * exp((r2- sigma2/2)*T + sigma*sqrt(T)*Z)  #cijena dionice u trenutku T
Ci<-exp(-r2*T)*(S_T-K)*(S_T>K)  #cijena call opcije koju dobijemo u i-toj simulaciji
C<-mean(Ci)  #cijena europske call opcije = 21.64025
#95%-interval pouzdanosti
z<-qnorm(1-0.05/2,0,1)
sig<-sd(Ci)
c(C, C-z*sig/sqrt(N), C+z*sig/sqrt(N))
#[1] 21.64025 20.38469 22.89582
sum(S_T>K)/N  #19.67%

#delta europske call opcije
#prvo zelimo izgenerirati jednu trajektoriju kretanja cijena po tjednima
S_delta<-numeric(21)
T<-20/52
K<-510
h<-T/20
t<-seq(0,T,by=h)
set.seed(123)
Z<-rnorm(20,0,1)
S_delta[1]<-S_0
for(i in 1:20) {
  S_delta[i+1]<-S_delta[i] * exp((r- sigma2/2)*h + sigma*sqrt(h)*Z[i])
}
#za svaki od 20 tjedana trebamo izracunati call price i delta opcije
#generiramo Z standardne normalne
```

```
C<-numeric(21)
delta<-numeric(21)
N<-10000
set.seed(123)
Z<-rnorm(N,0,1)
for(i in 1:21) {
  ST<-S_delta[i] * exp((r- sigma2/2)*(T-(i-1)/52) + sigma*sqrt(T-(i-1)/52)*Z) #cijena dionice u trenutku T
  Ci<-exp(-r*(T-(i-1)/52))*(ST-K)*(ST>K) #cijena call opcije koju dobijemo u i-toj simulaciji
  C[i]<-mean(Ci)
  delta[i]<-exp(-r*(T-(i-1)/52))*mean(ST/S_delta[i]*(ST>K))
}

#azijska opcija (1/m(S_1 + ... + S_m) - K)^+
#ovdje moramo izra unati cijele puteve kretanja cijena, ne samo S_T
N<-10000
m<-1000
T<-2
r<-0.02
K<-600
h<-T/m
t<-seq(0,T,by=h) #vrijeme
Ci<-numeric(N)
putevi<-matrix(numeric(N*(m+1)),nrow=N) #putevi kretanja cijena, svaki redak sadr i jedan put
set.seed(1234)
Z<-matrix(rnorm(N*m,0,1),nrow=N) #matrica standardnih normalnih
for(i in 1:N){
  putevi[i,1]<-S_0
  for(j in 1:m) {
    putevi[i,j+1]<- putevi[i,j]*exp((r-sigma2/2)*h + sigma*sqrt(h)*Z[i,j])
  }
  S<-mean(putevi[i,-1]) #treba nam srednja vrijednost svih cijena na jednom putu
  Ci[i]<-exp(-r*T)*(S-K)*(S>K)
}
#graf puteva
matplot(t, t(putevi), type="l", col=1:N, main="Putevi kretanja cijene dionice", xlab="Vrijeme u godinama", ylab="Cijena dionice")
#cijena
C<-mean(Ci) #cijena opcije je 5.85477
#interval pouzdanosti
z<-qnorm(1-0.05/2,0,1)
sig<-sd(Ci)
c(C, C-z*sig/sqrt(N), C+z*sig/sqrt(N))
```

```
#chooser opcija
N<-10000
m<-1000
T_2<-2   #dospije e
T_1<-1   #trenutak u kojem mo emo birati izme u call i put
r<-0.02
K<-600
K_potez<-exp(-r*(T_2-T_1))*K  #cijena izvr enja za call opciju
h<-T/m
t<-seq(0,T,by=h)  #vrijeme
Ci<-numeric(N)  #call opcija
Pi<-numeric(N)  #put opcija
set.seed(1234)
Z<-matrix(rnorm(N*m,0,1),nrow=N)  #matrica standardnih normalnih
for(i in 1:N){
  put<-numeric(m+1)
  put[1]<-S_0
  for(j in 1:m) {
    put[j+1]<- put[j]*exp((r-sigma2/2)*h + sigma*sqrt(h)*Z[i,j])
  }
  S_1<-put[m/2+1]  #ovo je cijena S u trenutku T_1
  S_2<-put[m+1]    #ovo je cijena S u trenutku T_2
  Pi[i]<-exp(-r*(T_2-T_1))*(K-S_2)*(K>S_2)
  Ci[i]<-exp(-r*T_1)*(S_1-K_potez)*(S_1>K_potez)
}
P<-mean(Pi)  #cijena put opcije 120.50431
C<-mean(Ci)  #cijena call opcije  11.73607
V<- P+C    #cijena chooser opcije 132.24039

#istu cijenu mo emo dobiti ako za svaku simulaciju zbrojimo Pi i Ci i onda uzmemo o ekivanje
Vi<-Pi+Ci
V2<-mean(Vi)
#interval pouzdanosti
z<-qnorm(1-0.05/2,0,1)
sig<-sd(Vi)
c(V, V-z*sig/sqrt(N), V+z*sig/sqrt(N))
```

Sažetak

Monte Carlo simulacije su skup algoritama koji pomoću velikog broja izračuna i ponavljanja predviđaju ponašanje složenih slučajnih sustava. Pomoću njih procjenjujemo vrijednosti neke nepoznate varijable koristeći principe statističkog zaključivanja. Monte Carlo metode najčešće se koriste za rješavanje tri klase problema: integraciju, optimizaciju i generiranje slučajnih uzoraka iz vjerojatnosne distribucije.

Problem kojim se bavimo u ovom radu je određivanje cijena izvedenica korištenjem Monte Carlo simulacija. Kako cijene izvedenica pod određenim pretpostavkama možemo računati kao očekivanje, procjenjujemo ih Monte Carlo integracijom. Koristimo Black-Scholes-Mertonov model financijskog tržišta u kojem cijene dionica modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem. Definiramo europsku call opciju, azijsku opciju i opciju izbora te pomoću Monte Carlo simulacija računamo cijene tih izvedenica. Kako bismo analizirali rizike na financijskim tržištima, definiramo Grke. Za računanje Grka Monte Carlo simulacijama koriste se posebne metode. Ukratko smo objasnili metodu izračuna po putu i pomoću nje simulirali izračun delta zaštite za portfelj koji se sastoji od europskih call opcija.

Summary

Monte Carlo simulations are a set of algorithms which use a large number of calculations and repetitions to predict the behavior of complex random systems. We use them to estimate the values of an unknown variable using the principles of statistical inference. Monte Carlo methods are most commonly used to solve three classes of problems: integration, optimization and generation of random samples from a probability distribution.

The problem we address in this thesis is the pricing of the derivatives using Monte Carlo simulations. As the prices of derivatives under certain assumptions can be calculated as an expectation, we estimate them by Monte Carlo integration. We use the Black-Scholes-Merton financial market model in which we model stock prices by geometric Brownian motion. We define the European call option, the Asian option and the Chooser option, and using Monte Carlo simulations we calculate the prices of these derivatives. To analyze the risks in the financial markets, we define the Greeks. Special methods are used to calculate the Greeks using Monte Carlo simulations. We briefly explain the pathwise method and use it to simulate the calculation of delta hedging for a portfolio consisting of European call options.

Životopis

Rođena sam 18.12.1995. u Bjelovaru. Nakon završene Treće osnovne škole Bjelovar, srednjoškolsko obrazovanje nastavila sam u Gimnaziji Bjelovar, opći smjer. Godine 2014. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultet u Zagrebu. Titulu sveučilišne prvostupnice matematike stekla sam 2018. godine. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.