Induktivno zaključivanje u nastavi matematike u osnovnoj školi

Zoretić, Lucija

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:484760

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Zoretić

INDUKTIVNO ZAKLJUČIVANJE U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, studeni, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala dobrom Bogu
na matematičkom talentu za uzgoj razbora, volji za rad u sivilu mlakosti i neizmjerno toploj blagosti na svim cestama moga odgojno-obrazovnog putovanja.
Hvala mojim roditeljima, obitelji, rodbini, prijateljima, učiteljima i pastirima
na poučavanju, razgovorima i osmjesima koji su mi ustajanje i rast činili vrijednim, smislenim i bezbrižnim.
Hvala mojoj mentorici, prof. dr. sc. Sanji Varošanec
na vjerodostojnom izlaganju radosti i uslužnosti metodike kojima mi je pokazala ljepotu pripadnosti svijetu učitelja.

Hvalite Gospoda, jer je dobar; jer vječno traje milosrđe njegovo!

Sadržaj

Uvod

Jedna od metoda zaključivanja u nastavi matematike je metoda induktivnog zaključivanja. Latinska riječ *inductio* znači uvođenje, navođenje, pobuđivanje te je tako sama riječ indukcija usko povezana s načinom svojeg provođenja tijekom kojeg se navođenjem niza pojedinačnih slučajeva pobuđuje da se promatra i istakne ono zajedničko te da se tako to zajedničko iznese kao ono općenito što vrijedi ili ne vrijedi za sve pojedinačne objekte koje promatramo ili možemo promatrati, a potom se, ako je to zajedničko svojstvo istinito, ono i formalno uvodi.

Potrebno je razlikovati metodu induktivnog zaključivanja, koju koristimo da bismo u samom procesu nastave matematike uočili pravila, formule i svojstva, od metode matematičke indukcije koja je deduktivna metoda (zasnovana na aksiomu skupa prirodnih brojeva), a koja nam nekad koristi za dokazivanje pravilnosti uočene matematičkom indukcijom (vidi [17]).

Metoda induktivnog zaključivanja ne dovodi nužno do istinitih zaključaka, a kako bi oni istiniti zaključci bili jasniji i uvjerljiviji, potreban je dovoljan broj raznolikih slučajeva. Razlikujemo dvije vrste induktivnog zaključivanja: potpuna i nepotpuno indukcija. U potpunoj indukciji ispitujemo sve pojedinačne slučajeve pa ako neko svojstvo vrijedi za svaki od tih pojedinačnih slučajeva, onda je to svojstvo istinito. Također, radi se o potpunoj indukciji kad beskonačan broj slučajeva možemo podijeliti u klase tako da je promatranje jednog slučaja klase isto kao i promatranje bilo kojeg drugog slučaja te iste klase. Kad ni to nije moguće, potpuna indukcija nije moguća. Nepotpunom indukcijom ispitujemo istinitost svojstva za neki konačan broj slučajeva te zaključujemo o istinitosti svojstva za sve ostale slučajeve pri čemu to svojstvo nije nužno istinito za sve slučajeve. Nepotpuna indukcija pomaže da se uoči i postavi neka pravilnost te se primjenjuje u eksperimentalnim znanostima. U matematici se ta pravilnost uvijek dokazuje ili opovrgava (vidi [17]).

Metoda induktivnog zaključivanja sadrži i metodu analize i sinteze, analogije, apstrakcije, specijalizacije i generalizacije te je kao takva znatno potrebna u nastavi matematike, a posebno u nastavi matematike u osnovnoj školi kada se počinje više pristupati istraživačkoj matematici i razvijanju učenikova mišljenja. Induktivno zaključivanje pomaže da proces nastave provodimo prema načelu postupnosti, približavanju apstraktnom uz pomoć konkretnih primjera, otkrivanju novih tvrdnji, itd (vidi [17]). Iz tih razloga, učitelj nalazi široku i korisnu primjenu ove metode u nastavi matematike te mogućnost da učenike motivira za samostalno otkrivanje.

Sadržaj ovog diplomskog rada sastoji se od poglavlja *Brojevi* podijeljenog na *Prirodne*, *Cijele*, *Racionalne* i *Decimalne brojeve* unutar kojih se detaljnije obrađuju sljedeći matematički sadržaji: komutativnost zbrajanja prirodnih brojeva, pravilo djeljivosti s brojem 3, pravilo o kvadratu umnoška te pravilo o vezi između nazivnika racionalnog broja i njegovog decimalnog zapisa; poglavlje *Algebra i funkcije* sadrži dio o *Proporcionalnosti i obrnutoj proporcionalnosti*, konkretnije o grafičkom prikazu proporcionalnosti te odsječku pravca na y-osi; poglavlje *Oblik i prostor* sadrži sljedeće manje cjeline: *Simetrale*, *Trokuti*, *Četverokuti*, *O ostalim mnogokutima* i *Preslikavanje ravnine*, a unutar njih se detaljnije obrađuju: simetrala dužine, nejednakost trokuta, teorem o zbroju veličina kutova u trokutu, teorem o simetralama stranica trokuta, pitagorin poučak, pravokutnik, dijagonale i kutovi mnogokuta te osna simetrija; u poglavlju *Mjerenje*, obrađuje se površina pravokutnika.

Poglavlje 1

Brojevi

1.1 Prirodni brojevi

Računanje u skupu $\mathbb{N}_0$

Većina djece razumije pojam prirodnog broja već prije polaska u školu. Kad na slici vide tri zečića, brojanjem do tri, oni zaključuju da se na slici nalaze tri zečića. Prebrojavanje im omogućuje shvatiti pojmove prethodnika i sljedbenika te što znači odrediti koji je od dvaju prirodnih brojeva veći - onaj kojim možemo označiti više objekata. Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode u skupu prirodnih brojeva za četvrti razred osnovne škole:

> [Učenik] broji, čita, piše i uspoređuje brojeve do milijun. [...] [1]. Koristi se višeznamenkastim brojevima. [...] Zbraja i oduzima brojeve do milijun. [...] Primjenjuje svojstvo komutativnosti [...] Primjenjuje postupak pisanog množenja i dijeljenja dvoznamenkastim brojem u različitim tipovima zadataka.

U petom razredu osnovne škole, učenik se prvi puta susreće s pojmom skupa prirodnih brojeva. Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode:

> [Učenik] čita i zapisuje prirodne brojeve uključujući brojeve veće od milijun. [...] Zbraja, oduzima, množi [...] i dijeli u skupu prirodnih brojeva s nulom primjenjujući svojstva računskih operacija.

U petom razredu osnovne škole, učenici otkrivaju svojstva računskih operacija u skupu prirodnih brojeva metodom induktivnog zaključivanja. Ovdje ćemo navesti neke nastavne aktivnosti koje se provode s tom svrhom. Dokazivanje tih svojstava u petom razredu bilo

[1] Zagrada [...] između rečenica, koja se pojavljuje na ovom mjestu i na ostalim mjestima u ovom radu, označava da nismo naveli tekst koji se nalazi između citiranog teksta.

bi narušavanje načela primjerenosti te treba imati na umu da se dokazi tih svojstava ne provode u nastavi.

Aktivnost: Komutativnost zbrajanja

Cilj: učenici će otkriti komutativnost zbrajanja u $\mathbb{N}$.
Potrebni materijal: nastavni listić 1.1, olovka, kreda i ploča.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavne metode:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom,
-prema matematičkom sadržaju: metoda apstrakcije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Popuni tablicu i odgovori na postavljena pitanja.

a	b	$a+b$	$b+a$
33	57		
78	85		
241	572		
47 213	30 000		
17 000 376	738 230 475		
23 451 736	563 070 852		

Usporedi brojeve koji se nalaze u 3. i 4. stupcu, a u istom retku.

Što si uočio? Odgovor zapiši na crtu.

____

U ovoj je tablici dano 6 parova brojeva. Ako napišeš neke novi par brojeva,

bi li se promijenio tvoj odgovor na prethodno pitanje?

____

Na temelju svih tih odgovora, zapiši zaključak o zbrajanju prirodnih brojeva.

____

____

Nastavni listić 1.1. ”*Otkrivanje komutativnosti zbrajanja u* $\mathbb{N}$”

Opis aktivnosti:

Kao motivacijski primjer može poslužiti sljedeće: ”Pavao je kupio čokoladni sladoled u trgovini po cijeni od 10 kn. Kad je došao doma, Pavlova mlađa sestra Rebeka je rekla da bi i ona htjela sladoled. Pavao je otišao u trgovinu i kupio je Rebeki sladoled od jagode po cijeni od 12 kn. Sljedeći dan, Pavao je ponovno otišao u trgovinu te je sebi kupio sladoled od jagode po cijeni od 12 kn. Kad je došao doma, Pavlov mlađi brat Rafael je rekao da bi on htio onaj čokoladni sladoled koji je Pavao imao jučer pa je Pavao otišao kupiti i čokoladni sladoled. Koliko je novaca Pavao potrošio prvi dan, a koliko je novaca potrošio drugi dan? Mijenja li se iznos potrošenog novca ako Pavao prvo kupi jedan, a zatim drugi sladoled?

Učenicima podijelimo nastavne listiće 1.1. Kažemo učenicima da kratko pogledaju tablice i pokušaju zaključiti što treba raditi, a zatim i sami damo upute - koji brojevi su označeni slovom a te koji brojevi su označeni slovom b, da treba zbrojiti brojeve iz ćelija (pokazujući ćelije) te zbroj zapisati u ćelije (pokazujući ćelije), da prvo zbrajaju $33 + 57$, a zatim $57 + 33$. Naglasimo učenicima da rješavaju listiće samostalno. Nakon što učenici popune tablicu, usmeno s učenicima provjerimo jesu li dobiveni zbrojevi točni, kažemo im da usporede dobivene zbrojeve u stupcima (pokazujući stupce) te da odgovore na pitanja koja se nalaze ispod tablice.

Na ploču zapisujemo pravilo pomoću matematičkih simbola (prije možemo potaknuti učenike da sami iznesu simbolički zapis), imenujemo ga te objašnjavamo smislenost imena komutativnosti (lat. *commutare* - zamijeniti). Iako je komutativnost zbrajanja poprilično intuitivno pravilo, učenicima možemo navesti i primjere kad nije svejedno *zamjene* li neka dva objekta svoja mjesta - npr. ako u nogometu vratar i napadač zamjene igraće pozicije ili primjerice, kuću gradimo od krova prema temeljima.

Pri izradi nastavnog listića, možemo napraviti jednake listiće za sve učenike ili možemo napraviti nastavne listiće koji su primjereni matematičkim sposobnostima pojedinog učenika te tada, primjereno sposobnostima, osmisliti brojeve a i b. Ako radimo jedan nastavni listić,

brojevi a i b trebaju biti od jednoznamenkastih do četveroznamenkastih, a ako radimo posebne listiće, onda će brojevi biti jednoznamenkasti ili dvoznamenkasti, odnosno četveroznamenkasti, peteroznamenkasti ili šesteroznamankasti ovisno o matematičkim sposobnostima učenika. Prethodni listić je primjer listića za učenike s višim matematičkim sposobnostima.
Induktivno zaključivanje se sastoji u tome da učenici, na temelju nekoliko navedenih dovoljno raznolikih primjera komutativnosti zbrajanja, zaključuju o komutativnosti zbrajanja bilo koja dva broja u skupu $\mathbb{N}$. Generalizacijom, učenici bi uspjeli pojmiti da to pravilo vrijedi za svaka dva prirodna broja dok apstrakcijom učenici odbacuju to da brojevi trebaju imati vrijednosti kako bi iznijeli zaključak koristeći zapis matematičkim simbolima.

Zapišimo pravilo koje su učenici otkrili induktivnim zaključivanjem u obliku teorema.

Teorem 1.1.1. *Za sve brojeve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $a + b = b + a$.*

Ovdje ćemo taj teorem dokazati te će biti vidljivo da ga je neprimjereno dokazivati u osnovnoj školi, štoviše, taj dokaz se ne provodi ni u srednjoj školi.

U matematici, skup prirodnih brojeva se opisuje pomoću Peanovih aksioma [2].

Definicija 1.1.2. *Neka je M skup, $a \in M$ i $s : M \to M$ funkcija sa svojstvima:*
(P1) s je injekcija,
(P2) $(\forall x \in M)(s(x) \neq a)$,
(P3) ako je $S \subseteq M$ sa svojstvima:
(B) $a \in S$,
(K) $(\forall x \in M)(x \in S \Rightarrow s(x) \in S)$,
tada je $S = M$.
Trojka (M, a, s) se zove Peanova trojka, a (P1), (P2) i (P3) se zovu Penovi aksiomi.
Peanov aksiom (P3) nazivamo još i aksiomom matematičke indukcije.

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je jedan primjer Peanove trojke.

Definicija 1.1.3. *Zbrajanje $+$ u $\mathbb{N}$ je binarna operacija takva da za svaka dva prirodna broja $m, n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeća svojstva:*
(D1) $m + 1 = s(m)$,
(D2) $m + s(n) = s(m + n)$.

Da bismo dokazali da u skupu $\mathbb{N}$ vrijedi komutativnost zbrajanja, potrebne su nam sljedeće dvije leme koje ćemo i dokazati. Dokazi tih lema i teorema provedeni su kao u [19].

[2]Giuseppe Peano, talijanski matematičar (Cuneo, 1858. - Torino, 1932.).

Lema 1.1.4. *Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je*

$$1 + m = s(m).$$

Dokaz. Definiramo skup $A := \{m \in \mathbb{N} : 1 + m = s(m)\}$.
Koristeći Peanov aksiom *(P3)*, dokazat ćemo da je $A = \mathbb{N}$.

(B) Za $m = 1$ vrijedi

$$1 + 1 = s(1)$$

zbog svojstva zbrajanja *(D1)*, što je ekvivalentno tome da je $1 \in A$.

(K) Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $m \in A$. Dokažimo da je tada $s(m) \in A$.
Zbog svojstva zbrajanja *(D2)* vrijedi

$$1 + s(m) = s(1 + m),$$

a jer je $m \in A$, slijedi da je

$$s(1 + m) = s(s(m)).$$

Dakle, $s(m) \in A$.

Dokazali smo da je $1 \in A$ te smo iz pretpostavke da za neki $m \in A$ dokazali da je $s(m) \in A$ pa prema aksiomu matematičke indukcije vrijedi da je $A = \mathbb{N}$. Drugim riječima, svi prirodni brojevi komutiraju s brojem 1. □

Lema 1.1.5. *Za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je*

$$s(m) + n = s(m + n).$$

Dokaz. Za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ definiramo skup $B := \{n \in \mathbb{N} : s(m) + n = s(m + n)\}$.
Koristeći Peanov aksiom *(P3)*, dokazat ćemo da je $B = \mathbb{N}$.

(B) Za $n = 1$ koristimo svojstvo *(D1)*

$$s(m) + 1 = s(s(m)) = s(m + 1)$$

što je ekvivalentno tome da je $1 \in B$.

(K) Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \in B$. Dokažimo da je tada $s(n) \in B$.
Zbog svojstva zbrajanja *(D2)* vrijedi

$$s(m) + s(n) = s(s(m) + n)$$

i jer je $n \in B$ vrijedi

$$s(s(m) + n) = s(s(m + n))$$

pa ponovno koristeći svojstvo *(D2)*, imamo

$$s(s(m + n)) = s(m + s(n)).$$

Dakle, $s(n) \in B$.

Dokazali smo da je $1 \in B$ te smo iz pretpostavke da za neki $n \in B$ dokazali da je $s(n) \in B$ pa prema aksiomu matematičke indukcije vrijedi da je $B = \mathbb{N}$, tj. vrijedi tvrdnja. □

Dokaz. (Dokaz teorema 1.1.1.)

Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ definiramo skup

$$C := \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}.$$

(B) Za $m = 1$ vrijedi

$$1 + n = \text{ [lema 1.1.4] } = n + 1.$$

Dakle, $1 \in C$.

(K) Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $m \in C$, onda je

$$s(m) + n = \text{ [lema 1.1.5] } = s(m + n) = [m \in C] = s(n + m) = \text{ [svojstvo } (D2)\text{] } = n + s(m).$$

Dokazali smo da je $1 \in C$ te smo iz pretpostavke da za neki $m \in C$ dokazali da je $s(m) \in C$ pa prema aksiomu matematičke indukcije vrijedi da je $C = \mathbb{N}$, tj. vrijedi tvrdnja.

□

U sljedećem teoremu ćemo navesti svojstva koja učenici mogu također otkriti uz pomoć induktivnog zaključivanja.

Teorem 1.1.6. *U skupu prirodnih brojeva s nulom $\mathbb{N}_0$ vrijede sljedeća svojstva:*

a) $(\forall n \in \mathbb{N})((n + 0 = 0 + n = n)$ *i* $(n - 0 = n)$ *i* $(n - n = 0))$,

b) asocijativnost zbrajanja u skupu $\mathbb{N}_0$,

c) $(\forall n \in \mathbb{N})((0 \cdot n = n \cdot 0 = 0)$ *i* $(n \cdot 1 = 1 \cdot n = n)$ *i* $(n : 1 = n)$ *i* $(0 : n = 0)$ *i* $(n : n = 1))$,

d) asocijativnost i komutativnost množenja u skupu $\mathbb{N}_0$,

e) distributivnost množenja prema zbrajanju i oduzimanju u $\mathbb{N}_0$.

Tvrdnje svojstava *a)* i *c)*, učenici mogu otkriti tako što ćemo na ploči prikazati nekoliko primjera za koje vrijede ta svojstva, a za tvrdnje svojstava *b)* i *d)* možemo pripremiti nastavne listiće kao 1.1. Tablice možemo pripremiti u dvije grupe s različitim brojevima kako bismo indukcijom obuhvatili više primjera. Dokazi svojstava *b)*, *d)* i *e)* se mogu provesti slično kao dokaz teorema 1.1.1 uz napomenu da ih provodimo u skupu $\mathbb{N}$ te da je potrebno poznavati definiciju množenja u skupu $\mathbb{N}$.

Definicija 1.1.7. *Množenje* $\cdot$ *u* $\mathbb{N}$ *je binarna operacija takva da za svaka dva prirodna broja* $m, n \in \mathbb{N}$ *vrijede sljedeća svojstva:*

(M1) $m \cdot 1 = m$,

(M2) $m \cdot s(n) = (m \cdot n) + n$.

Djeljivost

U nižim razredima osnovne škole, učenici dijele brojeve do 100 s ostatkom, ali ni tada ni kasnije ne spominju pojam *biti djeljiv*. S tim pojmom, učenici se prvi puta susreću u petom razredu osnovne škole gdje se definira da je neki broj a djeljiv nekim drugim brojem b ako pri dijeljenju broja a s brojem b nema ostatka ([16]). Predmetni kurikulum [20] navodi:

> [Učenik] barata pojmovima djeljivost, djelitelj, višekratnik, biti djeljiv, prosti broj, složeni broj. Primjenjuje djeljivost brojevima 2, 3, 5, 9 i 10.

Kao dodatan sadržaj, obrađuju se pravila djeljivosti s brojevima: 4, 25 i 100.

Na primjeru djeljivosti prirodnog broja s brojem 3, pokazat ćemo na koji način učitelj može koristiti induktivno zaključivanje pri obradi nastavnih sadržaja iz djeljivosti.

Aktivnost: Djeljivost s 3

Cilj: učenici će otkriti pravilo djeljivosti s 3.
Potrebni materijal: nastavni listić 1.2, olovka, kreda i ploča, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.
Trajanje: 20 minuta.

Zadatak. Popuni tablicu, a zatim odgovori na pitanja.

broj	ostatak pri dijeljenju **broja** s 3	Je li **broj** djeljiv s 3?	**zbroj znamenaka** broja	Je li **zbroj znamenaka** djeljiv s 3?
71	2	Ne	8	Ne
85				
742				
2 673				
3 795				
5 227				
77 454				
31 586				
25 422				
600 001				

Promotri odgovore koji se nalaze u 3. i 5. stupcu, a zatim odgovori na pitanja.

Napiši troznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenaka jednak 18.

____

Je li taj broj djeljiv s 3? Zašto?

____

Napiši četveroznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenaka jednak 20.

____

Je li taj broj djeljiv s 3? Zašto?

____

Može li se dogoditi istovremeno sljedeće: zbroj znamenaka nekog broja nije djeljiv s 3, a broj je djeljiv s 3?

____

Što zaključuješ - koje je pravilo djeljivosti s 3?

Zaključak: prirodan broj je djeljiv s 3 ako i samo ako

____

Nastavni listić 1.2. ”*Pravilo djeljivosti s* 3”

Opis aktivnosti:

Učenicima kažemo da ćemo otkriti koje pravilo treba vrijediti da bi neki broj bio djeljiv s 3. Budući da se u prethodnim nastavnim jedinicima uči o pravilima djeljivosti s brojevima 2 i 5 u kojima treba promatrati posljednju znamenku broja, možemo učenicima postaviti sljedeća pitanja te tako potaknuti učenike na analogno razmišljanje:
Koje je pravilo djeljivosti s 2?
Koje je pravilo djeljivosti s 5?
Što mislite - koje je pravilo djeljivosti s 3?

Ovisno o tome što učenici odgovore (pretpostavljajući da nitko od učenika ne poznaje pravilo djeljivosti s 3), napišemo na ploču kontraprimjer izrečenog pravila te pokažemo da broj nije djeljiv s 3. Primjerice, učenik bi mogao zaključiti da je broj djeljiv s 3 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 3; tada napišemo na ploču broj 16 te pitamo tog učenika:
Koja je zadnja znamenka broja?
Je li broj djeljiv s 3?
Vrijedi li da je broj djeljiv s 3 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 3?

Možemo i ispisivati brojeve (u paru) od kojih oba završavaju nekom znamenkom, ali jedan od ta dva broja je djeljiv s 3 dok drugi broj nije djeljiv s 3 te tako zaključiti da ćemo otkriti neko drugo pravilo djeljivosti.

Podijelimo učenicima nastavne listiće te im damo detaljnije upute (na primjeru popunjenog retka u tablici nastavnog listića 1.2) kako popuniti tablicu. Možemo prozvati nekog od učenika da pročita što je potrebno učiniti u pojedinom stupcu te potom to razjasnimo zajedno s učenicima. Učenici provode postupak dijeljenja u svojim bilježnicama. Obilazimo učenike dok popunjavaju tablice, a nakon nekog vremena prikazujemo rješenja na projekcijskom platnu paralelno prozivajući učenike da pročitaju svoja rješenja.

Nakon što su popunili tablice, učenici rješavaju ostatak listića. Obilazimo učenike, a nakon nekog vremena, provjeravamo točnost njihovih odgovora diskutirajući s učenicima.

Pojam *ako i samo ako* bi mogao biti zbunjujući učenicima koji još nemaju postavljene temelje logike. Taj pojam se može približiti na sljedeći način: najviši vrh u Hrvatskoj je Sinjal, na visini od 1831 m. Ako netko priča o najvišem hrvatskom vrhu, mi ćemo odmah zaključiti da se radi o onome koji je na visini od 1831 m, odnosno govori se o Sinjalu. Pored njega, u Hrvatskoj nema nijednog drugog vrha koji je najviši, tj. to svojstvo da je on najviši pripada samo njemu. Slično, ako netko govori o vrhu u Hrvatskoj koji je visok 1831 m, mi znamo da taj netko govori baš o najvišem vrhu Hrvatske, dakle, o Sinjalu, jer se nijedan drugi vrh Hrvatske ne nalazi na toj visini. Dakle, visina vrha Sinjal i to da je on najviši vrh u Hrvatskoj su nerazdvojivi pojmovi.

Kad bi netko drugi pričao o nekom vrhu u Hrvatskoj koji je na visini od 1500 m, mi bismo znali da ne priča o Sinjalu. Isto tako kad bi netko pričao o vrhu koji je treći po redu najviši, mi bismo znali da ne priča o Sinjalu.

Tomu služi pojam *ako i samo ako* - ako netko govori o broju kojemu zbroj znamenaka nije djeljiv s 3, mi znamo da onda ni taj broj nije djeljiv s 3 te ako netko govori o broju koji nije djeljiv s 3, mi znamo da ni njegov zbroj znamenaka nije djeljiv s 3.

Gornji listić je primjer listića za učenike s višim matematičkim sposobnostima. Dokaz se ne provodi u petom razredu osnovne škole za opći prirodan broj, ali učenicima možemo napomenuti da se ta tvrdnja treba dokazati te da nam ovakvo zaključivanje samo pomaže otkriti tu tvrdnju. Također, dokaz za troznamenkaste ili četveroznamenkaste brojeve možemo provesti s učenicima s višim matematičkim sposobnostima.

Navedimo sada sam teorem i dokaz.

Teorem 1.1.8. *Prirodan broj je djeljiv s brojem 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.*

Iznesimo najprije definiciju pojma *biti djeljiv* na skupu $\mathbb{Z}$.

Definicija 1.1.9. *Neka su m i n cijeli brojevi pri čemu je $n \neq 0$. Kažemo da je m djeljiv s n ako postoji cijeli broj x takav da je $m = n \cdot x$. [7]*

Kažemo još da broj n dijeli broj m.
Taj pojam možemo primijeniti i na skup prirodnih brojeva. Dokažimo sada teorem 1.1.8.

Dokaz. Neka je $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1}$ neki n-teroznamenkasti broj. Taj broj možemo zapisati kao

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_1} = 10^{n-1} \cdot a_n + 10^{n-2} \cdot a_{n-1} + ... + a_1 = \underbrace{99...9}_{n-1} a_n + a_n + \underbrace{99...9}_{n-2} a_{n-1} + a_{n-1} + ... + a_1. \quad (1.1)$$

Ako je broj djeljiv s 3, onda zapišimo gornji izraz na ovaj način

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_1} - \underbrace{99...9}_{n-1} a_n - \underbrace{99...9}_{n-2} a_{n-1} - ... - 9a_2 = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Lijeva strana jednakosti je djeljiva s 3 pa je i desna strana jednakosti djeljiva s 3, a na desnoj strani je zbroj znamenaka promatranog broja. Zaključujemo da je i zbroj znamenaka djeljiv s 3.

Ako je zbroj znamenaka djeljiv s 3, onda zapišimo jednakost (1.1) na ovaj način

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_1} = \underbrace{99...9}_{n-1} a_n + \underbrace{99...9}_{n-2} a_{n-1} + ... + 9a_2 + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1).$$

Desna strana jednakosti je djeljiva s 3 pa je i lijeva strana jednakosti djeljiva s 3, a na lijevoj strani je promatrani broj. Zaključujemo da je i on djeljiv s 3. □

1.2 Cijeli brojevi

U šestom razredu, učenici upoznaju cijele brojeve. Na početku se usvaja pojam cijelog broja na primjerima iz svakodnevnog života. Uvodi se pojam predznaka te pojmovi pozitivnog, odnosno negativnog cijelog broja (vidi [10], [6]). Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode:

> [Učenik] na brojevnome pravcu istražuje i otkriva cijele brojeve, pozitivne, negativne brojeve i nulu, suprotne brojeve, apsolutnu vrijednost cijeloga broja. Čita, zapisuje i tumači znakove $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$ pri uspoređivanju cijelih brojeva. Pridružuje cijele brojeve točkama pravca i obratno. [...] Zbraja, oduzima, množi i dijeli cijele brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija. Obrazlaže odabir matematičkih postupaka.

Zbrajanje cijelih brojeva se definira pomoću brojevnog pravca (vidi [11]) ili novčića (vidi [6]). Dodavanje negativnog broja pozitivnom broju, učenici usvajaju na primjerima iz svakodnevnog života pri čemu se govori *o promjeni* - primjerice, o promjeni temperature za -7°. Uvodi se i pojam apsolutne vrijednosti cijelog broja. U dvjema zasebnim nastavnim jedinicima uči se o zbrajanju dvaju cijelih brojeva različitih predznaka te o zbrajanju dvaju cijelih brojeva jednakih predznaka - navode se pravila zbrajanja dvaju cijelih koja su učenicima predočena na nekoliko primjera također pomoću brojevnog pravca. Ta pravila su dana na konkretnim primjerima:

1° za cijele brojeve različitih predznaka:

a) $-7 + 2 = -5$, jer je $7 - 2 = 5$, a "$-$" pišemo ispred jer je to predznak broja koji je po apsolutnoj vrijednosti veći, tj. $|-7| > |2|$,

b) $7 + (-2) = 5$, jer je $7 - 2 = 5$, a "$+$" pišemo ispred jer je to predznak broja koji je po apsolutnoj vrijednosti veći, tj. $|7| > |-2|$,

c) $-3 + 5 = 2$, jer je $5 - 3 = 2$, a "$+$" pišemo ispred jer je to predznak broja koji je po apsolutnoj vrijednosti veći, tj. $|5| > |-3|$,

d) $3 + (-5) = -2$, jer je $5 - 3 = 2$, a "$-$" pišemo ispred jer je to predznak broja koji je po apsolutnoj vrijednosti veći, tj. $|-5| > |3|$.

Dakle, možemo reći da "pobjeđuje" predznak onog broja koji je veći po apsolutnoj vrijednosti.

2° za cijele brojeve jednakih predznaka:

a) $5 + 7 = 12$ kao i u $\mathbb{N}$,

b) $-5 - 7 = -12$, jer je $5 + 7 = 12$, a "$-$" pišemo ispred jer je to predznak oba broja.

Pogledajmo donju sliku pomoću koje učenici mogu provesti aktivnost otkrivanja pravila množenja cijelih brojeva različitih predznaka.

Slika 1.1: Množenje cijelih brojeva, preuzeto iz [11]

Uspoređujući negativne umnoške i njima suprotne umnoške, učenici mogu lako uočiti pravilo množenja negativnog i pozitivnog cijelog broja.

Navedimo svojstva koja učenici također mogu otkriti uz pomoć induktivnog zaključivanja.

Teorem 1.2.1. *U skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ vrijede sljedeća svojstva:*

a) komutativnost i asocijativnost zbrajanja,

b) $(\forall x \in \mathbb{Z})((x + 0 = 0 + x = x)$ *i* $(x + (-x) = -x + x = 0))$,

c) asocijativnost i komutativnost množenja,

d) $(\forall x \in \mathbb{Z})((0 \cdot x = x \cdot 0 = 0)$ *i* $(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)$ *i* $(x : 1 = x))$,

e) $(\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})((0 : x = 0)$ *i* $(x : x = 1))$,

f) distributivnost množenja prema zbrajanju.

Otkrivanje tvrdnji navedenih pod *a)*, *c)* i *f)* možemo provesti analogno kao što je opisano otkrivanje svojstva komutativnosti zbrajanja prirodnih brojeva (vidi nastavni listić 1.1), a otkrivanje tvrdnji navedenih pod *b)*, *d)* i *e)* možemo provesti jednostavnije - prikažemo nekoliko primjera za određeno svojstvo na projekcijskom platnu ili ploči. Heurističkim razgovorom s učenicima iznosimo zaključak.

Opisat ćemo kako se definiraju cijeli brojevi u matematici te ćemo provesti dokaze nekih svojstava.

Neka je $\sim = \left\{((x, y), (u, v)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2 : x + v = y + u\right\}$ pri čemu je operacija + zbrajanje u skupu $\mathbb{N}$. Lako se pokaže da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Tada možemo definirati klasu elementa $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tj. $[(x, y)] := \{(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x, y) \sim (u, v)\}$

Sada $\mathbb{Z}$ definiramo kao

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{|\sim}.$$

Dakle, $\mathbb{Z} = \{[(x, y)] : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, tj. $\mathbb{Z}$ je kvocijentni skup skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ po relaciji $\sim$.

Elemente skupa $\mathbb{Z}$ označavamo na sljedeći način:

1) ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x > y$, onda označimo $[(x, y)] = z$ pri čemu je $z \in \mathbb{N}$ takav da je $x = y + z$,

2) ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$, onda označimo $[(x, y)] = -z$ pri čemu je $z \in \mathbb{N}$ takav da je $y = x + z$,

3) ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = y$, onda stavimo da je $[(x, y)] = 0$.

Definicija 1.2.2. *Neka su* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $z_1 = [(x_1, y_1)]$ *i* $z_2 = [(x_2, y_2)]$. *Tada operaciju zbrajanja* $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *definiramo na sljedeći način*

$$z_1 + z_2 = \left[\left(x_1 \underset{\mathbb{N}}{+} x_2, y_1 \underset{\mathbb{N}}{+} y_2\right)\right]$$

pri čemu je $\underset{\mathbb{N}}{+}$ *zbrajanje u* $\mathbb{N}$.

Nadalje nećemo u izrazima koristiti oznaku $\underset{\mathbb{N}}{+}$ jer će iz konteksta biti jasno u kojem skupu djeluje zbrajanje.

Teorem 1.2.3. *Za svaka dva broja* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *vrijedi da je*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Dokaz. Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ takvi da je $z_1 = [(x_1, y_1)]$ i $z_2 = [(x_2, y_2)]$.
Tada je prema definiciji zbrajanja 1.2.2

$$z_1 + z_2 = [(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]$$

Budući da vrijedi komutativnost zbrajanja u $\mathbb{N}$ (teorem 1.1.1), onda je

$$[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] = [(x_2 + x_1, y_2 + y_1)]$$

pa je ponovno po definiciji zbrajanja u $\mathbb{Z}$

$$[(x_2 + x_1, y_2 + y_1)] = z_2 + z_1.$$

□

Teorem 1.2.4. *Neka su* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$. *Tada je*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,.$$

Tvrdnja teorema će sljediti iz asocijativnosti zbrajanja u $\mathbb{N}$ (teorem 1.1.6) i definicije zbrajanja u $\mathbb{Z}$ te se dokazuje slično kao i teorem 1.2.3.

Slično dokazujemo komutativnost i asocijativnost množenja u $\mathbb{Z}$. Ovdje ćemo navesti definiciju množenja u $\mathbb{Z}$ te ćemo dokazati komutativnost množenja.

Definicija 1.2.5. *Neka su* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $z_1 = [(x_1, y_1)]$ *i* $z_2 = [(x_2, y_2)]$. *Tada operaciju množenja* $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *definiramo ovako*

$$z_1 \cdot z_2 = \left[\left(x_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} x_2 \underset{\mathbb{N}}{+} y_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} y_2,\ x_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} y_2 \underset{\mathbb{N}}{+} y_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} x_2\right)\right].$$

pri čemu su $\underset{\mathbb{N}}{\cdot}$ *i* $\underset{\mathbb{N}}{+}$ *operacije množenja i zbrajanja u* $\mathbb{N}$.

Teorem 1.2.6. *Za svaka dva broja* z_1 *i* $z_2 \in \mathbb{Z}$ *vrijedi*

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Dokaz. Neka je $z_1 = [(x_1, y_1)]$ i $z_2 = [(x_2, y_2)]$.

Tada je prema definiciji množenja u $\mathbb{Z}$

$$z_1 \cdot z_2 = [(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)] .$$

Budući da vrijedi komutativnost množenja u $\mathbb{N}$ (teorem 1.1.6), onda je

$$[(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)] = [(x_2x_1 + y_2y_1, y_2x_1 + x_2y_1)] .$$

Vrijedi i komutativnost zbrajanja u $\mathbb{N}$ (teorem 1.1.1) pa je

$$[(x_2x_1 + y_2y_1, y_2x_1 + x_2y_1)] = [(x_2x_1 + y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1)] ,$$

a zbog definicije 1.2.5 množenja u $\mathbb{Z}$, vrijedi

$$[(x_2x_1 + y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1)] = z_2 \cdot z_1.$$

□

1.3 Racionalni brojevi

Razlomci se uvode u petom razredu osnovne škole. Predmetni kurikulum [20] tada navodi:

> [Učenik] povezuje slikovni prikaz razlomka s brojevnim zapisom i obratno. Zapisuje i tumači razlomak povezujući ga s dijeljenjem. Prikazuje razlomke na brojevnome pravcu. Povezuje različite brojevne zapise nepravih razlomaka, mješovitih brojeva i prirodnih brojeva.

U petom razredu, pojam razlomaka se približava učenicima na sljedeći način: prvo se prikazuje model iz svakodnevnog života koji se podijeli na primjerice četiri jednaka dijela, a svaki taj dio imenuje se jednom četvrtinom, a zatim se grupiraju dva takva dijela te kažemo da smo istaknuli dvije četvrtine. Istovremeno se prikazuju i oznake tih dijelova: $\frac{1}{4}$ i $\frac{2}{4}$ te se objašnjava zapis oznake. Potom se to slično provodi na apstraktnom modelu (kvadrat podijeljen na sukladne dijelove). Razlomak se opisuje kao broj oblika $\frac{a}{b}$, imenuju se dijelovi razlomka te se opisuje značenje brojnika i nazivnika - brojnik opisuje koliko dijelova smo istaknuli, a nazivnik opisuje na koliko dijelova smo podijelili neku cjelinu, a nakon toga i značenje razlomačke crte. Uvodi se pojam pravih i nepravih razlomaka, mješovitog broja te grafički i računski način pretvaranja nepravog razlomka u mješoviti broj i obrnuto. Razlomci se smještaju na brojevni pravac pri čemu se na isti brojevni pravac smještaju razlomci koji imaju jednak nazivnik ili razlomci čiji su nazivnici višekratnici istog broja. Nakon toga, uspoređuju se razlomci s brojem 1 te se uspoređuju razlomci koji imaju različit brojnik, a jednak nazivnik ili obrnuto ([9]).

U šestom razredu, ponovno se uči o razlomcima. Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode:

> [Učenik] proširuje i skraćuje razlomke. Svodi razlomke na zajednički nazivnik i najmanji zajednički nazivnik [u prethodnim nastavnim jedinicama uči se o najmanjem zajedničkom višekratniku]. [...] Matematičkim jezikom opisuje, predočava i primjenjuje jednakost među različitim zapisima nenegativnih racionalnih brojeva [...]. Zbraja, oduzima, množi [...] i dijeli nenegativne racionalne brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija. Povezuje nenegativni racionalni broj s njegovom recipročnom vrijednošću.

Do sedmog razreda ne govori se o skupu racionalnih brojeva, nego samo o razlomcima. Definirajmo skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ kao u sedmom razredu.

Definicija 1.3.1. *Skup racionalnih brojeva [12] je skup svih brojeva koji se mogu zapisati u obliku razlomka čiji je brojnik cijeli broj, a nazivnik prirodni broj. Oznaka skupa racionalnih brojeva je $\mathbb{Q}$. Dakle,*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ponovno se, u sedmom razredu, definiraju računske operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja te se navode svojstva računskih operacija, ali ovoga puta na čitavom skupu racionalnih brojeva.

Definicija 1.3.2. *Razlomke zbrajamo (ili oduzimamo) tako da ih prvo svedemo na zajednički nazivnik, potom zbrojimo (ili oduzmemo) njihove brojnike, a nazivnik ostaje isti. (preuzeto iz [12])*

Definicija 1.3.3. *Razlomke množimo tako da brojnik pomnožimo brojnikom, a nazivnik nazivnikom.*
(preuzeto iz [12])

Počinjemo napuštati metodu induktivnog zaključivanja kao jedinu metodu kojom učenici mogu otkriti neko svojstvo. Izvođenje operacija se svodi na operacije u skupu $\mathbb{Z}$ pa na nastavi možemo provesti kratke dokaze nekih svojstava. Slijedi jedan primjer.

Teorem 1.3.4. *Za svaka dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

Dokaz. Svedimo prvo razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ na zajednički nazivnik. Računamo

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}, \tag{1.2}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}. \tag{1.3}$$

Razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su svedeni na zajednički nazivnik, jer je $b \cdot d = d \cdot b$ za svaka dva prirodna broja b i d.

Dalje, zbog jednakosti 1.2 i 1.3 i definicije 1.3.2

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Slično bismo dobili da je

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b}.$$

Budući da vrijedi svojstvo komutativnosti zbrajanja u $\mathbb{Z}$ i svojstvo komutativnosti množenja u $\mathbb{N}$, zaključujemo da je

$$\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b}.$$

Izraz na lijevoj strani jednakosti je jednak izrazu $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, a na desnoj je jednak izrazu $\frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ pa zaključujemo da je

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

odnosno, vrijedi tvrdnja. □

Kvadriranje

U predmetnom kurikulumu za 5. razred [20] pojavuljuje se pojam kvadrata prirodnog broja.

> [Učenik] povezuje umnožak dvaju jednakih prirodnih brojeva s kvadratom prirodnoga broja. [...] Prepoznaje kvadrate prirodnih brojeva do 10.

Računanje kvadrata brojeva, [20] navodi za decimalne brojeve u petom razredu, nenegativne racionalne brojeve u šestom razredu, cijele brojeve u šestom razredu te ponovno za racionalne brojeve u sedmom razredu. O kvadriranju i njegovim svojstvima ponovno se, detaljnije, uči u osmom razredu kao dijelu sadržaja iz potenciranja. Predmetni kurikulum [20] tada navodi:

> [Učenik] mentalno računa kvadrate prirodnih brojeva do 20. [...] Kvadrira umnožak i količnik.

Navedimo definiciju kvadriranja kao u [1].

Definicija 1.3.5. *Računsku radnju u kojoj zadani (racionalni) broj množimo samim sobom nazivamo kvadriranjem.*

Nakon što s učenicima provedemo nekoliko primjera kvadriranja, možemo induktivnim zaključivanjem otkriti sljedeća dva svojstva kvadriranja.

Teorem 1.3.6. *Za svaki racionalni broj a vrijedi da je*

a) $(-a)^2 = a^2$,

b) $a^2 \geq 0$.

Aktivnost otkrivanja tvrdnje navedene pod *a)* možemo provesti tako da pripremimo za svakog učenika po jedan nastavni listić na kojemu se nalazi racionalan broj, a učenik treba kvadrirati taj broj, napisati njemu suprotan broj te potom kvadrirati i suprotan broj. Učenici slabijih matematičkih sposobnosti, dobili bi racionalne brojeve kojima su brojnik i nazivnik jednoznamenkasti brojevi. Nakon što učenici kvadriraju dobivene racionalne brojeve, prozovemo desetak učenika te zapišemo njihove rezultate na ploču, a nakon toga pitamo učenike što zaključuju o kvadratu racionalnog broja i njemu suprotnog racionalnog broja te ih potaknemo da zapišu taj zaključak kao pravilo (svojstvo).

Sličnu aktivnost bismo mogli provesti za tvrdnju navedenu pod *b)*.

Sljedeće aktivnosti u kojima provodimo induktivno zaključivanje su one kod otkrivanja pravila za kvadrat umnoška i količnika.

Aktivnost: Kvadrat umnoška

Cilj: učenici će otkriti da je kvadrat umnoška racionalnih brojeva jednak umnošku kvadrata tih racionalnih brojeva.
Potrebni materijal: nastavni listić 1.3, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda apstrakcije, analogije, induktivnog, zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Popuni tablicu i odgovori na pitanja.

a	b	$a \cdot b$	$(a \cdot b)^2$	a^2	b^2	$a^2 \cdot b^2$
2	4					
3	0.2					
-5	2					
-1.3	4					
$\frac{-2}{3}$	9					
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$					
$\frac{-3}{5}$	$\frac{-30}{7}$					

Promotri četvrti i zadnji stupac u tablici.

Koje računske operacije izvodimo na brojevima a i b da bismo došli do rezultata u ta dva stupca?

____

Koju od tih operacija izvodimo prvu u četvrtom stupcu, a koju u zadnjem stupcu?

____

Izraz $(a \cdot b)^2$ se zove **kvadrat umnoška**, a izraz $a^2 \cdot b^2$ se zove **umnožak kvadrata**.

Primijeti razliku u njihovim nazivima i pokušaj objasniti te nazive.

____

____

Usporedi brojeve u stupcima *kvadrata umnoška* i *umnoška kvadrata*, a u istim recima.

Koje pravilo uočavaš - zapiši ga riječima.

____

____

Gornje pravilo zapiši matematičkim simbolima.

____

Nastavni listić 1.3. "*Kvadrat umnoška i umnožak kvadrata*"

Opis aktivnosti:

Podijelimo učenicima nastavne listiće kao ove gore te im ukratko objasnimo kako popuniti tablicu. Obilazimo učenike dok popunjavaju tablicu. Nakon nekog vremena, prikazujemo popunjenu tablicu na projekcijskom platnu. Potom, učenici odgovaraju na pitanja. Ako je potrebno, učenicima dodatno pojasnimo neka pitanja, a odgovore na zadnja dva pitanja prikažemo na projekcijskom platnu.

Teorem 1.3.7. *Za svaka dva racionalna broja a i b vrijedi da je*

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Dokaz. Zbog definicije kvadrata broja vrijedi da je

$$(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$$

Primijenimo sada asocijativnost množenja u $\mathbb{Q}$ u sljedeće dvije jednakosti

$$(ab) \cdot (ab) = ((ab)\, a)\, b = (a\, (ba))\, b,$$

a zatim zbog komutativnosti množenja u $\mathbb{Q}$ vrijedi

$$(a\, (ba))\, b = (a\, (ab))\, b$$

pa ponovno zbog asocijativnosti vrijedi

$$(a\,(ab))\,b = ((a \cdot a)\,b)\,b$$

jer je $(a \cdot a) = a \cdot a = a^2$ pišemo

$$((a \cdot a)\,b)\,b = \left(a^2 b\right) b$$

te konačno primijenimo asocijativnost množenja i dobijemo

$$\left(a^2 b\right) b = a^2\,(b \cdot b) = a^2 b^2.$$

□

Ovaj dokaz možemo provesti s učenicima, ali dio u kojem primjenjujemo asocijativnost množenja u $\mathbb{Q}$ je potrebno dodatno pojasniti.

Analogno bismo mogli provesti aktivnost za dokaz jednakosti kvadrata količnika i količnika kvadrata pa to ovdje nećemo provoditi, ali ćemo navesti teorem.

Teorem 1.3.8. *Za svaka dva racionalna broja a i b, $b \neq 0$ vrijedi*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Potenciranje

Sljedeće pravilo u kojem provodimo induktivno zaključivanje je ono o potencijama jednakih baza. Predmetni kurikulum [20] za osmi razred navodi sljedeće ishode:

> [Učenik] povezuje zapis višestrukoga množenja racionalnoga broja s potencijom racionalne baze i nenegativnoga cjelobrojnog eksponenta. Primjenjuje potencije racionalne baze i eksponenta nula. Množi i dijeli s potencijama jednakih racionalnih baza i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata u jednostavnim izrazima. Potencira potenciju.

Iznesimo definiciju potencije.

Definicija 1.3.9. *Računsku radnju u kojoj broj a množimo samim sobom n puta (pri čemu je n prirodni broj) nazivamo potenciranje.*
Broj a^n se zove n-ta potencija (ili potencija) od a.
Broj a nazivamo bazom, a broj n nazivamo eksponentom. ([1])

Definiramo da je $a^0 = 1$.
Dakle a^n znači sljedeće: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\ faktora}$.

Nakon definicije, učenicima prikazujemo primjere zapisivanja umnoška od nekoliko istih faktora u obliku potencije te oni vježbaju takve zadatke. Također, učenici rješavaju zadatke kad je potrebno izračunati potenciju od nekog racionalnog broja. Navode se pravila i primjeri o zbrajanju i oduzimanju potencija, a zanimljivo je promatrati potenciranje brojeva 1 i -1. Učenici mogu sami donijeti zaključak o vrijednosti 1^n za bilo koji prirodan broj n, a za pravilo potenciranja broja -1, možemo osmisliti sljedeću aktivnost.

Aktivnost: Potenciranje broja -1

Cilj: učenici će otkriti da je $(-1)^n$ negativan ako je n neparan, odnosno pozitivan ako je n paran.
Potrebni materijal: olovka, bilježnica.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, induktivnog zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 5 minuta.

Opis aktivnosti:

Učenicima zadamo sljedeći zadatak.
U svoje bilježnice, napišite prvih osam potencija broja -1 *te ih izračunajte.*
Zatim postavimo pitanja:
Što primjećujete?
O čemu ovisi hoćemo li kao rezulatat potenciranja dobiti -1 *ili* 1?
Koje su parnosti eksponenti kad je rezultat -1?
Nakon odgovora, zaključak zapišemo kao pravilo.

Nadalje, uvodi se pravilo množenja potencija jednakih baza.

Teorem 1.3.10. *Za svaki racionalni broj a i za svaka dva broja m, n* $\in \mathbb{N}_0$ *vrijedi da je*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Aktivnost bismo mogli provesti slično kao onu za teorem 1.3.7 o umnošku kvadrata, a dokaz slijedi iz asocijativnosti množenja u $\mathbb{Q}$ i definicije potencije.

Navedimo teorem za količnik potencija.

Teorem 1.3.11. *Za svaka racionali broj a i za svaka dva broja m, n* $\in \mathbb{N}_0$ *takva da je* $m \geq n$ *vrijedi da je*

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Također, slično možemo otkriti pravilo o potenciranju potencija.

Teorem 1.3.12. *Za svaki racionalni broj a i za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi da je*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Teorem se lako dokaže koristeći definiciju potenciranja i asocijativnost množenja u $\mathbb{Q}$.

Pogledajmo donju sliku pomoću koje učenici mogu provesti aktivnost otkrivanja pravila potenciranja brojeva negativnim cjelobrojnim eksponentom.

Slika 1.2: Potencije s negativnom eksponentom, preuzeto iz [12]

Uspoređujući eksponent i broj decimalnih mjesta, učenici mogu lako zaključiti o pravilu potenciranja s negativnim cjelobrojnim eksponentom.

Korjenovanje

U osmom razredu, Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće:

> [Učenik] objašnjava pojam drugoga korijena nenegativnoga racionalnog broja. Mentalno računa drugi korijen odgovarajućega nenegativnoga racionalnog broja. [...] Povezuje drugi korijen nenegativnoga racionalnog broja s kvadratom prirodnoga broja do 100 koristeći se tablicom. Korjenuje umnožak i količnik primjenjujući pravilo. [...] Primjenjuje računanje s korijenima.

Definicija 1.3.13. *Neka su a i x pozitivni racionalni brojevi. Broj x nazivamo drugim korijenom od a ako vrijedi*

$$x^2 = a.$$

Broj x tada označavamo s $\sqrt{a}$.

Ako je $a = 0$, onda je $\sqrt{0} = 0$, a ako je a negativan broj, onda mu ne definiramo drugi korijen.

Sljedeća dva pravila uključuju metodu induktivnog zaključivanja.

Teorem 1.3.14. *Ako su a i b nenegativni racionalni brojevi, onda je*

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Posebno, ako je $b = a$, onda je $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$.

Teorem 1.3.15. *Ako su a i b nenegativni racionalni brojevi i $b \neq 0$, onda je*

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}.$$

Aktivnost možemo osmisliti slično kao i onu za teorem 1.3.7, samo je potrebno brojeve a i b odabrati tako da budu kvadrati nekih brojeva.
Dokaz se ne provodi u osnovnoj školi.
Dokažimo sada teorem 1.3.15.

Dokaz. (Dokaz teorema 1.3.15.)
Pokažimo da je $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ drugi korijen od ab. Želimo dokazati da je

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Prema teoremu 1.3.7 o umnošku kvadrata vrijedi

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2,$$

a jer je $\sqrt{a}$ drugi korijen broja a te tako i $\sqrt{b}$ iz broja b, vrijedi

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Budući da je $\sqrt{ab}$ također drugi korijen broja ab, zbog jedinstvenosti drugog korijena slijedi da je $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

□

1.4 Decimalni brojevi

U petom razredu, decimalni brojevi se uvode zajedno s dekadskim razlomcima pa se tada i prvi puta pojavljuje pojam decimalnog broja. Tada se dekadski razlomci pretvaraju u decimalne brojeve i obrnuto. Iz Predmetnog kurikuluma [20]:

> [Učenik] zbraja, oduzima, množi [...] i dijeli decimalne brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija. Čita, zapisuje i tumači znakove $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$ pri uspoređivanju decimalnih brojeva. [...] Primjenjuje pravila zaokruživanja, smisleno zaokružuje prirodne i decimalne brojeve prema uvjetima zadatka.

U sedmom razredu, spominje se podjela decimalnih brojeva na konačne i beskonačne te učenici prevode razlomke u decimalne brojeve. Uvode se pojmovi pretperioda i perioda, ali se ne spominje pojam periodičnosti - periodični brojevi se nazivaju beskonačnim brojevima.

U osmom razredu, kao dio nastavne cjeline *Realni brojevi*, ponovno se uči o decimalnim brojevima. Čisto periodični i mješovito periodični brojevi se definiraju kao beskonačni brojevi ovisno o periodu, a iracionalni brojevi se definiraju kao beskonačni neperiodični decimalni brojevi (vidi [2]). Predmetni kurikulum [20] kao ishod navodi:

> [Učenik] istražuje vezu između nazivnika racionalnoga broja i njegova decimalnog zapisa.

Aktivnost: Decimalni zapis racionalnog broja

Cilj: učenici će otkriti vezu između decimalnog zapisa racionalnog broja i faktora u rastavu nazivnika tog racionalnog broja na proste faktore.
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka, kalkulator, računalo i projekcijsko platno, kartice A, B i C o nazivniku broja, kartice s razlomcima.
Nastavni oblik: rad u paru (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: usmeno izlaganje, razgovor, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, analize, induktivnog

zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 20 minuta.

Opis aktivnosti:

Podijelimo svakom paru učenika 3 velike kartice A, B i C na kojima piše:
1) nazivnik sadrži samo brojeve 2 ili 5 (i niti jedan drugi broj koji nije 2 ili 5);
2) nazivnik ne sadrži niti broj 2 ni broj 5 (sadrži bilo koji drugi broj koji nije 2 ili 5);
3) nazivnik sadrži brojeve 2 ili 5 te uz njih još neki drugi broj koji nije 2 ili 5.

Podijelimo svakom paru učeniku manje kartice, a na svakoj od njih se nalazi neki od sljedećih razlomaka (kartice su pomiješane):

- $\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{12}{5}, \frac{21}{25}, \frac{7}{50}, \frac{33}{40},$
- $\frac{7}{3}, \frac{5}{21}, \frac{14}{33}, \frac{71}{99}, \frac{16}{91}, \frac{100}{143},$
- $\frac{25}{6}, \frac{52}{45}, \frac{7}{24}, \frac{77}{30}, \frac{6}{275}, \frac{7}{180}.$

Učenici u bilježnice zapisuju zadane razlomke i rastavljaju nazivnik svakog od razlomaka na proste faktore (učenici rade u paru kako bi rastavili nazivnike na proste faktore u kraćem vremenu), a zatim svrstavaju kartice racionalnih brojeva na 3 velike kartice. Nakon što učenici razvrstaju kartice racionalnih brojeva, prikažemo rješenje na projekcijskom platnu.

Zatim, učenici određuju decimalni zapis svakog od razlomaka pomoću kalkulatora (trebamo pripaziti tijekom odabira razlomaka da je, zbog ograničenosti prikaza znamenaka na kalkulatoru, moguće očitati period - za veći period, možemo prikazati decimalni zapis razlomka na projekcijskom platnu, uz pretpostavku da smo odabrali neki razlomak čiji decimalni zapis nema prevelik period).

Učenici u svoje bilježnice zapisuju decimalne zapise u skupinu A, B ili C (ovisno o tome kojoj od tri velike kartice pripada pridruženi razlomak). Nakon nekog vremena, vodimo heuristički razgovor:

Koji decimalni brojevi se nalaze u skupini A, koji u skupini B, a koji u skupini C?
Koje faktore sadrže u svojim nazivnicima svaka od tih skupina?

Što zaključujemo - kakav je rastav nazivnika razlomka koji ima konačan, čisto periodični ili mješovito periodični decimalan zapis?

Zaključak prikazujemo na projekcijskom platnu, a učenici ga prepisuju u svoje bilježnice:
Do kraja skraćen razlomak se može zapisati kao:
- konačan decimalan broj ako rastav njegovog nazivnika na proste faktore sadrži samo faktore 2 ili 5 (i niti jedan drugi faktor),
- periodični decimalan broj ako rastav njegovog nazivnika na proste faktore ne sadrži ni faktor 2 ni faktor 5,
- mješovito periodičan broj ako rastav njegovog nazivnika na proste faktore sadrži 2 ili 5 i uz njih i neki drugi faktor.

Učenicima objasnimo da kad kažemo nazivnik sadrži 2 ili 5, mislimo na sljedeće tri mogućnosti: sadrži samo 2, sadrži samo 5, sadrži i 2 i 5.

Navedimo pravila po kojima se periodični broj prevodi iz decimalnog zapisa u razlomak.

Teorem 1.4.1. *Ako je $0.\dot{a}_1...\dot{a}_{n-1}\dot{a}_n$ neki čisto periodičan decimalan broj, onda je njegov razlomački prikaz*

$$\frac{\overline{a_1...a_{n-1}a_n}}{10^n-1}.$$

Dokaz. Stavimo da je $x = 0.\dot{a}_1...\dot{a}_{n-1}\dot{a}_n$. Tada računamo

$$x = 0.\dot{a}_1...\dot{a}_{n-1}\dot{a}_n / \cdot 10^n \Rightarrow$$

$$10^n x = a_1...a_{n-1}a_n.\dot{a}_1...\dot{a}_{n-1}\dot{a}_n = \overline{a_1...a_{n-1}a_n} + 0.\dot{a}_1...\dot{a}_{n-1}\dot{a}_n.$$

Ponovno uvodimo supstituciju $x = 0.\dot{a}_1...\dot{a}_{n-1}\dot{a}_n$ pa slijedi

$$10^n x = \overline{a_1...a_{n-1}a_n} + x \Rightarrow$$

$$(10^n - 1)\, x = \overline{a_1...a_{n-1}a_n} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\overline{a_1...a_{n-1}a_n}}{10^n-1}.$$

□

Dokaz ovog teorema se ne provodi, ali o samom pravilu, učenici mogu zaključiti metodom induktivnog zaključivanja. Proveli bismo ju tako da na nekoliko konkretnih primjera primijenimo gornji dokaz za opći broj. Učenici bi uspoređivali decimale i razlomački zapis kako bi uočili vezu te postavili pravilo.

Teorem 1.4.2. *Racionalan broj ima ili konačan zapis ili periodični.*

Dokaz. Neka su $m, n > 0$ i neka je $\frac{m}{n}$ promatrani racionalni broj. Pri dijeljenju broja m sa n mogu se pojaviti sljedeći ostaci: $0, 1, 2, ..., n-2, n-1$. Ako je ostatak pri dijeljenju broja m sa n jednaki nuli, onda dijeljenje staje i decimalan broj je konačan. Ako je ostatak različit od nule, tada je on jedan od preostalih $n-1$ ostataka: $1, 2, ..., n-1$ pa će se za sljedećih $n-1$ decimalnih mjesta ili ponoviti jedan od ostataka ili će svi ostaci biti različiti, no tada će se za n. decimalno mjesto ponovno pojaviti jedan od ostataka koji su se već pojavili. Čim se prvi put pojavi isti ostatak, i dalje će se, periodično ponavljati već prethodni ostaci. □

Ono što s učenicima ne obrađujemo je prevođenje mješovito periodičnog decimalnog broja u razlomak, ali navest ćemo teorem o njegovom razlomačkom prikazu.

Teorem 1.4.3. *Neka je* $0.a_1...a_p\dot{b}_1...\dot{b}_r$ *mješovito periodični broj, onda je njegov razlomački prikaz*

$$\frac{\overline{a_1...a_pb_1...b_r} - \overline{a_1...a_p}}{10^p(10^r - 1)}$$

Poglavlje 2

Algebra i funkcije

2.1 Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost

U sedmom razredu, pojavulje se pojam proporcionalnosti. Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode u skupu prirodnih brojeva za sedmi razred osnovne škole:

> [Učenik] prepoznaje i opisuje proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine. [...] Određuje i tumači koeficijent proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti. Povezuje koeficijent proporcionalnosti s omjerom dviju proporcionalnih veličina. [...] Tumači odnos veličina u problemu.

Navedimo definiciju proporcionalnih veličina.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je veličina y proporcionalna veličini x [13] ako postoji broj $k > 0$ takav da je $y = k \cdot x$.*
Broj k se naziva koeficijent proporcionalnosti.
Još kažemo da je veličina y proporcionalna veličini x s koeficijentom proprocionalnosti k.

Prije te definicije objasnjava se pojam veličine ili varijable te se objašnjava moguća ovisnost nekih veličina na primjerima. Također, može se provesti aktivnost u kojoj bi učenici nepotpunom indukcijom zaključili da je pravac grafički prikaz proporcionalnih veličina. *Koordinatni sustav u ravnini* obrađuje se u sedmom razredu unutar nastavne cjeline o racionalnim brojevima, dakle, prije proporcionalnosti.

Aktivnost: Grafički prikaz proporcionalnosti

Cilj: učenici će otkriti da proporcionalne veličine grafički prikazujemo pravcem.
Potrebni materijal: nastavni listić 2.1, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad).

Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom,
-prema matematičkom sadržaju: empirijske metode, metoda analogije, apstrakcije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Zadana je sljedeća tablica: u prvom stupcu su prikazane količine čokoladica, a u drugom stupcu cijene tih količina.

količina	cijena
1	2 kn
2	4 kn
3	8 kn
4	16 kn

Provjeri jesu li količina čokoladica i cijena te količine proprocionalne veličine.

____

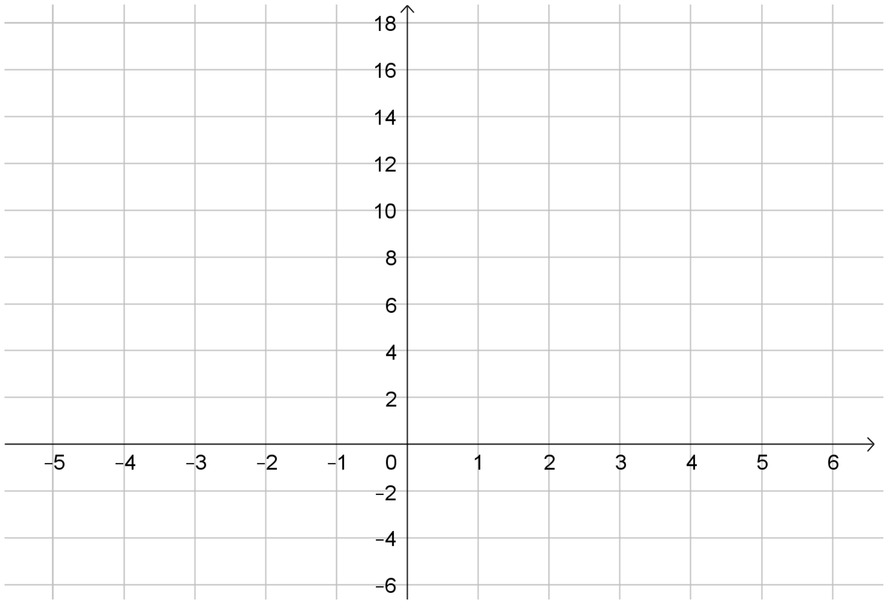
____

Zapiši podatke iz tablice u obliku uređenih parova pridruženih točkama A, B, C i D.

A = ________, B = ________,

C = ________, D = ________.

Označi točke A, B, C i D u koordinatnom sustavu te ih spoji.



Odredi dvije vrijednosti za y i x tako da vrijedi $y = 4 \cdot x$. Za te vrijednosti označi točku (x, y) u koordinatnom sustavu. $(x, y) =$ ________

Gdje će se u koordinatnom sustavu nalazite sve proporcionalne veličine? s koeficijentom proporcionalnosti 4?

____

Dopuni rečenicu:
Grafički prikaz proporcionalnosti je ___________.

Nastavni listić 2.1. "*Proporcionalne veličine*"

Opis aktivnosti:

Učenicima podijelimo nastavne listiće kao gore. Nakon što učenici promotre tablice i provjere jesu li zadane veličine proporcionalne, pitamo ih:

Jesu li veličine proporcionalne? Kako ste to provjerili?
Koliki je koeficijent proporcionalnosti?
Obilazeći učenike, provjerimo jesu li točno zapisali uređene parove te označili točke u koordinatnom sustavu te im napomene da dobivene grafičke prikaze produže preko točaka. Prikazujemo rješenja na projekcijskom platnu.

Sljedeći pojam nadovezan na *proporcionalnost* je *linearna ovisnost*. Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode u skupu prirodnih brojeva za sedmi razred osnovne škole:

> [Učenik] oblikuje tablicu pridruženih vrijednosti linearno zavisnih podataka. [...] Zapisuje linearnu ovisnost formulom $y = ax + b$, gdje su a i b racionalni brojevi. Prikazuje linearnu ovisnost grafički u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini. Analizira promjenu u linearnoj ovisnosti. Uspoređuje i diskutira prikaze dviju različitih linearnih ovisnosti na istome grafu.

Definirajmo pojam linearne ovisnosti.

Definicija 2.1.2. *Dvije veličine x i y su linearno ovisne veličine [13] ako postoje brojevi a i b ($a \neq 0$) takvi da vrijedi $y = ax + b$.*
Brojevi a i b se zovu koeficijenti ili parametri.

Na temelju primjera, učenici uočavaju da je pravac grafički prikaz linearno ovisnih veličina.

Aktivnost: Odsječak pravca na osi y

Cilj: učenici će otkriti vezu između koeficijenta b linearno ovisnih veličina i točke sjecišta pripadnog pravca i y-osi.
Potrebni materijal: bilježnica, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad).
Nastavna metoda:
- -prema izvoru znanja: razgovor, rad s računalom,
- -prema matematičkom sadržaju: empirijske metode, metoda analogije, induktivnog zaključivanja.

Trajanje: 10 minuta.

Opis aktivnosti:

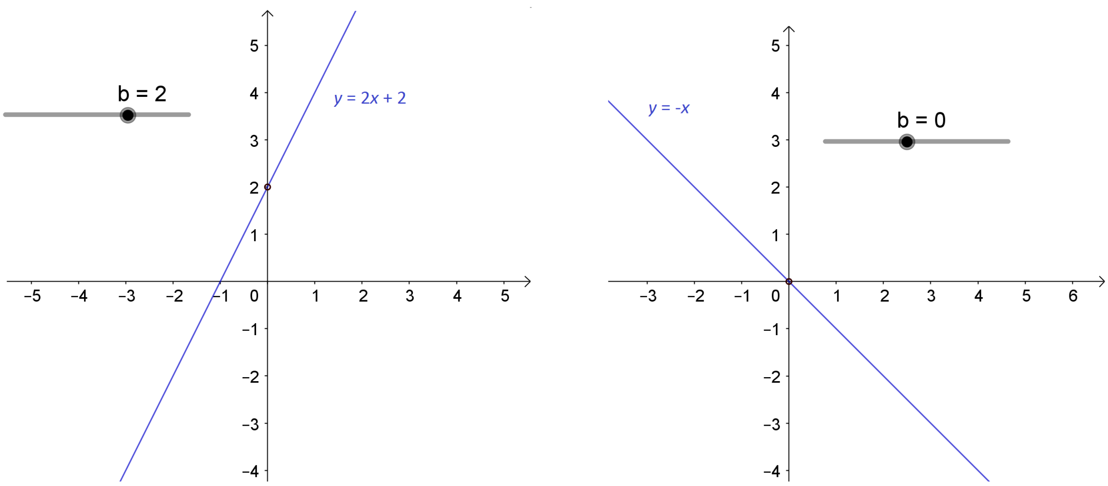
Na projekcijskom platnu prikažemo redom tri ili više pravaca s jednadžbama linearne ovisnosti oblika $y = ax + b$ pri čemu je koeficijent a fiksan broj, a koeficijent b poprima vrijednosti cijelih brojeva od -4 do 5 (vidi slike 2.1 i 2.2). Učenici trebaju promatrati u kojim točkama pravac siječe y-os s obzirom na vrijednosti koeficijenta b. Možemo učenicima postaviti neka od sljedećih pitanja za odabrani b:

Koja je jednakost pridružena pravcu?
Koliko iznosi koeficijent b te linearne ovisnosti?
U kojoj točki graf funkcije siječe y-os?

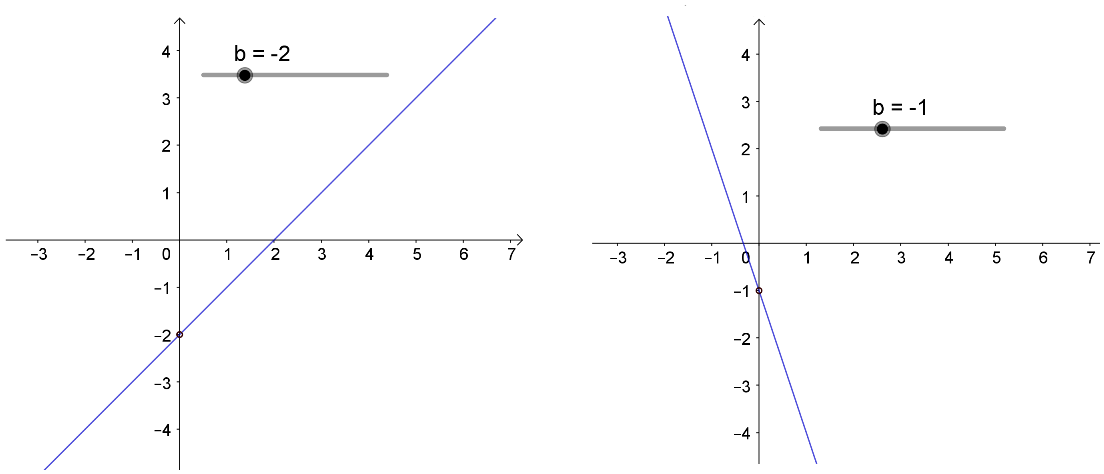
Nakon što učenici uoče vezu između koeficijenta b i ordinate točke u kojoj pravac siječe y-os, na platnu prikazujemo sljedeće dvije rečenice koje oni prepišu i dopune:

Graf jednakosti linearne ovisnosti $y = ax + b$ siječe y-os u točki ________.
Koeficijent b zove se ___________ na osi y.

Prije tih dviju rečenica, možemo učenicima zadati da nacrtaju koordinatni sustav te u njemu pravac čija je jednadžba $y = x - 5$ te da bojicom označe broj -5 kao i točku u kojoj pravac siječe y-os ili možemo učenicima podijeliti listiće na kojima bi se nalazile slike poput ovih ispod.



Slika 2.1: Odsječak na osi y za $b \geq 0$



Slika 2.2: Odsječak na osi y za $b < 0$

Poglavlje 3

Oblik i prostor

3.1 Simetrale

Simetrala dužine

Učenici prvi puta opisuju dužinu u drugom razredu osnovne škole kao najkraću spojnicu dviju točaka. U Predmetnom kurikulumu [20] za drugi razred se tada navodi:

> [Učenik] određuje krajnje točke dužine. Crta dužinu i primjenjuje oznaku za dužinu. Određuje pripadnost točaka dužini.

U petom razredu se učenici susreću s uobičajenim oznakama za točke i pravce: točke se označavaju velikim slovima, a pravci malim. Također se navode međusobni odnosi točke i pravca (dužine) te dvaju pravaca u ravnini. Naglašavaju se i mogući načini iskaza pripada li točka pravcu ili ne (npr. točka leži, pripada, nalazi se na pravcu ili pravac prolazi točkom). Navode se i načini zapisivanja simbolima. Korisno je, navedeno, s učenicima ponoviti prije početka obrade cjeline iz geometrije u šestom razredu.

Prije same definicije simetrale dužine, definiraju se sljedeći pojmovi: okomitost, duljina dužine i polovište dužine te se navode njihove uobičajene oznake.

Definicija 3.1.1. *Kažemo da su pravci okomiti ako dijele ravninu na četiri jednaka dijela. [8]*

Također se definira okomitost pravca i dužine te okomitost dviju dužina (o tome nešto kasnije).

Definicija 3.1.2. *Svakoj dužini možemo izmjeriti udaljenost između njezinih krajnjih točaka. Tu udaljenost nazivamo duljinom dužine. [8]*

Definicija 3.1.3. *Točku koja dijeli dužinu na dvije dužine jednakih duljina nazivamo polovištem dužine. [8]*

Definicija 3.1.4. *Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu i prolazi njezinim polovištem. [8]*

Nakon što je definiran pojam simetrale dužine, učenici otkrivaju pravilo o simetrali dužine.

Teorem 3.1.5. *Svaka točka koja leži na simetrali dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka te dužine.*

Aktivnost: Točke na simetrali dužine

Cilj: učenici će otkriti da su točke koje pripadaju simetrali dužine jednako udaljene od krajnjih točaka te dužine.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.1, ploča i kreda, ravnalo za ploču, šestar za ploču.
Nastavni oblik: diferencirana nastava.
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor,
-prema matematičkom sadržaju: mjerenje, metoda apstrakcije, generalizacije, induktivnog zaključivanja, analogije, analize.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak.
a) Nacrtaj proizvoljnu dužinu $\overline{AB}$ i njezinu simetralu.
b) Označi pet točaka C, D, E, F i G na simetrali dužine $\overline{AB}$ (neka te točke ne budu preblizu).
c) Za svaku od točaka, izmjeri njezine udaljenosti od krajnjih točaka dužine te usporedi te udaljenosti.

Mjesto za crtanje

$|CA| \ \boxed{} \ |CB|, |DA| \ \boxed{} \ |DB|, |EA| \ \boxed{} \ |EB|,$

$|FA| \ \boxed{} \ |FB|, |GA| \ \boxed{} \ |GB|.$

Zapiši zaključak o točkama koje se nalaze na simetrali dužine.

____

Nastavni listić 3.1. ”*Simetrala dužine*”

Opis aktivnosti:

Podijelimo učenicima nastavne listiće kao gore navedene. Damo učenicima smjernice kako popuniti nastavne listiće, obilazimo ih dok popunjavaju te nakon nekog vremena, zajedno s učenicima provjerimo točnost njihovih rješenja.

Navedimo još jedan način kako učitelj može provesti ovu aktivnost.

Učitelj nacrta na ploči neku dužinu $\overline{AB}$ i njezinu simetralu s. Učitelj prozove nekoga od učenika da dođe označiti bilo koju točku T na simetrali s te da potom, pomoću ravnala ili šestara, usporedi duljine $|AT|$ i $|TB|$ - učenik zaključuje da su te duljine jednake. Slično tako to ustvrdi još pet, šest učenika za pet, šest različitih dužina ili različitih točaka na simetrali dužine, a zatim učitelj potiče učenike da donesu zaključak.

Nadalje, pokušajmo učenicima detaljnije razjasniti sam teorem koristeći heurističku metodu. Pretpostavka teorema je:
T je bilo koja točka koja leži na simetrali dužine, a tvrdnja teorema je: *točka T je jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.*

Poželjno je vizualizirati postavke toerema i sam postupak zaključivanja u geometrijskim dokazima. Postavljamo učenicima neka od sljedećih pitanja:

Što ćemo nacrtati?
Što od toga trebamo prvo nacrtati?
Koju dužinu ćemo odabrati?
Možemo li odabrati bilo koju dužinu? Kako to zaključujemo iz pravila?
Je li simetrala dužine jedinstvena? Kako to objašnjavamo?
Možemo li odabrati bilo koju točku u ravnini?
Možemo li odabrati bilo koju točku simetrale? Kako to zaključujemo iz pravila?

Tim pitanjima i istovremenim crtanjem na ploči analiziramo pretpostavku teorema. Prije nego što postavimo ta pitanja, možemo nacrtati nekoliko dužina u bilo kojem položaju

- u onom položaju koji je paralelan s donjim rubom ploče te u onim položajima koji nisu. S učenicima diskutiramo koji nam je položaj najprikladniji za daljnje promatranje. Jednom kad odaberemo dužinu, slično odabiremo neke točke koje ne pripadaju simetrali dužine te neke točke koje pripadaju, a onda s učenicima argumentiramo kako iz samog pravila možemo očitati koje točke promatramo. Nakon što odaberemo točku na simetrali dužine, možemo analizirati tvrdnju teorema:

Što tvrdi ovo pravilo?

Učitelj može izabrati nekog od učenika da pokaže na ploči što tvrdi pravilo, a zatim učitelj pokaže i ostale crte od točke simetrale dužine do krajnjih točaka te dužine pa pita: *Zašto ne gledamo udaljenost koristeći ovu crtu?*

Tako zaključujemo da bi nam bilo korisno promatrati dužine koje spajaju točku simetrale i krajnje točke dužine pa ih i nacrtamo. Sada se još postavlja pitanje: kako dokazati da su te dužine jednakih duljina?

Budući da se dokaz ovog pravila provodi tijekom nastavne jedinice iz *Sukladnost trokuta* u šestom razredu (o trokutima i njegovim elementima, učenici uče u nižim razredima osnovne škole i ponovno u petom razredu) možemo zaključiti da ćemo tražiti neke trokute. Tada, uputimo učenike, da je u matematici, tijekom dokazivanja jednakosti duljina dužina ili veličina kutova, korisno pokušati pronaći neke trokute. Ključna ideja je pronaći dva naizgled sukladna trokuta takva da su im odgovarajuće stranice upravo promatrane dužine - sukladnost tih trokuta je glavna poveznica između pretpostavke teorema i njegove tvrdnje, pomoću istinitosti o sukladnosti trokuta, pravilnim logičkim zaključivanjem krećući od pretpostavke, impliciramo tvrdnju teorema.

Kad pronađemo takve trokute, postavljamo učenicima sljedeća pitanja:

Koje su stranice, a koji kutovi su odgovarajući?

Za koje od tih stranica znamo da su jednakih duljina? Za koje od tih kutova znamo da su jednakih veličina?

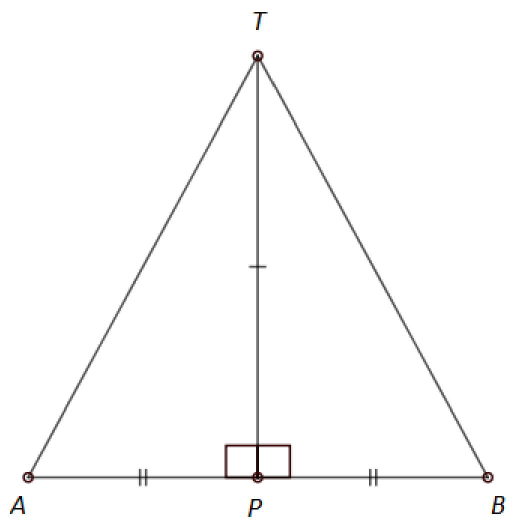
Kako definiramo simetralu dužine?

Što onda zaključujemo o kutovima $\measuredangle APT$ *i* $\measuredangle BPT$*?*

Što onda zaključujemo o stranicama $\overline{AP}$ *i* $\overline{BP}$*?*

Elemente jednakih veličina za oba trokuta označimo na isti način te potom zaključujemo koje pravilo o sukladnosti trokuta možemo koristiti kako bismo dokazali tvrdnju teorema.

Dokaz. (Dokaz teorema 3.1.5.)
Neka je dana proizvoljna dužina $\overline{AB}$ i njezina simetrala s. Označimo sa P sjecište simetrale s i dužine $\overline{AB}$. Odaberimo proizvoljnu točku T takvu da leži na simetrali s (vidi sliku 3.1). Promotrimo trokute APT i BPT. Dužina $\overline{PT}$ je zajednička trokutima. Budući da je pravac s simetrala dužine $\overline{AB}$, on je okomit na tu dužinu pa vrijedi da je $|\measuredangle APT| = |\measuredangle BPT| = 90^\circ$ te također vrijedi da je $|AP| = |PB|$. Po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta, zaključujemo da su trokuti APT i BPT sukladni te da je zato $|AT| = |TB|$. $\square$



Slika 3.1: Simetrala dužine

Na sličan način bismo proveli teorem o simetrali kuta.

3.2 Trokuti

Nejednakost trokuta

O trokutima učenici počinju učiti već u prvom razredu osnovne škole gdje ih opisuju kao ravne plohe geometrijskih tijela. Također, Predmetni kurikulum [20] navodi kako tada učenici crtaju točke i označavaju ih velikim tiskanim slovima te određuju vrhove geometrijskih likova kao točke. U drugom razredu, nakon što se usvoji pojam dužine, učenici povezuju pojam stranice trokuta i dužine. U četvrtom razredu, [20] navodi da učenik razlikuje trokute prema duljinama stranica te da prepoznaje, uspoređuje i crta šiljasti, pravi i tupi kut te razlikuje pravokutni trokut od ostalih trokuta.

U petom razredu osnovne škole, učenik se prisjeća sljedećih pojmova: vrhovi trokuta, stranice trokuta, šiljasti kut, pravi kut i tupi kut. Prije definicije trokuta, pojavljuje se definicija kolinearnih, odnosno nekolinearnih točaka (vidi [9]).

Nakon što se upoznaju s opsegom trokuta, učenici otkrivaju pravilo o nejednakosti stranica trokuta.

Aktivnost: Nejednakost trokuta

Cilj: učenici će otkriti svojstvo nejednakosti trokuta.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.2, olovka, trakice s oznakama duljine.
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad, rad u paru).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, usmeno izlaganje,
-prema matematičkom sadržaju: mjerenje, metoda induktivnog zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 15 minuta.

Duljine trakica	$a = 3$ cm $b = 4$ cm $c = 7$ cm	$a = 3$ cm $b = 4$ cm $c = 8$ cm	$a = 3$ cm $b = 7$ cm $c = 8$ cm	$a = 4$ cm $b = 7$ cm $c = 8$ cm
Postoji li takav trokut?				
$a + b > c$				
$a + c > b$				
$b + c > a$				

Koje nejednakosti trebaju vrijediti za duljina a, b i c stranica trokuta?

____

Može li biti zadan trokut kojemu je duljina jedne stranice veće ili jednaka zbroju duljina preostalih dviju stranica?

____

Što vrijedi za duljine stranica svakog trokuta? Zaključak napiši riječima.

____

____

Nastavni listić 3.2. "*Nejednakost trokuta*"

Opis aktivnosti:

Učenicima u klupi, podijelimo dvije skupine trakica i dva nastavna listića (svaki učenik dobije jednu skupinu trakica i jedan nastavni listić kao ovaj gore). U prvoj skupini trakica, nalaze se trakice duljina: 3 cm, 4 cm, 7 cm i 8 cm, a u drugoj skupini: 5 cm, 6 cm, 10 cm i 12 cm. U prvom retku nastavnih listića ispisane su kombinacije tih duljina - učenici od trakica pokušavaju složiti trokute. Za svaku kombinaciju, učenik donosi zaključak o tome postoji li takav trokut te popunjava stupac u tablici.

Učenicima objašnjavamo zadatak na sljedeći način: *U drugom stupcu tablice napisani su brojevi 3 cm, 4 cm i 7 cm, a vi imate trakice tih duljina. Od trakica tih duljina - 3 cm, 4 cm i 7 cm - pokušajte složiti trokut. Ako takav trokut postoji, onda u sljedeću ćeliju u tom stupcu, napišite "da", a ako nije moguće složiti takav trokut, onda napišite "ne". U sljedeće tri prazne ćelije tog stupca, zapišite vrijede li nejednakosti za a, b i c zadane u tom stupcu - ako nejednakost vrijedi, onda napišite "da", a ako ne vrijedi, onda napišite "ne".* Dok to objašnjavamo, pokazujemo ćelije o kojima govorimo. Kažemo učenicima da to isto provedu i za ostale kombinacije duljine stranica koje su napisane u ostalim ćelijama.

Nakon što učenici popune tablicu, zajedno u paru, uspoređujući rezultate tablica, donose zaključak odgovarajući na pitanja ispod tablice. Ako je potrebno, postavimo učenicima dodatna pitanja.

Zbroj veličina kutova u trokutu

Sljedeća nastavna aktivnost u kojoj možemo provesti induktivno zaključivanje je zbroj veličina kutova u trokutu. Provodi se u petom razredu osnovne škole.

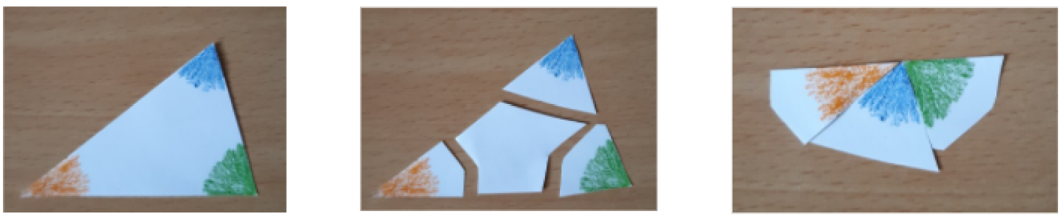
Aktivnost: Zbroj veličina kutova u trokutu

Cilj: učenici će otkriti da je zbroj veličina kutova u trokuta jednak $180°$.
Potrebni materijal: trokuti s označenim kutovima, škare, olovka i bilježnica.
Nastavni oblik: rad u paru (diferencirana nastava).

Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, generalizacije, induktivnog zaključivanja, analize.
Trajanje: 15 minuta.

Opis aktivnosti:

Ovu aktivnost možemo provesti kao rad u paru - svakom paru učenika podijelimo tri različita trokuta na kojima su kutovi označeni malim grčkim slovima. Učenicima potom damo uputu da odrežu kutove pojedinog trokuta te da potom te kutove slože tako da im se krakovi dodiruju i da imaju zajednički vrh kao na donjoj slici.



Slika 3.2: Slaganje kutova, preuzeto iz [10]

Kad učenici poslože kutove svakog trokuta na taj način, pitamo ih:
Koju vrstu kuta tvore tako složeni kutovi?
Koji je zbroj veličina kutova u trokutu?

Učenici opisuju u svoje bilježnice postupak kojim su došli do zaključka o zbroju veličina kutova trokuta te zapisuju i sam zaključak.

Slijedi dokaz teorema o zbroju veličina kutova u trokutu koji se provodi u šestom razredu.

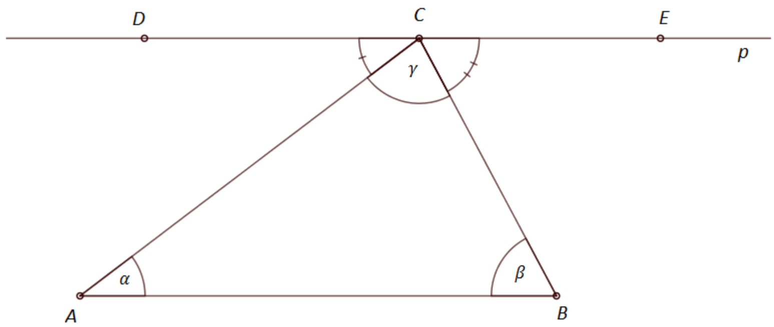
Teorem 3.2.1. *Zbroj veličina kutova u trokutu je* 180°.

Dokaz. Neka je odabran trokut ABC s kutovima α, β i γ kao na sljedećoj slici.
Vrhom C povucimo pravac p takav da je $p \parallel AB$. Odaberimo na pravcu p lijevo i desno od točke C redom točke D i E. Pravac AC je transverzala paralelnih pravaca p i AB pa je zato $|\measuredangle ACD| = \alpha$ te je pravac BC transverzala navedenih paralelnih pravaca pa je zato

$|\measuredangle BCE| = \beta$.
Primijetimo da kutovi $\measuredangle ACD, \gamma$ i $\measuredangle BCE$ zajedno čine ispruženi kut pa je zato

$$\alpha + \beta + \gamma = |\measuredangle ACD| + \gamma + |\measuredangle BCE| = 180^\circ.$$

□



Slika 3.3: Zbroj veličina kutova u trokutu

Karakteristične točke trokuta

U šestom razredu osnovne škole, također se uči i o karakterističnim točkama trokuta, ali u proširenom sadržaju. To su ortocentar, težište, središte trokutu opisane kružnice i središte trokutu upisane kružnice.

U petom razredu osnovne škole definira se simetrala dužine, a u nižim razredima, učenici stranice trokuta prepoznaju kao dužine pa je stoga crtanje simetrale stranice isto kao i crtanje simetrale dužine. Teorem koji učenici otkrivaju govori o postojanju karakteristične točke trokuta - središte trokutu opisane kružnice - koju dobivamo tako da trokutu nacrtamo bar dvije simetrale stranica. Iz tog razloga, pojavljuje se sljedeća aktivnost.

Aktivnost: Središte trokutu opisane kružnice

Cilj: učenici će otkriti da se simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.3, olovka, geometrijski pribor,
računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava),

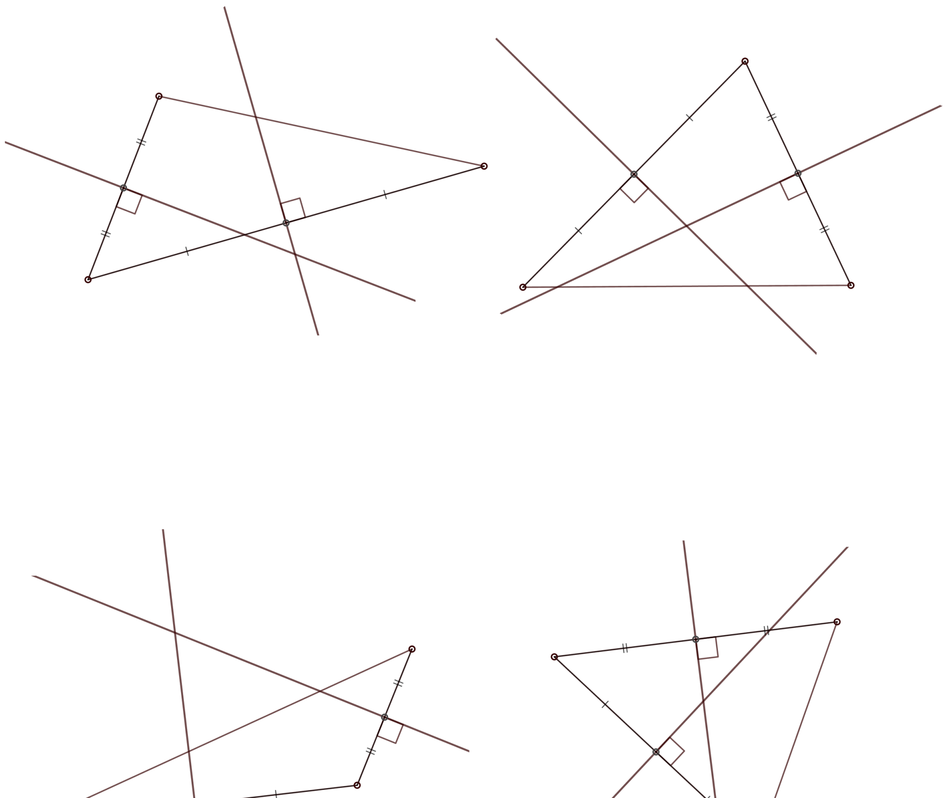
Nastavna metoda:

-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,

-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, apstrakcije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.

Trajanje: 10 minuta.

Zadatak. Promotri zadane trokute.



Kako nazivamo pravce koji na gornjoj slici sijeku stranice trokuta?

____

Nacrtaj na trokutima simetrale stranica koje nedostaju, a zatim riješi listić do kraja.

Što je zajedničko simetralama stranica nekog trokuta?

____

Dopuni rečenicu.

Simetrale stranica bilo kojeg trokuta prolaze ____________ ____________.

Nastavni listić 3.3. "*Simetrale stranica trokuta*"

Opis aktivnosti:

Učenicima podijelimo nastavne listiće na kojima su nacrtana 4 trokuta (ne moraju svi učenici dobiti iste trokute), a svakom trokutu nacrtane su dvije simetrale stranica. Svakom trokutu nacrtane su dvije simetrale stranica, a učenici crtaju treću stranicu te zamijećuju da sve tri simetrale prolaze jednom točkom. Potičemo učenike na preciznost. Dok učenici rješavaju nastavne listiće, obilazimo ih te im dodatno objašnjavamo ili ispravljamo ako je potrebno. Nakon što učenici nacrtaju simetrale i odgovore na pitanja na listiću, prikazujemo točna rješenja nastavnog listića na projekcijskom platnu.

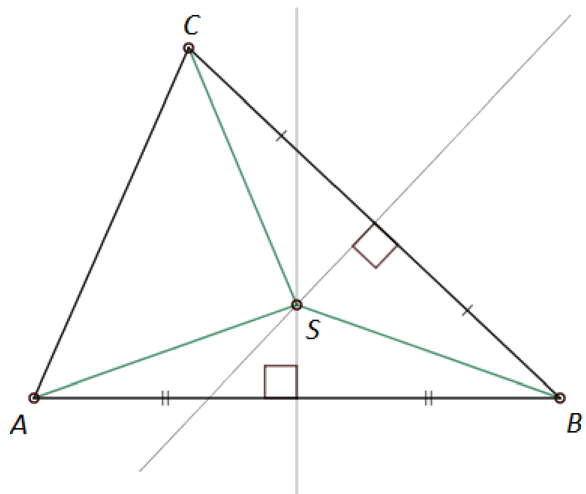
Teorem 3.2.2. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Ta točka je središte tom trokutu opisane kružnice.

Dokaz. Neka je dan trokut ABC kao na slici 3.4. Nacrtajmo simetrale stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te označimo sa S njihovo sjecište. Budući da točka S leži na simetrali stranice $\overline{AB}$, slijedi zbog teorema 3.1.5 da je $|SA| = |SB|$, a kako leži i na simetrali stranici $\overline{BC}$, slijedi i da je $|SB| = |SC|$. Zaključujemo (zbog tranzitivnosti relacije biti jednak) da je $|SA| = |SC|$, odnosno zbog teorema točka S leži na simetrali stranice $\overline{AC}$ te stoga i simetrala stranice $\overline{AC}$ prolazi točkom S. □

Definicija visine trokute se prvi puta pojavljuje u petom razredu osnovne škole.

Definicija 3.2.3. *Neka je dan trokut ABC. Neka okomica iz vrha A na pravac na kojem leži stranica $\overline{BC}$ siječe taj pravac u točki A'. Dužina $\overline{AA'}$ zove se visina trokuta iz vrha A.*



Slika 3.4: Simetrale stranica

Analogno bismo mogli definirati visine i iz ostalih vrhova trokuta ABC. Ova definicija je primjer jedne genetičke definicije.

Učenici otkrivaju teorem o ortocentru trokuta.

Teorem 3.2.4. *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Definicija 3.2.5. *Točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta se zove ortocentar trokuta.*

Ortocentar trokuta je prikladno definirati nakon teorema o sjecištu pravaca visina trokuta jer tek tada znamo da postoji za trokut jedinstvena točka koju onda možemo i nekako nazvati.

U iskazu ovog teorema je bitno naglasiti riječ *pravci* - učenicima možemo pokazati na primjeru tupokutnog trokuta zašto koristimo riječ pravci. Induktivnim zaključivanjem, učenici mogu otkriti i sljedeće tvrdnje:

1) U šiljastokutnom trokutu, ortocentar leži unutar trokuta.
2) U pravokutnom trokutu, ortocentar je vrh pravog kuta trokuta.
3) U tupokutnom trokutu, ortocentar se nalazi izvan trokuta.

Aktivnost: Ortocentar trokuta

Cilj: učenici će otkriti da se pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u jednoj točki.
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka, geometrijski pribor,

računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, apstrakcije, induktivnog, zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 12 minuta.

Opis aktivnosti:

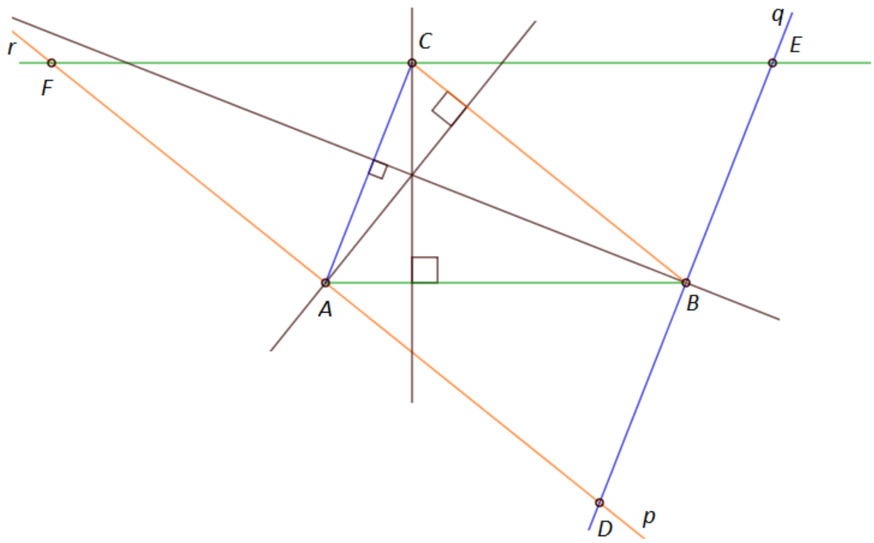
Učenici dobiju nastavne listiće. Na svakom nastavnom listiću nalaze se četiri trokuta (slično kao na nastavnom listiću 3.3). Na svakom trokutu označena su dva pravca na kojima leže visine trokuta te su visine iz tih vrhova označene, jedan od trokuta može biti tupokutan. Od učenika se traži da nacrtaju tim trokutima treće visine te da ih produlje do pravaca. Postavljamo pitanja:
Što je zajedničko pravcima na kojima leže visine trokuta?
Vrijedi li to u svakom trokutu na listiću?
Što možemo zaključiti?
Prikazujemo točna rješenja nastavnog listića postepeno na projekcijskom platnu.

Ne dokazujemo teorem 3.2.4 u osnovnoj školi. Za dokaz tog teorema potreban nam je teorem 3.2.2 o simetralama stranica trokuta.

Dokaz. (Dokaz teorema 3.2.4.)

Neka je dan trokut ABC i pravci na kojima leže njegove visine kao na sljedećoj slici. Nacrtajmo pravac p takav da je $A \in p$ i $p \parallel BC$, pravac q takav da je $B \in q$ i $q \parallel AC$ te pravac r takav da je $C \in r$ i $r \parallel AB$. Ti pravci postoje zbog euklidovog petog aksioma te su zbog njega i jedinstveni. Označimo sa $\{D\} = p \cap q$, $\{E\} = q \cap r$ i $\{F\} = p \cap r$. Četverokuti $ABEC$ i $ADBC$ su paralelogrami pa je zato $|AC| = |BE| = |DB|$. Slično možemo uočiti da je $|BC| = |AF| = |DA|$ i $|AB| = |FC| = |CE|$. Dakle, točke A, B i C su polovišta redom stranica $\overline{FD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EF}$ trokuta DEF. Budući da su pravci na kojima leže visine trokuta okomiti na stranice trokuta koje su paralelne s pravcima p, q i r zaključujemo da su ti pravci okomiti i na pravce p, q i r. Dakle, pravci na kojima leže visine trokuta ABC prolaze polovištima stranica trokuta DEF i okomiti su na njih pa zaključujemo da su oni simetrale stranica trokuta DEF. Prema teoremu 3.2.2 zaključujemo da se pravci na kojima leže visine trokuta ABC sijeku u jednoj točki.

$\square$



Slika 3.5: Visine trokuta

Pitagorin poučak

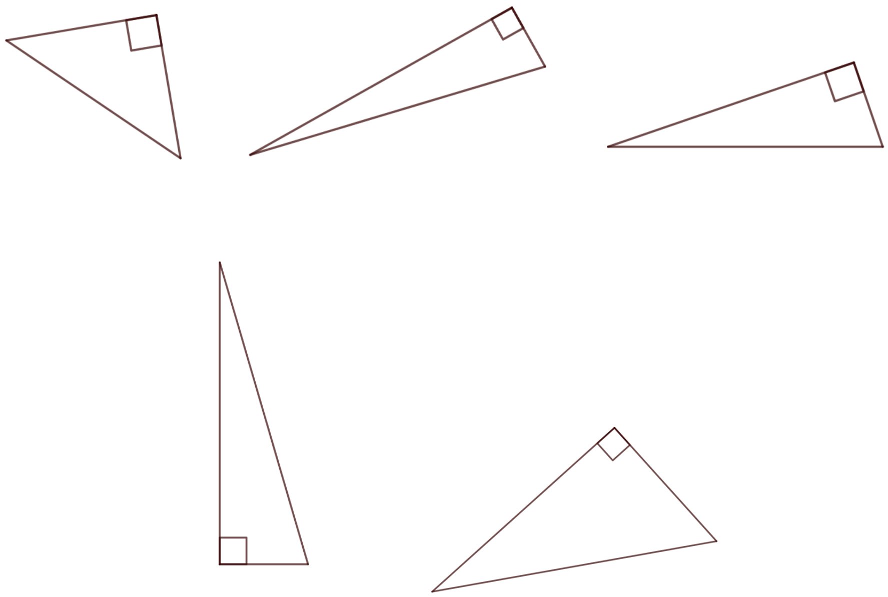
Pitagorin poučak se obrađuje u osmom razredu, a Predmetni kurikulum [20] navodi sljedeće ishode:

> [Učenik] izriče Pitagorin poučak. Objašnjava i primjenjuje Pitagorin poučak na pravokutni trokut, kvadrat, pravokutnik, jednakostranični i jednakokračni trokut, romb. Istražuje i otkriva obrat Pitagorina poučka i primjenjuje ga.

Aktivnost: Pitagorin poučak

Cilj: učenici će otkriti da u pravokutnom trokutu vrijedi formula Pitagorinog poučka.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.4, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u paru).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, apstrakcije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Izmjeri duljine stranica zadanih trokuta te ih upiši pored njihovih stranica.



Popuni tablicu pri čemu a i b označavaju duljine kateta, a c duljinu hipotenuze danih trokuta.

a	b	c	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$

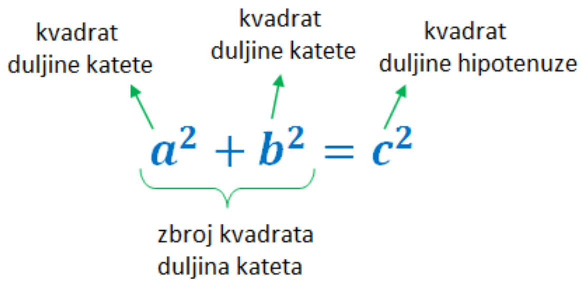
Usporedi brojeve u zadnja dva stupca tablice. Što primjećuješ?

Ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, zapiši riječima zaključak o njihovom odnosu.

Nastavni listić 3.4. "*Pitagorin poučak*"

Opis aktivnosti:

Na nastavnim listićima nalaze se pravokutni trokuti. Istaknut je pravi kut trokuta, a učenici trebaju izmjeriti duljine stranica tih trokuta te popuniti tablicu. Nakon toga uočavaju povezanost između brojeva u tablici. Potom donose zaključak. Učenici mogu zajedno rješavati listić kako bi skratili vrijeme množenja duljina stranica trokuta te kako bi lakše donijeli zaključak. S učenicima diskutiramo točnost formulacije zaključka te potom prikazujemo precizan zaključak na projekcijskom platnu. Za objašnjenje formulacije zaključka, možemo se koristiti sljedećom slikom:



Slika 3.6: Opis Pitagorinog poučka

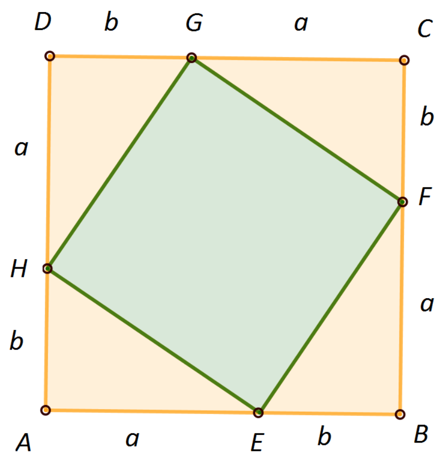
Teorem 3.2.6. *U pravokutnom trokutu vrijedi da je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.*

Dokaz. Odaberimo neki proizvoljni pravokutnik trokut s katetama duljine a i b te hipotenuzom duljine c. Konstruirajmo kvadrat $ABCD$ kojemu je stranica duljine $a+b$ te mu podijelimo stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ točkama E, F, G i H redom tako da je $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = a$ (vidi sliku 3.7). Tada je $|EB| = |FC| = |GD| = |HA| = b$. Budući da je $ABCD$ kvadrat, slijedi da je $\measuredangle HAE = \measuredangle EBF = \measuredangle FCG = \measuredangle GDH = 90°$. Po S - K - S poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti AEH, BFE, CGF i DHG sukladni početnom trokutu pa je $|EH| = |FE| = |GF| = |HG| = c$. Budući da je $\measuredangle AEH + \measuredangle AHE = 90°$ te je $\measuredangle AHE = \measuredangle BEF$, zaključujemo da je $\measuredangle HEF = 90°$. Analogno bismo zaključili za preostale kutove četverokuta $EFGH$ pa je četverokut $EFGH$ kvadrat. Izračunajmo sada površinu kvadrata $ABCD$ na dva načina:

$$P(ABCD) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$P(ABCD) = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2.$$

Iz posljednjih dviju jednakosti, zaključujemo da je $a^2 + b^2 = c^2$.



Slika 3.7: Pitagorin poučak

□

3.3 Četverokuti

Pravokutnik i kvadrat

U prvom razredu osnovne škole učenik svrstava pravokutnik i kvadrat u geometrijske likove kao plohe geometrijskog tijela - kvadra i kocke. U drugom razredu, učenik prepoznaje stranice pravokutnika i kvadrata kao dužine, a vrhove kao točke. U trećem razredu, učenik crta pravokutnik i kvadrat - učenik ne provodi konstrukciju pravog kuta, već se koristi dvama trokutima. Ponovno ih crta u četvrtom razredu osnovne škole (ne navodi se njihova konstrukcija).
U petom razredu osnovne škole, pravokutnik se spominje uz slikovni prikaz i opis - četverokut kojemu su svake dvije stranice okomite. Budući da su stranice pravokutnika ujedno i dužine, razumljiv je pojam okomitosti stranica. Prije te definicije pravokutnika, definiraju se i sljedeći pojmovi: četverokut, susjedne stranice četverokuta, nasuprotne stranice četverokuta, susjedni vrhovi četverokuta, nasuprotni vrhovi četverokuta i dijagonale četverokuta.

Definicija 3.3.1. *Neka su A, B, C i D četiri točke u ravnine tako da nikoje tri nisu kolinearne. Četverokut ABCD je dio ravnine omeđen dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ uključujući i točke koje pripadaju tim dužinama. [9]*

Primijetimo da ova defincija obuhvaća i četverokute koji nisu konveksni, a učenicima možemo uz sliku nekog četverokuta, objasniti pojam omeđenosti.

Definicije ostalih pojmova se mogu precizno navesti u osnovnoj školi pa ih ovdje ne ćemo posebno opisivati.

Navode se tada i sljedeća svojstva pravokutnika.

Teorem 3.3.2. *Duljine nasuprotnih stranica pravokutnika su jednake.*

Teorem 3.3.3. *Dijagonale pravokutnika su jednakih duljina.*

Teorem 3.3.4. *Dijagonale pravokutnika se raspolavljaju.*

Teorem 3.3.5. *Dijagonale kvadrata se sijeku pod pravim kutom.*

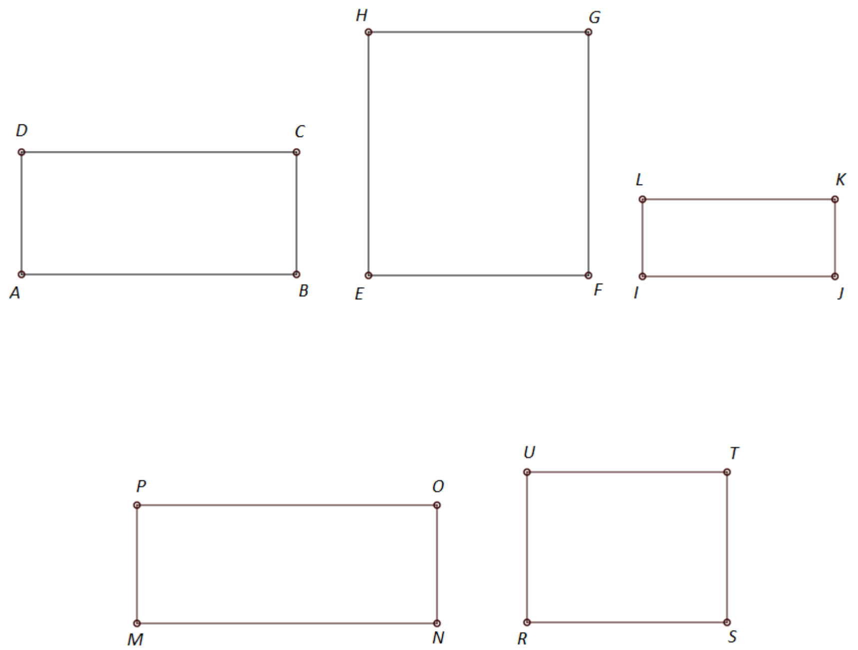
Navest ćemo aktivnost koja induktivnom zaključivanjem otkriva tvrdnju teorema 3.3.3. Tvrdnje ostalih triju teorema se mogu otkriti analognom aktivnošću.

Aktivnost: Dijagonale pravokutnika

Cilj: učenici će otkriti da su duljine dijagonala pravokutnika jednake.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.5, olovka, kreda i ploča, šestar.

Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, induktivnog zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Nacrtaj dijagonale zadanim pravokutnicima.



Usporedi duljine dijagonala pravokutnika.

$|AC| \; \square \; |BD|$, $|EG| \; \square \; |FH|$, $|IK| \; \square \; |JL|$,

$|MO| \; \square \; |NP|$, $|RT| \; \square \; |SU|$

Što zaključuješ?

____

Nastavni listić 3.5. "*Dijagonale pravokutnika*"

Opis aktivnosti:

Podijelimo učenici nastavne listiće. Ukratko im objasnimo kakvi su zadaci u listiću. Za uspoređivanje duljina dijagonala, učenici koriste šestar. Nakon što iznesu zaključak, zapisujemo zaključak na ploču, a učenici ga u tom obliku zapisuju na nastavne listiće.

Matematički dokazi teorema 3.3.2, 3.3.3 i 3.3.4 mogu se provesti u šestom razredu osnovne škole jer se o četverokutima uči u nastavnoj cjelini *Četverokuti* koja se pojavljuje nakon nastavne jedinice *Sukladnost trokuta*.

3.4 O ostalim mnogokutima

Nakon što se uvede pojam mnogokuta, uvodi se pojam vrha i stranice mnogokuta te se potom definira i sljedeće: susjedni vrhovi, susjedne stranice i dijagonala mnogokuta.

Definicija 3.4.1. *Dva vrha mnogokuta su susjedna ako su oni krajnje točke iste stranice mnogokuta.*

Za vrhove koji nisu susjedni kažemo da su nesusjedni.

Definicija 3.4.2. *Dvije stranice mnogokuta su susjedne ako imaju zajednički vrh.*

Definicija 3.4.3. *Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha mnogokuta.*

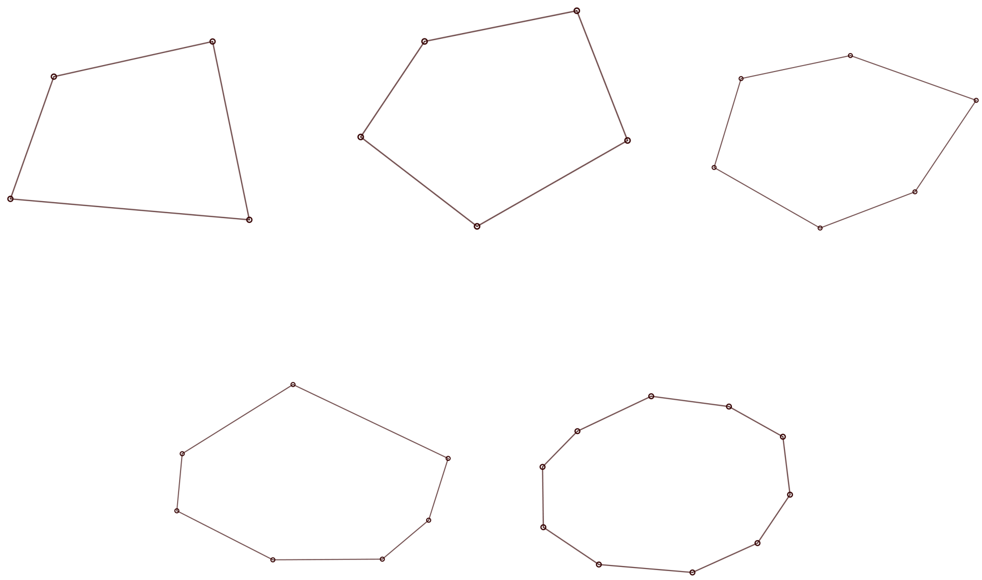
Aktivnost: Broj dijagonala iz jednog vrha mnogokuta

Cilj: učenici će otkriti da iz jednog vrha n-terokuta možemo nacrtati $n - 3$ dijagonale.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.6, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem.

-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.

Trajanje: 10 minuta.

Zadatak. Mnogokutima nacrtaj dijagonale iz samo jednog njihovog vrha.



Promatrajući gornje mnogokute, popuni tablicu.

mnogokut	četverokut	peterokut	šesterokut	sedmerokut	deseterokut
broj vrhova					
broj dijagonala iz jednog vrha					

Odgovori na pitanja.

Zamisli da imaš nacrtan 12-erokut, koliko bi dijagonala mogao nacrtati iz jednog njegovog vrha?

____

Koliko dijagonala možeš nacrtati iz jednog vrha mnogokuta koji ima 37 vrhova?

____

Zaključak: ako mnogokut ima n vrhova, onda iz svakog njegovog vrha

možemo nacrtati ________ dijagonale.

Nastavni listić 3.6. "*Broj dijagonala iz jednog vrha mnogokuta*"

Opis aktivnosti:

Podijelimo učenicima nastavne listiće kao ove gore. Kažemo učenicima da odaberu jedan vrh mnogokuta i iz njega nacrtaju dijagonale (na projekcijskom platnu prikažemo mnogokut i crtanje dijagonale iz jednog njegovog vrha) - naglasimo im da ne trebaju crtati sve dijagonale. Nakon što nacrtaju dijagonale, kažemo učenicima da popune tablicu promatrajući mnogokute i njihove dijagonale koji se nalaze iznad. Nakon što su popunili tablicu, prikazujem istu tu tablicu popunjenu na projekcijskom platnu kako bi učenici mogli provjeriti jesu li točno popunili te kako bi ispravili greške. Zatim učenici odgovaraju na pitanja te dopunjavaju rečenicu zaključka na listiću.

Nakon što učenici donesu zaključak, provjerimo jesu li donijeli dobar zaključak te ih potaknemo da probaju objasniti zašto je takav. Postavljamo im sljedeća pitanja:

Zašto baš iz jednog vrha možemo nacrtati $n - 3$ dijagonale, zašto ne n dijagonala? Zašto oduzimamo 3 vrha?

Ako na sedmerokutu odaberem vrh A (pokazujući na projekcijskom platnu sedmerokut s označenim vrhovima), s kojim vrhovima ga možemo spojiti kako bismo dobili dijagonalu, a prema kojim vrhovima ne možemo nacrtati dijagonalu?

Koliko susjednih vrhova ima svaki vrh mnogokuta?

Mogu li nacrtati dijagonalu iz vrha prema njemu samom?

Prema koliko vrhova ne mogu nacrtati dijagonalu?

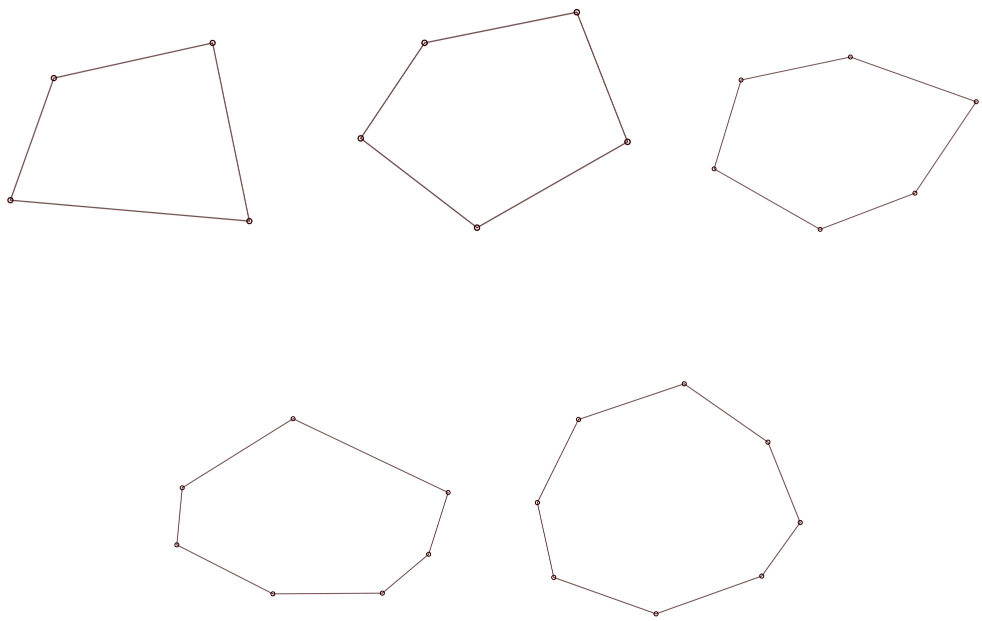
Uvedemo još i oznaku za broj dijagonala iz jednog vrha mnogokuta: d_n te tvrdnju zapišemo u obliku formule: $d_n = n - 3$. Učenicima pokažemo primjere kako koristiti tu formulu te im zadamo i nekoliko zadataka u kojima se ona koristi.

Slijedi slična aktivnost o ukupnom broju dijagonala u mnogokutu.

Aktivnost: Broj dijagonala u mnogokutu

Cilj: učenici će otkriti formulu za ukupan broj dijagonala u mnogokutu.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.7, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, generalizacije, induktivnog zaključivanja.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Mnogokutima nacrtaj sve njihove dijagonale.



Promatrajući gornje mnogokute, popuni tablicu.

mnogokut	broj vrhova mnogokuta	broj dijagonala iz jednog vrha	pomnoži brojeve iz susjednih ćelija slijeva	ukupan broj dijagonala
četverokut				
peterokut				
šesterokut				
osmerokut				
n-terokut				

Zaključak: ako mnogokut ima n vrhova, onda on ima __________ dijagonale.

Nastavni listić 3.7. "*Broj dijagonala u mnogokutu*"

Opis aktivnosti:

Podijelimo učenicima nastavne listiće kao ove gore. Kažemo učenicima da mnogokutima nacrtaju sve dijagonale (na projekcijskom platnu prikažemo mnogokut i kako fiksiranjem jednog po jednog vrha mogu nacrtati sve dijagonale). Nakon što nacrtaju dijagonale, kažemo učenicima da popune tablicu promatrajući mnogokute i njihove dijagonale koji se nalaze iznad. Nakon što su popunili tablicu, prikazujem istu tu tablicu popunjenu na projekcijskom platnu kako bi učenici mogli provjeriti jesu li točno popunili te kako bi ispravili greške. Zatim učenici odgovaraju na pitanja te dopunjavaju rečenicu zaključka na listiću.

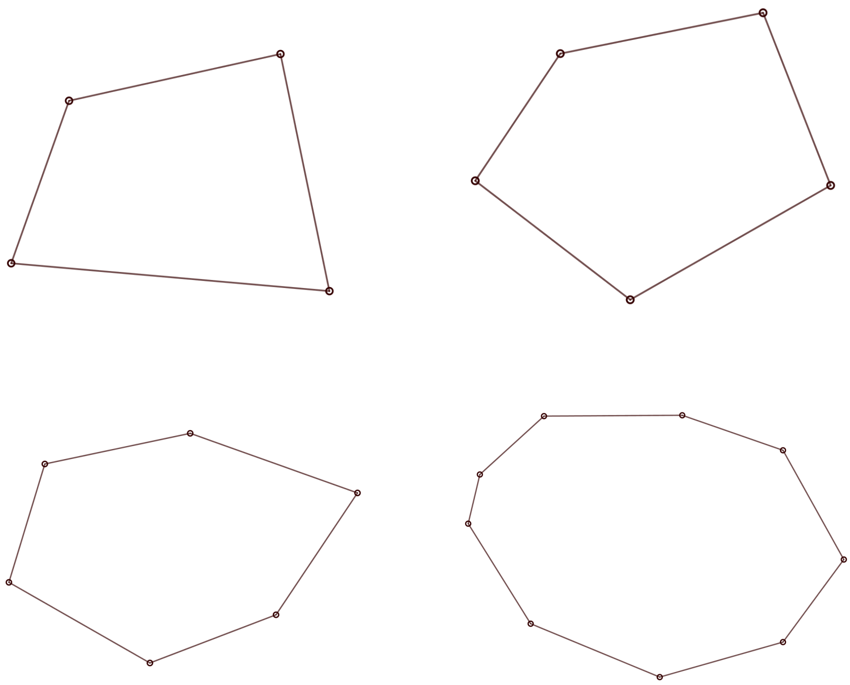
Nakon što učenici donesu zaključak, provjerimo jesu li donijeli dobar zaključak te ih potaknemo da probaju objasniti zašto je takav.

Uvedemo oznaku za ukupan broj dijagonala u n-terokutu: D_n, a formula koju koristimo je $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Aktivnost: Zbroj veličina kutova

Cilj: učenici će otkriti formulu za zbroj veličina unutarnjih kutova n-terokuta.
Potrebni materijal: nastavni listić 3.8, olovka, računalo i projekcijsko platno.
Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, usmeno izlaganje, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: metoda analogije, generalizacije, induktivnog zaključivanja, analize, sinteze.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak. Odaberi jedan vrh mnogokuta i nacrtaj sve dijagonale iz njega.



Promatrajući gornje mnogokute, popuni tablicu.

mnogokut	**broj vrhova** u mnogokutu	**broj trokuta** u mnogokutu	**zbroj veličina kutova** u mnogokutu
četverokut	4	2	$2 \cdot 180°$
peterokut			
šesterokut			
deveterokut			
25-erokut			
37-erokut			
n-terokut			

Zaključak: Zbroj veličina svih unutarnjih kutova n-terokuta je _____________.

Nastavni listić 3.8. "*Zbroj veličina kutova u mnogokutu*"

Opis aktivnosti:

S učenicima ponovimo koliki je zbroj veličina kutova u trokutu i u četverokutu. Vodimo heuristički razgovor:

Kako se može pokazati da je zbroj veličina kutova u četverokutu jednak $360°$?

Ako se nitko ne sjeti, prikažem dijagonalu četverokuta te ih pitamo:

Kako je ovom dijagonalom podijeljen četverokut?

Čine li kutovi trokuta ujedno i kutove četverokuta?

A koliki je zbroj veličina kutova u dva trokuta?

Zatim prikazujemo peterokut i pitamo učenike:

Kako biste odredili zbroj veličina kutova u peterokutu? Koja je bila ideja za četverokut?

Hoćemo li crtati sve dijagonale? Koje dijagonale trebamo nacrtati da bi peterokut bio podijeljen na trokute?

Ako odaberem jedan vrh peterokuta i nacrtam sve dijagonale iz tog vrha, hoćemo li podijeliti peterokut na trokute?

Koliko dijagonala mogu nacrtati iz jednog vrha peterokuta? Koja je formula?

Zatim, podijelimo učenicima nastavne listiće 3.8. Na nastavnim listićima se nalaze slike nekih mnogokuta. Kažemo učenicima da pogledaju te mnogokute te im potom naglasimo da svakom mnogokutu nacrtaju dijagonale iz njegovog samo jednog vrha (što piše i na listiću) kako bismo mnogokut podijelili na trokute. Ispod mnogokuta se nalazi tablica koju učenici popunjavaju. Prvi redak je popunjen kao primjer učenicima (na temelju četverokuta kojemu je nacrtana dijagonala) - analiziramo s učenicima prvi red te im naglasim da zbroj veličina kutova zapišu u obliku umnoška - broj puta 180°.

Obilazimo učenike, a nakon nekog vremena ih prozivamo da pročitaju kako su popunili tablicu (dok istovremeno prikazujem popunjavanje te tablice na projekcijskom platnu) te ih pitamo koji su zaključak donijeli. Uvodimo i oznaku K_n za zbroj veličina svih unutarnjih kutova tako što pitamo učenike:

Kako ćemo označavati zbroj veličina kutova u n-terokutu?

Kako smo označavali ukupan broj dijagonala u n-terokutu? Zašto D?

Potom se prikazuje formula $K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$ te kažemo učenicima da prepišu tu formulu u svoje bilježnice.

3.5 Preslikavanja ravnine

U petom razredu osnovne škole, učenici se prvi puta susreću sa osnom i centralnom simetrijom. Iz predmetnog kurikuluma [20]:

> [Učenik] osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini (točku, dužinu, pravac, trokut, četverokut, krug i kružnicu). Prepoznaje osnosimetrični/centralnosimetrični lik i određuje os/centar simetrije.

Osna simetrija se definira uz pomoć definicije osnosimetričnih točaka s obzirom na pravac.

Definicija 3.5.1. *Za točke A i B kažemo da su osnosimetrične s obzirom na pravac p [4] ako je pravac p simetrala dužine $\overline{AB}$. Kažemo da je točka A osnosimetrična slika točke B, odnosno da je B osnosimetrična slika točke A.*

Možemo još i reći da je točka A osnosimetrična točki B s obzirom na pravac p ili da je točka B osnosimetrična točki A s obzirom na pravac p.

Definicija 3.5.2. *Neka je p neki zadani pravac u ravnini. Pridruživanje koje točkama ravnine pridružuje osnosimetrične slike tih točaka s obzirom na pravac p nazivamo osnom simetrijom ili zrcaljenjem s obzirom na pravac p. Za pravac p kažemo da je os simetrije.*

Tako se u petom razredu prvi puta javljaju pojmovi kao *slika* i *pridruživanje*. Učenicima možemo na nekoj konkretnoj situaciji objasniti te pojmove. Bitno je da imamo dva skupa i pravilo prema kojem se svim elementima prvog skupa pridružuje jedan element drugog skupa. Kad je pridruživanje izvršeno za pojedini element iz prvog skupa, tada taj pridruženi element nazivamo slikom onog prvog elementa. Primjerice, prva skupina su učenici, a druga skupina su razni bomboni. Svakom učeniku pridružujemo samo jedan bombon i to prema pravilu da se učenicima daju bomboni od jagode, a učenicama se daje bomboni od jabuke. U osnoj simetriji, oba ta skupa su sve točke ravnine, a pravilo pridruživanja je postupak pridruživanja osne simetrija s obzirom na zadani pravac. Dovoljno je zadati neki pravac u ravnini, kao os simetrije, i pomoću osne simetrije možemo svakoj točki ravnine pridružiti neku točku ravnine. Također je dovoljno zadati dvije (pridružene) različite točke u ravnini pa za njih možemo odrediti os simetrije.
Za otkrivanje svojstava osne simetrije koristit ćemo induktivno zaključivanje.

Teorem 3.5.3. *Osnosimetrična slika dužine je njoj sukladna dužina.*

Teorem 3.5.4. *Osnosimetrična slika pravca je pravac.*

Zbog definicije osne simetrije (ili osnosimetričnih točaka) znamo da je upravo točka osnosimetrična slika točke, ali ne znamo što je osnosimetrična slika dužine, pravca ili trokuta. Ipak, budući da osna simetrija pridružuje svakoj točki ravnine neku točku (znamo i kojim pravilom) možemo definirati osnosimetričnu sliku dužine $\overline{AB}$ kao skup točaka koje su pridružene određenom osnom simetrijom svakoj od točaka dužine $\overline{AB}$. Ne znamo da će osnosimetrična slika dužine biti dužina, no to tvrdi teorem 3.5.3 te tvrdi da će ta slika biti sukladna dužini $\overline{AB}$. Do tvrdnje tog teorema, došli bismo pomoću dviju indukcija: prvom indukcijom, učenici bi otkrili da je osnosimetrična slika svake dužine upravo dužina, a drugom indukcijom, učenici bi otkrili da je to dužini sukladna dužina.

Aktivnost: Osna simetrija - dužina

Cilj: učenici će otkriti da je osnosimetrična slika dužine njoj sukladna dužina.
Potrebni materijal: bilježnica, geometrijski pribor, kreda i ploča, A5 papir na kojem je pravac, bojice, olovka, nastavni listić 3.9.
Nastavni oblik: grupni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, usmeno izlaganje, rad s pisanim materijalom,
-prema matematičkom sadržaju: mjerenje, metoda analogije, induktivnog zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 20 minuta.

Upute:

1. Neka svaki učenik dobije jednu bojicu.

2. Na velikom papiru (na papiru na kojem je nacrtan pravac), neka svaki učenik nacrta dvije dužine tom bojicom.

3. Zamijenite se za bojice tako da nijedan učenik nema istu bojicu kao maloprije.

4. Neka svaki učenik tom novom bojicom označi četiri točke na dužinima koje je on nacrtao - te četiri točke neka budu: krajnje točke dužine i dvije proizvoljne točke na dužini.

5. Neka svaki učenik nacrta osnosimetrične slike točaka koje je označio, s obzirom na zadani pravac.

6. Zamijenite se za bojice tako da svaki učenik ima bojicu koju je imao na početku.

7. Neka svaki učenik bojicom spoji osnosimetrične točke prve dužine te neka spoji osnosimetrične točke druge dužine.

Zajedno odgovorite na sljedeća pitanja:

Što je osnosimetrična slika dužine?

____

Usporedite duljine dužina i njima osnosimetričnih dužina. Što zaključujete?

____

Nastavni listić 3.9. "*Osnosimetrična slika dužine*"

Opis aktivnosti:

Na početku aktivnosti, učenicima postavimo sljedeća pitanja:
Što je osnosimetrična slika točke?
Ako imamo osnu simetriju, ima li svaka točka ravnine svoju osnosimtričnu sliku?
Što je dužina? Bismo li mogli svakoj točki dužini pridružiti neku točku ravnine?

Što bi bila osnosimetrična slika dužine?

Nakon što usmeno odgovore na pitanja, učenike podijemo u četveročlane grupe. Svaka grupa dobije A5 papir na kojem se nalazi pravac te nastavni listić kao onaj gore na kojem se nalaze upute i pitanja. Učenicima kažemo da crtanje provode na papiru na kojem se nalazi pravac (nazvat ćemo ga veliki papir) te im ukratko objasnimo upute. Dok učenici crtaju, obilazimo ih te razjašnjavamo nejasnoće vezane uz upute, a istovremeno provjeravamo kako napreduju. Nakon što nacrtaju osnosimetrične slike dužina, kažemo im da zajedno odgovore na dva pitanja koja se nalaze ispod uputa na nastavnom listiću. Nakon što učenici odgovore na pitanja, zapišemo točne odgovore na ploči u obliku teorema 3.5.3.

Za otkrivanje tvrdnje teorema 3.5.4 mogli bismo provesti sljedeći heuristički razgovor:
Što mislite, što je osnosimetrična slika pravca?
A što je osnosimetrična slika trokuta? Može li se dogoditi da nije trokut, tj. da stranice trokuta nemaju zajedničke krajnje točke? Zašto ne?
U kakvom odnosu će, po duljini, biti stranice tih dvaju trokuta?

Do točnosti odgovora na ta pitanja, možemo doći induktivnim zaključivanjem uz pomoć *Geogebre*.

Analogno bismo proveli aktivnost kojom bi učenici otkrili sukladnost centralnosimetričnih, odnosno translatiranih dužina.

Poglavlje 4

Mjerenje

4.1 Površina pravokutnika

Neki od ishoda koje navodi Predmetni kurikulum još u četvrtom razredu osnovne škole su:

> [Učenik] mjeri površinu likova ucrtanih u kvadratnoj mreži, ucrtava u kvadratnu mrežu likove zadane površine, mjeri površine pravokutnih likova prekrivanjem površine jediničnim kvadratom i poznaje standardne mjere za površinu.

U petom razredu, [20] navodi sljedeće ishode:

> [Učenik] otkriva i obrazlaže formule za opseg i površinu. Povezuje umnožak dvaju jednakih brojeva s pojmom kvadrata broja i mjernom jedinicom za površinu. Poznaje mjerne jedinice za površinu (kilometar kvadratni, metar kvadratni, decimetar kvadratni, centimetar kvadratni, milimetar kvadratni).

Učenicima navedemo površinu jediničnog kvadrata kao definiciju.

Definicija 4.1.1. *Ako kvadrat ima stranicu duljine* 1 *cm, onda je njegova površina jednaka* $1\ cm^2$.

Gornju definiciju učenici primjenjuju za bilo koju mjernu jedinicu.

Sljedeća nastavna aktivnost u kojoj učitelj može provesti metodu induktivnog zaključivanja jest otkrivanje formule za površinu pravokutnika.

Aktivnost: Površina pravokutnika

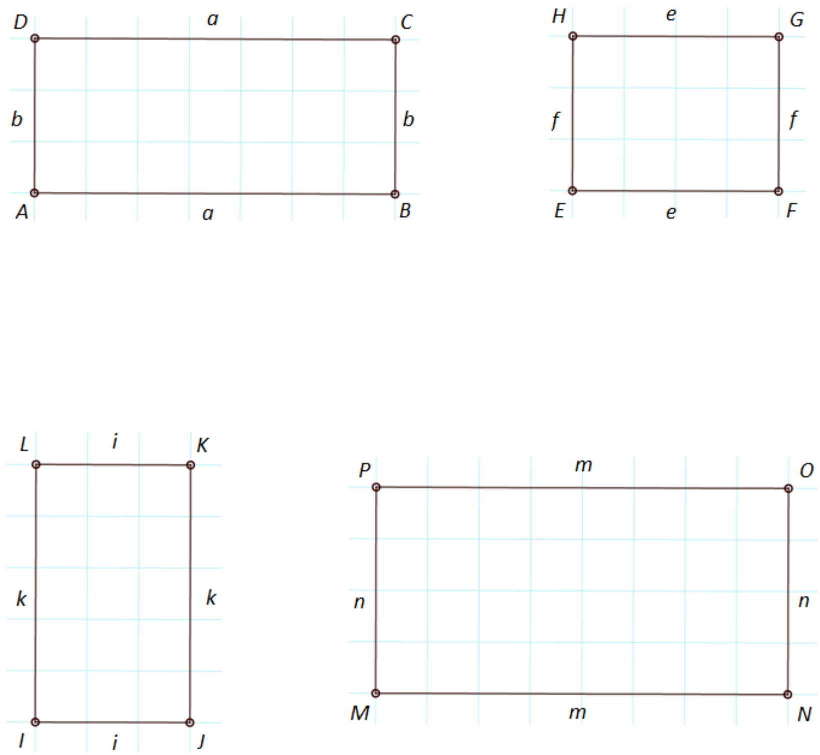
Cilj: učenici će otkriti formulu površine pravokutnika.
Potrebni materijal: nastavni listić 4.1, olovka, računalo i projekcijsko platno.

Nastavni oblik: individualni rad (diferencirana nastava).
Nastavna metoda:
-prema izvoru znanja: razgovor, rad s pisanim materijalom, rad s medijem,
-prema matematičkom sadržaju: mjerenje, metoda analogije, induktivnog zaključivanja, generalizacije.
Trajanje: 15 minuta.

Zadatak.

a) Izmjeri duljine stranica svakomu od pravokutnika. Vrijednosti unesi u tablicu koja se nalazi ispod.

b) Izračunaj površine svakog od pravokutnika pomoću površina kvadrata koji čine kvadratnu mrežu. Vrijednosti unesi u tablicu koja se nalazi ispod.



$ABCD$	$EFGH$	$IJKL$	$MNOP$
$a =$	$e =$	$i =$	$m =$
$b =$	$f =$	$k =$	$n =$
$a \cdot b =$	$e \cdot f =$	$i \cdot k =$	$m \cdot n =$
$P(ABCD) =$	$P(EFGH) =$	$P(IJKL) =$	$P(MNOP) =$

Usporedi posljednja dva retka u tablici.

Što zaključuješ - kako možemo izračunati površinu pravokutnika ako su nam poznate duljine njegovih stranica? Odgovori riječima.

____

Zaključak: ako su nam poznate duljine a i b susjednih stranica nekog pravokutnika $ABCD$, onda njegovu površinu računamo po formuli:

____

Nastavni listić 4.1. "*Otkrivanje formule za površinu pravokutnika*"

Opis aktivnosti:

Podijelimo svakom paru učenika jedan nastavni listić na kojem se nalaze različiti pravokutnici koji su ucrtani u kvadratnoj mreži. Ispod pravokutnika nalazi se tablica u koju učenici trebaju unijeti podatke o duljini stranica pravokutnika te njegovoj površini. Učenicima damo detaljnije upute kako popuniti tablicu. Nakon što popune tablicu, učenici uspoređuju posljednja dva retka u tablici i zaključuju o formuli za računanje površine pravokutnika. Prikazujemo točna rješenja na projekcijskom platnu prozivajući učenike istovremeno.

Što ako uzmemo pravokutnik koji je površinom manji od jediničnog kvadrata? S obzirom da se množenje racionalnih brojeva ne uči u petom razredu, taj nastavni sadržaj ostavljamo za više razrede osnovne škole.

Slično induktivno zaključivanje mogli bismo provesti i za otkrivanje formule volumena kvadra.

Definicija 4.1.2. *Neka je P skup svih mnogokuta u ravnini. Funkcija $p : P \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

(N1) $p(A) \geq 0, \forall A \in P$,

(N2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B), \forall A, B \in P$ *koji nemaju zajedničkih unutarnjih točaka*

(N3) $A \cong B \Rightarrow p(A) = p(B)$,

(N4) postoji bar jedan kvadrat K sa stranicom duljine 1 *takav da je* $p(K) = 1$,

zove se površina ili ploština na skupu P.

Teorem 4.1.3. *Ako postoji površina p i ako je dan pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB| = a$ i $|BC| = b$, onda je $p(ABCD) = a \cdot b$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u dva dijela, a može se naći u knjizi [18].

1) Pretpostavimo da su a i $b \in \mathbb{Q}^+$, onda je $a = \frac{p}{q}$ i $b = \frac{r}{s}$ pri čemu su $p, q, r, s \in \mathbb{N}$. Neka je n zajednički višekratnik brojeva q i s. Proširimo tada razlomke $\frac{p}{q}$ i $\frac{r}{s}$ tako da je

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}, \quad \frac{r}{s} = \frac{m'}{n}.$$

Funkcija p je površina pa postoji kvadrat K takav da je $p(K) = 1$. Točkama podijelimo susjedne stranice kvadrata tako da je udaljenost od vrha kvadrata do susjedne točke te između susjednih točaka jednaka $\frac{1}{n}$ (na slici 4.1 je n = 5). Kroz te točke povucimo paralele sa stranicama kvadrata. Na taj način, kvadrat K je podijeljen na n^2 manjih kvadrata $K_1, K_2, ..., K_{n^2-1}, K_{n^2}$.

Zbog *(N2)* iz definicije površine vrijedi da je

$$1 = p(K) = p(K_1 + K_2 + ... + K_{n^2}) = p(K_1) + p(K_2) + ... + p(K_{n^2})$$

te zbog *(N3)* iz definicije površine vrijedi

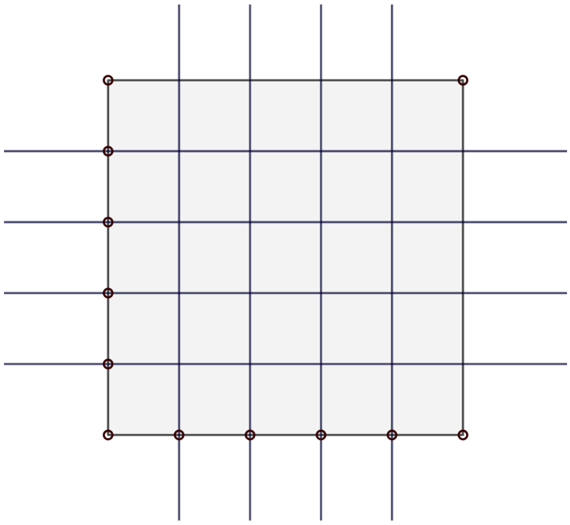
$$p(K_1) + p(K_2) + ... + p(K_{n^2}) = n^2 \cdot p(K_1)$$

odnosno imamo da je

$$1 = n^2 \cdot p(K_1)$$

iz čega slijedi da je

$$p(K_1) = \frac{1}{n^2}.$$



Slika 4.1: Kvadrat površine 1

Dalje, na analogan način podijelimo stranicu duljine a pravokutnika na m dijelova, a stranicu duljine b na m' dijelova. Tada su duljine tih odsječaka jednake $\frac{1}{n}$ i pravokutnik $ABCD$ je unija $m \cdot m'$ kvadrata kojima je duljina stranice $\frac{1}{n}$, odnosno čija je površina jednaka $\frac{1}{n^2}$ pa imamo

$$p(ABCD) = m \cdot m' \cdot \frac{1}{n^2} = a \cdot b.$$

2) Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada za svaki prirodni broj n, postoje prirodni brojevi a_n i b_n takvi da je

$$\frac{a_n}{n} \leq a \leq \frac{a_n + 1}{n}, \quad \frac{b_n}{n} \leq b \leq \frac{b_n + 1}{n} \tag{4.1}$$

jer je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$.

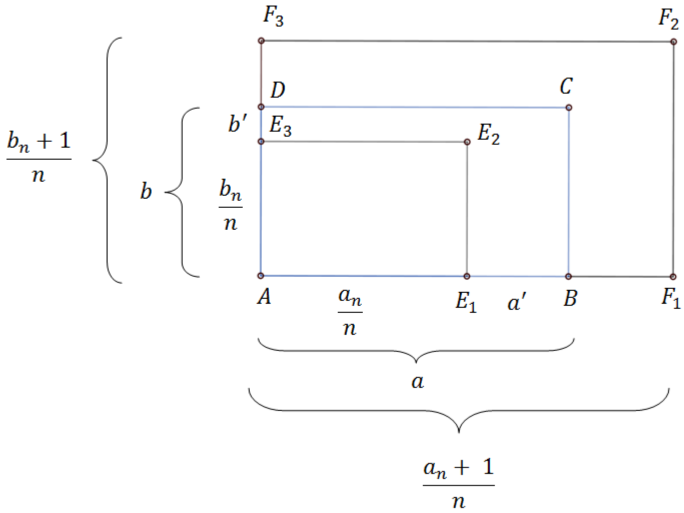
Tada, zbog aksioma uređaja u $\mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{a_n}{n} \cdot \frac{b_n}{n} \leq a \cdot b \leq \frac{a_n + 1}{n} \cdot \frac{b_n + 1}{n},$$

Nadalje, postoje brojevi $a', b' \in \mathbb{R}^+$ takvi da je

$$a = a' + \frac{a_n}{n}, \quad b = b' + \frac{b_n}{n}.$$

Pogledajmo sliku 4.2.



Slika 4.2: Pravokutnici

Označimo sa P_1 pravokutnik $AE_1E_2E_3$, sa P_2 pravokutnik $AF_1F_2F_3$ te sa R šesterokut $E_1BCDE_3E_2$. Vidimo da je

$$ABCD = P_1 \cup R$$

pa je zbog svojstva *(N2)* definicije površine

$$p(ABCD) = p(P_1) + p(R) \Rightarrow p(ABCD) - p(P_1) = p(R),$$

a zbog svojstva *(N1)* vrijedi

$$p(ABCD) - p(P_1) \geq 0 \Rightarrow p(ABCD) \geq p(P_1).$$

Analogno bismo pokazali da je $p(ABCD) \leq p(P_2)$.

Iz posljednjih dviju nejednakosti zaključujemo

$$p(P_1) \leq p(ABCD) \leq p(P_2).$$

Nadalje, pravokutnik P_1 ima stranice duljina $\frac{a_n}{n}$, $\frac{b_n}{n}$, a P_2 $\frac{a_n+1}{n}$, $\frac{b_n+1}{n}$ pa je zbog dokazanog u prvom slučaju

$$p(P_1) = \frac{a_n}{n} \cdot \frac{b_n}{n}, \quad p(P_2) = \frac{a_n + 1}{n} \cdot \frac{b_n + 1}{n}.$$

Odnosno, imamo

$$\frac{a_n}{n} \cdot \frac{b_n}{n} \leq p(ABCD) \leq \frac{a_n + 1}{n} \cdot \frac{b_n + 1}{n}.$$

Na početku smo zaključili da je

$$\frac{a_n}{n} \cdot \frac{b_n}{n} \leq a \cdot b \leq \frac{a_n + 1}{n} \cdot \frac{b_n + 1}{n}$$

Može se pokazati (koristeći aksiom usklađenosti zbrajanja i uređaja u $\mathbb{R}$) da je

$$p(P_2) - p(P_1) \geq p(ABCD) - ab \geq p(P_1) - p(P_2).$$

Budući da je

$$p(P_2) - p(P_1) = \frac{a_n + b_n + 1}{n^2}$$

te zbog (4.1)

$$a_n \leq na, \quad b_n \leq nb$$

vrijedi da je

$$p(ABCD) \leq \frac{na + nb + 1}{n^2}.$$

Analogno bismo pokazali da je

$$p(ABCD) \geq -\frac{na + nb + 1}{n^2}.$$

Odnosno, zaključujemo da je

$$-\frac{na + nb + 1}{n^2} \leq p(ABCD) \leq \frac{na + nb + 1}{n^2}.$$

za svaki pridodan broj n.
Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{na + nb + 1}{n^2} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{na + nb + 1}{n^2}$$

prema *teoremu o sendviču*, zaključujemo da je,

$$\lim_{n\to\infty}(p(ABCD) - ab) = 0$$

odnosno da je

$$p(ABCD) - ab = 0 \Rightarrow p(ABCD) = ab.$$

$\square$

Bibliografija

[1] B. Antunović Piton, T. Djaković, L. Havranek-Bijuković, I. Matić, T. Rodiger, *Matematika 8, 1. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike u osmom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[2] B. Antunović Piton, T. Djaković, L. Havranek-Bijuković, I. Matić, T. Rodiger, *Matematika 8, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike u osmom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[3] M. Bombardelli, D. Ilišević, Elementarna geometrija (skripta),
dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf
(listopad 2020.)

[4] V. Draženović Žitko, L. Krnić, M. Marić, Z. Šikić, *Matematika 5, 2. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2011.

[5] V. Draženović Žitko, L. Krnić, M. Marić, Z. Šikić, *Matematika 6, 1. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2012.

[6] V. Draženović Žitko, L. Krnić, M. Marić, Z. Šikić, *Matematika 6, 2. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2012.

[7] A. Dujella, Uvod u teoriju brojeva (skripta),
dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ duje/utbprof.html
(listopad 2020.)

[8] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 5, 1. dio, udžbenik za 5. razred osnovne škole*, Element, Zagreb, 2019.

[9] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 5, 2. dio, udžbenik za 5. razred osnovne škole*, Element, Zagreb, 2019.

[10] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 6, 1. dio, udžbenik za 6. razred osnovne škole*, Element, Zagreb, 2020.

[11] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 6, 2. dio, udžbenik za 6. razred osnovne škole*, Element, Zagreb, 2020.

[12] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 7, 1. dio, udžbenik za 7. razred osnovne škole*, Element, Zagreb, 2020.

[13] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 7, 2. dio, udžbenik za 7. razred osnovne škole*, Element, Zagreb, 2020.

[14] I. Golac Jakopović, L. Krnić, Z. Šikić, M. Vuković, *Matematika 7, 1. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2012.

[15] I. Golac Jakopović, L. Krnić, Z. Šikić, M. Vuković, *Matematika 7, 2. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2012.

[16] B. Goleš, Z. Lobor, L. Krnić, Z. Šikić, *Matematika 5, 1. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2011.

[17] Z. Kurnik, *Indukcija*, Matematika i škola, (2000), 197 - 203.

[18] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[19] M. Pavleković, *Metodika nastave matematike s informatikom I*, Element, Zagreb, 1997.

[20] Predmetni kurikulum Matematike za osnovnu školu, NN 7/2019.,
dostupno na https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
(listopad 2020.)

Sažetak

Induktivno zaključivanje je promatranje niza slučajeva sa ciljem da se uoči njima ono zajedničko kako bi se to zajedničko istaknulo te dokazivanjem postalo svojstvo.

U ovom diplomskom radu, na početku manjih poglavlja, navedena su svojstva ili pojmovi neophodni za provođenje same aktivnosti bilo da su istaknuti ishodi iz Predmetnog kurikuluma [20] koji su vezani uz određenu aktivnost, navedeno predznanje ili su temeljni pojmovi opisani, odnosno definirani. Unutar većine aktivnosti nalaze se nastavni listići koji učenicima pomažu u oblikovanju induktivnog zaključivanja, a unutar nekih aktivnosti nalaze se motivacijski primjeri uvođenja aktivnosti, metodički komentari, objašnjenja matematičkih pojmova ili heuristički razgovor o tvrdnji ili dokazu svojstva.

Dijelovi matematičkog sadržaja u kojima je također moguće koristiti metodu induktivnog zaključivanja, a u svojim aktivnostima su slični nekima od prethodno navedenih aktivnosti u radu, nisu opisani, već je napomenuto da bismo ih analognim aktivnostima mogli provesti. Također, neke aktivnosti su opisane ukratko ukoliko je njihovo svojstvo istaknuto zbog svoje očiglednosti tijekom prikaza i manjeg broja primjera. Nakon opisa aktivnosti, navode se definicije pojmova, iskazi i dokazi otkrivenih svojstava ili se prelazi na obradu nove aktivnosti.

Summary

Inductive reasoning is observing the series of cases to notice the common property in order to be featured and set as a rule after carrying out its proof.

In this work, at the beginning of sections, there are theorems or concepts required for description of activities whether they are featured curriculum outcomes [20] that are related to the certain activity, stated important knowledge or main concepts described, therefore defined. Within most of activities, there are worksheet that help students to form inductive reasoning and within some of activities, there are motivational examples, methodical notes, explanation of mathematic concepts or heuristic technique to explain the statement of theorem or its proof.

Parts of mathematic content in which inductive reasoning is also usable and have activities that are similar to the some of previously exposed activities within this work, are not described, but referred as similar activities of the idea of their implementation. Some activities are also described in short if their rule is featured due to its obviousness during representation of even fewer examples. After the description of the activity, there are definitions of concepts, statements or proofs of theorems or the new activity is introduced.

Životopis

Rođena sam 5. veljače 1997. godine. Osnovnu školu i opću gimnaziju pohađala sam u Jastrebarskom gdje sam i stanovala. Nakon gimnazije, 2015. godine, upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2018. godine, na istom sam upisala nastavnički smjer na Diplomskom sveučilišnom studiju.