Primjene linearne algebre na magične kvadrate

Herceg, Valentina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Valentina Herceg

PRIMJENE LINEARNE ALGEBRE NA MAGIČNE KVADRATE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svome mentoru prof.dr.sc. Jurju Šiftaru na pruženoj prilici, te ukazanom iznimno velikom strpljenju i još većoj pomoći koju je pružao tijekom izrazito stručnog vođenja izrade rada. Posebnu zahvalu želim iskazati svojoj obitelji koja mi je, prije svega, omogućila studij te bila moja najveća podrška i dodatno me motivirala. Na kraju bih se zahvalila svim svojim prijateljima i kolegama uz koje sam provela predivne i nezaboravne trenutke tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

Magični kvadrat jedan je od najpopularnijih pojmova takozvane zabavne matematike. Popunjavanje kvadratne tablice brojevima tako da se dobije skladan razmještaj koji obiluje višestrukim posebnim svojstvima već stoljećima pa i tisućljećima, od drevnih kultura pa sve do danas, privlačna je razbibriga s jasnom estetskom, ali i intelektualnom komponentom. S matematičkog gledišta, magični kvadrat primjer je spoja aritmetičke, kombinatorne i geometrijske strukture kakva je zanimljiva za konstruiranje, klasificiranje, kao i za praktičnu primjenu. Shvaćen kao kvadratna matrica, magični kvadrat od interesa je i kao objekt proučavanja u linearnoj algebri, što je i tema ovog diplomskog rada.

Cilj nam je istražiti kako se neki od osnovnih pojmova i činjenica iz linearne algebre mogu primijeniti na magične kvadrate. Postoji opsežna literatura na tu temu, a ovdje je izložen izbor rezultata koji je uglavnom pristupačan uz predznanje uvodnih predmeta Linearna algebra 1 i 2 na studiju matematike. To obuhvaća strukturu vektorskog prostora, operacije s matricama, posebne tipove i spektar kvadratne matrice, dok bi za naprednije istraživanje bila potrebna više razina teorije matrica.

U prvom poglavlju navedeni su glavni pojmovi "klasičnog" pristupa magičnim kvadratima, neki posebni tipovi koji posjeduju dodatne pravilnosti te neke metode konstrukcije, kao motivacija za daljnji rad.

Radi potpunosti i preglednosti izlaganja, u drugom poglavlju izložen je sažeti pregled uvoda u linearnu algebru, do spektra i Jordanove kanonske forme kvadratne matrice.

Slijedi glavni dio rada, u kojem se magični kvadrati promatraju kao kvadratne matrice nad poljem (prvenstveno realnih brojeva), pri čemu se onda definicije i propozicije iskazuju pomoću standardnih operacija s matricama, a proširenjem skupa iz kojeg se uzimaju elementi matrice dobiva se struktura vektorskog prostora magičnih kvadrata. Određuje se dimenzija tog prostora i promatraju neki istaknuti potprostori, među kojima se naročito korisnim pokazuje potprostor kvadrata s magičnom konstantom jednakom 0. Svaki magični kvadrat ima jednoznačan rastav kao zbroj jednog magičnog kvadrata čiji su svi elementi jednaki i jednog s magičnom konstantom 0, a spektar ovog potonjeg usko je povezan sa spektrom početnog magičnog kvadrata.

U petom poglavlju, nakon uvodnih primjera spektra i svojstvenih vektora magičnih kvadrata, prikazani su rezultati o posebnim vrstama magičnih kvadrata koji su centrosimetrični odnosno koso centrosimetrični. Parnost reda matrice bitno utječe na spektar te su centrosimetrični magični kvadrati parnog reda nužno singularne matrice, dok se za neparni red, koji je pritom prost broj, uvijek mogu konstruirati klasični magični kvadrati tog tipa koji su uz to regularne matrice. Poglavlje završava razmatranjem inverzne matrice regularnog centrosimetričnog magičnog kvadrata.

Zaključno, vidimo da su gotovo svi osnovni pojmovi i rezultati iz linearne algebre primjenjivi na magične kvadrate, a iz literature je poznato da su mogućnosti primjene još znatno veće te dovode do zanimljivih primjera i teorema o magičnim kvadratima.

Poglavlje 1

Magični kvadrati

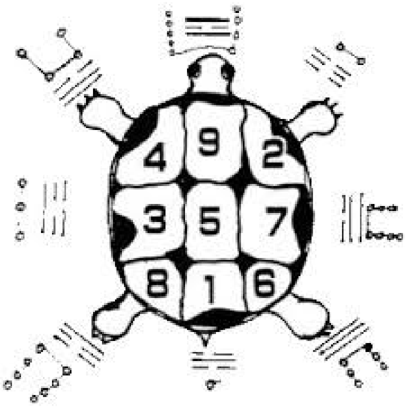
1.1 Iz povijesti magičnih kvadrata

Magični kvadrati stoljećima su zaokupljali pozornost matematičara, ali su poticali radoznalost i maštu znatno šireg kruga publike - ljubitelja enigmatike, sljedbenika numerologije i gatanja, osoba sklonih vjerovanju u mistične pojave i čarolije, kao i umjetnika. Iznimno skladan raspored brojeva koji obiluje različitim pravilnostima, zajedno s vizualnim dojmom višestruke simetričnosti od davnina je navodio ljude da takvim kvadratima pripisuju čarobna svojstva (zaštita od nesreća i bolesti, utjecaj na prirodne pojave, poboljšanje izgleda za uspješnost poslova itd.) pa se tako naziv "magični" uvriježio kroz povijest i u službenoj matematičkoj terminologiji.

Već u davnoj prošlosti zabilježeni su pojedinačni primjeri iz kojih se s vremenom razvilo sustavno proučavanje magičnih kvadrata, u različitim smjerovima. Poseban interes za magične kvadrate bio je izražen u Kini, zatim Japanu i Indiji.

Postoji legenda od otprilike 650 godina prije Krista koja kaže da je u trenutku kad je kineski car Yu šetao uz Žutu rijeku iz vode isplivala kornjača na čijem se oklopu razabirala tablica s tri reda i tri stupca u kojoj su bile raspoređene točke. Pobližim promatranjem tablice na oklopu, car je otkrio da je zbroj točaka u svakom retku, svakom stupcu i na obje dijagonale jednak te iznosi 15. Pouzdani zapisi magičnih kvadrata reda 3 i 4 potječu iz 2. stoljeća (Kina) i 6. stoljeća (Indija), a u jednoj povijesno značajnoj enciklopediji na arapskom jeziku nastaloj u 10. stoljeću u Bagdadu navedeni su magični kvadrati svih redova od 3 do 9. Uglavnom iz arapskih izvora magični kvadrati pojavili su se i u Europi, naročito u doba renesanse. Brojni su primjeri kako se proučavanje magičnih kvadrata razvijalo u mnogim vodećim kulturama oko 11. i 12. stoljeća, kad je ta tematika prerasla i u sustavno istraživanje metoda konstrukcije, obogaćeno promatranjem različitih posebnih tipova kvadrata s dodatnim svojstvima. Oko 14. - 15. stoljeća sve više se zanemaruju "mistični", a prevladavaju matematički aspekti magičnih kvadrata.

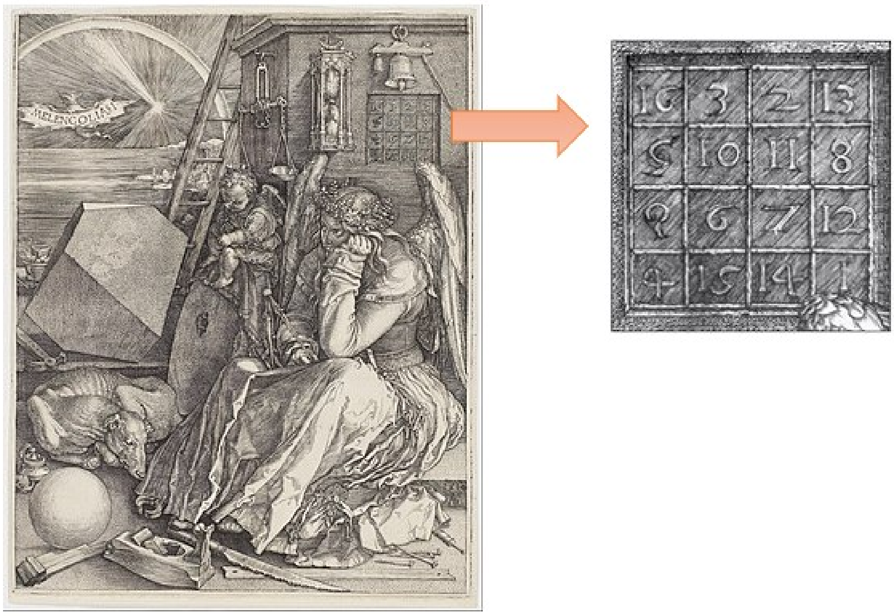
Slika 1.1: Lo Shu kvadrat na oklopu kornjače



Slika 1.2: Brojevi ispisani na oklopu kornjače (Lo Shu)

Albrecht Dürer i njegov magični kvadrat

Istaknimo, jedan od najpoznatijih magičnih kvadrata jest kvadrat četvrtog reda kojeg moguće vidjeti na slici 1.3 u gornjem desnom uglu na djelu Melancolia I, bakrorezu njemačkog umjetnika Albrechta Dürera. Djelo je nastalo 1514. godine što se može vidjeti u zadnjem redu magičnog kvadrata, gdje u srednja dva kvadratića nalazimo brojeve 15 i 14.



Slika 1.3: Najpoznatiji magični kvadrat (Melancolia I, Albrecht Dürer)

Zbroj elemenata u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale iznosi 34. Uz to kod Dürerovog magičnog kvadrata taj zbroj je moguće pronaći i na drugim mjestima u magičnom kvadratu. Vidimo da četiri kvadratića u sredini daju zbroj 34, četiri kvadratića u kutovima daju zbroj 34. Zbroj srednja dva broja u prvom i srednja dva broja u zadnjem iznosi 34. Također, sva četiri kvadrata 2×2 imaju zbroj 34. Kako god da se zbroji uvijek se dobije broj 34. Zanimljivo je još da je Dürer u donjem redu magičnog kvadrata, osim godine kada ga je osmislio djelo (1514.), dodao i redne brojeve abecede početnih slova svoga imena i prezimena (4=D) i (1=A).

U 18. i 19. stoljeću u Europi se objavljuju brojni ozbiljni i opsežni radovi na temu magičnih kvadrata. Zanimanje za magične kvadrate nije popustilo niti s razvojem moderne matematike, nego se štoviše pojačalo, dijelom zahvaljujući novim teorijskim spoznajama, proširivanju područja primjene te uporabi računala. Obilje otvorenih problema iz područja magičnih kvadrata i dalje pruža izazov matematičarima. Više o povijesi magičnih kvadrata je moguće pročitati u [1].

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

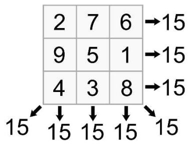
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1.2 Posebni tipovi i jednostavna svojstva

Općenito, magični kvadrat je kvadratna tablica u koju upisujemo zadane brojeve tako da u svakom retku, svakom stupcu i na svakoj dijagonali zbroj upisanih brojeva bude jednak. Taj broj nazivamo magičnim brojem ili magičnom konstantom.



Slika 1.4: Primjer magičnog kvadrata

Proučavajući magične kvadrate, ljudi su uočili da razni magični kvadrati imaju različita, vrlo zanimljiva svojstva. Navedimo neke tipove magičnih kvadrata opisanih u [10] koje ćemo koristiti u narednim poglavljima.

- Normalni
- Opći
- Polumagični
- Simetrični
- Pandijagonalni

Normalni magični kvadrat

Normalni magični kvadrat je kvadratna tablica u kojem su upisani brojevi od 1 do n^2 tako da je zbroj upisanih brojeva u svakom retku, svakom stupcu i na obje dijagonale jednak.

Opći magični kvadrat

Za razliku od normalnih magičnih kvadrata u općim magičnim kvadratima upisani su bilo koji prirodni brojevi tako da je zbroj elemenata u svakom retku, stupcu i u objema dijagonalama jednak.

Polumagični kvadrat

U polumagičnom kvadratu je zbroj elemenata u svakom retku i stupcu jednak, no na dijagonalama zbroj elemenata ne mora nužno biti jednak magičnoj konstanti.

Simetrični magični kvadrat

Magični kvadrat je simetričan ako svaki par centralno simetričnih elemenata magičnog kvadrata u zbroju daje $n^2 + 1$, pri čemu je n dimenzija magičnog kvadrata. Primjer simetričnog magičnog kvadrata je već spomenuti Durerov magični kvadrat 4×4.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Broju 16 centralno je simetričan broj 1, broju 5 centralno je simetričan broj 12 i tako dalje. Možemo uočiti kako se parovi centralno simetričnih elemenata magičnog kvadrata nalaze na jednakim udaljenostima od središta kvadrata.

Pandijagonalan magični kvadrat

Kažemo da je magični kvadrat pandijagonalan ako uz to što je zbroj elemenata u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale jednak vrijedi da je i zbroj elemenata na sporednim "izlomljenim" dijagonalama također jednak magičnoj konstanti.

18	22	10	14	1
9	11	3	17	25
2	20	24	6	13
21	8	12	5	19
15	4	16	23	7

Na primjeru možemo vidjeti da zbroj elemenata na "izlomljenoj" dijagonali iznosi 21+20+3+14+7=65 što je jednako magičnoj konstanti magičnog kvadrata dimenzije 5.

Svojstva magičnih kvadrata

1. Dodavanjem istog broja n svakom elementu magičnog kvadrata 3×3 s magičnom konstantom μ dobivamo magični kvadrat s magičnom konstantom $\mu + 3n$. Pretpostavimo da imamo magični kvadrat 3×3 i tri broja u nekom retku, stupcu ili dijagonali koji su predstavljeni varijablama a, b i c.

a		
	b	
		c

Kvadrat 1

Za dani magični kvadrat označimo magičnu konstantu s μ. Prema definiciji magičnog kvadrata vrijedi da je:

$$a + b + c = \mu$$

Pretpostavimo da smo svakom elementu u Kvadratu 1 dodali isti broj n, pa dobivamo novi Kvadrat 2.

$a+n$		
	$b+n$	
		$c+n$

Kvadrat 2

Sada je zbroj elemenata na dijagonali jednak:

$$(a + n) + (b + n) + (c + n).$$

Koristeći svojstva komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja dobivamo sljedeće:

$$(a + b + c) + (n + n + n).$$

S obzirom da znamo da je $a+b+c = \mu$, te da je $n+n+n = 3n$ pa uvrštavanjem dobivamo da je zbroj elemenata jednak $\mu + 3n$. Budući da ovo vrijedi za svaki redak, stupac ili dijagonalu ovime smo pokazali da je zbroj elemenata u svakom retku, stupcu ili dijagonali magičnog kvadrata 3×3 uvijek isti broj $\mu + 3n$.

Općenito, ako svim članovima magičnog kvadrata dodamo (ili oduzmemo) isti broj, ponovno dobivamo magični kvadrat. Primjerice, imamo magični kvadrat 5×5, magične konstante 65, u kojemu su smješteni prirodni brojevi od 1 do 25. Dodavanjem broja 6 dobivamo magični kvadrat magične konstante 95.

2. Ako sve članove magičnog kvadrata s magičnom konstantom μ pomnožimo istim brojem k, dobit ćemo magični kvadrat s magičnom konstantom $k \cdot \mu$. Primjerice, imamo magični kvadrat magične konstante 34. Množenjem svakog člana magičnog kvadrata brojem tri dobivamo novi magični kvadrat magične konstante 102.

3. Zbroj (ili razlika) dvaju magičnih kvadrata istog reda opet je magični kvadrat. Zbrajamo (ili oduzimamo) članove na istim koordinatnim mjestima. Primjerice, imamo razliku magičnih kvadrata 3×3, magičnih konstanti 42 i 15. Razlika ima magičnu konstantu 27.

Iz prethodnih svojstava već se naslućuje struktura vektorskog prostora prikladna za magične kvadrate, ukoliko se proširi skup iz kojeg se uzimaju elementi kojima se popunjavaju kvadrati.

1.3 Neke konstrukcije

Nema poznatog sustavnog postupka za konstruiranje svih magičnih kvadrata proizvoljnog reda. Postoje mnoge metode za konstrukciju pojedinih magičnih kvadrata opisane u [3], pa ćemo se ovdje osvrnuti na neke:

Loubére-ova metoda

Za konstruiranje normalnih magičnih kvadrata neparnog reda, jedna od najpoznatijih metoda je **Loubére-ova metoda**. Počinjemo s okvirom praznog kvadrata dimenzije $n \times n$ kojeg ćemo ispuniti brojevima od 1 do n^2 po sljedećim pravilima:

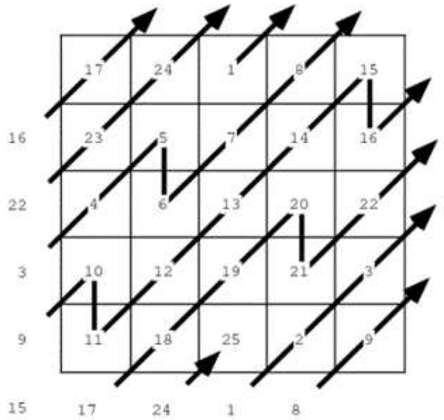
- Prvo se napiše broj 1 u sredini prvog reda.
- Svaki sljedeći broj stavljamo na mjesto dijagonalno gore-desno.
- Ako smo došli do desnog ruba, sljedeći broj ćemo upisati na mjesto u krajnju lijevu kolonu i jedan red iznad.
- Ako smo došli do gornjeg ruba, sljedeći broj ćemo smjestiti na mjesto u najdonji red i jedan stupac desno.
- Ako je mjesto u kvadratu zauzeto, npr. ako je mjesto gdje želimo staviti broj k+1 zauzeto, onda ćemo broj k+1 smjestiti direktno ispod broja k u kvadratu.

Sada ćemo pokazati kako konstruirati magični kvadrat reda 5.

Broj 1 ćemo smjestiti u sredinu prvog reda. S obzirom da smo došli do gornjeg ruba, broj 2 ćemo smjestiti u najdonji red i jedan stupac desno. Broj 3 ćemo smjestiti dijagonalno gore-desno. Sada smo došli do desnog ruba, pa ćemo broj 4 smjestiti u krajnju lijevu kolonu i jedan red iznad. Broj 5 ćemo smjestiti dijagonalno gore-desno. Sada bi broj 6 trebali staviti na mjesto gdje se nalazi broj 1, kako je to mjesto zauzeto smjestit ćemo ga ispod broja 5. Broj 7 ćemo smjestiti dijagonalno gore-desno. Također i broj 8 ćemo smjestiti dijagonalno gore-desno.

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

Konstrukcija magičnog kvadrata



Popunjavanje

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Popunjeni magični kvadrat

Lako se možemo uvjeriti da je ovo doista magični kvadrat. Kako bi se uvjerili, provjerite da je zbroj elemenata po recima i stupcima te zbroj elemenata na dijagonalama jednak te iznosi 65.

Prouhet-ova metoda

Ovu metodu koristimo za konstruiranje magičnih kvadrata dvostruke parne dimenzije. Pod dvostrukom parnom dimenzijom misli se na kvadrate čija je dimenzija djeljiva s 4. Ovdje spadaju magični kvadrati dimenzija 4, 8, 12, 16 i tako dalje.
Metodu ćemo objasniti na magičnom kvadratu dimenzije 4. Prvo na magičnom kvadratu označimo mjesta koja se nalaze na dijagonali.

·			·
	·	·	
	·	·	
·			·

Magični kvadrat ispunimo brojevima koji označavaju koordinatu tog mjesta u kvadratu.

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Zatim na preostala mjesta redom upisujemo brojeve koji su ostali, ali ih stavljamo u magični kvadrat obrnutim redoslijedom, od najvećeg do najmanjeg.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Može se lako provjeriti da je ovo magični kvadrat, tj. da je zbroj upisanih brojeva u svakom retku, svakom stupcu i na obje glavne dijagonale jednak. U pravilu, ovom metodom možemo dobiti magične kvadrate reda $2^n \times 2^n$ za sve $n \geq 2$.
U nastavku rada magične kvadrate ćemo gledati kao kvadratne matrice nad poljem realnih brojeva. Posebno, po potrebi ćemo isticati ako su magični kvadrati popunjeni elementima nekog drugog skupa. Kao pripremu za daljnji rad, u sljedećem poglavlju izložiti ćemo osnovne pojmove i definicije iz Linearne algebre.

Poglavlje 2

Linearna algebra

Predznanje linearne algebre koje nam je potrebno za ovaj rad većim je dijelom sadržano u kolegijima iz tog područja na studiju matematike pa ćemo osnovne pojmove i činjenice ovdje smatrati poznatima. Ipak, radi potpunosti izlaganja navest ćemo dio gradiva iz [4] i [5] u sažetom obliku, a posebno naglasiti neke dijelove koji nisu zastupljeni u standardnim kolegijima na prvim godinama studija.

2.1 Vektorski prostor

Definicija 2.1.1 Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kaže se da je uređena trojka $(V, +, \times)$ *vektorski prostor* nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in V$;

(2) $\exists 0 \in V$ sa svojstvom $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V$;

(3) $\forall a \in V, \exists -a \in V$ tako da je $a + (-a) = -a + a = 0$;

(4) $a + b = b + a, \forall a, b \in V$;

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$;

(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$;

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V$;

(8) $1 \cdot a = a, \forall a \in V$.

Elementi vektorskog prostora V nazivaju se vektori, a neutralni element za operaciju zbrajanja u svojstvu (2) naziva se nulvektor koji označavamo samo s 0.

Definicija 2.1.2 Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Izraz oblika $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$, pri čemu je $a_1, a_2, \cdots, a_k \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se *linearna kombinacija vektora* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$.
Odsad ćemo opći vektorski prostor označavati s V i podrazumijevati da je to prostor nad poljem $\mathbb{F}$. (Za naše potrebe bit će dostatno razmatrati polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ i polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.)

Konačan neprazan podskup vektorskog prostora V je *linearno nezavisan*, ako linearna kombinacija njegovih elemenata može biti jednaka nulvektoru samo na trivijalan način, to jest tako da svi koeficijenti u linearnoj kombinaciji budu jednaki 0.

Skup svih linearnih kombinacija vektora nekog podskupa $S \subseteq V$, ne nužno konačnog, naziva se *linearna ljuska* skupa S i označava se s $[S]$. Ako je $[S] = V$, kažemo da je S sustav izvodnica (generatora) vektorskog prostora V. Nadalje, V je *konačnogenerirani prostor* ako u njemu postoji neki konačan sustav izvodnica.

Konačan sustav izvodnica vektorskog prostora V koji je uz to i linearno nezavisan naziva se baza vektorskog prostora V. Baza B prostora V karakterizirana je svojstvom da svaki vektor prostora ima jednoznačan prikaz u obliku linearne kombinacije vektora iz B. Jednoznačnost prikaza proizlazi iz linearne nezavisnosti, a to svojstvo zapravo je ekvivalentno jednoznačnosti prikaza nulvektora 0. Vektorski prostor koji posjeduje bar jednu bazu naziva se *konačnodimenzionalnim prostorom*. Svaki konačnogenerirani vektorski prostor ujedno je i konačnodimenzionalan, jer se konačan sustav izvodnica može reducirati do baze.

Posebno, vektorski prostor $\{0\}$ smatra se konačnodimenzionalnim po definiciji (iako je jednak linearno zavisnom jednočlanom skupu $\{0\}$ te nema bazu).

Teorem 2.1.3 Sve baze konačnodimenzionalnog vektorskog prostora su jednakobrojne.

Na temelju ovog teorema uvodi se ključni pojam *dimenzije* konačnodimenzionalnog vektorskog prostora, kao broj elemenata (bilo koje) njegove baze. Ako vektorski prostor V ima bazu koja se sastoji od n vektora ($n \in \mathbb{N}$) pišemo $\dim V = n$. Iznimno, za vektorski prostor $\{0\}$ uzima se po definiciji da mu je dimenzija jednaka 0.

Za određivanje dimenzije nekog konačnodimenzionalnog prostora dovoljno je, dakle, pronaći jednu njegovu bazu.

Svaki linearno nezavisni podskup konačnodimenzionalnog prostora može se proširiti do baze prostora (i to proširenje nije jednoznačno).

Potprostor L vektorskog prostora V je podskup $L \subseteq V$ koji je i sam vektorski prostor s obzirom na operacije zbrajanja i množenja skalarom naslijeđene iz prostora V. (Naslijeđene operacije su restrikcije odgovarajućih preslikavanja na $L \times L$ odnosno $\mathbb{F} \times L$ te moraju poprimati vrijednosti u podskupu L, kako bi to bio potprostor).

Svaki vektorski prostor V ima trivijalne potprostore $\{0\}$ i V.

Za potprostor L prostora V piše se $L \leq V$.

Linearna ljuska $[S]$ bilo kojeg podskupa $S \subseteq V$ je potprostor od V, dakle uvijek je $[S] \leq V$.

Štoviše, podskup $S \subseteq V$ je potprostor od V ako i samo ako vrijedi $S = [S]$.

Za ispitivanje je li neki podskup $S \subseteq V$ ujedno i potprostor dovoljno je stoga provjeriti sadrži li S sve linearne kombinacije svojih elemenata (dakle, je li S "zatvoren" s obzirom na linearne kombinacije).

Pojam potprostora odnosi se na vektorske prostore bez pretpostavke o konačnodimenzionalnosti, no važna je činjenica da je svaki potprostor L konačnodimenzionalnog prostora V i sam konačnodimenzionalan te vrijedi dim $L \leq$ dim V.

Pritom za potprostor L vrijedi da je $L = V$ ako i samo ako je dim L = dim V.

Najvažniji primjeri konačnodimenzionalnih vektorskih prostora su prostori uređenih n-torki skalara iz polja $\mathbb{F}$, u oznaci $\mathbb{F}^n$, za bilo koje polje $\mathbb{F}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$. Očito je dim $\mathbb{F}^n = n$, jer takav prostor ima kanonsku bazu sastavljenu od vektora $e_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ koji imaju i-tu komponentu (ili koordinatu) jednaku 1, a ostale 0, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Prikaz vektora iz $\mathbb{F}^n$, u ovoj bazi vidi se izravno, jer je $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) = \sum \alpha_i e_i$.

Svaki konačnodimenzionalni prostor V dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ izomorfan je s prostorom $\mathbb{F}^n$, što se lako ustanovi pomoću prikaza vektora iz V u bilo kojoj njegovoj bazi.

Skup rješenja svakog homogenog sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{F}$ je jedan potprostor vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$ (moguće trivijalan, $\{(0, 0, ..., 0)\}$). Obrnuto, svaki potprostor od $\mathbb{F}^n$ može se zadati kao skup rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi.

Suma potprostora $L, M \leq V$ definira se kao potprostor $L + M = [L \cup M]$. Lako se pokaže da je $L + M = \{a + b \mid a \in L, b \in M\}$.Ako su L i M konačnodimenzionalni potprostori, za dimenziju sume $L + M$ vrijedi

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M).$$

Važan je poseban slučaj kada je $L \cap M = \{0\}$. Suma se tada naziva direktna suma te vrijedi

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M.$$

2.2 Matrice

Iako pojam matrice možemo smatrati dobro poznatim, kao i sva osnovna svojstva matrica i operacija s matricama, budući da magične kvadrate promatramo kao posebni tip matrica, ukratko ćemo iznijeti osnovne pojmove, oznake i činjenice. Radi jednostavnosti, u ovom kontekstu ograničit ćemo se uglavnom na kvadratne matrice.

Definicija 2.2.1 Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Preslikavanje

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

naziva se *matrica* tipa (m, n) (ili $m \times n$) s koeficijentima (ili elementima) iz polja $\mathbb{F}$. Skup svih takvih označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$. Dakle, matrica A uređenom paru (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, pridružuje neki skalar iz polja $\mathbb{F}$. Uobičajeno je te funkcijske vrijednosti $A(i, j)$ označiti s a_{ij} te ih zapisati u pravokutnu shemu, odnosno tabelarno na sljedeći način

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Umjesto uglatih zagrada često koristimo i okrugle zagrade. Elementi matrice A raspoređeni su u m redaka i n stupaca.

Ako je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, onda uređenu n-torku $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ zovemo *glavnom dijagonalom* (ili samo dijagonalom) matrice A. Uređenu n-torku $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1})$ zovemo *sporednom dijagonalom* matrice A.

Matrica tipa (n, n) naziva se *kvadratna matrica* reda n. Skup svih matrica reda n s elementima iz $\mathbb{F}$ označavamo s $M_n(\mathbb{F})$. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, reda n definira se njezin *trag* kao suma elemenata na glavnoj dijagonali, pišemo: $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Sada ćemo uvesti osnovne operacije s matricama - zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom. Operacije se definiraju prirodno - po elementima matrice što je u skladu s činjenicom da smo matrice definirali kao preslikavanja.

Definicija 2.2.2 Zbroj matrica $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ tipa (m, n) je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, n) za čije elemente vrijedi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

za sve $i = 1, \cdots, m$ i $j = 1, \cdots, n$. Pišemo $C = A + B$.

Napomenimo da ne definiramo zbroj matrica različitog tipa.

Definicija 2.2.3 Umnožak matrice $A = [a_{ij}]$ tipa (m, n) skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$ je matrica $B = [b_{ij}]$ tipa (m, n) za čije elemente vrijedi

$$b_{ij} = \lambda a_{ij},$$

za sve $i = 1, \cdots, m$ i $j = 1, \cdots, n$. Pišemo $B = \lambda A$.

Teorem 2.2.4 Skup matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$ uz operacije zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ čija je dimenzija jednaka $m \cdot n$. Posebno, $\dim M_n(\mathbb{F}) = n^2$.

Uz zbrajanje i množenje skalarom može se definirati i množenje matrica. Za razliku od zbrajanja, koje je binarna operacija na svakom od prostora M_{mn}, množenje matrica je operacija u kojoj, općenito, ni faktori, ni rezultat nisu matrice istog tipa. Kako bismo definirali pojam umnoška matrica uvodimo pojam ulančanih matrica.

Definicija 2.2.5 Kažemo da su matrice A i B *ulančane* ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.

Definicija 2.2.6 Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ ulančane matrice tipa (m, n) i (n, p), respektivno. Umnožak matrica A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, p) čiji su elementi dani sljedećom formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

za $i = 1, \cdots, m$ i $j = 1, \cdots, p$.

Iz definicije je jasno da množenje matrica nije komutativna operacija. Naime, promatramo li proizvoljne ulančane matrice A i B, umnožak BA ne samo da općenito neće biti jednak AB, nego možda uopće nije ni definiran.

Istaknimo sada neke važnije tipove matrica koje se odlikuju nekim specifičnim svojstvom.

Definicija 2.2.7 Matrica reda n

- $D = (d_{ij})$ je *dijagonalna* ako je $d_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$.
- $S = (s_{ij})$ je *skalarna* ako je dijagonalna i $s_{ij} = \alpha$ za sve $i = 1, 2, \cdots, n$.
- $I = (\delta_{ij})$ je *jedinična* ako je dijagonalna i $\delta_{ij} = 1$ za sve $i = 1, 2, \cdots, n$.
- $G = (g_{ij})$ je *gornjetrokutasta* ako je $g_{ij} = 0$ za $1 \leq j < i \leq n$, odnosno ako su svi elementi matrice ispod glavne dijagonale jednaki nuli.
- $H = (h_{ij})$ je *donjetrokutasta* ako je $h_{ij} = 0$ za $1 \leq i < j \leq n$, odnosno ako su svi elementi matrice iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Skup svih dijagonalnih matrica reda n, skup svih skalarnih matrica reda n, skup svih gornjetrokutastih (donjetrokutastih) matrica reda n predstavljaju vektorske potprostore od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzija n, 1 i $\frac{n(n+1)}{2}$, respektivno. Zaista, lako se ustanovi da su gornji skupovi zatvoreni na zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom.

Spomenimo još kako je vektorski prostor kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{F})$ primjer strukture koja se naziva *asocijativna algebra s jedinicom*. Naime, algebra je svaki vektorski prostor s definiranim tzv. bilinearnim množenjem (to jest množenjem koje zadovoljava svojstva distributivnosti i kvaziasocijativnosti). Budući je množenje još i asocijativno, dobiva pridjev asocijativna, te zbog postojanja neutralnog elementa množenja I ističemo i ono s jedinicom.

Definicija 2.2.8 Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$. *Transponirana matrica* matrice A je matrica $B = [b_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ za čije elemente vrijedi $b_{ij} = a_{ji}$, za sve $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Pišemo $B = A^T$. Zapravo retci matrice A predstavljaju stupce matrice A^T i obratno.

Vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(A + B)^T = A^T + B^T, \ \forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$,

(2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall A \in M_{mn}(\mathbb{F})$,

(3) $(AB)^T = B^T A^T,\ \forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$,

(4) $(A^T)^T = A,\ \forall A \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

Definicija 2.2.9 Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je *simetrična* ako vrijedi $A = A^T$, odnosno *antisimetrična* ako je $A = -A^T$. Simetrične matrice čine potprostor dimenzije $\frac{n(n+1)}{2}$, dok antisimetrične matrice čine potprostor dimenzije $\frac{n(n-1)}{2}$.

Inverzna matrica i rang matrice

Definicija 2.2.10 Kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je *invertibilna* ili *regularna* ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Matricu B zovemo *inverznom matricom* od A. Ako inverzna matrica postoji onda je ona jedinstvena, te se označava s $B = A^{-1}$. Kvadratna matrica koja nije regularna, naziva se *singularna matrica*.

Dodajmo još kako je skup svih invertibilnih matrica u $M_n(\mathbb{F})$ grupa s obzirom na množenje.

Posebno, umnožak invertibilnih matrica je invertibilna matrica. Vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Napomena: Valja naglasiti da se ponekad isti izraz koristi za neki posebni tip kvadratne matrice, odnosno posebni tip magičnog kvadrata, ali u različitom smislu. Primjerice, simetrična matrica i simetrični magični kvadrat sasvim su različiti pojmovi, kao i regularna matrica i regularni magični kvadrat, te normalna matrica i normalni magični kvadrat. Treba pripaziti kakav je smisao pojedinog atributa u određenom kontekstu.

Definicija 2.2.11 Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i neka su $S_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, S_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m1}(\mathbb{F})$ njezini stupci. *Rang matrice* A, u oznaci $r(A)$, definira se formulom $r(A) = \dim[\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}]$. Odnosno, vidimo da je rang matrice A zapravo maksimalan broj njezinih linearno nezavisnih stupaca.

Napomenimo kako se rang matrice može izračunati i pomoću redaka, jer vrijedi teorem koji kaže da linearna ljuska redaka matrice u prostoru $M_{1n}(\mathbb{F})$ ima dimenziju također jednaku $r(A)$. Naime, vrijedi $r(A) = r(A^T)$.

Rang matrice ima posebno važnu ulogu, iz više razloga, a neki od njih su sljedeći:

(1) Kvadratna matrica reda n invertibilna je ako i samo ako joj je rang jednak n, to jest ako ima maksimalnu vrijednost.

(2) Skup svih rješenja homogene matrične jednadžbe $AX = 0$, pri čemu su X i $0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$, potprostor je vektorskog prostora $M_{n1}(\mathbb{F})$. Dimenzija tog potprostora naziva se defekt matrice A,

u oznaci $d(A)$. Teorem o rangu i defektu govori da uvijek vrijedi $r(A) + d(A) = n$. Ta činjenica bitna je kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi jer se tada sustav može ekvivalentno zapisati u matričnom obliku kao $AX = B$.

Determinanta matrice

I pojam determinante možemo smatrati opće poznatim, pa ćemo se samo ukratko prisjetiti definicije determinante kvadratne matrice i oznake, te istaknuti neka njena svojstva. Ovdje nam je determinanta prikladna za karakterizaciju regularnih matrica.

Definicija 2.2.12 Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Determinanta matrice* A je skalar iz polja $\mathbb{F}$ koji se definira kao

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (\mathrm{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}, \tag{2.1}$$

gdje je S_n grupa permutacija skupa $1, 2, \cdots, n$, a sign p $\in \{1, -1\}$ predznak permutacije.

Dakle, determinanta je preslikavanje

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, A \to \det A$$

zadano pomoću (2.1).

Determinanta matrice A zapisuje se također kao kvadratna tablica poput matrice A ali je ta tablica omeđena vertikalnim crtama, a ne okruglim ili uglatim zagradama:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Podsjetimo se nekih osnovnih svojstava determinante.

Propozicija 2.2.13 Vrijedi:

(1) Ako matrica A ima neki redak ili stupac u kojem su svi elementi jednaki nuli, onda je $\det A = 0$. Posebno, determinanta nulmatrice je 0.

(2) Ako je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ gornjetrokutasta (ili donjetrokutasta) matrica, onda je

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Specijalno, determinanta jedinične matrice je $\det I = 1$.

Propozicija 2.2.14 Transponiranjem matrice se ne mijenja determinanta, to jest $\det A = \det A^T$.

Propozicija 2.2.15 Matrica A je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Teorem 2.2.16 Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(1) A je regularna,

(2) $r(A) = n$,

(3) $\det A \neq 0$.

Teorem 2.2.17(Binet-Cauchy). Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

2.3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

S obzirom da se u narednim poglavljima bavimo svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima magičnih kvadrata, korisno je prisjetiti se nekih osnovnih pojmova, oznaka i definicija. Budući da ovdje promatramo samo matrice, ne povezujući ih s linearnim operatorima, svojstveni vektori će biti neke jednostupčane matrice, pa ćemo u svim iskazima podrazumijevati taj pristup.

Definicija 2.3.1 Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je *svojstvena* ili *karakteristična vrijednost* matrice A ako postoji vektor $x \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $x \neq 0$, takav da vrijedi $Ax = \lambda x$. Taj vektor naziva se *svojstveni* ili *karakteristični vektor* matrice A, pridružen svojstvenoj (karakterističnoj) vrijednosti λ.

Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se *spektar* (matrice A) i označava sa $\sigma(A)$.

Definicija 2.3.2 Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se *karakteristični* ili *svojstveni* polinom matrice A.

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Za $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi da je $\lambda \in \sigma(A)$ ako i samo ako je λ nultočka polinoma $k_A(\lambda)$. Drugim riječima, svojstvene vrijednosti matrice A upravo su nultočke njenog karakterističnog polinoma. Napomenimo da matrica ne mora imati nijednu svojstvenu vrijednost, tj. da može biti $\sigma(A) = \emptyset$.

Lako se pokazuje da slične matrice imaju jednaki karakteristični polinom, pa stoga imaju i jednaki spektar. Nadalje, matrica A ima svojstvenu vrijednost 0 ako i samo ako je singularna, jer $\det(A - 0 \cdot I) = \det A = 0$.

S druge strane, ako je A regularna matrica onda je $\lambda \in \sigma(A)$ ako i samo ako je $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$. To slijedi iz toga što je $Ax = \lambda x \iff A^{-1}(Ax) = \lambda A^{-1}x \iff x = \lambda A^{-1}x \iff A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$. Pritom svojstveni vektor $x \neq 0$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ ujedno je pridružen i svojstvenoj vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$.

Vektor $x \neq 0$ koji zadovoljava $Ax = \lambda x$ je *desni svojstveni vektor* matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, a vektor $y \neq 0$ koji zadovoljava $y^T A = \lambda y^T$ je *lijevi svojstveni vektor* matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Možemo vidjeti kako je y zapravo desni svojstveni vektor matrice A^T.

$$A^T y = \lambda y$$

$$(A^T y)^T = (\lambda y)^T$$

$$y^T(A^T)^T = \lambda y^T$$
$$y^T A = \lambda y^T$$

U nekim slučajevima desni i lijevi svojstveni vektori su jednaki. Na primjer, ako je matrica simetrična.

Teorem 2.3.3 (Princip biortogonalnosti). Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ pri čemu je $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tada svaki lijevi svojstveni vektor matrice A s pridruženom svojstvenom vrijednošću λ_1 je ortogonalan na svaki desni svojstveni vektor matrice A s pripadnom svojstvenom vrijednošću λ_2.

Jordanova forma matrice

Kažemo da se matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ može dijagonalizirati ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici $D \in M_n(\mathbb{F})$. Vrijedi teorem da se matrica može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza prostora $M_{n1}(\mathbb{F})$ koja se sastoji od svojstvenih vektora matrice A. Općenito se ne može svaka kvadratna matrica dijagonalizirati nad poljem $\mathbb{R}$, ali to svojstvo imaju primjerice, sve simetrične matrice.

Definicija 2.3.4 Jordanov blok $J_k(\lambda)$ je gornjetrokutasta matrica reda k oblika

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Sljedeći Jordanov teorem karakterizira formu matrice koja se, u smislu sličnosti matrica, može općenito postići za bilo koju kvadratnu matricu.

Teorem 2.3.5 Za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ postoji Jordanova kanonska forma J_A, odnosno blok matrica oblika $J_A = \mathrm{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \cdots, J_{k_s}(\lambda_s))$ slična matrici A, pri čemu su λ_i sve svojstvene vrijednosti matrice A. Matrica J_A je jedinstvena, do na poredak blokova.

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Naglasimo da za realnu kvadratnu matricu A ne mora postojati realna Jordanova matrica J_A, ali postoji kompleksna Jordanova matrica slična matrici A.

Poglavlje 3

Magični kvadrati kao matrice

Odsad će se magične kvadrate promatrati kao kvadratne matrice i to u širem smislu definicije magičnih kvadrata. Naime, neće se postavljati uvjet da svi elementi matrice budu međusobno različiti i da poprimaju vrijednosti iz nekog istaknutog podskupa od $\mathbb{R}$, poput $1, 2, \ldots, n^2$, kao što se traži za klasični, tj. normalni magični kvadrat. Na taj način može se promatrati vektorski prostor magičnih kvadrata, te neki njegovi potprostori i podalgebre. Svojstva magičnih kvadrata moći će se definirati i iskazati pomoću poznatih operacija s matricama. Dakako, neki rezultati bit će primjenjivi i za magične kvadrate u izvornom smislu.

3.1 Osnovni pojmovi

Definicija 3.1.1 Za matricu $A = [a_i j] \in M_n(\mathbb{R})$ (ili kraće M_n) kažemo da je *magični kvadrat* ako je zbroj elemenata u svakom njezinom retku, svakom njezinom stupcu, te na glavnoj i sporednoj dijagonali jednak, tj. ako postoji broj $\mu = \mu(A)$ za koji vrijedi

(1) $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $\forall\ i = 1, 2, \ \ldots\ n$

(2) $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, $\forall\ j = 1, 2, \ \ldots\ n$

(3) $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(4) $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$

Broj μ naziva se *magičan broj* ili *magična konstanta*.

U definiciji 3.1.1 sume pod (1) odnosno (2) označavaju sume po recima, odnosno stupcima, a sume pod (3) i (4) označavaju sume na glavnoj i sporednoj dijagonali.

Skup svih magičnih $n \times n$ kvadrata označavamo s MS_n, posebno neka je $MS_n^0 = \{A \in MS_n : \mu(A) = 0\}$.

Definicija 3.1.2. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_n$ kažemo da je *polumagični kvadrat* ako vrijedi (1) i (2). Skup svih takvih matrica označavamo sa SMS_n. Dodatno, neka je $SMS_n^0 = \{A \in SMS_n : \mu(A) = 0\}$.

Neki tipovi magičnih kvadrata iz *Poglavlja 1* mogu se definirati pomoću matrica.

Normalni magični kvadrat je kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in M_n$ u koju su upisani brojevi od 1 do n^2 tako da je zbroj upisanih brojeva u svakom retku, svakom stupcu i na obje dijagonale jednak. Kako odrediti vrijednost magične konstante μ za magični kvadrat dimenzije n?

Kreće se od zbroja prvih n^2 članova aritmetičkog niza, tj. $1 + 2 + \cdots + n^2$.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza računa se po formuli $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, odnosno $S_{n^2} = \frac{n^2}{2}(1 + n^2)$. Iznos magične konstante dobiva se ako se prethodni rezultat podijeli brojem n, $\mu = \frac{S_{n^2}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{2}(1 + n^2) = \frac{n(1+n^2)}{2}$.

Primjenom navedene formule dolazimo do sljedeće tablice:

Red magičnog kvadrata	3	4	5	6	7	8	9	10
Magična suma	15	34	65	111	175	260	369	505

Da ne bi dolazilo do zabune, mora se napomenuti kako normalni magični kvadrat nije isto što i normalna matrica.

Za razliku od normalnih magičnih kvadrata u općim magičnim kvadratima upisani su bilo koji prirodni brojevi tako da je zbroj elemenata u svakom retku, stupcu i u objema dijagonalama jednak. Tada se magična konstanta ne može izračunati po gornjoj formuli.

Magični kvadrat s magičnom konstantom μ je *simetričan* ako vrijedi:

$$a_{i,j} + a_{n-i+1,n-j+1} = \frac{2\mu}{n}$$

za svaki $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, n$.

Također, i ovdje je važno naglasiti kako simetričan magični kvadrat nije isto što i simetrična matrica, iako magični kvadrat jest matrica. U literaturi [9] se ovaj magični kvadrat još naziva i regularan magični kvadrat, što također nije isto što i regularna matrica.

Sada ćemo magični kvadrat definirati koristeći svojstva operacija s matricama. Pisanje definicije na ovaj način omogućava nam daljnje jasnije iskazivanje dokaza.

Definicija 3.1.3 Magični kvadrat A reda n je matrica $n \times n$ u koju su upisani bilo koji realni brojevi sa sljedećim svojstvima:

$$e_i^T A e = \mu \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

$$e^T A e_j = \mu \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

$$\text{tr}A = \mu \tag{3.3}$$

$$\text{tr}(JA) = \mu \tag{3.4}$$

pri čemu je μ magična suma, stupčasti vektor e_i je standardni vektor baze u $\mathbb{R}^n$ koji ima sve nule osim i-tog elementa koji je 1, te stupčasti vektor e u $\mathbb{R}^n$ kojem su svi elementi 1.

Jednadžbe (3.1) i (3.2) govore da zbroj u svakom retku odnosno stupcu mora biti μ.

Jednadžbe (3.3) i (3.4) govore da zbroj na glavnoj i sporednoj dijagonali također mora biti jednak μ. Ovakav način definiranja je opisan u [9].

Pokažimo da je ovakvo definiranje doista ekvivalentno onoj definiciji s početka.

$$e_1^T Ae = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \mu, \text{pri čemu je} \quad i = 1$$

$$e_2^T Ae = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \mu, \text{pri čemu je} \quad i = 2$$

Analogno pokažemo za preostale retke matrice.

$$e_1^T Ae = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \mu, \text{pri čemu je} \quad j = 1$$

$$e_1^T Ae = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \mu, \text{pri čemu je} \quad j = 2$$

Definicija 3.1.4 Neka je J kvadratna matrica reda n definirana kao

$$J_n = \begin{cases} 1, & \text{ako } i + j = n + 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Također, vrijedi da je $J^2 = I$ pa je i $J = J^{-1} = J^T$.

Množimo li matricu A slijeva s matricom J promijeniti će se redoslijed redaka matrice A.

$$J \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Množimo li matricu A zdesna s matricom J promijeniti će se redoslijed stupaca matrice A.

$$A \cdot J = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Neka je e stupčasti vektor koji sadrži sve jedinice, i neka je $E = ee^T$ kvadratna matrica kojoj su svi elementi jedinice. Lako se pokaže da svaki simetrični magični kvadrat A zadovoljava jednadžbu: $A + JAJ = \frac{2\mu}{n}E$.

$$A + JAJ = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \end{pmatrix} = \frac{2\mu}{n}E$$

Pri čemu je $\mu = 34$ i $n = 4$.

Pomoću permutacijske matrice J možemo dodatno definirati neke ne tako poznate tipove matrica koje zadovoljavaju neka određena svojstva, te će nam biti korisne u daljnjem radu. Neke od njih su *centralno simetrična matrica, kosa centralno simetrična matrica*, te *persimetrična matrica*.

Kvadratna matrica za koju vrijedi da je $JAJ = A$ nazivamo *centralno simetrična matrica*, a kvadratna matrica za koju vrijedi $JAJ = -A$ nazivamo *kosa centralno simetrična matrica*. Za kvadratnu matricu A kažemo da je *persimetrična* ako vrijedi $JAJ = A^T$, odnosno simetrična je s obzirom na sporednu dijagonalu, pa vrijedi da je $a_{ij} = a_{n-j+1,n-i+1}$.

Primjer perisimetrične 4×4 matrice je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Persimetrične matrice imaju primjenu u mnogim područjima kao što su komunikacijske znanosti, statistika, fizika, diferencijalne jednadžbe, numerička analiza, prepoznavanje uzoraka te magični kvadrati kojima se mi ovdje bavimo. Više o ovim matricama moguće je pročitati u [2].

3.2 Magični kvadrati nastali rotacijom i zrcaljenjem

Magični kvadrat ima svojstvo rotacije i zrcaljenja. Možemo ga rotirati za 90, 180 i 270 stupnjeva i njegove elemente možemo zrcalno preslikati oko bilo koje od četiri osi simetrije. Za rezultat ćemo dobiti magični kvadrat u kojem su isti brojevi poredani drugačijim redom. Kompozicijom ovih dviju operacija ponovno možemo dobiti magični kvadrat s istim elementima. Međutim, ako razmišljamo kao o matrici, onda je tih 8 magičnih kvadrata različito ali još uvijek su svi magični kvadrati. Kao što je vidljivo, upotreba matrica je važna i osam povezanih magičnih kvadrati mogu se napisati kao $A, JA, AJ, JAJ, A^T, JA^T, A^T J, JA^T J$.

Na primjer, ako je A Dürerov magični kvadrat prikazan dolje, tada:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}, \quad JA = \begin{bmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{bmatrix}, \quad AJ = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 15 & 4 \end{bmatrix}, \quad JAJ = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 16 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 13 & 8 & 12 & 1 \end{bmatrix}, \quad JA^T = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 12 & 1 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 16 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T J = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 16 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 1 & 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}, \quad JA^T J = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.2.1. Ako je A magični kvadrat onda slijedi da su magični kvadrati i JA, AJ, JAJ, A^T, JA^T, $A^T J, JA^T J$.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da JA zadovoljava svojstva (3.1)-(3.4). Primjenom svojstva (3.1) dobivamo $e_i^T(JA)e = (e_i^T J)Ae = e_{n+1-i}^T Ae = \mu$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Ovdje smo koristili svojstvo da je $e_i^T J = e_{n+1-i}^T$ zato što obrnuta verzija od e_i je e_{n+1-i}.

Slično, za svojstvo (3.2) vrijedi $e^T(JA)e_i = (e^T J)Ae_i = e^T Ae_i = \mu$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ pri čemu je $e^T J = e^T$. Svojstva (3.3) i (3.4) su očito zadovoljena.

Dakle, pokazali smo da je JA magični kvadrat, a dokazi za preostale matrice slični su ovome. □

Poglavlje 4

Vektorski prostor magičnih kvadrata

Lema 4.1 Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$MS_n^0 \leq SMS_n^0 \leq SMS_n \leq M_n \quad \text{i} \quad MS_n^0 \leq MS_n \leq SMS_n \leq M_n.$$

Uočimo kako su skupovi SMS_n^0 i MS_n neusporedivi čim je $n \geq 2$. Zaista, ako je E matrica čiji svi koeficijenti iznose 1, možemo uočiti da je

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in MS_n \backslash SMS_n^0$$

i

$$I - \frac{1}{n}E = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix} \in SMS_n^0 \backslash MS_n$$

Teorem 4.2 Za $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$, MS_n je vektorski prostor.

Dokaz. S obzirom da je $MS_n \leq M_n$, dovoljno je dokazati da je skup MS_n zatvoren na linearne kombinacije svojih elemenata.
Neka su $A, B \in MS_n$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Vrijedi da je

(1) $e_i^T Ae = \mu_1$ i $e_i^T Be = \mu_2$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

$$\begin{aligned} e_i^T(\alpha A + \beta B)e &= (e_i^T \alpha A + e_i^T \beta B)e \\ &= e_i^T \alpha Ae + e_i^T \beta Be \\ &= \alpha(e_i^T Ae) + \beta(e_i^T Be) \\ &= \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \end{aligned}$$

(2) $e^T A e_j = \mu_1$ i $e^T B e_j = \mu_2$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

$$\begin{aligned} e^T(\alpha A + \beta B)e_j &= (e^T \alpha A + e^T \beta B)e_j \\ &= e^T \alpha A e_j + e^T \beta B e_j \\ &= \alpha(e^T A e_j) + \beta(e^T B e_j) \\ &= \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{tr}A = \mu_1$ i $\mathrm{tr}B = \mu_2$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \mathrm{tr}\alpha A + \mathrm{tr}\beta B = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$$

(4) $\mathrm{tr}(JA) = \mu_1$ i $\mathrm{tr}(JB) = \mu_2$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(J(\alpha A + \beta B)) &= \mathrm{tr}(J\alpha A + J\beta B) \\ &= \mathrm{tr}(J\alpha A) + \mathrm{tr}(J\beta B) \\ &= \alpha(\mathrm{tr}(JA)) + \beta(\mathrm{tr}(JB)) \\ &= \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \end{aligned}$$

Dakle, MS_n je vektorski prostor. □

Sjetimo se da je vektorski prostor M_n asocijativna algebra s jedinicom. Općenito, ako je X algebra, za potprostor Y od X kažemo da je podalgebra od X ako je Y zatvoren i na množenje; u tom slučaju Y je i sama za sebe algebra.

Istaknimo kako MS_n nije algebra. Za to nam je dovoljno pogledati sljedeći primjer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in MS_3, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \in MS_3, \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \notin MS_3$$

Budući da je $MS_n \leq M_n$, cilj nam je odrediti dimenziju tog potprostora. Pogledajmo najprije primjer za $n = 3$ iz [7]. Potražimo bazu prostora MS_3. Uočimo tri jednostavna magična kvadrata reda 3 koji čine linearno nezavisan skup:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skup matrica je linearno nezavisan ako i samo ako jedino rješenje homogene jednadžbe $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = 0$ je trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

Odmah vidimo da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Sada je $\dim[M_1, M_2, M_3] = 3$, pa je $\dim MS_3 \geq 3$.

Na primjer, matrica $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ koja je magični kvadrat, se nalazi u ovom trodimenzionalnom prostoru jer vrijedi da je $M = 5M_1 + 3M_2 + M_3$.

Pokažimo da zapravo vrijedi jednakost $\dim MS_3 = 3$.

Jedan način bio bi da pokušamo općenitu matricu $M \in MS_3$ prikazati kao linearnu kombinaciju matrica M_1, M_2 i M_3, što vodi na rješavanje sustava od 9 linearnih jednadžbi s 9 nepoznanica. Lakše će biti pokazati da je upravo MS_3 potprostor rješenja homogenog sustava istih dimenzija (9×9), dobivenog samo postavljanjem uvjeta da matrica

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

bude magični kvadrat. Ovaj uvjet možemo zapisati pomoću sedam linearnih jednadžbi $d + e + f = a + b + c \iff -a - b - c + d + e + g = 0$ i tako dalje.

U matričnom obliku sustav jednadžbi ima ovaj oblik

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ili, kraće, $Ax = 0$. Upravo magični kvadrati čine skup rješenja ove jednadžbe, a to je onda potprostor dimenzije jednake defektu matrice A. Standardnim računanjem ranga dobiva se $r(A) = 6$, pa prema Teoremu o rangu i defektu vrijedi da je $r(A) + d(A) = 9$, odnosno $d(A) = 6$. Stoga je $\dim MS_3 = 3$. Time smo pokazali da tri matrice M_1, M_2, M_3 čine bazu vektorskog prostora MS_3 magičnih kvadrata, te da se svaki magični kvadrat dimenzije tri može na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija ove tri matrice.

Iz ovog primjera ne vidimo općeniti rezultat za $\dim MS_n$, pa ćemo se poslužiti sličnim, ali nešto praktičnijim pristupom.

Propozicija 4.3 Neka je $n \in \mathbb{N}$ .Tada je

$$MS_n = MS_n^0 + [\{E\}] \quad \text{i} \quad SMS_n = SMS_n^0 + [\{E\}]$$

Nadalje, za $A, B \in SMS_n$ vrijedi $AB \in SMS_n$ i $\mu(AB) = \mu(A)\mu(B)$ i zato je SMS_n podalgebra od M_n, tj. i sama za sebe algebra koja sadrži jedinicu I.

Primijetimo da je korisno poslužiti se potprostorom MS_n^0 radi izdašnijeg računa. Za $A \in MS_n$ i $\mu(A) = \mu$ definiramo matricu $Z = A - \frac{\mu}{n}E$. Očito je $Z \in MS_n$ i pritom $\mu(Z) = \mu - \frac{\mu}{n} \cdot n = 0$, pa je $Z \in MS_n^0$. Dakle, svaka $A \in MS_n$ nalazi se u sumi potprostora $MS_n^0 + [\{E\}]$, a ta suma je direktna jer je $\mu(E) \neq 0$. Stoga je $MS_n = MS_n^0 + [\{E\}]$ i dimMS_n =dim$MS_n^0 + 1$.

Pitanje je kako odrediti dimenziju potprostora svih magičnih kvadrata s magičnom konstantom 0. (Za $n = 3$ dobili smo dim$MS_n^0 = 2$).

Propozicija 4.4 Neka je $n \geq 3$. Tada vrijedi da dimenzija prostora MS_n^0 iznosi $n^2 - 2n - 1$.

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}] \in MS_n^0$. Izravno iz uvjeta za magični kvadrat s $\mu(A) = 0$ dobivamo homogeni sustav od $2n + 2$ jednadžbe s n^2 nepoznanica. Elementi matrice sustava su samo 1 i 0. Radi lakšeg razumijevanja prikažimo matricu sustava za $n = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Označimo retke ove matrice s R_1, R_2, ...,R_{2n+2}. Najprije tvrdimo da je skup $\{R_1, R_2, ..., R_{2n-1}\}$ linearno nezavisan. Lako uočavamo da je zbroj prvih n redaka jednak zbroju sljedećih n redaka, to jest $R_1 + ... + R_n = R_{n+1} + ... + R_{2n}$. Naime, zbroj s druge strane daje redak čiji su svi elementi 1. Stoga se npr. R_{2n} može napisati kao linearna kombinacija preostalih $2n - 1$ redaka, pa možemo R_{2n} isključiti iz daljnjeg razmatranja.

Tvrdimo da je skup prvih $2n - 1$ redaka linearno nezavisan. Elementarnim transformacijama možemo matricu tipa $(2n - 1, n^2)$ određenu tim sustavom dovesti do matrice koja u svakom retku ima točno jedan element 1, a svi takvi su u matričnim stupcima pa je rang tada jednak $2n - 1$.

Na primjeru matrice tipa (5,9) za $n = 3$ možemo lakše uočiti potrebne transformacije. Oduzmimo 3. stupac od prva dva stupca, 6.stupac od prethodna dva, 9. stupac od prethodna dva, te zatim 7.stupac od 1. i 4. stupca i 8. stupac od 2. i 5. stupca. Dobivena matrica ima traženi oblik i rang joj je 5.

Nije teško provesti zadani postupak za opći slučaj. Zasad znamo da je rang matrice najmanje $2n-1$, a najviše $2n + 1$. Podužim promatranjem vidi se da je i skup svih $2n + 1$ redaka, nakon uklanjanja R_{2n}, linearno nezavisan pa je dim$MS_n^0 = n^2 - (2n + 1) = n^2 - 2n - 1$. □

Prema *Propoziciji 4.3.* slijedi da je dim$MS_n = (n^2 - 2n - 1) + 1 = n^2 - 2n$.

Napomenimo da se sličnim razmatranjem može pokazati da je $\dim SMS_n^0 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$, te je stoga $\dim SMS_n = n^2 - 2n + 2$. Više o tome je moguće pročitati u [11].

Poglavlje 5

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori magičnih kvadrata

Primjer 1

Neka je A simetričan magični kvadrat zadan kao:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 34$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = -8$, $\lambda_4 = 0$. Slijedi da su pripadni svojstveni vektori $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kako bi bili dosljedni označimo da je $\mu = \lambda_1$ i $e = x_1$. Prije svega uočimo kako je zbroj elemenata svakog svojstvenog vektora jednak 0 osim za svojstveni vektor x_1. Zašto je to tako? Svaki svojstveni vektor simetričnog magičnog kvadrata je zapravo ortogonalan na dominantan svojstveni vektor e. To je posljedica činjenice da je e lijevi svojstveni vektor matrice A. Princip biortogonalnosti kaže da je svaki desni svojstveni vektor matrice A s pripadnom svojstvenom vrijednošću λ_1 ortogonalan na svaki lijevi svojstveni vektor matrice A s pripadnom svojstvenom vrijednošću λ_2, pri čemu su $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Možemo još uočiti kako se kao svojstvene vrijednosti pojavljuju suprotni brojevi 8 i -8. Pitamo se, ako je λ svojstvena vrijednost od A možemo li odmah zaključiti da je i $-\lambda$ svojstvena vrijednost od A. Kako bi ovo objasnili u daljnjem radu korisno će biti raditi s ekvivalentnim magičnim kvadratom $Z = A - \frac{\mu}{n}E$.

Lema 5.1 Neka je A magični kvadrat s magičnom sumom μ, tada je μ i svojstvena vrijednost matrice A, odnosno vrijedi

- Vektor e je svojstveni vektor od A s pripadnom svojstvenom vrijednošću μ.
- Vektor e^T je lijevi svojstveni vektor od A s pripadnom svojstvenom vrijednošću μ.

Dokaz. Množimo li slijeva jednadžbu (3.1) s e dobivamo $ee_i^T Ae = e\mu$, pa daljnjim sređivanjem imamo $Ae = \mu e$. Stoga slijedi da je e svojstveni vektor s pripadnom svojstvenom vrijednošću μ. Slično sada zdesna množimo jednadžbu (3.2) s e^T, pa dobivamo $e^T Ae_j e^T = \mu e^T$. Sređivanjem dobivamo $e^T A = \mu e^T$, pa slijedi da je e^T lijevi svojstveni vektor s pripadnom svojstvenom vrijednošću μ. □

U idućem teoremu ,objavljenom u [8], pokazat ćemo da magični kvadrati A i Z imaju potpuno jednake svojstvene vrijednosti osim u slučaju kada je svojstvena vrijednost ujedno i magična konstanta magičnog kvadrata A.

Teorem 5.2 Neka je A simetrični magični kvadrat $n \times n$, i neka je Z definiran kao $Z = A - \frac{\mu}{n}E$. Tada A i Z imaju iste svojstvene vrijednosti, pri čemu je μ zamijenjen s 0 u spektru od Z. Štoviše, A i Z imaju iste svojstvene vektore.

Dokaz. Prije svega, pokažimo da je e svojstveni vektor od Z s pridruženom svojstvenom vrijednošću 0. Neka je

$$Z = A - \frac{\mu}{n}E$$

Množimo li zdesna s vektorom e dobivamo

$$Ze = A - \frac{\mu}{n}Ee$$

S obzirom da je $Ae = \mu e$ jer je e svojstveni vektor od A s pridruženom svojstvenom vrijednosti μ, te je $E = ee^T$ slijedi

$$Ze = \mu e - \frac{\mu}{n}e(e^T e)$$

$$Ze = \mu e - \frac{\mu}{n}en$$

$$Ze = \mu e - \mu e$$

$$Ze = 0$$

Dakle, e je svojstveni vektor od Z s pridruženom svojstvenom vrijednošću 0. Neka je sada $\lambda \neq \mu$ neka druga svojstvena vrijednost od A kojoj je pridružen svojstveni vektor x, tj.$Ax = \lambda x$ .Također, znamo da je vektor x ortogonalan na vektor e, što znači da je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

$$Zx = Ax - \frac{\mu}{n}ee^T x$$

$$Ze = \lambda x - 0$$

$$Ze = \lambda x$$

Dakle, λ je svojstvena vrijednost i od Z. □

Primjer 2

$$Z = A - \frac{\mu}{n}E$$

$$Z = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} - \frac{34}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 7.5 & -5.5 & -6.5 & 4.5 \\ -3.5 & 1.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0.5 & -2.5 & -1.5 & 3.5 \\ -4.5 & 6.5 & 5.5 & -7.5 \end{pmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti od Z su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 8$, $\lambda_4 = -8$.

Na ovom primjeru doista vidimo kako matrica Z ima iste svojstvene vrijednosti kao matrica A, pri čemu je svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 34$ matrice A zamijenjena svojstvenom vrijednošću $\lambda_1 = 0$ matrice Z.

Možemo uočiti kako smo parove brojeva kod matrice A kao što su 16 i 1, zamijenili parovima pozitivnih i negativnih brojeva kao što su 7.5 i -7.5 kod matrice Z.

Kako bi se uvjerili da to vrijedi općenito, pomnožiti ćemo jednadžbu

$$Z = A - \frac{\mu}{n}E$$

slijeva i zdesna s matricom J, pa dobivamo :

$$JZJ = JAJ - \frac{\mu}{n}E$$

Zbrojimo li ove dvije jednadžbe dobiti ćemo:

$$Z + JZJ = A + JAJ - \frac{2\mu}{n}E$$

Kako znamo da simetrični magični kvadrat zadovoljava jednadžbu $A + JAJ = \frac{2\mu}{n}E$, pa uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo da je $Z + JZJ = 0$, odnosno $JZJ = -Z$. Podsjećamo da smo matrice koje zadovoljavaju ovu jednakost definirali u *Poglavlju 1*, te ih nazivamo kose centralno simetrične matrice. Jedno važno svojstvo ovih matrica iskazano je u sljedećem teoremu koji je objavljen u [8].

Teorem 5.3 Neka je λ svojstvena vrijednost kose centralno simetrične matrice Z. Tada je i $-\lambda$ svojstvena vrijednost od Z. Štoviše, ako je $Zx = \lambda x$, onda slijedi da je $Z(Jx) = -\lambda(Jx)$.

Dokaz. Za bilo koju kvadratnu matricu A, svojstvena vrijednost od matrice $-A$ je suprotnog predznaka od svojstvene vrijednosti matrice A. Budući da je $J = J^{-1}$, uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo $-Z = J^{-1}ZJ$, pa po definiciji sličnih matrica slijedi da matrice Z i $-Z$ imaju potpuno iste svojstvene vrijednosti. Ove dvije činjenice povlače da se u spektru od Z nalaze λ i $-\lambda$. Pretpostavimo da je x svojstveni vektor od Z sa pripadnom svojstvenom vrijednošću λ, tj. $Zx = \lambda x$. Pomnožimo li $JZJ = -Z$ zdesna s x dobivamo:

$$JZJx = -Zx$$

$$JZJx = -\lambda x$$

$$J^{-1}JZ(Jx) = J^{-1}(-\lambda x)$$

$$Z(Jx) = -\lambda(Jx)$$

Dakle, pokazali smo da ako matrica Z ima svojstvenu vrijednost λ kojoj je pridružen svojstveni vektor x, tada slijedi da je svojstvenoj vrijednosti $-\lambda$ pridružen svojstveni vektor Jx. □

Ovaj teorem objašnjava opažanja u primjeru s početka gdje se pojavljuju svojstvene vrijednosti 8 i −8, pri čemu je svojstvenoj vrijednosti 8 pridružen svojstveni vektor x_2, dok je svojstvenoj vrijednosti −8 pridružen vektor $x_3 = Jx_2$.

5.1 Simetrični magični kvadrati

Simetrični magični kvadrati parnog reda

Cilj nam je pokazati da su simetrični magični kvadrati parnog reda singularni, odnosno da oni uvijek imaju svojstvenu vrijednost nula. To je posljedica činjenice da svaka pozitivna svojstvena vrijednost ima istu algebarsku kratnost kao i pripadna negativna svojstvena vrijednost. Rezultati koje ćemo pokazati objavljeni su u [8].

Teorem 5.1.1 Pretpostavimo da je kvadratna matrica B slična matrici $-B$. Ako se Jordanov blok $J_k(\lambda)$ pojavi m puta u Jordanovoj kanonskoj formi od B tada to vrijedi i za $J_k(-\lambda)$.

Dokaz. S obzirom da su matrice B i $-B$ slične slijedi da imaju iste Jordanove kanonske forme. □

Teorem 5.1.2 Neka je A $n \times n$ simetričan magični kvadrat. Ako je n paran, tada je A singularna matrica.

Dokaz. Neka je Z definiran kao $Z = A - \frac{\mu}{n}E$. Za svaku svojstvenu vrijednost $\lambda \neq 0$ od Z, prethodni teorem osigurava da je Jordanov blok od λ uparen s onim od $-\lambda$. Tada slijedi da zbroj algebarskih kratnosti od svojstvenih vrijednosti matrice Z mora biti paran. S obzirom da je 0 svojstvena vrijednost od Z, njezina kratnost također mora biti parna. Ako Z ima najmanje dvije svojstvene vrijednosti 0, to povlači da najmanje jedna svojstvena vrijednost od A je nula, što znači da je det $A = 0$, pa slijedi da je matrica A singularna. □

Simetrični magični kvadrati neparnog reda

Za razliku od simetričnih magičnih kvadrata parnog reda, simetrični magični kvadrati neparnog reda mogu biti singularni ili nesigularni.

5.2 Konstrukcija nesingularnih simetričnih magičnih kvadrata

U ovom dijelu opisat ćemo metodu konstrukcije nesingularnih simetričnih magičnih kvadrata, čija je dimenzija prost broj, koristeći cirkularne matrice i ortogonalne latinske kvadrate. Za početak ćemo definirati cirkularne matrice i ortogonalne latinske kvadrate. One su detaljnije opisane u [6].

Definicija 5.2.1 Latinski kvadrat je $n \times n$ matrica koja sadrži n različitih brojeva, a svaki se pojavljuje točno jednom u svakom redu i točno jednom u svakom stupcu. Kažemo da su dva $n \times n$ latinska kvadrata A i B ortogonalna ako su n^2 poredanih parova na odgovarajućim pozicijama različiti.

Definicija 5.2.2 Cirkularna matrica je kvadratna matrica reda n u kojoj se svaki redak osim prvog, dobiva iz prethodnog retka cikličkim pomicanjem unosa za jedan stupac udesno.

Primjer cirkularne matrice 5×5:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_1 \end{bmatrix}$$

S obzirom da želimo konstruirati simetrični magični kvadrat neparnog reda, u nastavku neka je $n = 2k + 1$, te neka je $S = \{-k, -k + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k - 1, k\}$. Također neka je A cirkularna matrica reda n čiji se prvi redak $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sastoji od n različitih elemenata iz skupa S. Takvu matricu ćemo zvati S-cirkularna matrica. Radi lakšeg shvaćanja, te kako bi si vizualno to predočili pogledajmo primjer iz [6] S-cirkularne matrice reda 5.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ukoliko je A S-cirkularna matrica, pri čemu je $a_1 = 0$, tada je A magični kvadrat s magičnom konstantom 0. Očito je da to vrijedi budući da uzimamo elemente iz skupa S čiji je zbroj elemenata jednak 0.

Za daljnju konstrukciju korisno će nam biti promatrati S-cirkularnu matricu, pri čemu je $a_1 = 0$, koja je uz to još i kosa centralno simetrična matrica. Odnosno preostali elementi prvog retka zadovoljavaju uvjet

$$a_j + a_{n+2-j} = 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Primjer takve matrice koja se nalazi u [6] je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definirajmo još matricu $Z = nA + AJ$, pri čemu je A S-cirkularna matrica s $a_1 = 0$, koja je uz to i kosa centralno simetrična matrica. Tada vrijedi da je Z kosa centralno simetrična matrica, te da ima magičnu konstantu 0, pri čemu je n^2 različitih unosa iz skupa $\{-\left(\frac{n^2-1}{2}\right), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \left(\frac{n^2-1}{2}\right)\}$. Nadalje, pokazuje se da ako je, posebno, n neparni prost broj, onda je $r(Z) = n - 1$. Pretpostavka da je n neparni broj u dokazu se koristi pri izračunavanju svojstvenih vrijednosti matrice A, što je moguće zahvaljujući posebnoj strukturi S-cirkularne matrice. Ustanovi se da je $0 \in \sigma(A)$, a da je njezina algebarska kratnost jednaka 1. Stoga je $r(A) = n - 1$, pa je i $r(Z) = n - 1$.

Preostaje iskazati teorem objavljen u [6] koji omogućuje konstrukciju nesingularnog klasičnog simetričnog magičnog kvadrata neparnog reda.

Teorem 5.2.3 Neka je A s-cirkularna matrica s $a_1 = 0$, koja je ujedno i kosa centralno simetrična matrica. Neka je n neparan prost broj, te neka je $Z = nA + AJ$. Tada je $M = Z + \frac{n^2+1}{2}E$ klasični simetrični magični kvadrat koji je nesingularan.

Dokaz. Kako je $Z = nA + AJ$ simetrični magični kvadrat magične konstante 0 s n^2 različitih elemenata iz skupa $\{-\left(\frac{n^2-1}{2}\right), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \left(\frac{n^2-1}{2}\right)\}$, lako se vidi da je M klasični simetrični magični kvadrat s elementima iz skupa $\{1, \ldots, n^2\}$. Budući da je Z kosa centralno simetrična matrica koja ima svojstvenu vrijednost nula algebarske kratnosti 1, zaključujemo da je matrica M nesingularna. □

Primjer nesingularnog klasičnog simetričnog magičnog kvadrata 5×5 iz [6] je:

$$\begin{bmatrix} 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

Naime, moguće je konstruirati nesingularni simetrični magični kvadrat neparnog reda, pri čemu red magičnog kvadrata nije prost broj kao što je to bio uvjet u prethodnom teoremu. Kao primjer pokazujemo nesingularni simetrični magični kvadrat 15×15, koji se nalazi u [6].

$$\begin{bmatrix}
218 & 91 & 204 & 77 & 190 & 63 & 176 & 49 & 162 & 35 & 148 & 21 & 134 & 7 & 120 \\
105 & 203 & 76 & 189 & 62 & 175 & 48 & 161 & 34 & 147 & 20 & 133 & 6 & 119 & 217 \\
202 & 90 & 188 & 61 & 174 & 47 & 160 & 33 & 146 & 19 & 132 & 5 & 118 & 216 & 104 \\
89 & 187 & 75 & 173 & 46 & 159 & 32 & 145 & 18 & 131 & 4 & 117 & 215 & 103 & 201 \\
186 & 74 & 172 & 60 & 158 & 31 & 144 & 17 & 130 & 3 & 116 & 214 & 102 & 200 & 88 \\
73 & 171 & 59 & 157 & 45 & 143 & 16 & 129 & 2 & 115 & 213 & 101 & 199 & 87 & 185 \\
170 & 58 & 156 & 44 & 142 & 30 & 128 & 1 & 114 & 212 & 100 & 198 & 86 & 184 & 72 \\
57 & 155 & 43 & 141 & 29 & 127 & 15 & 113 & 211 & 99 & 197 & 85 & 183 & 71 & 169 \\
154 & 42 & 140 & 28 & 126 & 14 & 112 & 225 & 98 & 196 & 84 & 182 & 70 & 168 & 56 \\
41 & 139 & 27 & 125 & 13 & 111 & 224 & 97 & 210 & 83 & 181 & 69 & 167 & 55 & 153 \\
138 & 26 & 124 & 12 & 110 & 223 & 96 & 209 & 82 & 195 & 68 & 166 & 54 & 152 & 40 \\
25 & 123 & 11 & 109 & 222 & 95 & 208 & 81 & 194 & 67 & 180 & 53 & 151 & 39 & 137 \\
122 & 10 & 108 & 221 & 94 & 207 & 80 & 193 & 66 & 179 & 52 & 165 & 38 & 136 & 24 \\
9 & 107 & 220 & 93 & 206 & 79 & 192 & 65 & 178 & 51 & 164 & 37 & 150 & 23 & 121 \\
106 & 219 & 92 & 205 & 78 & 191 & 64 & 177 & 50 & 163 & 36 & 149 & 22 & 135 & 8
\end{bmatrix}$$

5.3 Inverz magičnog kvadrata

Primjer iz [4]:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2720} \begin{bmatrix} 275 & -201 & -167 & 173 \\ 37 & -31 & -65 & 139 \\ -99 & 105 & 71 & 3 \\ -133 & 207 & 241 & -235 \end{bmatrix}$$

S obzirom da je A magični kvadrat zbroj elemenata u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale iznosi 34, pa zbroj u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale kod matrice A^{-1} iznosi $\frac{1}{34}$ u što se možemo i uvjeriti.

Naime, znamo da za magični kvadrat A vrijedi $Ae = \mu e$ i $e^T A = \mu e^T$. Također, ako je A invertibilna matrica, μ ne može biti 0, jer 0 ne može biti u spektru, a μ je uvijek u spektru. U Poglavlju 2 imamo da je $\frac{1}{\mu}$ u spektru od A^{-1}, te vrijedi

$$\begin{aligned} A^{-1}Ae &= \mu A^{-1}e \\ e &= \mu A^{-1}e \\ A^{-1}e &= \frac{1}{\mu}e. \end{aligned}$$

Odnosno, e je desni svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\frac{1}{\mu}$. Analogno se pokaže da je e^T lijevi svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\frac{1}{\mu}$.

Dakle, općenito, ako je magični kvadrat A regularna matrica onda je njezin inverz A^{-1} polumagični kvadrat. No, A^{-1} ne mora biti magični kvadrat, kako vidimo iz sljedećeg primjera:

$B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 14 & 18 \\ 17 & 15 & 1 & 11 \\ 13 & 21 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 22 & 12 \end{bmatrix}$ je magićni kvadrat, dok je $B^{-1} = \frac{1}{792} \begin{bmatrix} 582 & -540 & 472 & -496 \\ -375 & 351 & -265 & 307 \\ 219 & -243 & 197 & -155 \\ -408 & 450 & -386 & 362 \end{bmatrix}$ polumagični kvadrat.

Međutim, može se pokazati da za magične kvadrate trećeg reda ipak vrijedi: ako je A magični kvadrat i regularna matrica, onda je i A^{-1} magični kvadrat. Neka je A magični kvadrat i regularna matrica te neka je zbroj elemenata u svakom retku i svakom stupcu u matrici A jednak μ. Treba samo dokazati da je u matrici A^{-1} zbroj elemenata na dijagonali kao i zbroj elemenata na poprečnoj dijagonali jednak $\frac{1}{\mu}$. Kako je po pretpostavci A magični kvadrat, slijedi iz definicije da mora vrijediti $\text{tr}(A) = \mu$. No prema prethodno dokazanim tvrdnjama vrijedi da je skalar μ ujedno i svojstvena vrijednost matrice A. Također, znamo da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{tr}A$ pri čemu je $n = 3$, pa slijedi $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu$. Kako je μ jedna od svojstvenih vrijednosti možemo staviti $\lambda_1 = \mu$, pa uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Odnosno, $\lambda_2 = -\lambda_3$. S obzirom da je matrica A regularna znamo da je $\lambda_2 \neq 0$, pa imamo da je $\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{\lambda_3}$. Slijedi da je $\text{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\mu}$. Dakle sada smo dokazali da je zbroj na glavnoj dijagonali matrice A^{-1} jednak $\frac{1}{\lambda}$, no moramo još to pokazati i za poprečnu dijagonalu. Za poprečnu dijagonalu najbolje nam je promatrati matricu JA za koju smo pokazali da je magični kvadrat što znači da je zbroj elemenata u retcima, stupcima i na dijagonalama jednak μ. Možemo staviti da je $B = JA$, pa prema prethodno dokazanom znamo da je $\text{tr}(B^{-1}) = \frac{1}{\mu}$. Međutim, $B^{-1} = (JA)^{-1} = A^{-1}J^{-1} = A^{-1}J$, pa lako možemo vidjeti da je $\text{tr}(A^{-1}J)$ upravo jednak sumi elemenata na poprečnoj dijagonali matrice A^{-1}.

Napomena: U dokazu smo koristili činjenicu da je trag matrice A jednak zbroju njenih svojstvenih vrijednosti. Znamo da za svaku matricu A postoji regularna matrica P takva da vrijedi $PAP^{-1} = J$ pri čemu matrica J ima Jordanovu kanonsku formu. Pa slijedi da je $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}JP) = \text{tr}(PP^{-1}J) = \text{tr}(J) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ gdje su λ_i svojstvene vrijednosti matrice A.

Bibliografija

[1] kolovoz 2020, 13.https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square.

[2] I. T. Abu-Jeib, *Centrosymmetric and skew-centrosymmetric matrices and regular magic squares*, New Zealand Journal of Mathematics **33** (2004), br. 2, 105–122.

[3] W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Open Court Publishing Company, 1917.

[4] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga Zagreb, 2008.

[5] Z. Franušić i J. Šiftar, *Linearna algebra 1*, kolovoz 2020, https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf.

[6] M. Lee, E. Love, E. Wascher i S. Narayan, *Linear Algebra of Magic Squares*, Central Michigan University, 2006.

[7] A. Lukas, *Vectors and Matrices, Skripta*, rujan 2020, https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/AndreLukas/V&M/V&Mlecturenotes.pdf.

[8] R. B. Mattingly, *Even Order Regular Magic Square Are Singular*, Amer.Math. Monthly **107** (2000), br. 9, 777–782.

[9] P. Staab, C. Fisher, M. Maggio, M. Andrade, E. Farrell i H. Schilling, *The Magic of Permutation Matrices: Categorizing, Counting and Eigenspectra of Magic Squares*, ArXiv.Math.HO (2010).

[10] D. L. Stephens, *Matrix properties of magic squares*, (1993).

[11] J. E. Ward, *Vector Spaces of Magic Squares*, Mathematics Magazine **53** (1980), br. 2, 108–111.

Sažetak

U radu je prikazano kako se neki od osnovnih pojmova i činjenica iz linearne algebre primjenjuju na magične kvadrate. Magični kvadrat, u smislu kvadratne tablice koja je popunjena brojevima tako da jednaku vrijednost ima zbroj elemenata po svakom retku, po svakom stupcu i po obje dijagonale, ima vrlo dugu povijest kao popularni objekt iz takozvane zabavne matematike, ali također i kao predmet ozbiljnog matematičkog istraživanja.

Promatrani kao matrice nad poljem, obično nad realnim brojevima, magični kvadrati jednakog reda n čine vektorski prostor, a neki posebni tipovi čine njegove potprostore. Izračunata je dimenzija prostora magičnih kvadrata i nekih potprostora. Za tu svrhu, kao i za proučavanje spektra, korisnom se pokazuje jednoznačan rastav magičnog kvadrata konstante μ kao zbroj jednog kvadrata s magičnom konstantom 0 i drugog kojem su svi elementi jednaki $-\frac{\mu}{n}$.

Proučavaju se neki posebni tipovi magičnih kvadrata, čija struktura vodi do zanimljivih rezultata i konstrukcija. Kroz definicije, brojne primjere i dokaze propozicija vidljiva je prikladnost linearne algebre u istraživanju magičnih kvadrata. Dokazano je da je svaki centrosimetrični magični kvadrat parnog reda singularna matrica. S druge strane, za svaki neparni red n, koji je pritom prost broj, može se konstruirati centrosimetrični klasični magični kvadrat koji je regularna matrica.

Summary

In this thesis it is shown how some basic concepts and facts from linear algebra are applied to magic squares. Magic square, in the sense of a quadratic scheme filled with numbers in such a manner that the same value is obtained by adding up the entries in each row, each column and both diagonals, has a very long history as a popular object in recreational mathematics, but also as a topic of serious mathematical research.

Observed as quadratic matrices over a field, usually the real number field, magic squares of order n constitute a vector space, with subspaces formed by squares of some particular types. The dimension of this space and some of its subspaces is determined. It is shown how a unique decomposition of a square with magic constant μ as the sum of one square with magic constant 0 and another one with all its elements equal to $-\frac{\mu}{n}$ becomes useful to that purpose, as well as for exploration of the spectrum of a magic square.

Some special types of magic squares are studied, as their structure leads to interesting results and constructions. Through the definitions, numerous examples and the proofs of propositions it is visible how suitable linear algebra is for research of magic squares. It is proven that every centrosymmetric magic square of even order is a singular matrix. On the other hand, for any given odd prime number n it is possible to build a classical, centrosymmetric magic square of order n.

Životopis

Rođena sam 04. veljače 1996. godine u Zagrebu. Pohađala sam "Osnovnu školu Milke Trnine" u Križu, te sam već ovdje počela gajiti ljubav prema prirodnim znanostima. Omiljeni predmeti bili su mi matematika, fizika i kemija.

Po završetku osnovne škole upisujem "Srednju školu Ivan Švear" u Ivanić-Gradu, smjer opća gimnazija. Ni ovdje se nije ništa puno promijenilo, i dalje su mi omiljeni predmeti bili gore navedeni, ali matematika je imala sve veću prednost. Kada je došao trenutak da odlučim koji ću fakultet upisati dvojbe nije bilo.

Zbog svojih navedenih interesa upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu sveučilišta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Studiranje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu pamtiti ću kao jedno lijepo i nezaboravno životno iskustvo. Koliko god je bilo teško, doista sam uživala na putu do ostvarenja cilja, jer nikada nije poanta u cilju, već u putovanju. Predivno je doći na cilj, ali putovanje je ono čega ćemo se uvijek sjećati.