Osnovni modeli doživljenja u aktuarstvu

Vukelić, Dora

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dora Vukelić

OSNOVNI MODELI DOŽIVLJENJA U AKTUARSTVU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se prvenstveno svojoj majci na neprekidnoj podršci tijekom cijelog života, pa tako i tijekom studija, te ju podsjećam na dogovor da se sjetimo ovog rada za 16 godina. Zahvaljujem se i mentoru prof.dr.sc. Hrvoju Šikiću na pomoći pri izradi ovog rada. Velike zahvale mojoj obitelji, prijateljima iz srednje škole i kolegama s fakulteta. Zahvaljujem se i vlasnicima kafića u kojima sam satima učila s jednom kavom na stolu i svima onima koji su mi se u tome pridružili, a posebno Roni koja je uvijek bila sa mnom.

Sadržaj

Uvod

U ovom će se radu opisivati osnove aktuarske matematike, koja se razvila s pojavom osiguranja. Postoje dva tipa osiguranja, životno i neživotno, a u ovom će se radu promatrati životno osiguranje.

U prvom će se poglavlju proučavati životni ciklusi - promatrat će se životni ciklus pojedinca, njegov radni vijek i mirovina, te će se modelirati njegova potrošnja i štednja. To će poglavlje služiti kao motivacija za promatranje modela doživljenja i tablica smrtnosti, a razlikovat će se od naredna dva poglavlja po tome što će u njima naglasak biti na matematičkom zapisu i interpretaciji.

Drugo će nas poglavlje upoznati s osnovnim pojmovima kao što su vjerojatnost smrti, funkcija doživljenja te intenzitet smrtnosti. Upoznat će se i međunarodne aktuarske oznake, dok će se na kraju poglavlja proučavati elementi tablica smrtnosti te dati primjer hrvatske ttablice smrtnosti i njena primjena.

Treće poglavlje bavit će se s Gompertzovim zakonom smrtnosti i pokazati koliko dobro on opisuje stvarne podatke. U ovom će se dijelu ovaj zakon usporediti s eksponencijalnim zakonom smrtnosti te uniformnom distribucijom smrtnosti. Na kraju poglavlja promatrat će se životno osiguranje plativo u trenutku smrti te neprekidne životne rente. Također, odredit će se jednokratne neto premije, neto premije i neto premijske rezerve pod pretpostavkom Gompertzovog zakona smrtnosti.

Poglavlje 1

Modeli životnih ciklusa

Počnimo s jednostavnim primjerom. Pogledajmo život pojedinca koji počinje raditi na svom prvom poslu. Pretpostavimo da je njegova plaća konstanta i pretpostavimo da će raditi N godina i biti u mirovini D godina. Pošto se nalazimo u hipotetskom svijetu, možemo pretpostaviti da taj pojedinac sigurno zna odrediti svoju budućnost, odnosno da on sam zna kada će umrijeti. Ovisno o njegovim planovima za mirovinu i za vrijeme radnog života, on može formirati svoju potrošnju na način da za vrijeme radnog života troši manje i živi skromnije tako da bi u mirovini mogao živjeti luksuznije i uživati plodove svoga rada, ili obratno može sada trošiti više, a u mirovini smanjiti svoju potrošnju i živjeti skromnije. Može i formirati svoju potrošnju na način da njegova potrošnja za vrijeme radnog vijeka i za vrijeme mirovine bude jednaka. Pod ovako jednostavnim uvjetima on to može lagano i ostvariti. Ovakvo planiranje, naravno, ovisi i o njegovim preferencijama i načinu života, no mi ćemo kao objektivni promatrači pretpostaviti da on želi jednako trošiti sada i u mirovini. U ovom poglavlju koristila sam se literaturom [5]

1.1 Buduća vrijednost štednje

Unaprijedit ćemo prethodni primjer i pretpostaviti da naš pojedinac svoju štednju drži u nekoj banci po godišnjoj stopi štednje R. Sada kada znamo da se njegova štednja godinama akumulira i povećava po stopi R, zanima nas vrijednost njegove štednje u budućnosti. Neka N predstavlja godine rada, P iznos godišnjeg prihoda, S godišnju štednju, a C željenu potrošnju u mirovini na godišnjoj razini. Također, pretpostavimo da ušteđeni novac stavlja na štednju u banku na kraju godine. Tada buduću vrijednost štednje možemo opisati sljedećom jednadžbom :

$$BVS(S,R,N) = \sum_{i=1}^{N} S(1+R)^{(N-i)} \tag{1.1}$$

Interpretacija ove jednadžbe je jednostavna. Prve godine štedimo S kuna i tih se S kuna svake godine do početka mirovine, odnosno N-1 godina povećava na S(1+R). Iduće godine štedimo ponovno iznos S i taj se iznos idućih N-2 godine povećava na S(1+R). Kada sumiramo po svim radnim godinama dobivamo gornji izraz. Kako ušteđeni novac naš pojedinac stavlja na štednju na kraju godine, zadnje godine N štedi točno S kuna jer se taj dio štednje neće dalje akumulirati. Pomoću sume za konačni geometrijski niz dobivamo jednostavniji izraz za buduću vrijednost štednje :

$$BVS(S, R, N) = S\frac{(1+R)^N - 1}{R} \tag{1.2}$$

Dakle, pri konstantnoj stopi štednje i fiksnom broju radnih godina, gornja je jednadžba linearna i rastuća u S odnosno iznosu štednje, ali nije linearna u stopi štednje R. Također, u slučaju da je stopa štednje 0%, u jednadžbi (1.1) naišli bismo na problem nule u nazivniku, no ako se vratimo u jednadžbu (1.2) jednostavno dobivamo da je budući iznos štednje jednak SN, kao što bi i korištenjem limesa od (1.2) kada R→ 0 dobili isti rezultat. Tako vidimo da su obje jednadžbe dobro definirane. Ove jednadžbe možemo i transformirati ako imamo slučaj mjesečne ili čak tjedne štednje.

1.2 Sadašnja vrijednost buduće potrošnje

Kao što je spomenuto na početku, pojedinac može živjeti skromnije danas kako bi mogao živjeti luksuznije u mirovini ili obratno, ili može zadržati isti životni standard do smrti. Bez obzira na njegov odabir, sljedeće što nas zanima je kolika je sadašnja vrijednost njegove buduće potrošnje. Kako smo već došli do izraza za buduću vrijednost njegove štednje, želimo znati koji to iznos treba štedjeti danas kako bi mogao trošiti željenu količinu novca u mirovini. Neka D označava godine života provedene u mirovini, a C godišnju potrošnju u mirovini. Sadašnja vrijednost buduće potrošnje opisana je ovom jednadžbom:

$$SVP(C, R, D) = \sum_{j=1}^{D} \frac{C}{(1+R)^j} \tag{1.3}$$

Dakle, godišnju potrošnju u mirovini diskontiramo s faktorom (1+R). Ponovno imamo konačni geometrijski niz i jednadžbu (1.3) možemo zapisati kao :

$$SVP(C, R, D) = C\frac{1 - (1+R)^{-D}}{R} \tag{1.4}$$

Ove dvije jednadžbe, istim zaključivanjem kao u slučaju buduće vrijednosti štednje dobro su definirane i linearno su rastuće u C. Pomoću jednadžbe (1.4) možemo za željeni iznos buduće potrošnje C dobiti iznos novca koji trebamo imati u štednji kako bi ta potrošnja bila moguća, odnosno možemo dobiti iznos novca koji bi trebali štedjeti jer u suprotnom neće biti dovoljno novca u mirovini. Dakle, želimo da nam buduća vrijednost štednje bude veća ili jednaka sadašnjoj vrijednosti buduće potrošnje. Jednostavnije, želimo da novac koji imamo ušteđen na početku mirovine bude dovoljan za idućih D godina života u mirovini. Ovaj zaključak možemo napisati ovako:

$$SVP(C, R, D) = BVS(S, R, N) \tag{1.5}$$

Ako uvrstimo (1.4) i (1.2) dolazimo do sljedećeg izraza :

$$C = S\frac{BVS(1, R, N)}{SVP(1, R, D)} \tag{1.6}$$

Odnosno dobivamo vezu između sadašnjeg iznosa štednje i budućeg iznosa potrošnje. U jednadžbi (1.6) BVS(1,R,N) predstavlja buduću vrijednost ušteđene 1 kn N godina po stopi R, a SVP(1,R,D) je sadašnja vrijednost potrošene 1 kn D godina po stopi R. Omjer buduće i sadašnje vrijednosti možemo označiti sa α.

$$\alpha := \frac{(1 + R)^N - 1}{1 - (1 + R)^{-D}} \tag{1.7}$$

Na početku nas je zanimalo koliko bi pojedinac trebao štedjeti da bi zadržao jednak standard kroz cijeli život, radni vijek i mirovnu. Dakle za godišnji prihod P i godišnju štednju S, on želi štedjeti onaj iznos koji bi mu u mirovini zadržao jednaku potrošnju kao i prije mirovine odnosno P-S. Pomoću jednadžbe (1.6) dolazimo do izraza za štednju :

$$P - S = S\alpha \Longleftrightarrow S = \frac{P}{1 + \alpha} \tag{1.8}$$

Našem pojedincu sada je jednostavno odrediti iznos koji treba štedjeti.

1.3 Planiranje s inflacijom

Do sada smo pretpostavljali da je iznos godišnjih prihoda konstantan tijekom cijelog radnog vijeka. Ovu ćemo pretpostavku malo oslabjeti u ovom poglavlju i približiti se stvarnom svijetu. Velik dio planiranja budućnosti ovisi o stopi inflacije. Inflacija je u suštini promjena cijena, odnosno utječe na vrijednost novca, za isti iznos novca ćemo zbog inflacije moći kupiti manje istog proizvoda u budućnosti. S time na umu, prirodno je da će se plaća mijenjati zbog inflacije. Ako pretpostavimo da će pojedinac imati jednaku kupovnu moć kroz cijeli radni vijek, zbog inflacije pretpostavljamo da će se i njegov prihod povećavati. Dakle, pretpostavka o konstantnom iznosu prihoda se mijenja, ali smisao iza nje i dalje ostaje nepromijenjen. Naime, u prethodnom dijelu nismo uzimali u obzir realni svijet u kojem inflacija postoji, tako da je kupovna moć našeg pojedinca konstantno bila jednaka. Pretpostavka koju ćemo dodati je da je inflacija konstanta i označavat ćemo ju sa π. Pretpostavimo da naš pojedinac prve godine svog rada primi plaću u iznosu W_0 i kao što smo prije pretpostavili, neka se ta plaća povećava svake godine u odnosu na inflaciju. Tada će u godini i plaća iznositi:

$$W_i = W_0(1+\pi)^i \tag{1.9}$$

Realna vrijednost štednje smanjuje se zbog inflacije- ako prve godine uštedi S kuna, taj će novac iduće godine vrijediti $S^\pi = \frac{S}{1+\pi}$. Sada ako svake godine štedi S^π realnih kuna tada će buduća vrijednost ušteđenog novca biti:

$$S^\pi(1+\pi)(1+R)^{N-1} + S^\pi(1+\pi)^2(1+R)^{N-2} + ... + S^\pi(1+\pi)^N \tag{1.10}$$

Kako bismo dobili izraz za buduću vrijednost štednje izraženu isključivo preko realnih vrijednosti, možemo stopu štednje zapisati pomoću realne stope štednje ovako $R = (1+R^\pi)(1+\pi) - 1$. Kada ovaj izraz za R uvrstimo u (1.10) i pomoću sume konačnog geometrijskog niza dolazimo do

$$BVS^\pi(S,R,N) = S^\pi \frac{(1+R^\pi)^N - 1}{R^\pi} \tag{1.11}$$

Nadalje istim postupkom dolazimo do:

$$SVP^\pi(C,R,D) = C^\pi \frac{1-(1+R^\pi)^{-D}}{R^\pi} \tag{1.12}$$

1.4 Motivacija za dalje

Pod određenim pretpostavkama, formule do kojih smo došli za individualca možemo proširiti i gledati za društvo ljudi s istim životnim vijekom, ali različitim prihodima i štednjama. Tada već na razini društva možemo promatrati buduću vrijednost ušteđenog novca, a pomoću inflacije i realnu buduću vrijednost ušteđenog novca. Također, možemo se dodatno približiti realnom svijetu i zamisliti da to društvo nalaže da svaki pojedinac odvaja određeni postotak svoje plaće u štednju te da se na razini društva određuje koji bi to postotak trebao biti. U tom slučaju se postavlja pitanje koliki dio ukupnog novca koji su uštedili treba pripasti svakom od njih. Ako u ovo društvo dodamo starije i mlađe pripadnike, na primjer predke i potomke već postojećih pripadnika društva, naši originalni pripadnici mogu svojom uštedom financirati i skrbiti i za njih. Ovakvim proširivanjem, približavamo se ideji mirovinskog sustava kakav se koristi danas. Možemo primijetiti da nam je do sada bila vrlo bitna pretpostavka o tome koliko će godina naš pojedinac biti umirovljen i o tome koliko će dugo raditi, ali u društvu gdje postoje njegovi potomci i predci bitno je znati i čitavu strukturu društva u kojem se nalazimo i kolika bi ta odvajanja za budućnost trebala biti i to je svojevrsna motivacija za promatranje tablica smrtnosti i modela doživljenja i same strukture stanovništva uopće. Osim toga, životne cikluse možemo promatrati iz perspektive Zavoda za mirovinsko osiguranje. U tom slučaju potrošnja bi prestavljala iznos mirovina koje Zavod za mirovinsko osiguranje isplaćuje svojim umirovljenim korisnicima, dok bi prihodi predstavljali iznose koje su prikupili od svojih radno sposobnih korisnika, a štednja bi predstavljala ulaganja u obveznice i dionice kako bi osigurali isplatu umirovljenim korisnicima. Ovim je poglavljem postavljeno više pitanja nego odgovora, što će se pokušati riješiti u nastavku, fokusiranjem samo na pojedine dijelove.

Poglavlje 2

Modeli doživljenja i tablice smrtnosti

Ovo poglavlje se bazira na knjizi [2] i prezentacijama [4]

2.1 Jednostavan model doživljenja

U prethodnom poglavlju uočili smo da nam je za modeliranje životnih ciklusa bitno znati koliko će dugo naš pojedinac živjeti. Iz tog se razloga osiguravatelji koriste modelima doživljenja kako bi mogli izračunati vjerojatnost smrti pojedinca u određenoj dobi.

Počinjemo sa životom od rođenja, odnosno promatramo novorođenče. Slučajna varijabla T označavat će nam ostatak života novorođenčeta. *Funkciju distribucije ostatka života* novorođenčeta označavat ćemo sa F i definirati ovako

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t), t \geq 0 \tag{2.1}$$

U primjeni nas često više zanima vjerojatnost doživljenja od vjerojatnosti smrti. *Funkciju doživljenja* novorođenčeta označavat ćemo sa S i definirati ovako

$$S(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(T > t), t \geq 0 \tag{2.2}$$

Dakle, $F(t)$ nam predstavlja vjerojatnost da će novorođenče živjeti manje od t godina, odnosno vjerojatnost da neće doživjeti dob t, a $S(t)$ je vjerojatnost da će novorođenče živjeti više od t godina, odnosno vjerojatnost da će doživjeti t godina.

Sada ćemo promatrati osobu starosti x. Uvodimo slučajnu varijablu T_x koja za pojedinca dobi x označava ostatak njegovog života. Pretpostavljamo da je to neprekidna slučajna varijabla na $[0, \omega]$, gdje je ω granična dob, npr. 120 godina. Njena funkcija distribucije dana je sa

$$F_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t), \quad t \geq 0 \tag{2.3}$$

Ova funkcija distribucije predstavlja vjerojatnost umiranja osobe starosti x za manje od t godina, odnosno vjerojatnost da osoba neće doživjeti dob $x + t$. Kako smo pretpostavili da je slučajna varijabla T_x neprekidna, možemo ju zapisati i preko njezine funkcije gustoće $f_x(t)$ ovako

$$F_x(t) = \int_0^t f_x(s)ds \tag{2.4}$$

Funkciju S_x definiranu sa

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t) \quad , t \geq 0 \tag{2.5}$$

nazivamo funkcijom doživljenja osobe starosti x i predstavlja vjerojatnost da će osoba dobi x živjeti još t godina, odnosno da će doživjeti dob $x + t$.

Za $x = 0$ imamo T_0 , što je ekvivalentno slučajnoj varijabli ostatka života novorođenčeta, odnosno $T_0 = T$. Pogledajmo vezu između slučajne varijable T i T_x. Za pojedinca koji doživi dob x i umire unutar t godina, ekvivalentni su događaji $\{T < x + t\}$ i $\{T_x < t\}$. To bi značilo da za pojedinca starosti x vrijedi $T_x = T - x$. Pa iz toga slijedi

$$F_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t) = \mathbb{P}(T \leq t + x|T > x) = \frac{\mathbb{P}(x < T \leq t + x)}{\mathbb{P}(T > x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{S(x)} \tag{2.6}$$

i

$$S_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t) = \mathbb{P}(T > t + x|T > x) = \frac{\mathbb{P}(T > t + x)}{\mathbb{P}(T > x)} = \frac{S(t + x)}{S(x)} \tag{2.7}$$

Valjalo bi naglasiti uvjete za funkciju doživljenja S_x

(i) Za $t \leq x$ očito vrijedi $S_x(t) = 1$.
(ii) Pretpostavlja se da nitko ne živi vječno, pa je $\lim_{t->\infty} S_x(t) = 0$.
(iii) Funkcija doživljenja je nerastuća funkcija, jer ne može biti veća vjerojatnost da će pojedinac živjeti još 5 godina od vjerojatnosti da će živjeti još 2 godine.

Ovi su uvjeti nužni i dovoljni da bi funkcija doživljenja bila dobro definirana. Kasnije, odnosno u poglavlju 2.4 dodat ćemo još dvije pretpostavke na funkciju doživljenja.
Sada kada smo definirali osnovne pojmove i utvrdili njihovu povezanost, definirat ćemo još jedan bitan pojam u aktuaristici.

Intenzitet smrtnosti

Intenzitet smrtnosti definiramo ovako

$$\mu_x := \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(T \leq x + h|T > x)}{h} \tag{2.8}$$

Kako je $F_x(t)$ vjerojatnost da će osoba dobi x umrijeti prije nego što doživi dob x+t, odnosno uvjetna vjerojatnost, intezitet smrtnosti možemo zapisati ovako

$$\mu_x := \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(T_x \leq h)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{F_x(h)}{h} \tag{2.9}$$

Pomoću jednakosti (2.6) intenzitet smrtnosti možemo zapisati ovako

$$\mu_x = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{hS(x)} \tag{2.10}$$

Sada uz pretpostavku neprekidnosti slučajne varijable T, funkcija gustoće te neprekidne slučajne varijable je f(x)=F'(x). Dobivamo sljedeće

$$\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)} \tag{2.11}$$

Pa funkciju gustoće slučajne varijable T možemo prikazati ovako

$$f(x) = \mu_x S(x) \tag{2.12}$$

Analogno, možemo jednadžbu (2.11) zbog $F'(x) = (1 - S(x))' = -S'(x) = -s(x)$ zapisati i ovako

$$\mu_x = \frac{-s(x)}{S(x)} \tag{2.13}$$

Ovdje bismo mogli dodati još uvjet da je funkcija doživljenja diferencijabilna , ali to svojstvo funkcije vrijedi zbog neprekidnosti slučajne varijable T i definicije funkcije doživljenja novorođenčeta. Malim pisanim slovom s označavat ćemo derivaciju funkcije doživljenja novorođenčeta.

Intenzitet smrtnosti može se odrediti za bilo koju dob. Uzmimo fiksni x i varijablu t. Kada umjesto x uvrstimo x+t u izraz (2.10) i pomoću izraza (2.6) dobivamo intenzitet smrtnosti za dob x+t.

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)} \tag{2.14}$$

Iz toga možemo funkciju gustoće slučajne varijable T_x izraziti pomoću intenziteta smrtnosti.

$$f_x(t) = \mu_{x+t} S_x(t) \tag{2.15}$$

Idemo riješiti diferencijalnu jednadžbu (2.13). Radi jednostavnosti zamijenit ćemo x s y.

$$
\begin{aligned}
-\mu_y &= \frac{\mathrm{dS(y)}}{S(y)\mathrm{dy}} \\
-\mu_y \mathrm{dy} &= \frac{\mathrm{d}S(y)}{S(y)} \\
-\mu_y dy &= d(logS) \\
-\int_x^{x+n} \mu_y dy &= log(S(x+n)) - log(S(x)) \\
\frac{S(x+n)}{S(x)} &= \exp\Big(-\int_x^{x+n} \mu_y dy\Big)
\end{aligned}
$$

U trećem koraku integriramo od x do x+n. Zbog (2.7) izraz $\frac{S(x+n)}{S(x)}$ odgovara vrijednosti $S_x(n)$. Ovime smo izrazili funkciju doživljenja osobe dobi x pomoću intenziteta smrtnosti. Ponekad je praktičnije zapisati ovako:

$$S_x(n) = \exp\Big(-\int_0^n \mu_{x+s} ds\Big) \tag{2.16}$$

Pomoću toga možemo funkciju distribucije ostatka života osobe dobi x izraziti pomoću intenziteta smrtnosti.

$$F_x(n) = 1 - S_x(n) = 1 - \exp\Big(-\int_0^n \mu_{x+s} ds\Big) \tag{2.17}$$

Izrazimo i funkciju doživljenja i funkciju distribucije ostatka života novorođenčeta pomoću intenziteta smrtnosti.

$$S(n) = \exp\Big(-\int_0^n \mu_s ds\Big) \tag{2.18}$$

$$F(n) = 1 - \exp\Big(-\int_0^n \mu_s ds\Big) \tag{2.19}$$

Ovi odnosi između distribucije ostatka života, funkcije doživljenja i funkcije intenziteta smrtnosti dopuštaju nam da formiramo zakone smrtnosti na dva načina:

1. način : Ako odaberemo neku funkciju distribucije F_x pomoću te funkcije znamo izraz za funkciju doživljenja $S_x(t) = 1 - F_x(t)$. Pomoću derivacije funkcije distribucije F_x dođemo do funkcije gustoće, zatim pomoću jednadžbe (2.14) dođemo do izraza za funkciju intenziteta smrtnosti.

2.način : Možemo i odabrati neku funkciju intenziteta smrtnosti μ_x i pomoću jednadžbi (2.16) i (2.2) možemo doći do izraza za funkciju distribucije i zbog $S_x(t) = 1 - F_x(t)$

možemo jednostavno izraziti funkciju doživljenja, a deriviranjem funkcije distribucije doći ćemo do izraza za funkciju gustoće.

Ovi odnosi mogu se lijepo prikazati i sljedećom tablicom:

Funkcije izražene pomoću funkcije	Odnosi između funkcija			
	Funkcija distribucije	Funkcija doživljenja	Funkcija gustoće	Funkcija intenziteta smrtnosti
$F_x(t)$	$F_x(t)$	$1 - F_x(t)$	$F'_x(t)$	$\frac{F'_x(t)}{1-F_x(t)}$
$S_x(t)$	$1 - S_x(t)$	$S_x(t)$	$-S'_x(t)$	$\frac{-S'_x(t)}{S_x(t)}$
$f_x(t)$	$\int_0^t f_x(s)ds$	$\int_t^\infty f_x(s)ds$	$f_x(t)$	$\frac{f_x(t)}{\int_t^\infty f_x(s)ds}$
μ_x	$1-\exp(\int_0^t \mu_{x+s}ds)$	$\exp(-\int_0^t \mu_{x+s}ds)$	$\exp(-\int_0^t \mu_{x+s}ds)\mu_{x+t}$	μ_{x+t}

Tablica 2.1: Odnosi

2.2 Aktuarske oznake

Oznake korištene do sada uobičajene su u matematičkoj statistici, dok se u aktuaristici koriste međunarodne aktuarske oznake koje uvodimo u ovom poglavlju.

${}_tq_x := F_x(t)$ predstavlja (uvjetnu) vjerojatnost da osoba ne doživi dob x+t ako je doživjela dob x

${}_tp_x := S_x(t)$ predstavlja (uvjetnu) vjerojatnost da osoba doživi dob x+t ako je doživjela dob x

Uobičajeno je izostaviti prefiks ako je t=1, odnosno pišemo $q_x \equiv {}_1q_x$, $p_x \equiv {}_1p_x$.
q_x nazivamo *stopom smrtnosti* te ona predstavlja vjerojatnost smrti u idućih godinu dana. Uvedimo oznaku za vjerojatnost da će osoba dobi x preživjeti još idućih t godina i umrijeti unutar u godina, odnosno vjerojatnost da će osoba dobi x, umrijeti u dobi između $x + t$ i $x + t + u$.

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= P(t < T_x < t + u) \\
&=_{t+u} q_x -_t q_x \\
&=_t p_x -_{t+u} p_x
\end{aligned}
$$

Ovu vjerojatnost nazivamo još *odgođenom vjerojatnosti smrti*.
Sada možemo formule iz prethodna dva poglavlja zapisati pomoću ovih oznaka. Zapišimo izraze (2.6) i (2.7) pomoću aktuarskih oznaka.

$$ {}_tq_x = \frac{{}_{x+t}q_0 - {}_x q_0}{{}_xp_0} = \frac{{}_{x|u}q_0}{{}_xp_0} \tag{2.20} $$

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} \tag{2.21} $$

${}_tq_x$ možemo zapisati i ovako

$$ {}_tq_x = F_x(t) = \int_0^t f_x(s)ds = \int_0^t S_x(s)\mu_{x+s}ds = \int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}ds $$

Interpretacija gornje jednadžbe korisna je za razumijevanje. Za $0 \leq s < t$, ${}_sp_x$ predstavlja vjerojatnost da pojedinac dobi x doživi dob $x + s$, a $\mu_{x+s}ds$ predstavlja vjerojatnost da pojedinac dobi x umire između dobi $x + s$ i $x + s + ds$. Da bismo dobili vjerojatnost smrti prije dobi x+t, moramo sumirati po svim mogućim intervalima od s do $s + ds$, što se svodi na integriranje budući da su ds jako mali.
Pomoću (2.20) i (2.21) izraz za ${}_{t|u}q_x$ raspisati i ovako

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \mathbb{P}(t < T_x \leq t + u) \\
&= \mathbb{P}(t + x < Tu + x|T > x) \\
&= \frac{\mathbb{P}(t + x < T < t + u + x)}{\mathbb{P}(T > x)} \\
&= \frac{S(t + x) - S(t + u + x)}{S(x)} \\
&= \frac{{}_{x+t}p_0 -{}_{x+t+u}\, p_0}{{}_xp_0} \\
&= \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0}(\frac{{}_{x+t}p_0 -{}_{x+t+u}\, p_0}{{}_{x+t}p_0}) \\
&= {}_tp_x(\frac{{}_{x+t+u}q_0 -{}_{x+t}\, q_0}{{}_{x+t}p_0}) \\
&= {}_tp_{x\,u}q_{x+t}
\end{aligned}
$$

2.3 Cjelobrojno trajanje života

Cjelobrojno trajanje života osobe dobi x označavamo sa K_x. K_x je najveće cijelo od T_x, pa imamo

$$ \mathbb{P}(K_x = k) = \mathbb{P}(k \leq T_x < k + 1) = \mathbb{P}(k < T_x \leq k + 1) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_{k|}q_x \tag{2.22} $$

Kako je ovo diskretna slučajna varijabla, funkciju distribucije cjelobrojnog trajanja života označavamo sa F_{K_x} i definiramo ovako

$$F_{K_x}(y) = \sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{k+1}q_x \text{ za } y \leq 0, \text{ i k najveće cijelo od y} \tag{2.23}$$

2.4 Očekivano trajanje života

Očekivano trajanje života osobe dobi x definiramo ovako:

$$\mathbb{E}[T_x] = \int_0^\infty t f_x(t) dt \tag{2.24}$$

Prethodnu jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_x] &= \int_0^\infty t f_x(t) dt = \int_0^\infty t S_x(t) \mu_{x+t} dt \\
&= \begin{bmatrix} u = t & dv = S_x(t)\mu_{x+t} dt \\ du = dt & v = -S_x(t) \end{bmatrix} \\
&= -tS_x(t)|_0^\infty + \int_0^\infty S_x(t) dt \\
&= \int_0^\infty S_x(t) dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt
\end{aligned}$$

Da bi to očekivanje postojalo, uvodimo još jedan uvjet na funkciju doživljenja S_x.
(iv) $\lim_{t->\infty} tS_x(t) = 0$
Sličnim postupkom možemo odrediti i drugi moment slučajne varijable T_x, $\mathbb{E}[T_x^2] = 2\int_0^\infty t_t p_x dt$, uz uvjet na funkciju doživljenja : *(v)* $\lim_{t\to\infty} t^2 S_x(t) = 0$.
Aktuarska oznaka za očekivano buduće trajanje života osobe dobi x je $\mathring{e}_x$

Pomoću ovoga možemo definirati i varijancu

$$\mathrm{Var}(T_x) = \mathbb{E}[T_x^2] - \mathbb{E}^2[T_x] = 2\int_0^\infty t_t p_x dt - \mathring{e}_x^2 \tag{2.25}$$

Osim momenata možemo promatrati i medijan trajanja života osobe dobi x u oznaci M_x. Definiramo ga na sljedeći način :

$$\mathbb{P}[T_x > M_x] = \frac{1}{2} \tag{2.26}$$

Što možemo zapisati i ovako

$$\frac{S(M_x + x)}{S(x)} = \frac{1}{2} \tag{2.27}$$

Dakle, vjerojatnost da će osoba preživjeti idućih M_x godina je 50%.

Vrijedi definirati i očekivano cjelobrojno trajanje života.

$$\mathbb{E}[K_x] = \sum_0^\infty kP(K_x = k) = \sum_0^\infty k_{k|}q_x = \sum_0^\infty k({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) = \sum_0^\infty {}_kp_x$$

Oznaka za očekivano cjelobrojno trajanje života je e_x.

Odredimo sada drugi moment cjelobrojnog trajanja života i varijancu

$$\mathbb{E}[K_x^2] = \sum_0^\infty k^2\mathbb{P}(K_x = k) = \sum_0^\infty k^2{}_{k|}q_x = \sum_0^\infty k^2({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) = \sum_0^\infty (2k+1){}_kp_x$$

$$\mathrm{Var}(K_x) = \mathbb{E}[K_x^2] - \mathbb{E}^2[K_x] = \sum_0^\infty (2k+1){}_kp_x - e_x^2 = 2\sum_0^\infty k_kp_x + e_x - e_x^2 \tag{2.28}$$

2.5 Tablice smrtonsti

Tablice smrtnosti statističke su tablice koje prikazuju kolika je vjerojatnost da će pojedinac koji pripada određenoj kategoriji (npr. spol) doživjeti određenu dob. Tablice smrtnosti su osnova za računanje premija osiguranja : mirovinskog, invalidskog, osiguranja za slučaj smrti i doživljenja i drugih. Za početak ćemo uvesti još oznaka i povezati ih s dosadašnjim aktuarskim oznakama koje se koriste u tablicama smrtnosti i koje su dio međunarodnih aktuarskih oznaka.

Slučajna skupina preživjelih

Uzimajući slučajnu skupinu preživjelih pretpostavlja se da je broj preživjelih za bilo koju dob slučajan.

Uzmimo skupinu od l_0 novorođenčadi, l_0 naziva se još i *korijen tablice*, a možemo ga uzeti i za proizvoljnu početnu dob α. Dob u kojoj novorođenče umire ima distribuciju S(x). Definiramo $\mathcal{L}_x$ kao broj novorođenčadi koji su doživjeli dob x.

$$\mathcal{L}_x = \sum_{j=1}^{l_0} \chi_j \tag{2.29}$$

Pri čemu nam je χ_j karakteristična funkcija definirana ovako

$$\chi_j = \begin{cases} 1 & ;\text{novorođenče j doživi dob x} \\ 0 & ;\text{inače} \end{cases}$$

χ_j je binomna slučajna varijabla s parametrom $S(x)$ pa vrijedi $\mathbb{E}[\chi_j] = S(x)$. Sada imamo

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_x] = \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{l_0} \chi_j] = \sum_{j=1}^{l_0} \mathbb{E}[\chi_j] = l_0 S(x) \tag{2.30}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili linearnost očekivanja.

Očekivanje $\mathbb{E}[\mathcal{L}_x]$ ćemo označavati sa l_x i ono nam predstavlja očekivani broj novorođenčadi koji su doživjeli dob x. Dakle, $l_x = l_0 S(x) = l_{0x}p_0$. Pomoću jednadžbe (2.21) dolazimo do sljedećeg izraza za ${}_tp_x$

$${}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{\frac{l_{x+t}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{2.31}$$

Koristili smo da je početna dob 0, do istog zaključka bismo došli da smo koristili da je početna dob proizvoljan α. Tada bi nam prvi slučaj karakteristične funkcije označavao slučaj da osoba dobi α doživi dob x i tada bi funkcija poprimala vrijednost 1, a 0 inače, odnosno χ_j bi bila binomna slučajna varijabla s parametrom $S_\alpha(x-\alpha)$. I onda bi vrijedilo da je $\mathbb{E}[\chi_j] = S_\alpha(x-\alpha)$ te bismo dobili izraz za l_x na isti način kao ranije, koji bi glasio $l_x = l_{\alpha x-\alpha}p_\alpha$. S obzirom na to da vrijedi ${}_{x-\alpha}p_\alpha = {}_xp_0$ imamo

$${}_tp_x = \frac{{}_{x-\alpha+t}p_\alpha}{{}_{x-\alpha}p_\alpha} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

te dolazimo do istog rezultata.

Sada ćemo ponovno za korijen tablice koristiti l_0, odnosno gledati ponovno skupinu novorođenčadi. Korisno je definirati i broj novorođenčadi koji su umrli u intervalu [x,x+n], a taj broj ćemo označavati sa ${}_n\mathcal{D}_x$. ${}_n\mathcal{D}_x$ možemo definirati slično kao i $\mathcal{L}_x$ pomoću karakteristične funkcije.

$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{l_0} \chi_j$$

s karakterističnom funkcijom

$$\chi_j = \begin{cases} 1 & \text{; novorođenče j umire u intervalu [x,x+n]} \\ 0 & \text{; inače} \end{cases}$$

I vrijedi $\mathbb{E}[\chi_j] = S(x) - S(x+n)$. Očekivanje $\mathbb{E}[{}_n\mathcal{D}_x]$ označavamo sa ${}_nd_x$, i dobivamo ga slično kao i kada smo gledali skupinu preživjelih.

$${}_nd_x = l_0(S(x) - S(x+n)) = l_0({}_xp_0 - {}_{x+n}p_0) = l_x - l_{x+n} \tag{2.32}$$

Sada ćemo još pokazati vezu između l_x i intenziteta smrtnosti. Pomoću (2.30) i (2.13) dolazimo do

$$\mu_x = \frac{-1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$$

odnosno

$$-dl_x = l_x\mu_x dx$$

Kako vrijedi $l_x\mu_x = l_{0x}p_0\mu_x = l_0 f(x)$, rješavajući gornju diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeći izraz za l_x pomoću intenziteta smrtnosti

$$l_x = l_0 \exp - \int_0^x \mu_s ds \tag{2.33}$$

Pomoću jednadžbe (2.14) i (2.30) na isti način rješavajući diferencijalnu jednadžbu dolazimo i do ovog izraza

$$l_{x+n} = l_x \exp - \int_x^{x+n} \mu_s ds \tag{2.34}$$

Sada možemo i očekivani broj umrlih u intervalu [x,x+n] zapisati pomoću intenziteta smrtnosti.

$$_nd_x = l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_s\mu_s ds \tag{2.35}$$

Prikazat ćemo $_tq_x$ pomoću l_x i $_td_x$.

$$_tq_x = \frac{F(x+t)-F(x)}{S(x)} = \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{_td_x}{l_x} \tag{2.36}$$

Deterministička skupina broja preživjelih

Za razliku od slučajne skupine broja preživjelih, kod determinističke skupine broja preživjelih uzimamo da je broj preživjelih za svaku dob poznat.

Deterministička skupina broja preživjelih mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

1. U dobi 0, skupina preživjelih sastoji se od l_0 preživjelih
2. Pripadnici skupine preživjelih umiru po stopi smrtnosti q_x u svakoj dobi x.
3. Skupina je zatvorena, što znači da se broj preživjelih smanjuje.

Pomoću ovih uvjeta možemo sigurno odrediti kako će se broj preživjelih kretati kroz godine.

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0(1-q_0) = l_0 - d_0 \\ l_2 = l_1(1-q_1) &= l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1) \\ &\vdots \\ l_x = l_{x-1}(1-q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1} &= l_0 - \sum_{i=0}^{x-1} d_i \\ &= l_0\Big(1 - \frac{\sum_{i=0}^{x-1} d_i}{l_0}\Big) = l_0\Big(1 - \frac{l_0 - l_x}{l_0}\Big) \\ &= l_0\,{}_xp_0 = l_0(1 - {}_xq_0) \end{aligned}$$

Centralna stopa smrtnosti

Za definiranje centralne stope smrtnosti potrebno je prvo definirati očekivani prosječan broj živih dobi x tijekom godine dana.

$$L_x = \int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t} dt + l_{x+1} \tag{2.37}$$

U (2.37) prvi pribrojnik označava ukupan očekivani broj pojedinaca koji umiru unutar godinu dana, a drugi pribrojnik označava očekivani broj onih koji dožive dob x+1.

$$\begin{aligned} L_x = \int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t} dt + l_{x+1} &= \begin{bmatrix} u = t & dv = l_{x+t}\mu_{x+t} dt \\ du = dt & v = -l_{x+t} \end{bmatrix} \\ = -t l_{x+t}\big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} &= -l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t} dt \end{aligned}$$

Centralnu stopu smrtnosti definiramo kao omjer očekivanog broja umrlih u dobi x i očekivanog prosječnog broja živih u intervalu [x,x+1].

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} \tag{2.38}$$

Centralnu stopu smrtnosti možemo izraziti i preko stope smrtnosti i funkcije doživljenja, do čega dolazimo na sljedeći način

$$m_x = \frac{(l_x - l_{x+1}) : l_x}{(\int_0^1 l_{x+t} dt) : l_x} = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_tp_x dt} \tag{2.39}$$

m_x možemo interpretirati i kao vjerojatnost da osoba koja je živa u dobi od x do x+1 ne doživi dob x+1.

Definicije od L_x i m_x možemo proširiti i na intervale koji su duži od 1 godine. Za interval duljine n imamo:

$$
{}_nL_x = \int_0^n l_{x+t}dt
$$
$$
{}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{{}_nL_x}
$$

Izraz $\frac{{}_nL_x}{l_x}$ nazivamo srednje vrijeme koje je osoba dobi x provela u intervalu [x,x+n] i on iznosi $\int_0^n {}_tp_x dt$, a označavamo ga s $\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$

Hrvatska tablica smrtnosti

Prije nego što prikažemo tablicu smrtnosti za 2010.-2012., definirat ćemo još par pojmova koji se nalaze u tablici.

Skupina živih u oznaci V_x je broj osoba rođenih u godini n i godini n+1 koje su 2010. i 2011. navršile x godina.
Skupina umrlih u oznaci M_x je broj osoba rođenih u godini n i n+1 koje su umrle u dobi od x godina.
Zbroj brojeva živih u oznaci N_x, je zbroj srednjih brojeva živih za svaku dob x.
Skupine živih i skupine umrlih se posebno računaju za dojenčad, djecu staru jednu godine i sve ostale dobne skupine.
Sirove vjerojatnosti smrti računaju se za ukupno mušku i žensku populaciju i za sve dobne skupine na sljedeći način

$$
q'_x = \frac{M_x}{V_x}
$$

Sirove vjerojatnosti smrti je potrebno "izgladiti", odnosno otkloniti potencijalne posljedice slučajnih pogreški i na taj način dolazimo do *izglađenih vjerojatnosti smrti* q_x.

Na slici 2.1 je dana tablica smrtnosti za 2010.-2012. Pomoću dane tablice smrtnosti riješit ćemo zadatak da bismo vidjeli kako se tim tablicama možemo služiti. Zadaci su preuzeti iz [2].
Zadatak Pomoću tablice smrtnosti na slici 2.1 izračunajte vjerojatnost da osoba u dobi od 19 godina:
a) doživi dob 80
b) umre prije dobi 70
c) umre između 80 i 90 godina

Starost *Age*	Skupine živih *Number of persons surviving* V_x	Skupine umrlih *Number of persons dying* M_x	Sirove vjerojatnosti smrti *Crude probabilities of dying* q_x'	Izglađene vjerojatnosti smrti *Smoothed probabilities of dying* q_x	Vjerojatnosti doživljenja *Probabilities of surviving* p_x	Broj živih *Number of survivors* l_x	Broj mrtvih *Number of deaths* d_x	Zbroj brojeva živih *Number of person -years* N_x	Očekivano trajanje života *Life expectancy* e_x
					Muškarci ***Men***				
0	43 600	127	0,002913	0,002913	0,997087	100 000	291	7 443 829	73,94
1	44 832	13	0,000290	0,000290	0,999710	99 709	29	7 343 829	73,15
2	44 671	9	0,000201	0,000201	0,999799	99 680	20	7 244 121	72,17
3	43 321	7	0,000162	0,000162	0,999838	99 660	16	7 144 441	71,19
4	42 490	5	0,000118	0,000118	0,999882	99 644	12	7 044 781	70,20
5	42 997	4	0,000093	0,000054	0,999946	99 632	5	6 945 138	69,21
6	42 533	2	0,000047	0,000067	0,999933	99 627	7	6 845 506	68,21
7	41 295	4	0,000097	0,000077	0,999923	99 620	8	6 745 879	67,22
8	41 100	5	0,000122	0,000110	0,999890	99 612	11	6 646 259	66,22
9	41 836	6	0,000143	0,000114	0,999886	99 601	11	6 546 647	65,23
10	43 671	7	0,000160	0,000142	0,999858	99 590	14	6 447 046	64,24
11	45 666	8	0,000175	0,000157	0,999843	99 576	16	6 347 456	63,25
12	47 457	9	0,000190	0,000184	0,999816	99 560	18	6 247 880	62,25
13	49 866	10	0,000201	0,000202	0,999798	99 542	20	6 148 320	61,27
14	51 766	12	0,000232	0,000257	0,999743	99 522	26	6 048 779	60,28
15	51 186	19	0,000371	0,000322	0,999678	99 496	32	5 949 257	59,29
16	49 411	18	0,000364	0,000393	0,999607	99 464	39	5 849 761	58,31
17	49 400	23	0,000466	0,000475	0,999525	99 425	47	5 750 297	57,34
18	49 266	30	0,000609	0,000548	0,999452	99 378	54	5 650 872	56,36
19	50 613	29	0,000573	0,000610	0,999390	99 323	61	5 551 495	55,39

Slika 2.1: Isječak tablice smrtnosti preuzete iz [6]

Rješenje

a)

$$ {}_{61}p_{19} = \frac{S(80)}{S(19)} = \frac{\frac{l_{80}}{l_0}}{\frac{l_{19}}{l_0}} = \frac{l_{80}}{l_{19}} = \frac{38510}{99323} = 0.3877 = 38.77\% $$

b)

$$ {}_{51}q_{19} = \frac{S(19) - S(70)}{S(19)} = \frac{l_{19} - l_{70}}{l_{19}} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{19}} = 1 - \frac{67915}{99323} = 0.3162 = 31.62\% $$

c)

$$ {}_{61|10}q_{19} = {}_{61}p_{19} - {}_{71}p_{19} = \frac{l_{80} - l_{90}}{l_{19}} = \frac{38510 - 8310}{99323} = 0.3041 = 30.41\% $$

Vrijednosti l_{80}, l_{70}, l_{90} sam iščitala iz tablice koja se nalazi u [6].

Poglavlje 3

Gompertzov zakon smrtnosti

Ovo poglavlje se temelji na članku [3].
Gompertzov zakon smrtnosti uzima funkciju intenziteta smrtnosti u sljedećem obliku

$$\mu_x = Bc^x \text{ za } x \leq 0,\, B > 0,\, c \leq 1 \tag{3.1}$$

Uzmimo sljedeću reprezentaciju Gompertzovog zakona za daljnju analizu.

$$\mu_x = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \text{ za } \sigma > 0,\, m \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

U kontekstu formule (3.1) $B = \sigma^{-1} e^{-m/\sigma}$ i $c = e^{1/\sigma}$.
Pomoću (2.18) i (3.2) dolazimo do izraza za funkciju doživljenja novorođenčeta.

$$S(x) = \exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(x-m)/\sigma}\right) \tag{3.3}$$

Iz toga možemo dobiti i funkciju distribucije ostatka života novorođenčeta.

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - \exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(x-m)/\sigma}\right) \tag{3.4}$$

Pomoću (2.12) i (3.2) dolazimo do izraza za funkciju gustoće ostatka života novorođenčeta.

$$f(x) = \exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(x-m)/\sigma} + \frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{3.5}$$

Sada ćemo pomoću (2.7) i (3.3) doći do izraza za funkciju doživljenja osobe starosti x.

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \exp\left(e^{(x-m)/\sigma}(1 - e^{t/\sigma})\right) = \exp\left(\sigma\mu_x(1 - e^{t/\sigma})\right) \tag{3.6}$$

Pomoću toga možemo jednostavno izraziti funkciju distribucije ostatka života osobe starosti x.

$$F_x(t) = 1 - S_x(t) = 1 - \exp\left(\sigma\mu_x(1 - e^{t/\sigma})\right) \tag{3.7}$$

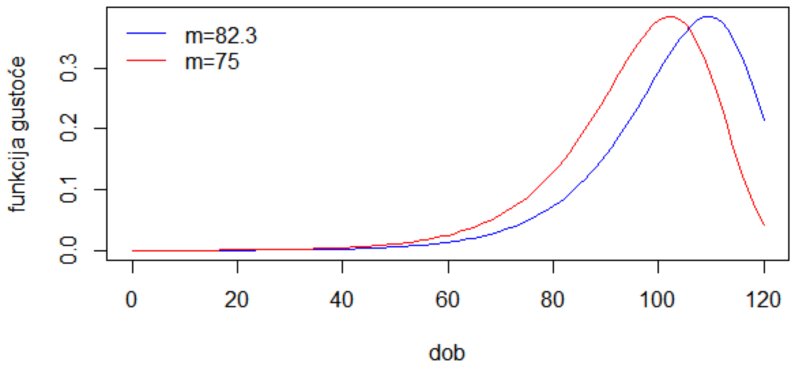
Funkciju gustoće ostatka života osobe starosti x možemo izraziti uz pomoć jednadžbi (2.15) i (3.2).

$$f_x(t) = \mu_{x+t} \exp\left(\sigma\mu_x(1 - e^{t/\sigma})\right) \tag{3.8}$$

Idući zadatak pokazuje kako promjena parametra m utječe na funkciju gustoće. Zadatke sam uzimala iz knjige [5].

1.zadatak. Na istom grafu prikažite funkciju gustoće iz navedene reprezentacije Gompertzovog modela $f_x(t)$ za $m = 82.3$, $\sigma = 11.4$ i $m = 75$, $\sigma = 11.4$, za $x = 0, ..., 120$.

Rješenje:



Slika 3.1: Funkcija gustoće Gompertzovog modela za različite vrijednosti m

Smanjenjem parametra m graf funkcije gustoće se pomaknuo u lijevo. Vidimo da za manji m graf funkcije gustoće poprima veće vrijednosti od grafa funkcije gustoće za veći m do dobi $x = 100$, od te dobi nadalje, graf funkcije gustoće za manji m poprima manje vrijednosti nego za veći m.

3.1 Očekivano trajanje života

U poglavlju 2.4 došli smo do izraza za očekivano trajanje života $\mathbb{E}[T_x] = \int_0^\infty {}_tp_x dt$, u ovom poglavlju koristit ćemo se funkcijama izvodnica momenata i funkcijom izvodnicom

kumulanata kako bismo došli do izraza za očekivano trajanje života.
Funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable T_x označavat ćemo s $\varphi_x(u)$.

$$
\begin{aligned}
\varphi_x(u) = \mathbb{E}[e^{uT_x}] = \int_0^\infty e^{ut} f_x(t)dt &= \int_0^\infty e^{ut}\, {}_tp_x\mu_{x+t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{ut} \exp\Big(\sigma\mu_x(1 - e^{t/\sigma}\Big)\mu_x e^{t/\sigma}dt \\
&= \begin{bmatrix} z = \sigma\mu_x e^{t/\sigma} & 0- > \sigma\mu_x \\ dz = \mu_x e^{t/\sigma}dt & \infty- > \infty \end{bmatrix} \\
&= \int_{\sigma\mu_x}^\infty \left(\frac{z}{\sigma\mu_x}\right)^{u\sigma} e^{\sigma\mu_x - z}dz \\
&= \int_{\sigma\mu_x}^\infty e^{-u(x-m)} e^{\sigma\mu_x} z^{u\sigma} e^{-z}dz
\end{aligned}
$$

Dobivamo

$$
\varphi_x(u) = \exp\left(\sigma\mu_x - u(x-m)\right) \int_{\sigma\mu_x}^\infty z^{u\sigma} e^{-z}dz \tag{3.9}
$$

Integral u (3.9) je djelomična gama funkcija u oznaci $\Gamma(\sigma\mu_x, 1 + u\sigma)$. Djelomičnu gama funkciju definiramo ovako

$$
\Gamma(t, \alpha) = \int_t^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}dz \ \text{ za } t > 0, \text{ i } \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.10}
$$

Sada možemo definirati funkciju izvodnicu kumulanata, u oznaci Ψ_x, ovako

$$
\Psi_x(u) = \log(\varphi_x(u)) = um - ux + \sigma\mu_x + \log(\Gamma(\sigma\mu_x, 1 + u\sigma)) \tag{3.11}
$$

Očekivano ukupno trajanje života $\mathring{e}_x$ može se dobiti iz funkcije izvodnice kumulanata na sljedeći način

$$
\mathring{e}_x = \frac{\partial}{\partial u}\Psi_x(u)|_{u=0} = m - x + \sigma\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma(\sigma\mu_x, \alpha)|_{\alpha=1}}{\Gamma(\sigma\mu_x, 1)} = m - x + \sigma e^{\sigma\mu_x} \int_{\sigma\mu_x}^\infty \log(z)e^{-z}dz \tag{3.12}
$$

Pomoću parcijalne integracije (3.12) dolazimo do sljedećeg izraza

$$
\mathring{e}_x = \sigma e^{\sigma\mu_x}\Gamma(\sigma\mu_x, 0) \tag{3.13}
$$

2.zadatak. Koristeći iste vrijednosti parametara kao u 1.zadatku $m = 82.3$ i $\sigma = 11.4$ izračunajte medijan za dob $x = 65$ i usporedite ga s očekivanim ukupnim trajanjem života $\mathring{e}_{65}$.

Rješenje Da bismo izračunali očekivano ukupno trajanje života osobe dobi $x = 65$ potrebna nam je aproksimacija Γ funkcije. U članku [3] je dana sljedeća aproksimacija Γ funkcije

$$\hat{\Gamma}_N = \frac{e^{-t}}{6N}\Big[t^{\alpha-1} + 2\sum_{k=1}^{N-1}\Big|\log(\frac{k}{N}) - t\Big|^{\alpha-1} + 4\sum_{k=1}^{N}\Big|\log(\frac{k-0.5}{N}) - t\Big|^{\alpha-10}\Big] \tag{3.14}$$

Pomoću (3.14) i (3.13) uvrštavanjem vrijednosti $m = 82.3$, $\sigma = 11.4$ i $N = 500$ dobivamo $\mathring{e}_{65} = 16.3$. Sada računamo medijan

$$\begin{aligned}
\frac{S(M_{65}+65)}{S(65)} &= \frac{1}{2} \\
\frac{\exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(M_{65}+65-m)/\sigma}\right)}{\exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(65-m)/\sigma}\right)} &= \frac{1}{2} \\
\exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(M_{65}+65-m)/\sigma}\right) &= \frac{1}{2}\exp\left(e^{-m/\sigma} - e^{(65-m)/\sigma}\right) \\
\exp\left(-e^{(M_{65}+65-m)/\sigma}\right) &= \frac{1}{2}\exp\left(-e^{(65-m)/\sigma}\right) \\
-e^{(M_{65}+65-m)/\sigma} &= \log\left(\frac{1}{2}\right) - e^{(65-m)/\sigma} \\
e^{(65-m)/\sigma}\left(-e^{M_{65}/\sigma} + 1\right) &= \log\left(\frac{1}{2}\right) \\
e^{M_{65}/\sigma} &= 1 - e^{-(65-m)/\sigma}\log\left(\frac{1}{2}\right) \\
M_{65} &= \sigma\log\left[1 - e^{-(65-m)/\sigma}\log\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Kada uvrstimo vrijednosti dobivamo da je $M_{65} = 16.25$. Očekivano ukupno trajanje života osobe dobi $x = 65$ je veće od medijana.

3.2 Procjena parametara Gompertzovog modela

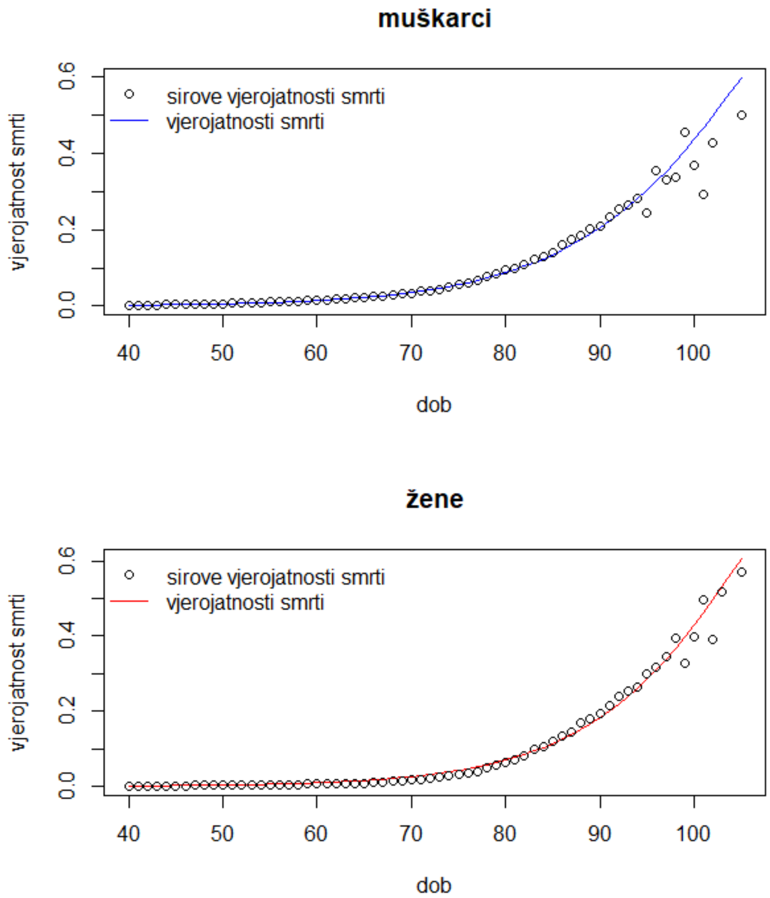
Na temelju hrvatskih tablica smrtnosti preuzete iz [6], procjenit ćemo parametre m i σ. Kako je Gompertzov zakon smrtnosti primjenjiv samo na starijoj dobi, koristit ćemo se podacima za dobi $x = 40, 41, ..., 105$.
Pomoću (3.7) za t=1 imamo

$$q_x(m,\sigma) = 1 - \exp\left(e^{(x-m)/\sigma}(1 - e^{1/\sigma})\right)$$

Parametre m i σ procijenit ćemo metodom najmanjih kvadrata, odnosno minimiziramo funkciju

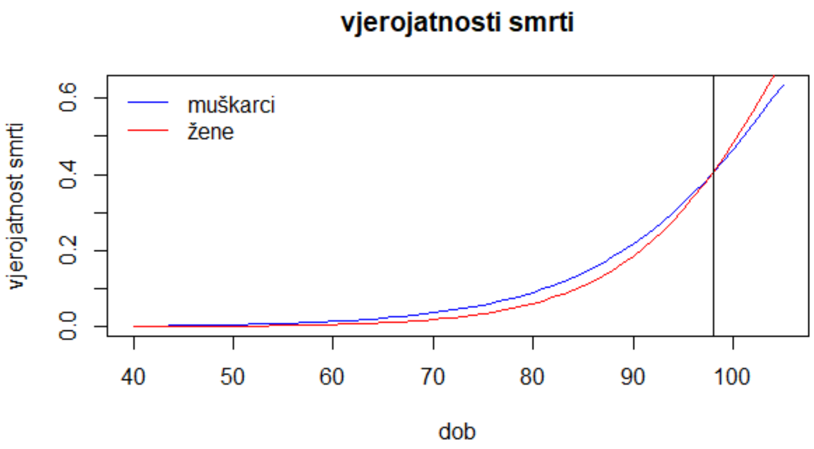
$$L(m,\sigma) = \sum_{x=40}^{105} \left|(q'_x - q_x(m,\sigma))\right|^2 \tag{3.15}$$

Pri čemu nam q'_x predstavlja sirove vjerojatnosti iz tablice smrtnosti.
U R-u sam pomoću funkcije *nlminb* pronašla vrijednosti m i σ za koje (3.15) poprima minimum. Za muškarce dobivene su sljedeće vrijednosti $m = 80.60861$ i $\sigma = 10.86603$. Za žene te vrijednosti su $m = 83.794558$ i $\sigma = 9.819842$.



Slika 3.2: Usporedba Gompertzovog modela i sirovih vjerojatnosti smrti

Grafovi 3.2 pokazuju da Gompertzov zakon smrtnosti dobro opisuje stvarne podatke za starosti $x = 40, ..., 105$. Promatrajući gornje grafove doima se kao da su slični, odnosno da nema velikih razlika između vjerojatnosti smrti kod muškaraca i žena. Kako bismo analizirali razliku prikazat ćemo vjerojatnosti smrti za muškarce i žene na istom grafu.



Slika 3.3: Usporedba vjerojatnosti smrti između muškaraca i žena

Na grafu 3.3 jasnije se vidi razlika između vjerojatnosti smrti za muškarce i žene. Vjerojatnost smrti kod muškaraca je veća nego kod žena sve do dobi x=98, od te dobi nadalje vjerojatnost smrti kod žena je veća nego kod muškaraca.

3.3 Vjerojatnost smrti u necjelobrojnoj dobi

Ukoliko nam je potrebno znati vjerojatnost smrti ${}_tq_x$ ili intenzitet smrtnosti μ_{x+t} za $t \in [0, 1)$ ne možemo taj podatak jednostavno iščitati iz tablice smrtnosti. U ovom potpoglavlju pokazat ćemo kako nam je Gompertzov zakon smrtnosti bolja odluka od pretpostavke o uniformnoj distribuciji smrtnosti i od pretpostavke o konstantnom intenzitetu smrtnosti.

Uniformna distribucija smrtnosti

Pretpostavljamo da je smrtnost uniformno distribuirana unutar intervala $t \in [x, x+1)$. Tada za funkciju gustoće ostatka života osobe dobi x imamo sljedeći izraz

$$f_x(t) = {}_tp_x\mu_{x+t} = c \;\; \text{za } t \in [x, x+1] \tag{3.16}$$

U izrazu (3.16) c nam predstavlja konstantu. Slijedi

$$ {}_tq_x = tq_x \tag{3.17}$$

$$_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x \tag{3.18}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-tq_x} \tag{3.19}$$

Konstantan intenzitet smrtnosti

Pretpostavljamo

$$\mu_{x+t} = \mu \quad \text{za } 0 \le t < 1 \tag{3.20}$$

Pri čemu nam μ predstavlja konstantu.
Pomoću (2.16) i (3.20) dobivamo izraz za funkciju doživljenja osobe starosti x.

$$_{t}p_x = \exp(-\mu t) \tag{3.21}$$

$$_{1-t}p_{x+t} = p_x^{1-t} \tag{3.22}$$

Ovom pretpostavkom smo došli do eksponencijalnog zakona smrtnosti. Problem kod ove pretpostavke je u tome što se pretpostavlja da je intenzitet smrtnosti konstantan, a to nije moguće u stvarnosti.

Pretpostavka Gompertzovog zakona smrtnosti

Sada ćemo izraz (3.7) zbog jednostavnosti zapisati ovako

$$\begin{aligned}
_{t}q_x &= 1-\exp\left(e^{(x-m)/\sigma}(1-e^{t/\sigma})\right) = 1-\exp\left(e^{(x-m)\sigma}\right)^{1-e^{t/\sigma}} \\
&= 1-\exp\left(e^{(x-m)/\sigma}\frac{1-e^{1/\sigma}}{1-e^{1/\sigma}}\right) = 1-p_x^{\frac{1-e^{t/\sigma}}{1-e^{1/\sigma}}}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$_{t}q_x = 1-(1-q_x)^{\frac{1-\exp(t/\sigma)}{1-\exp(1/\sigma)}} \tag{3.23}$$

$$_{1-t}q_{x+t} = 1-(1-q_x)^{\frac{\exp(t/\sigma)-\exp(1/\sigma)}{1-\exp(1/\sigma)}} \tag{3.24}$$

Intenzitet smrtnosti dobivamo ovako

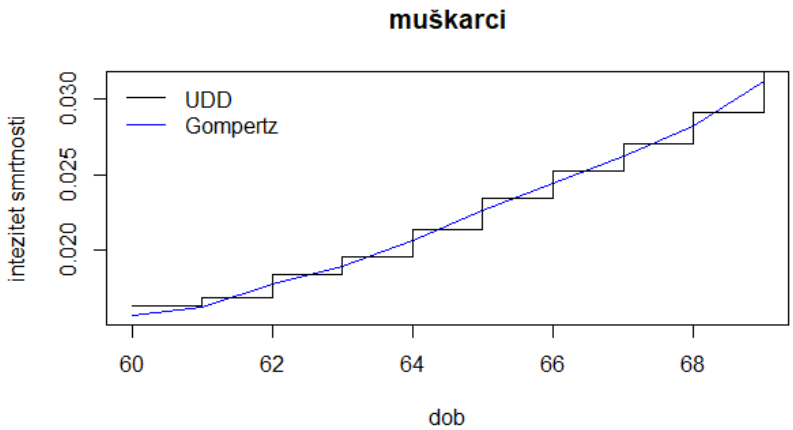
$$\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= \frac{f_x(t)}{S_x(t)} = \frac{F_x'(t)}{S_x(t)} = \frac{\frac{\partial_t q_x}{\partial t}}{_{t}p_x} \\
&= \frac{\log(1-q_x)\frac{e^{t/\sigma}}{\sigma(1-e^{1/\sigma})}(1-{}_{t}q_x)}{1-{}_{t}q_x}
\end{aligned}$$

Skraćivanjem razlomka dolazimo do sljedećeg izraza za intenzitet smrtnosti.

$$\mu_{x+t} = \frac{e^{t/\sigma}\log(1-q_x)}{\sigma(1-e^{1/\sigma})} \tag{3.25}$$

Usporedba

Spomenuli smo da je pretpostavka o konstantnosti intenziteta smrtnosti nerealna pretpostavka. Pozitivna strana te pretpostavke je da možemo vrlo jednostavno doći do vjerojatnosti smrti i intenziteta smrtnosti u necjelobrojnoj dobi. Grafički ćemo usporediti pretpostavke o uniformnoj distribuciji smrtnosti i pretpostavke Gompertzovog zakona smrtnosti. Uzimat ćemo podatke o vjerojatnosti smrti muškaraca za dob između 60 i 69 godina, kako bi jasnije mogli prikazati razliku.



Slika 3.4: Usporedba Gompertzovog modela i uniformne distribucije smrtnosti

Intenzitet smrtnosti dobiven pretpostavkom o uniformnoj distribuciji smrtnosti je step funkcija i teže ju je interpolirati. Kod eksponencijalnog zakona smrtnosti intenzitet smrtnosti je konstantan, a to nije realna pretpostavka. Pretpostavka uniformne distribucije smrtnosti je realnija, ali je teža za interpolaciju. Dakle, pretpostavka Gompertzovog zakona smrtnosti bi bila najbolji odabir od navedene tri pretpostavke.

3.4 Osiguranje plativo u trenutku smrti i životne rente

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju koristila sam se skriptom [1]. Promatrat ćemo osiguranje plativo u trenutku smrti i neprekidne životne rente.
Prvo pogledajmo osiguranje plativo u trenutku smrti. Pretpostavljamo da osiguravatelj isplaćuje fiksni iznos 1 odmah po smrti. Neka nam i predstavlja *fiksnu kamatnu stopu*. Oznakom δ označavat ćemo *intenzitet kamate* po jedinici vremena. Intenzitet kamate definiramo ovako

$$\delta = ln(1 + i) \text{ slijedi } 1 + i = e^{\delta} \tag{3.26}$$

Oznakom v označavat ćemo *diskontni faktor*. Diskontni faktor definiramo ovako

$$v = \frac{1}{1 + i} \tag{3.27}$$

Iz (3.26) i (3.27) slijedi da je

$$v = e^{-\delta} \tag{3.28}$$

Slučajna varijabla Z nam predstavlja *sadašnju vrijednost isplate* i definiramo ju na sljedeći način

$$Z = v^{T_x} \tag{3.29}$$

Primijetimo da je slučajna varijabla Z slučajna varijabla dobivena korištenjem funkcije $g(x) = v^x$ i slučajne varijable ostatka života T_x, odnosno $Z = g(T_x)$.
Jednokratna neto premija definira se kao očekivanje od sadašnje vrijednosti isplate i označavat ćemo ju s $\bar{A}_x$

$$\bar{A}_x = \mathbb{E}[Z] = \int_0^{\infty} v^t f_x(t)dt = \int_0^{\infty} v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^{\infty} e^{-t\delta}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{3.30}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo (3.28).
Primijetimo da je dobiveni izraz za jednokratnu neto premiju jednak izrazu za funkciju izvodnicu momenata (3.9) za $u = -\delta$.

Pogledajmo sada neprekidnu životnu rentu. Životna renta je niz periodičnih isplata za vrijeme trajanja života osobe. Pretpostavimo da se životna renta isplaćuje kontinuirano po stopi $r(t)$ u trenutku t. *Sadašnju vrijednost životne rente* definiramo ovim izrazom

$$Y = \int_0^{T_x} r(t)v^t dt \tag{3.31}$$

Uzmimo da je $r(t) = 1$ za sve t.
Jednokratna neto premija je očekivanje od sadašnje vrijednosti životne rente i označavamo ju s $\bar{a}_x$, a dana je sljedećim izrazom

$$\bar{a}_x = \mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \int_0^t v^s ds f_x(t) dt = \int_0^\infty v^s {}_s p_x ds = \int_0^\infty e^{-\delta s} {}_s p_x ds \tag{3.32}$$

Neto premiju označavat ćemo s $\bar{P}_x$ i definiramo ju kao

$$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{3.33}$$

Neto premijsku rezervu označavamo s ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ i računamo ovako

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} \tag{3.34}$$

Gompertzov zakon smrtnosti

Ukoliko pretpostavljamo Gompertzov zakon smrtnosti, formule prikazane u prethodnom dijelu, možemo eksplicitnije zapisati. Uočili smo već da je jednokratna neto premija životnog osiguranja plativog u trenutku smrti ustvari funkcija izvodnica momenata slučajne varijable T_x. Kada u (3.9) uvrstimo $u = -\delta$ dobivamo izraz za jednokratnu neto premiju promatranog životnog osiguranja

$$\bar{A}_x = exp(\sigma\mu_x + \delta(x-m))\Gamma(\sigma\mu_x, 1 - \delta\sigma) \tag{3.35}$$

Jednokratnu neto premiju neprekidne životne rente računamo ovako:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \exp(\sigma\mu_x(1 - e^{t/\sigma}) dt &= \begin{bmatrix} z = \sigma\mu_x e^{t/\sigma} & 0- > \sigma\mu_x \\ dz = \mu_x e^{t/\sigma} dt & \infty- > \infty \end{bmatrix} \\
&= \int_{\sigma\mu_x}^\infty \frac{\sigma}{z} \exp(-\delta(\sigma \log(\frac{z}{\sigma\mu_x})) \exp(\sigma\mu_x - z) dz \\
&= \int_{\sigma\mu_x}^\infty \frac{\sigma}{z} \Big(\frac{z}{\sigma\mu_x}\Big)^{-\delta\sigma} \exp(\sigma\mu_x - z) dz \\
&= \sigma(\sigma\mu_x)^{\delta\sigma} e^{\sigma\mu_x} \int_{\sigma\mu_x}^\infty z^{-\delta\sigma - 1} e^{-z} dz \\
&= \sigma(e^{(x-m)/\sigma})^{\delta\sigma} e^{\sigma} \mu_x \Gamma(\sigma\mu_x, -\delta\sigma)
\end{aligned}$$

Dobivamo

$$\bar{a}_x = \sigma \exp\{\sigma\mu_x + \delta(x-m)\}\Gamma(\sigma\mu_x, -\delta\sigma) \tag{3.36}$$

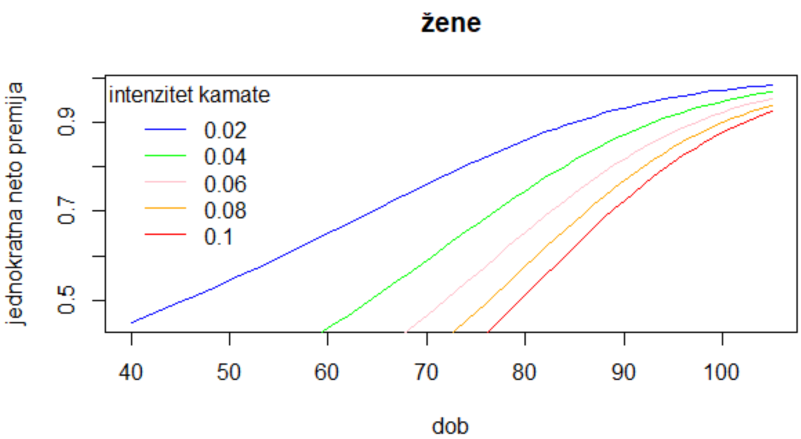
Pomoću (3.33) i (3.34) i dobivenog izraza za $\bar{a}_x$ dolazimo i do izraza za neto premiju i neto premijsku rezervu.

$$\bar{P}_x = \frac{\Gamma(\sigma\mu_x, 1-\delta\sigma)}{\sigma\Gamma(\sigma\mu_x, -\delta\sigma)} \tag{3.37}$$

$$_t\bar{V}(A_x) = 1 - \exp\{\sigma(\mu_{x+t} - \mu_x) + \delta t\}\frac{\Gamma(\sigma\mu_{x+t}, -\delta\sigma)}{\Gamma(\sigma\mu_x, -\delta\sigma)} \tag{3.38}$$

Grafički prikaz

Da bismo prikazali jednokratne neto premije životnog osiguranja plativog u trenutku smrti ponovno nam je potrebna aproksimacija Γ funkcije dane sa (3.14) i uzeli smo ponovno $N = 500$.



Slika 3.5: Jednokratna neto premija uz pretpostavku Gompertzovog modela za različite vrijednosti intenziteta kamate

Iz grafa 3.5 očito je da se za niže intenzitete kamate postižu veće jednokratne neto premije. Ukoliko se osoba odluči na životno osiguranje plativo u trenutku smrti u dobi $x = 40$ jednokratne neto premije bit će niže nego da se odluči na životno osiguranje plativo u trenutku smrti u dobi $x = 70$ zato što je očekivano trajanje života osobe dobi $x = 40$ veće od očekivanog trajanja života osobe dobi $x = 70$. Kao što smo primijetili u grafu 3.3 da je vjerojatnost smrti kod muškaraca veća od vjerojatnosti smrti kod žena do dobi $x = 98$ možemo pretpostaviti da su neto jednokratne premije za žene niže od jednokratnih neto premija za muškarce kod životnog osiguranja plativog u trenutku smrti prateći Gompertzov zakon smrtnosti.

Uz ovakvu razradu Gompertzovog zakona smrtnosti i danu realizaciju Gompertzovog zakona smrtnosti zaključujemo da je Gompertzov zakon smrtnosti primjenjiv na stvarne podatke za starosti $x = 40, ..., 105$, da dobro opisuje stvarne podatke te da je primjenjiv i u izračunu neto jednokratnih premija za životna osiguranja i neprekidne životne rente.

Bibliografija

[1] B. Basrak, *Uvod u aktuarsku matematiku*, 2012.

[2] N.L. Bowers, *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, 1997.

[3] J.F. Carriere, *An investigation of the Gompertz law of mortality*, Actuarial Research Clearing House (1994), br. 2.

[4] M. Huzak, *Modeli doživljenja*, 2006., `http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/slidesmd1234.pdf`.

[5] M.A. Milevsky, *The Calculus of Retirement Income*, Cambrige University Press, 2006.

[6] Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske, *Tablice mortaliteta Republike Hrvatske od 2010. do 2012.*, 2014, `https://www.dzs.hr/Hrv_Eng/Other/TABLICA%20MORTALITETA%202014.pdf`.

Sažetak

U ovome radu predstavljamo osnove aktuarske matematike. Počinjemo od modela životnih ciklusa i otkrivamo potrebu za korištenjem modela doživljenja i tablica smrtnosti kojima se bavimo u drugom poglavlju. U tećem poglavlju upoznajemo se s Gomperzovom zakonom smrtnosti i primjenjujemo ga na stvarne podatke. Na kraju koristimo Gompertzov zakon smrtnosti za računanje jednokratnih neto premija za životno osiguranje plativo u trenutku smrti i životne rente.

Summary

This thesis presents the fundamentals of actuarial mathematics. Firstly, studying models of the human life cycles has shown the importance of using survival models and life tables which are introduced in the second chapter. Third chapter intoduces the Gompertz law of mortality which is then applied to real data. Lastly, the explicit expressions are given under the assumption of the Gompertz law of mortality for calculating net single premiums of continuous whole-life insurance and continuous life annuities.

Životopis

Zovem se Dora Vukelić i rođena sam 13. rujna 1995. u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Dragutina Kušlana u Zagrebu, zatim sam upisala XV. gimnaziju u Zagrebu. Maturirala sam 2014. i upisala preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu kojeg sam završila 2018. Iste godine sam nastavila svoje obrazovanje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu upisavši diplomski studij Financijska i poslovna matematika.