Funkcionalne jednadžbe u nastavi matematike

Juras, Ružica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ružica Juras

FUNKCIONALNE JEDNADžBE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliku zahvalnost, u prvom redu, dugujem svojoj mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić koju iznimno cijenim i kao stručnjaka i kao osobu. Hvala Vam što ste uvijek našli vremena za mene i imali strpljenja za sve moje nedoumice.

Posebnu zahvalnost iskazujem svojim roditeljima i obitelji na bezgraničnoj ljubavi i podršci tijekom studiranja, a i cijelog života.

Zahvaljujem prijateljima na nezaboravnim trenucima i doživljajima tijekom studiranja.

Zahvaljujem svojoj najboljoj prijateljici, cimerici, usvojenoj sestri i kraljici svemira, Željki, koja je bila tu uvijek za mene u dobrim i teškim trenucima.

Sadržaj

Uvod

Funkcionalne jednadžbe su jednadžbe u kojima je nepoznanica funkcija. Pojavljuju se u raznim matematičkim problemima, a otkrivene su slučajno pri pokušajima da se definira linearna funkcija opisom njenih svojstava. Bilo je to još u 14. stoljeću u Oresmeovom radu Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. Za uviđanje potrebe za sistematično proučavanje funkcionalnih jednadžbi trebalo je proći još nekoliko stoljeća i puno situacija gdje se funkcionalne jednadžbe pojavljuju, tako da se teorija funkcionalnih jednadžbi počela razvijati prije otprilike dva stoljeća. Rješavanje funkcionalnih jednadžbi nije nimalo jednostavno i ne postoji opći postupak za dobivanje svih rješenja svih funkcionalnih jednadžbi. Stoga je potrebno razvijati različite metode kako se odgovarajući tipovi funkcionalnih jednadžbi rješavaju. Funkcionalne jednadžbe su oduvijek, pa i u današnje vrijeme, dobar materijal za razne zadatke na srednjoškolskim natjecanjima iz matematike, ali i na fakultetima.

U ovom radu bavili smo se nekim osnovnim tipovima funkcionalnih jednadžbi. Prvo smo željeli opisati najvažnije poznate primjere iz povijesti funkcionalnih jednadžbi, te navesti najvažnije matematičare koji su zaslužni za proučavanje ove teorije. Posebno je važno i zanimljivo razumjeti njihovu motivaciju za rješavanje problema ove vrste jer treba imati na umu da se prva funkcionalna jednadžba pojavila još dok ni pojam linearne funkcije nije bio precizno definiran. Štoviše, koliko je poznato, prva definicija linearne funkcije je upravo tako i prezentirana, kao rješenje određene funkcionalne jednadžbi. Nakon povijesnog dijela istaknuli smo najvažnije tipove funkcionalnih jednadžbi, kao što su Cauchyjeva funkcionalna jednadžba, Jensenova funkcionalna jednadžba, Cauchyjeva eksponencijalna funkcionalna jednadžba, te njihova primjena na ostale funkcionalne jednadžbe.

Iako se funkcionalne jednadžbi ne proučavaju u srednjim školama u redovitoj nastavi, u zbirkama se ponekad pojave zadaci ovog tipa, bez eksplicitnog navođenja da se radi o funkcionalnim jednadžbama. U ovom radu smo naveli nekoliko riješenih primjera iz udžbenika četvrtog razreda srednjih škola koji su usko povezani s funkcionalnim jednadžbama. Osim toga, naveli smo i nekoliko primjera zadataka s državnih natjecanja iz matematike, te nekoliko primjera koji se mogu upotrijebiti za naprednije učenike u dodatnoj nastavi matematike primjenom funkcionalnih jednadžbi za izvod nekih poznatih formula.

Poglavlje 1

Povijest funkcionalnih jednadžbi

U ovom poglavlju bit će govora o povijesnom razvoju funkcionalnih jednadžbi. Bit će istaknuti najvažniji matematičari, njihove kratke biografije, njihovi najznačajnije doprinose matematici te načini, ideje i metode koje su koristili za rješavanje funkcionalnih jednadžbi. Bit će riječi o matematičarima koji su doprinijeli otkriću funkcionalnih jednadžbi i rješavanju istih: Nicole Oresme, Gregorire de Saint-Vincente, Augustin-Luis Cauchy te Srrinivas Aaiyangar Ramanujan.

1.1 Nicole Oresme (1323-1382)

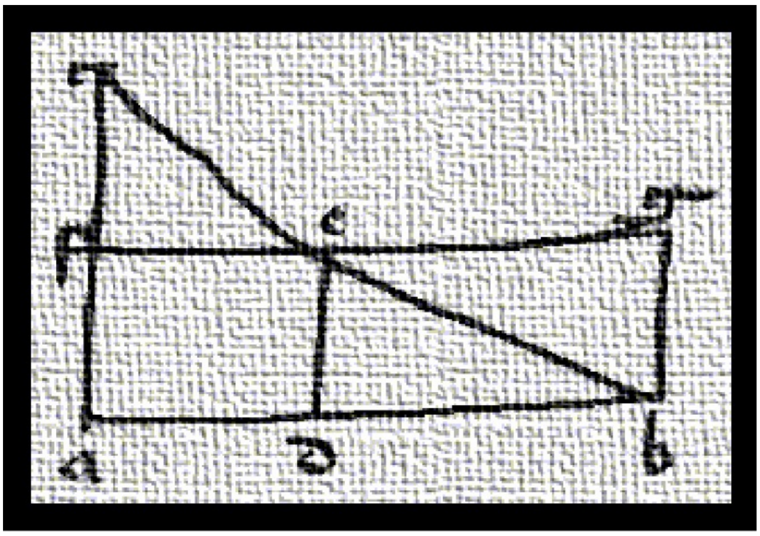
Nicole Oresme bio je matematičar porijeklom iz Norveške, a većinu svog života proveo je u Francuskoj. Studirao je na prestižnom fakultetu u Parizu na kojem je pokazao izuzetan uspjeh. Usprkos tome što je u njegovo vrijeme harala zaraza kugom, Oresme je završio fakultet i stekao zvanje magistra teologije. Bio je francuski biskup i financijski savjetnik Karla Petog. Oresme je u 14. stoljeću bio poznat zbog otkrića geometrije koordinata puno prije Descartesa, te je bio prvi matematičar koji je koristio razlomak u eksponentu potencije. U vrijeme Oresmeova života Aristotelova djela prihvaćala su se bez pitanja, no kako je Oresme prevodio Aristotelova djela na francuski jezik, neke teorije nije prihvaćao bez promišljanja. Na primjer Aristotel je definirao vrijeme kao jednoliko gibanje, a Oresme je vrijeme definirao neovisno o gibanju.

Njegovo najvažnije djelo u kojem se spominju funkcionalne jednadžbe naziva se *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. U ovom djelu se prvi put spominje povezanost između dviju varijabli i njihov grafički prikaz te povezanosti dviju varijabli (to danas nazivamo graf).

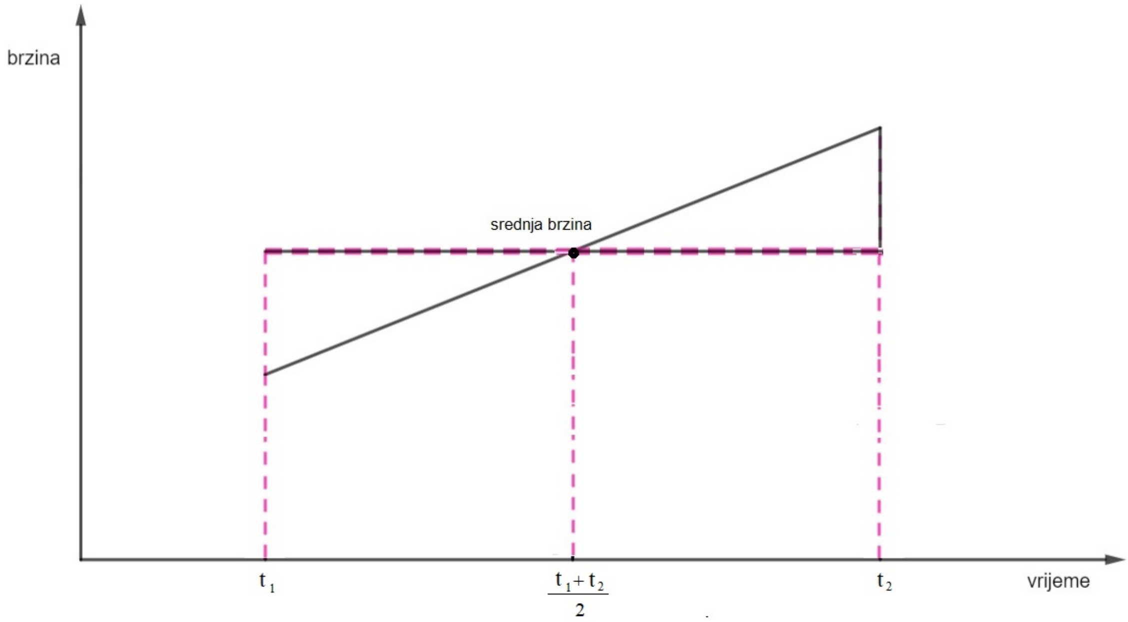
Slika 1.1 Portret Nicolea Oresmea

U prvom dijelu svoje knjige posvetio se dokazivanju Mertonova teorema, to jest teorema srednje vrijednosti brzine koji kaže:

Udaljenost koju je tijelo prešlo u nekom periodu jednolikim ubrzanjem jednako je kao da se tijelo kretalo jednolikom brzinom koja je jednaka brzini na sredini perioda kada se tijelo kretalo jednolikim ubrzanjem.



Slika 1.2 Ilustracija teorema srednje brzine iz djela *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*



Slika 1.3 Današnji grafički prikaz Mertonova teoerema

Iz Slike 1.3 (grafa) može se uočiti da je površina ispod grafa funkcije kada se tijelo gibalo jednoliko ubrzano jednaka površini ispod grafa funkcije kada se tijelo gibalo jednolikom brzinom.

Kako je došao do ideje funkcionalnih jednadžbi, to jest kako je on definirao linearnu funkciju, teško je objasniti. On kaže:

Jednolika vrsta je ona koja je podjednako intenzivna u svim dijelovima, dok je vrsta jednoliko promjenjiva ako je za svake tri točke omjer udaljenosti između prve dvije točke i druge dvije točke jednak omjeru viška prve točke s obzirom na drugu točku i viška druge točke s obzirom na treću točku, nazivajući prvom od ove tri točke onu najvećeg intenziteta.

Nicole Oresme živio je u 14. stoljeću kada još nije bio poznat pojam linearne funkcije. Kasnijim istraživanjem matematičari Aczel i Dhombres došli su do zaključka da je u ovom ulomku Oresme zapravo definirao linearnu funkciju preko funkcionalnih jednadžbi. U današnjoj terminologiji ovaj ulomak mogao bi se prevesti na ovaj način:

Konstantna funkcija je ona koja ima isti intenzitet u svakoj točki, to jest $f(x) = f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Jednoliko promjenjiva funkcija (tj. linearna) zadovoljava relaciju

$$\frac{y-x}{z-y} = \frac{f(y)-f(x)}{f(z)-f(y)} \tag{1.1}$$

za sve različite x, y i z.

Danas se linearna funkcija definira na sljedeći način:

Definicija 1.1.1. *Neka su a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Linearna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x) = ax + b, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ono što Oresmeovu definiciju linearne funkcije čini funkcionalnom jednadžbom jest da se f tretira apstraktno, to jest može se umjesto f uvrstiti bilo koja funkcija i provjeriti vrijedi li (1.1). Rješenje funkcionalne jednadžbe (1.1) upravo je funkcija definirana u definiciji 1.1.1. gdje je $a \neq 0$. Ako je $a = 0$, dolazimo do konstante funkcije.

Prva upotreba funkcionalnih jednadžbi u povijesti matematike je upravo Oresmeova definicija linearne funkcije (iz onoga što nam je poznato).

1.2 Gregoire de Saint-Vincente (1584-1667)

Slika 1.4 Gregoire de Saint-Vincente

Gregoire de Saint-Vincente je matematičar iz današnje Belgije. On započinje svoje školovanje na isusovačkom fakultetu u Bruggeu 1595. godine. Studirao je matematiku i filozofiju. Baveći se problemom trisekcije kuta, naišao je na niz

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Tim nizom došao je na ideju da će problem trisekcije kuta riješiti beskonačnim nizom bisekcije kuta.

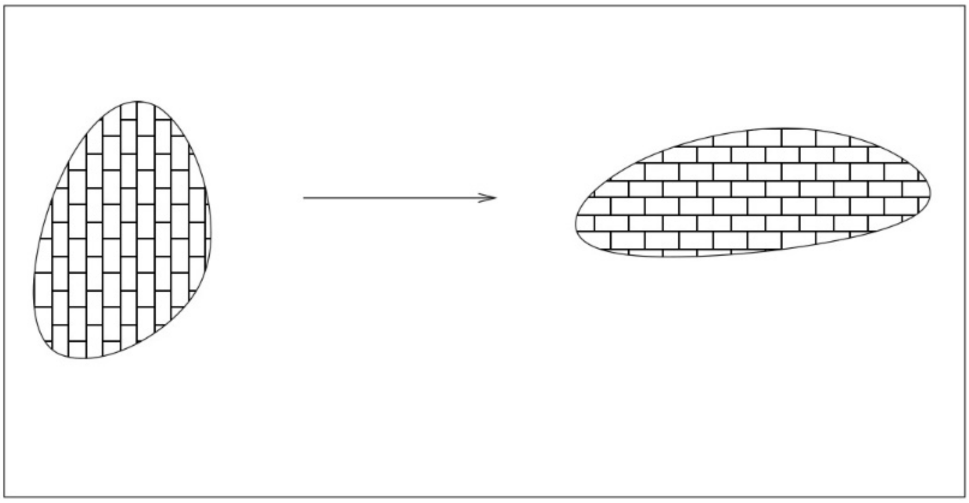
On je prvi koji spominje metodu iscrpljivanja (ekshaustije) u svoj knjizi *Opus Geometricum quadraturae circculi et sectionum coni*.

Metoda iscrpljivanja (ekshaustije) starogrčki je način *rada s limesima*. Precizniju definiciju ove metode možemo naći u desetoj knjizi Euklidovih elemenata.

Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.

Njegovo najpoznatije djelo je *Opus Geometricum quadraturae circculi et sectionum coni*, knjiga s preko 1200 stranica. U toj knjizi obrađeno je mnogo tema, uključujući krugove, trokute, geometrijske nizove, elipse, parabole i hiperbole. Također raspravlja se o metodama računanja površina i o svojstvima presjeka konika.

Dvije stotine godina nakon prve pojave funkcionalnih jednadžbi, Saint-Vincente koristi funkcionalne jednadžbe u svojim istraživanjima o hiperboli. On prvi implicitno upotrebljava funkcionalnu jednadžbu oblika $f(xy) = f(x) + f(y)$, objašnjavajući kako izračunati površinu ispod grafa funkcije $y = x^{-1}$. Danas se površina ispod grafa funkcije obično računa integracijom funkcije, no Gregoire de Saint-Vincente izračunao je površinu ispod grafa funkcije koristeći samo geometriju i princip koji je nazvao *skalarno-geometrijski princip*.



Slika 1.5 Skalarno-geometrijski princip

Princip objašnjava na temelju geometrijskih oblika, to jest ravnina. Ravninu na Slici 1.5 mijenjamo tako da je „razvlačimo“ i „skupljamo“ horizontalno ili vertikalno istim faktorom razvlačenja. Na Slici 1.5 ravninu „razvukli“ smo horizontalno te „skupili“ vertikalno istim faktorom. Ako pogledamo površine tih dviju ravnina, vidimo da je površina ostala nepromijenjena. Sada pogledajmo graf hiperbole i površinu ispod grafa hiperbole.

Slika 1.6 Graf funkcije $y = x^{-1}$

Na Slici 1.6 nalazi se graf funkcije $y = x^{-1}$ na pozitivnom dijelu osi x. Gledat ćemo površinu ispod grafa funkcije na intervalu od 1 do x te površinu ispod grafa od y do xy za svaki $y > 1$ (na Slici 1.6 uzeli smo $x = 4, y = 3$). Uspoređujući te dvije osjenčane površine ispod grafa vidimo da se one razlikuju prema koeficijentu rastezanja y prema x-koordinati i prema koeficijentu rastezanja y^{-1} po y-koordinati. Iz toga Gregoire de Saint-Vincente zaključuje da su te dvije površine ispod grafa jednake. Površinu ispod grafa funkcije na intervalu od 1 do x označimo s $f(x)$. Tada tu površinu možemo zapisati na način $f(xy) - f(y)$.
Matematičkim zapisom

$$f(x) = f(xy) - f(y),$$

to je ekvivalentno s

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{1.2}$$

Gregoire de Saint-Vincente pokrenuo je proučavanje logaritama upravo ovim izračunavanjem površine ispod grafa funkcije $y = x^{-1}$ tako da je zaključio da područje ispod hiperbole zadovoljava funkcionalnu jednadžbu $f(xy) = f(x) + f(y)$. Uspio je povezati funkcionalnu jednadžbu (1.2) s jednim od osnovnih svojstva logaritma

$$\log(xy) = \log x + \log y, \qquad \forall x, y > 0.$$

1.3 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Slika 1.6 Augustin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy matematičar je francuskog porijekla, poznat zbog raznih doprinosa matematici, no najpoznatiji je zbog začetka moderne teorije matematičke analize. Bio je profesor matematike i astronomije u Parizu. Cauchy je objavio više od 750 radova povezanih s matematikom, fizikom i astronomijom. Njegovi doprinosi su veliki; prvi je precizno proučio pojam konvergencije, definirao je neprekidnost funkcije, derivaciju i integral funkcije. Poznati pojmovi kao što je Cauchyjev kriterij konvergencije reda, Cauchyjev niz te formule kao što su Cauchy - Binetova formula te Cauchy - Schwarz - Bunjakovskijeva nejednakost dobile su ime upravo u njegovu čast.

Temelj za gradnju teorije funkcionalnih jednadžbi postavio je upravo Cauchy. Iako je Oresme četiristotinjak godina prije Cauchyja definirao linearnost preko funkcionalnih jednadžbi i upotrijebio funkcionalnu jednadžbu

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Ovu funkcionalnu jednadžbu danas nazivamo *Cauchyjeva funkcionalna jednadžba*.

Cauchy se bavio problemom pronalaska svih funkcija koje zadovoljavaju jednadžbu (1.3). Funkcija $f(x) = ax$ gdje konstanta može biti bilo koji proizvoljan broj, zadovoljava ovu jednadžbu. No teorija o funkcionalnim jednadžbama bavi se pronalaskom svih rješenja funkcionalnih jednadžbi. Očito, $f(x) = ax$ jedno je rješenje funkcionalne jednadžbe (1.3), no nije jasno je li to jedino rješenje.

Više o Cauchyjevoj funkcionalnoj jednadžbi govorit će se u drugom poglavlju ovog diplomskog rada.

1.4 Srinivasa Aaiyangar Ramanujan (1887-1920)

Slika 1.7 Srinivasa Aaiyangar Ramanujan

Legendarni Srinivasa Aaiyangar Ramanujan bio je Indijac rođen 1887. godine. Obrazovao se u Indiji te tamo stekao osnovna znanja i vještine iz područja matematike. Zaintrigiran matematikom sam je počeo proučavati knjige poznatih matematičara. Nakon dolaska u London započeo je suradnju s Godfreyem Haroldom Hardyjem, čak je bio i izabran kao član Kraljevskog društva. Bavio se matematičkom analizom, teorijom brojeva, eliptičnim funkcijama i beskonačnim nizovima. Sa svojih 4000 radova utjecao je na mnoge matematičare i uvelike doprinio razvoju današnje matematike. Najpoznatija je Ramanujanova aproksimacija za vrijednost $\pi^4 \approx 97 + \frac{9}{22}$. U Indiji se na njegov datum rođenja (22. prosinca) slavi Državni dan matematike. Toliko je bio interesantan matematičar da je o njemu snimljen film s nazivom *Ramanujan (2014)* te je Robert Kanigel napisao njegovu biografiju s nazivom *Čovjek koji je spoznao beskonačnost: život genija Ramanujana (The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan, 1991).*

Broj 1729 poznat je kao Hardy-Ramanujanov broj, a iza njega stoji zanimljiva priča koja povezuje suradništvo Ramanujana i Hardyja. Naime kako je Ramanujan obolio od teške zarazne bolesti, morao se iz Londona vratiti u Indiju te ga je kolega Hardy pratio u taksiju s brojem 1729. Na rastanku Hardy je rekao da je broj 1729 jako glup broj, na što mu je Ramanujan odgovorio da nije, naprotiv, da je to vrlo zanimljiv broj jer je to najmanji broj koji se može na dva različita načina zapisati kao zbroj dvaju kubova.

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Druga jednadžba, odnosno jednadžba (1.4) koju povezujemo sa Ramanujanom inspirirana je Vietovom formulom aproksimacije broja π

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{....}}}} \tag{1.4}$$

Zadatak da dokaže da je izraz u (1.4) jednak 3 bio je zadan na raznim natjecanjima. Problem je prvi riješio Ramanujan, a njegovo rješenje usko je povezano s funkcionalnom jednadžbom. On je dokazao općenitiju formulu:

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n + a)^2 + x\sqrt{a(x + n) + (n + a)^2 + (x + n)\sqrt{\ldots}}} \tag{1.5}$$

Izraz iz (1.4) dobije se na desnoj strani (1.5) kada se uvrsti $x = 2$, $a = 0$ i $n = 1$. Ramanujan je očekivao da će problem (1.5) biti riješen na ovakav način:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{9} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{16}} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{25}}} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{36}}}} \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nastavak ovog postupka ovisi o mogućnosti da se rastavi svaki savršeni kvadrat na desnoj strani kao

$$n^2 = 1 + (n-1)\sqrt{(n+1)^2}.$$

Korelaciju između danog problema (1.4) i funkcionalnih jednadžbi možemo prikazati pomoću funkcije

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{\ldots}}}.$$

Kvadriranjem jednadžbe dobivamo

$$[f(x)]^2 = 1 + xf(x+1)\ .$$

To je funkcionalna jednadžba s jednom nezavisnom varijablom. Rješenje ove funkcionalne jednadžbe zadovoljava funkcija $f(x) = x + 1$. O ovoj funkcionalnoj jednadžbi govorit će se u trećem poglavlju ovog diplomskog rada.

Poglavlje 2

Funkcionalne jednadžbe s dvije nezavisne varijable

U ovom poglavlju bit će prikazane funkcionalne jednadžbe s dvije nezavisne varijable te najpoznatiji primjeri istih i načine na koje se mogu rješavati takve funkcionalne jednadžbe. Treba napomenuti da to ne znači da su rješenja funkcionalnih jednadžbi funkcije dviju varijabli, nego da se jednadžba može zapisati u obliku $g(x, y) = 0$ za svaki x i y iz skupa realnih brojeva. Na primjer ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tada za $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiramo

$$g(x, y) = f(x) + f(y) - f(x, y)$$

te dobivamo funkcionalnu jednadžbu

$$f(x) + f(y) = f(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

To je ujedno i prva funkcionalna jednadžba koja će se u ovom radu promatrati.

2.1 Cauchyjeva funkcionalna jednadžba

U prvom dijelu ovog diplomskog rada spomenuta je Cauchyjeva funkcionalna jednadžba koja je ujedno i nepoznatija funkcionalna jednadžba s dvije varijable.

Definicija 2.1.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da vrijedi*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ova jednadžba naziva se Cauchyjeva funkcionalna jednadžba.

Teorem 2.1.2. *Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$f(x) = cx \tag{2.2}$$

za svaki $x \in \mathbb{Q}$.

Dokaz. Za početak u jednadžbu (2.1) uvrsti se $x = y = 0$ te se dobije

$$f(0) = 0.$$

Sada kada se supstituira $y = -x$ i uvrsti u (2.1) dobije se

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

odakle slijedi

$$-f(x) = f(-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Iz ovoga se vidi da je funkcija f neparna funkcija.

Principom matematičke indukcije dokazat će se da $f(nx) = nf(x)$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$.

1° **Baza indukcije** je trivijalno zadovoljna.

2° **Pretpostavka indukcije** - pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k \in \mathbb{N}$.

3° **Korak indukcije** - dokaže se tvrdnja za $k+1$. Supstituiramo $y = kx$ te se dobije

$$f((k+1)x) = f(x+kx) \overset{(2.2)}{=} f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) \overset{(P.I.)}{=} (k+1)f(x).$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi zaključak da tvrdnja $f(nx) = nf(x)$ vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$.

Za slučaj $f(mx) = mx$, gdje je $m \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{R}$ postoje 3 slučaja:

1° Ako je $m > 0$, tada je $m \in \mathbb{N}$, pa vrijedi $f(mx) = mx$.

2° Ako je $m = 0$, onda je $f(mx) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x) = mf(x)$.

3° Ako je $m < 0$, onda je $-m \in \mathbb{N}$, pa vrijedi $f(mx) = f(-(-m)x) = -f((-m)x) = -(-m)f(x) = mf(x)$.

Dakle tvrdnja $f(mx) = mf(x)$ vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{Z}$.

Promotrimo slučaj $f(qx) = qf(x)$ kada je $q \in \mathbb{Q}$. Neka je $q = \frac{m}{n}$, gdje su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f(nqx) = f(mx),$$

pa primjenom dokazanog, jer je $n \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{Z}$, slijedi

$$nf(qx) = mf(x).$$

Odavde je

$$f(qx) = \frac{m}{n} f(x),$$

pa se dobije

$$f(qx) = qf(x). \tag{2.3}$$

Dakle tvrdnja $f(qx) = qf(x)$ vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{Q}$.

Definira se $c := f(1) \in \mathbb{R}$. Uvrsti li u (2.3) $x = 1$, dobije se

$$f(q) = f(q \cdot 1) = qf(1) = qc.$$

Time je dokaz gotov. □

Propozicija 2.1.3. *Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije za koje vrijedi $f(q) = g(q)$ za sve racionalne brojeve q. Za tako definirane funkcije vrijedi*

$$f(x) = g(x)$$

za svaki x iz skupa realnih brojeva.

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji niz q_n racionalnih brojeva (jer je skup $\mathbb{Q}$ gust skup u $\mathbb{R}$) takav da

$$x = \lim_{n\to\infty} q_n.$$

Zbog neprekidnosti funkcija f i g vrijedi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) \quad i \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} g(q_n).$$

Prema pretpostavci, $f(q_n) = g(q_n)$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $f(x) = g(x)$. Zbog proizvoljnosti odabira točke x, slijedi $f = g$.

□

Sada iz teorema 2.1.2. i propozicije 2.1.3. slijedi

Teorem 2.1.4. *Neka je f neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R},$$

tada postoji realan broj c koji zadovoljava

$$f(x) = cx$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je f neprekidna funkcija koja zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu. Tada prema teoremu 2.1.2. vrijedi

$$f(q) = cq, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Sada primjenom propozicije 2.1.3. na f i g, gdje je

$$g(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

slijedi da je $f = g$.

□

2.2 Primjena Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe

Iz prošlog poglavlja vidi se da je neprekidnost bitno svojstvo za rješavanje Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe. Ponekad je teško provjeriti svojstvo neprekidnosti funkcije, pa slijede neki ”alati” kojima se lakše može doći do rješenja funkcionalnih jednadžbi.

U sljedećoj propoziciji će se umjesto svojstva neprekidnosti funkcije pretpostaviti svojstvo monotonosti funkcije.

Definicija 2.2.1. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$*

(i) monotono rastuća na intervalu $I \subseteq D$, ako za svaki $x, y \in I$ vrijedi ako je $x < y$, onda je $f(x) \leq f(y)$. (Ako vrijedi stroga nejednakost, onda je f strogo rastuća.)

(ii) monotono padajuća na intervalu $I \subseteq D$, ako za svaki $x, y \in I$ vrijedi ako je $x < y$, onda je $f(x) \geq f(y)$. (Ako vrijedi stroga nejednakost, onda je f strogo padajuća.)

Teorem 2.2.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotono rastuća (monotono padajuća) funkcija koja zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tada je

$$f(q) = aq$$

za neki $a \geq 0$ *(*$a \leq 0$*).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f monotono rastuća funkcija. Teorem 2.1.1. kaže da $f(q) = aq$, $a \geq 0$ i to vrijedi za sve racionalne brojeve q. Pozivajući se na monotonost funkcije, za svaki proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$aq = f(q) \leq f(x) \leq f(r) = ar.$$

Sada za svaki q i r iz skupa racionalnih brojeva za koje vrijedi $q < x < r$. Pogledajmo sada dva niza racionalnih brojeva za koje vrijedi $q_1 < q_2 < ... < x$ i $r_1 > r_2 > ... > x$ takvi da

$$\lim_{x\to\infty} q_n = \lim_{x\to\infty} r_n = x.$$

Tada slijedi

$$\begin{aligned} ax &= \lim_{x\to\infty} aq_n \\ &= \lim_{x\to\infty} f(q_n) \\ &< \lim_{x\to\infty} f(r_n) \quad \text{(zbog monotonosti funkcije)} \\ &= \lim_{x\to\infty} ar_n \\ &= ax. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sjetimo se teorema o sendviču. Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi takvi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \qquad \forall n \geq m.$$

Ako (a_n) i (c_n) konvergiraju prema istom realnom broju $L \in \mathbb{R}$ onda je i (b_n) konvergentan s istim limesom L dakle

$$\lim_{x\to+\infty} b_n = L.$$

Prema teoremu o sendviču, slijedi zaključak da vrijedi $f(x) = ax$. □

Dokaz za monotono padajuću funkciju dokazuje se analogno.

Propozicija 2.2.3. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava jednadžbe*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{2.5}$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{2.6}$$

za sve realne brojeve x *i* y*. Tada je* f *nulfunkcija ili identična funkcija, to jest*

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textit{ili} \qquad f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Najprije uočimo da ovdje nema pretpostavke da je funkcija monotona ili neprekidna. Uzme li se proizvoljan $z \geq 0$, tada postoji $w \geq 0$ takav da $z = w^2$. Ideja ovog dokaza je da se supstituira $x = w$ i $y = w$ te tako supstituirane x i y uvrsti se u (2.6) te se dobije jednadžba

$$f(z) = [f(w)]^2 \geq 0.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi $f(z) \geq 0$ za svaki $z \geq 0$. Pretpostavimo da je $x \leq y$. Tada je

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f(x) + f(y - x).$$

Kako je $y - x \geq 0$, tada je $f(y - x) \geq 0$ pa je $f(y) \geq f(x)$. Slijedi da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotono rastuća. Prema teoremu 2.2.2. slijedi da je $f(x) = ax$ za neki realni broj a. Sada kada $f(x) = ax$ se uvrsti u (2.6) s vrijednostima $x = y = 1$, dobiva se da je $a = a^2$, a ta jednadžba ima dva rješenja: $a = 0$ ili $a = 1$. □

2.3 Jensenova jednadžba

Definicija 2.3.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{2.7}$$

Tako zadana funkcija naziva se Jensenova funkcionalna jednadžba.

Jensenova funkcionalna jednadžba verzija je Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe korištenjem prosjeka. Do rješenja dolazi se tako da se Jensenova jednadžba svede na Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu, a za nju već znamo rješenja.

Uvrstimo $y = 0$ u (2.7)

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + f(0)}{2}.$$

Sada označimo $f(0) = b$, pa slijedi

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + b}{2}.$$

Uvodimo supstituciju $x = y + z$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{f(y+z) + b}{2}. \tag{2.8}$$

Prema definiciji Jenesenove jednadžbe vrijedi

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{f(y) + f(z)}{2}. \tag{2.9}$$

Izjednačimo li jednadžbe (2.8) i (2.9) dobivamo

$$\frac{f(y+z)+b}{2} = \frac{f(y)+f(z)}{2},$$

a to je ekvivalentno

$$f(y+z) = f(y) + f(z) - b.$$

Definiramo funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(x) + b$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - b \\ &= f(x) + f(y) - b - b \\ &= f(x) - b + f(y) - b \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sveli smo Jensenovu funkcionalnu jednadžbu na Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu. Slijedi da postoji $c \in \mathbb{R}$ za koji je $g(x) = cx$ rješenje ove jednadžbe za svaki $x \in \mathbb{R}$. Kako smo definirali funkciju g kao $g(x) = f(x) - b$ slijedi

$$cx = f(x) - b.$$

Dodavanjem b s obje strane jednadžbe dobiva se konačno rješenje Jensenove funkcionalne jednadžbe

$$f(x) = cx + b.$$

Primjer 2.3.1: Odredimo sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne u nuli takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y). \tag{2.11}$$

Rješenje: Pogledajmo funkciju $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$ i svedemo funkciju g na Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{1}{3}(x+y)^3 \\ &= f(x) + f(y) + xy(x+y) - \frac{1}{3}(x)^3 - \frac{1}{3}(y)^3 - xy(x+y) \\ &= f(x) - \frac{1}{3}(x)^3 + f(y) - \frac{1}{3}(y)^3 \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Funkcija g zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu, pa je rješenje $g(x) = ax$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Odavde je $ax = f(x) - \frac{1}{3}x^3$, tj.

$$f(x) = ax + \frac{1}{3}x^3. \tag{2.13}$$

2.4 Cauchyjeva eksponencijalna funkcionalna jednadžba

Teorem 2.4.1. *Za neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ različitu od nulfunkcije koja zadovoljava jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

postoji $c > 0$ takav da vrijedi

$$f(x) = c^x \tag{2.15}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(x_0) = 0$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= f[(x - x_0) + x_0] \\ &= f(x - x_0)f(x_0) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

pa je f nulfunkcija, a to je kontradikcija pretpostavci. Slijedi da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Nadalje iz (2.14) slijedi

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2. \tag{2.17}$$

Kako je desna strana jednakosti (2.17) strogo pozitivna, slijedi $f(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Sada kada je f strogo rastuća funkcija, smijemo definirati funkciju $g(x) = \log f(x)$. Funkcija $g(x)$ je neprekidna i zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu (2.1) stoga postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $g(x) = ax$. Iz toga slijedi zaključak da postoji $c > 0$ takav da $f(x) = c^x$, za sve $x \in \mathbb{R}$. □

Primjer 2.4.1 : Odredimo sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + xy - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Rješenje: Jednadžba (2.18) ekvivalentna je

$$f(x) + \frac{x^2}{2} + 1 + f(y) + \frac{y^2}{2} + 1 = f(x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Definiramo funkciju $g(x) := f(x) + \frac{x^2}{2} + 1$, pa jednadžba poprima oblik

$$g(x) + g(y) = g(x+y).$$

Kako je g neprekidna funkcija i zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu, vrijedi $g(x) = ax$ za svaki x iz skupa realnih brojeva. Rješenje zadatka glasi

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + cx - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$.

Rješenje se provjerava tako da se funkcija (2.19) uvrsti u početnu jednadžbu (2.18)

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= -\frac{x^2}{2} + cx - 1 - \frac{y^2}{2} + cy - 1 \\ &= -\frac{(x+y)^2}{2} + c(x+y) - 1 + xy - 1 \\ &= f(x+y) + xy - 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Primjer 2.4.2 : Odredimo sve neprekidne nenul-funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rješenje: Definiramo funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da $g(x) = f(x) + 1$. Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) + 1 \\ &= f(x) + f(y) + f(x)f(y) + 1 \\ &= (f(x) + 1)(f(y) + 1) \\ &= g(x)g(y). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Neprekidna rješenja ove jednadžbe su oblika $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $g(x) = c^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $c \in \mathbb{R}^+$. Slijedi da je $f(x) = -1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $f(x) = c^x - 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $c \in \mathbb{R}^+$.

Poglavlje 3

Funkcionalne jednadžbe s jednom nezavisnom varijablom

U ovom poglavlju prikazat će se metode rješavanja funkcionalnih jednadžbi s jednom nezavisnom varijablom. Metode o kojima će biti riječ su metoda zamjene varijabli i metoda linearizacije. Za svaku od ovih metoda bit će riješeno nekoliko primjera.

3.1 Metoda zamjene varijable

Kada se prvi put indirektno susretnemo s funkcionalnim jednadžbama u četvrtom razredu srednje škole, pojavljuju se zadaci na koje se primjenjuje metoda zamjene varijable i ovo je najčešća i najpoznatija metoda rješavanja funkcionalnih jednadžbi s jednom nezavisnom varijablom. Ideja ove metode jest da se varijabla x zamjeni s $g(x)$, gdje je g funkcija nepromijenjena s obzirom na domenu jer domena funkcije f mora ostati nepromijenjena. Tu zamjenu označavat ćemo s $x \to g(x)$.

Primjer 3.1.1: Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$2xf(x) + f(\frac{1}{x}) = x - 1. \tag{3.1}$$

Rješenje: Izrazimo $f(\frac{1}{x})$ iz (3.1)

$$f(\frac{1}{x}) = x - 1 - 2xf(x). \tag{3.2}$$

Zamjenimo x varijablom $\frac{1}{x}$ u (3.1), tj. napravimo zamjenu gdje $x \to \frac{1}{x}$

$$2\frac{1}{x}f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x} - 1. \tag{3.3}$$

Uvrsti li se (3.2) u (3.3) dobiva se

$$-3f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{2}{x} - 2,$$

to je ekvivalentno

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Našli smo funkciju koja zadovoljava (3.1). Preostaje provjera koja se izvršava tako da se uvrsti rješenje odnosno funkcija f u (3.1). Zaista lako se utvrdi da vrijedi

$$2x(1 - \frac{1}{x}) + 1 - x = x - 1$$

Funkcija $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ je traženo rješenje zadatka.

Primjer 3.1.2: Odredite funkciju f koja zadovoljava

$$f\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \frac{x-1}{x+2}.$$

Rješenje: Supstituira se $t = \frac{2x-1}{x+3}$. Vrijedi

$$t = \frac{2x-1}{x+3} \iff x = \frac{1+3t}{2-t}.$$

Sada se dobije

$$f(t) = \frac{2\frac{3t+1}{2-t} - 1}{2 - \frac{3t+1}{2-t}} = \frac{4t-1}{t+5}.$$

Na kraju se samo zamijeni varijabla t varijablom x i traženo rješenje je funkcija

$$f(x) = \frac{4x-1}{x+5}.$$

Primjer 3.1.3: Odredimo sve polinome f takve da vrijedi

$$f(x-1)f(x+1) = f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Rješenje: Promatrajmo stupnjeve polinoma s lijeve i desne strane jednakosti. Neka je $d = stf$. Lijeva strana jednakosti je stupnja $2d$, a desna strana jednakosti je stupnja d^2. Dobiva se jednakost $2d = d^2$. Iz te jednadžbe imamo rješenje $d = 0$ ili $d = 2$.

Prvi slučaj: Ako je $d = 0$, rješenje funkcionalne jednadžbe je polinom nultog stupnja, tj. $f(x) = c$ gdje je $c \in \mathbb{R}$. Kada se uvrsti taj f u jednadžbu (3.4) dobiva se da je $c = 0$ ili $c = 1$.

Drugi slučaj: Ako je $d = 2$, tada je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Kada se uvrsti taj f u jednadžbu (3.4) dobiva se da je jedini polinom drugog stupnja koji zadovoljavaju tu jednadžbu $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Tražena rješenja ovog primjera su ili $f(x) = 0$ ili $f(x) = 1$ ili $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Provjerimo rješenja

$$f(x-1)f(x+1) = 0 = f(f(x))$$

$$f(x-1)f(x+1) = 1 = f(f(x))$$

$$f(x-1)f(x+1) = (x-2)^2x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = f((x-1)^2) = f(f(x)).$$

3.2 Metoda linearizacije

Metoda linearizacije je metoda kojom se jednadžbe koje nisu linearne pretvaraju u linearne radi lakšeg rješavanja zadataka. To se može vidjeti na primjeru.

Primjer 3.2.1: Odredite sve funkcije takve da vrijedi

$$f(x^2) - f(x) = 1, \quad \forall x > 1. \tag{3.5}$$

Rješenje: Gledajući ovu jednadžbu vidi se da vrijednost funkcije

$$x \to f(x^2)$$

„raste" puno brže od vrijednosti funkcije f.

Iz svojstva logaritma $x^r = a^{r \log_a x}$, gdje su x i a strogo veći od nula i $a \neq 1$, ekvivalentno vrijedi $x^2 = a^{2 \log_2 x}$ i $x = a^{\log_a x}$. Uvrštavanjem tako danih x i a u (3.5) dobiva se

$$f(a^{2 \log_2 x}) - f(a^{\log_a x}) = 1. \tag{3.6}$$

Neka je $F(x) = f(a^x)$ funkcija gdje je $a > 0$. Iz svojstva logaritma ekvivalentno vrijedi $F(\log_a x) = f(x)$, odnosno uvrštavanjem takve funkcije u (3.6) za svaki $x > 0$ vrijedi

$$F(2 \log_a x) - F(\log_a x) = 1.$$

Uvodi se supstitucija $s = \log_a x$ iz čega slijedi

$$F(2s) - F(s) = 1, \quad \forall s > 0. \tag{3.7}$$

Zapišimo (3.7) na ovaj način: $F(2s) = 1 + F(s)$. Sada ovakav način zapisa jednadžbe podsjeća na svojstvo logaritma, u ovom slučaju svojstvo za koje vrijedi $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Iz ovog svojstva slijedi zaključak da je $F(s) = \log_2 s$ rješenje jednadžbe (3.7). No zadatak nije gotov, treba se vratiti na početak jer se traži funkcija f. Kada se vrati supstitucija dobiva se da je rješenje ovog primjera

$$F(\log_a x) = \log_2 \log_a x,$$

odnosno

$$f(x) = \log_2 \log_a x, \quad \forall x > 1.$$

Provjera se vrši na način kao i u prethodnim primjerima

$$f(x^2) - f(x) = \log_2 \log_a x^2 - \log_2 \log_a x = \log_2 2 + \log_{2\,a} x - \log_2 \log_a x = \log_2 2 = 1.$$

Općenito metoda linearizacije bazira se na tome da se funkcija f zamijeni funkcijom F za koju vrijedi

$$\rho(F(\phi)) = f(x)$$

gdje su ρ i ϕ funkcije koje su odabrane tako da budu pogodne za dobivanje rješenja zadatka. (U prijašnjem primjeru $\phi(x) = \log_a x$ i $\rho(x) = x$.)

3.3 Funkcionalne jednadžbe i ugniježdeni korijeni

Na početku ovog diplomskog rada spomenuti su ugniježdeni korijeni i Srinivasa Aaiyangar Ramanujan, čovjek koji je povezao ugniježdene korijene i funkcionalne jednadžbe. Već prije spomenuti zadatak kojim se je bavio Ramanujan glasi:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\ldots}}}} \tag{3.8}$$

Generalizacijom tog problema dobiva se funkcija

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{\ldots}}} \tag{3.9}$$

te kvadriranjem (3.9) vidi se da ona zadovoljava sljedeću funkcionalnu jednadžbu

$$[f(x)]^2 = 1 + xf(x+1) \tag{3.10}$$

gdje je $f(x) \geq 0$. Uvrsti li se u (3.10) $x = 0$, dobiva se $f(0) = 1$. Neka je funkcija f polinom stupnja n. Lijeva strana funkcionalne jednadžbe (3.10) tada je stupnja $2n$, a desna strana stupnja $n + 1$. Dakle funkcija f treba biti polinom prvog stupnja. Neka je $f(x) = ax + b$. Uvrsti li se to u (3.10) dobiva se

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 = 1 + ax^2 + ax + bx. \tag{3.11}$$

Prisjetimo se da su dva polinoma $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ i $Q(x) = b_mx^n + b_{m-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ jednaka ako i samo ako $n = m$ i $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, tj. istog su stupnja i odgovarajući koeficijenti su im jednaki.

Sada se vidi da jednakost vrijedi za $a = 1$ i $b = 1$. Dakle rješenje ovog problema je polinom $f(x) = x + 1$. Ostaje još preispitati točnost rješenja. Vrijedi li

$$x + 1 = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{\ldots}}}.$$

Ograničit ćemo vrijednost $f(x)$. Za svaki $x \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}} \\ &= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots} = x \\ &\geq \frac{x+1}{2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

S druge strane vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)...}}} \\ &\leq \sqrt{(x+1)\sqrt{2(x+1)\sqrt{3(x+1)...}}} \\ &= (x+1)\sqrt{1\sqrt{2\sqrt{3...}}} \\ &\leq (x+1)\sqrt{1\sqrt{2\sqrt{4...}}} \\ &= 2(x+1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Iz (3.12) i (3.13) slijedi

$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) \leq 2(x+1).$$

Propozicija 3.3.1. *Neka je f funkcija koja zadovoljava funkcionalnu jednadžbu*

$$[f(x)]^2 = 1 + xf(x+1) \tag{3.14}$$

i nejednakost

$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) \leq 2(x+1) \tag{3.15}$$

za svaki $x \geq 0$. Tada je $f(x) = x + 1$.

Dokaz. Varijabla x zamijeni se s $x+1$ i uvrstimo u (3.15) te se dobije

$$\frac{x+2}{2} \leq f(x+1) \leq 2(x+2). \tag{3.16}$$

Iz (3.14) tada slijedi

$$\frac{1}{2} + xf(x+1) \leq [f(x)]^2 \leq 2 + xf(x+1). \tag{3.17}$$

Primijeni li se (3.16) u (3.17), dobije se

$$\frac{1+x(x+2)}{2} \leq [f(x)]^2 \leq 2[1 + x(x+2)]$$

iz čega slijedi

$$2^{-1/2}(1+x) \leq f(x) \leq 2^{1/2}(1+x). \tag{3.18}$$

Pogledajmo (3.15) i usporedimo s (3.18), vidi se da su se granice „suzile", to jest da su se dobile bolje ograde za $f(x)$. Ponovi li se cijeli postupak još jednom, ali krećući od (3.18) umjesto (3.15), dobiva se

$$2^{-1/4}(1+x) \leq f(x) \leq 2^{1/4}(1+x).$$

Ponavljajući postupak k puta dobiva se

$$2^{-1/2^k}(1+x) \leq f(x) \leq 2^{1/2^k}(1+x).$$

Kako je

$$\lim_{k\to\infty} 2^{-\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{2k}} = 1$$

te kada $k \to \infty$ dobiva se da vrijedi

$$1 + x \leq f(x) \leq 1 + x$$

i time je dokaz gotov. □

Poglavlje 4

Funkcionalne jednadžbe u nastavi matematike

Funkcionalne jednadžbe već su u vrijeme renesanse interesirale matematičare, no funkcionalne jednadžbe i u to doba nalazile su se samo na natjecanjima iz matematike ili na matematičkim olimpijadama. Danas se funkcionalne jednadžbe ne obrađuju zasebno ni u osnovnoj ni u srednjoj školi. Zadaci s funkcionalnim jednadžbama nalaze se u zadacima namijenjenim za sudionike državnih natjecanja iz matematike. U ovom poglavlju riješit će se nekoliko primjera zadataka iz udžbenika gdje se indirektno spominju funkcionalne jednadžbe, nekoliko primjera zadataka s natjecanja te će se primjeniti funkcionalne jednadžbe u izvodu nekih formula.

4.1 Funkcionalne jednadžbe - zadaci u srednjoškolskoj nastavi

U srednjoj školi funkcionalne jednadžbe ne obrađuju se kao zasebna cjelina, već se pojavljuju zadaci vezani uz funkcionalne jednadžbe indirektno u četvrtom razredu srednje škole kada se obrađuju funkcije. Riješit ćemo nekoliko primjera iz udžbenika i zbirke zadataka za 4. razred gimnazije te 4. razred strukovnih škola.

Primjer 4.1.1: [Dakić, B., Elezović, N. Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije. Zagreb; Element; 2014.] [Poglavlje 3.1 - zadatak 15.]

Odredi $f(x)$, ako je

$$f(\log_2 x) = \frac{\log_2(4x^3)}{\log_{\sqrt{2}} x - \log_{0.5} x}.$$

Rješenje: Supstituira se $t = \log_2 x$. Vrijedi

$$t = \log_2 x \iff 2^t = x.$$

Sada se dobiva:

$$f(t) = \frac{\log_2(4 \cdot 2^{3t})}{\log_{\sqrt{2}} 2^t - \log_{0.5} 2^t} = \frac{\log_2(2^{3t+2})}{\log_2 2^{2t} + \log_2 2^t} = \frac{3t+2}{2t+t} = \frac{3t+2}{3t}.$$

Rješenje zadataka glasi

$$f(x) = \frac{3x+2}{3x}.$$

Primjer 4.1.2: [Dakić, B., Elezović, N. Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije. Zagreb; Element; 2014.] [Poglavlje 3.1 - zadatak 18.]

Ako je $f(\cos^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x - \cos 2x$, koliko je $f(x)$?

Rješenje: Znamo da vrijedi $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ iz čega slijedi

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Supstituira se $t = \cos^2 x$ te se primjenjuje osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Tada vrijedi

$$f(t) = \frac{t}{1-t} - (t - (1-t) = \frac{t}{1-t} - 2t + 1.$$

Sređivanjem gornje jednadžbe dobiva se rješenje zadatka

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{1-x}.$$

Primjer 4.1.3: [Dakić, B., Elezović, N. Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije. Zagreb; Element; 2014.] [Poglavlje 3.1 - zadatak 25.]

Ako je

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x}{x-2},$$

koliko je $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$?

Rješenje: Supstituira se $t = \frac{x-1}{x+1}$. Vrijedi

$$t = \frac{x-1}{x+1} \iff x = \frac{1+t}{1-t}.$$

Slijedi

$$f(t) = \frac{\frac{1+t}{1-t}}{\frac{1+t}{1-t} - 2} = \frac{t+1}{3t-1}.$$

Zamjene li se varijable t i x, dobiva se

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-1}.$$

U zadatku se traži funkcija $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ pa je rješenje zadatka

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{3x+3}{x-1} - 1} = \frac{x}{x+2}.$$

U udžbeniku za 4. razred četverogodišnje strukovne škole javlja se zadatak u kojem se definira funkcionalna jednadžba te se traži rješenje zadatka.

Primjer 4.1.4: [Golubović, D., Javor, P. Matematika 4: udžbenik za 4. razred četverogodišnje strukovne škole. Zagreb; Školska knjiga; 2008.] [Poglavlje 5.1 - zadatak 33.]

Funkcionalna jednadžba je jednadžba koju zadovoljava nepoznata funkcija f i nezavisna varijabla x na području definicije funkcije f. Odredi realnu funkciju f koja zadovoljava jednadžbu:

$$f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x. \tag{4.1}$$

Rješenje: Izrazimo $f(\frac{1}{x})$ iz (4.1)

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{x - f(x)}{2}. \tag{4.2}$$

Zamijenimo x varijablom $\frac{1}{x}$ u jednadžbi (4.2), to jest napravi se zamjena gdje je $x \to \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - f(\frac{1}{x})}{2} \tag{4.3}$$

te uvrsti li se (4.2) u (4.3) dobiva se

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{x-f(x)}{2}}{2} = \frac{2 - x^2 + f(x)x}{4x}. \tag{4.4}$$

Sređivanjem izraza (4.4) dolazi se do tražene funkcije

$$f(x) = \frac{2-x^2}{3x}.$$

4.2 Funkcionalne jednadžbe na natjecanjima iz matematike

Zadaci povezani s funkcionalnim jednadžbama češće su viđeni među zadacima na natjecanjima iz matematike jer je za njihovo rješavanje potrebno puno veće i šire znanje matematike. Ovdje će se riješiti tri primjera zadataka koji se pojavljuju na natjecanjima iz matematike, točnije državnim natjecanjima za četvrte razrede srednjih škola (A-varijante).

Primjer 4.2.1: [2017. godina] Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(x) + x^2. \tag{4.5}$$

Rješenje: Uvrsti se $x = -f(y)$ u (4.5) i dobiva se jednadžba

$$f(0) = f(f(y)) - f(y)^2. \tag{4.6}$$

Uvrsti li se u (4.6) $y = 0$, vrijedi

$$f(0) = f(f(0)) - f(0)^2,$$

te kada se označi $f(0) = a$, dobiva se jednadžba

$$f(a) = a^2 + a. \tag{4.7}$$

Sada se u jednadžbu (4.5) uvrsti $y = 0$

$$f(x + a) = f(a) + 2xa + x^2. \tag{4.8}$$

Uvrštavanjem (4.7) u (4.8) dobiva se

$$f(x + a) = f(a) + 2xa + x^2 = a^2 + a + 2xa + x^2 = (x + a)^2 + a.$$

Iz toga slijedi zaključak da su jedina rješenja funkcije $f(x) = x^2 + a$ gdje je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan.

Primjer 4.2.2: [2015. godina] Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x). \tag{4.9}$$

Rješenje: Kao i u prijašnjem primjeru želi se dobiti vrijednost $f(0)$, zato se uvrštava u (4.9) $x = 0$ i $y = 0$

$$f(0) = 0. \tag{4.10}$$

Uvrsti li se u (4.9) $x = 1$ i $y = 1$ dobiva se

$$f(1)(1 + f(1)) = 2f(1),$$

odnosno

$$f(1)^2 = f(1).$$

Postoje 2 slučaja: $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$.

Prvi slučaj: Ako je $f(1) = 0$, uvrštavanjem $x = 1$ u jednadžbu (4.9) dobiva se da za svaki $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(y)(1 + f(y)) = f(y),$$

odnosno

$$f(y) = 0.$$

Drugi slučaj: Ako je $f(1) = 1$, uvrštavanjem $y = 1$ u jednadžbu (4.9) dobiva se da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x)(1 + x) = f(x) + x^2,$$

odnosno

$$xf(x) = x^2. \tag{4.11}$$

Dijeljenjem jednadžbe (4.11) s $x \neq 0$ slijedi

$$f(x) = x.$$

Iz jednadžbe (4.10) slijedi da je $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Tražena rješenja ovog zadatka su funkcije $f(x) = x$ i $f(x) = 0$.

Primjer 4.2.3: [2014.godina] Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy. \tag{4.12}$$

Rješenje: Uvrsti li se u (4.12) $y = 0$, dobiva se

$$f(x)f(0) = f(x) \tag{4.13}$$

da vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. Nulfunkcija očito nije rješenje zadatka, pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \neq 0$. Tada iz (4.13) slijedi da je $f(0) = 1$. Uvrsti li se u (4.12) $x = 1$ i $y = -1$, dobiva se

$$f(1)f(-1) = 0.$$

Postoje 2 slučaja: $f(1) = 0$ ili $f(-1) = 0$.

Prvi slučaj: Ako je $f(1) = 0$, uvrštavanjem $y = 1$ u jednadžbu (4.12), dobiva se da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$0 = f(x+1) + x,$$

pa kada se zamijeni varijabla x varijablom $z = x + 1$, dobiva se funkcija

$$f(z) = 1 - z.$$

Drugi slučaj: Ako je $f(-1) = 0$, uvrštavanjem $y = -1$ u jednadžbu (4.12), dobiva se da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$0 = f(x-1) - x,$$

pa kada se zamijeni varijabla x varijablom $z = x - 1$, dobiva se funkcija

$$f(z) = 1 + z.$$

Rješenja ovog zadatka funkcije $f(x) = 1 + x$ i $f(x) = 1 - x$.

4.3 Rekurzije i funkcionalne jednadžbe

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n-ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Međutim, po definiciji, niz je funkcija čija je domena $\mathbb{N}$. Preciznije, niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uz oznaku $a_n = a(n)$ dolazimo do uobičajene notacije za niz $a_1, a_2, \ldots$. tj, (a_n). S obzirom na to da je niz funkcija, onda rekurzivno zadani niz zapravo predstavlja funkcionalnu jednadžbu.

Na primjer ako je niz zadan rekurzijom $a_n + 1 = 5a_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}$, tada taj niz promatramo kao funkciju koja zadovoljava funkcionalnu jednadžbu $a(n+1) = 5a(n) + 4, \forall n \in \mathbb{N}$. Rekurzivna formula ili rekurzija formula je kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova.

Primjer 4.3.1: Odredimo opći član niza (a_n) zadanog rekurzijom $a_n = a_{n-1} - 4$ kojem je prvi član $a_1 = 10$.

Rješenje: Slijedi

$$a_n = a_{n-1} - 4 = (a_{n-2} - 4) - 4 = a_{n-2} - 2 \cdot 4 = (a_{n-3} - 4) - 2 \cdot 4 = a_{n-3} - 3 \cdot 4.$$

Nastavljanjem ovog postupka dolazi se do

$$a_n = a_1 - 4(n-1) = 10 - 4(n-1) = 14 - 4n.$$

Kako bi dokaz bio potpun, ovu formulu treba dokazati. Ovdje će se to napraviti matematičkom indukcijom

1° **Baza indukcije** za $n = 1$ imamo $a_1 = 14 - 4 = 10$.

2° **Pretpostavka indukcije** - pretpostavimo da je $a_k = 14 - 4k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

3° **Korak indukcije** - dokažimo tvrdnju za $k + 1$.

$$a_{k+1} = a_k - 4 = 14 - 4k - 4 = 14 - 4(k + 1).$$

Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

4.4 Primjena funkcionalnih jednadžbi u nastavi

Računanje površine pravokutnika

Učenici se s formulom za dobivanje površine pravokutnika susreću već u petom razredu, a ona ih prati do kraja njihovog obrazovanja. Učenici u petom razredu pomoću tablica s duljinama stranica pravokutnika i preko prebrojavanja jediničnih kvadratića, metodom indukcije zaključuju da je površina pravokutnika umnožak duljina susjednih stranica pravokutnika. Dokaz te formule ne radi se na nastavi matematike jer je za dokaz potrebno znanje o limesima, nizovima i teoremu o sendviču.

Nije odmah vidljivo, no površinu pravokutnika možemo dobiti preko Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Površinu pravokutnika sa stranicama x i y označit ćemo funkcijom $T(x, y)$. Ideja ovog iskaza je da se stranica x podijeli na dva dijela x_1 i x_2 te stranica y na y_1 i y_2 (kao na slici 4.1).

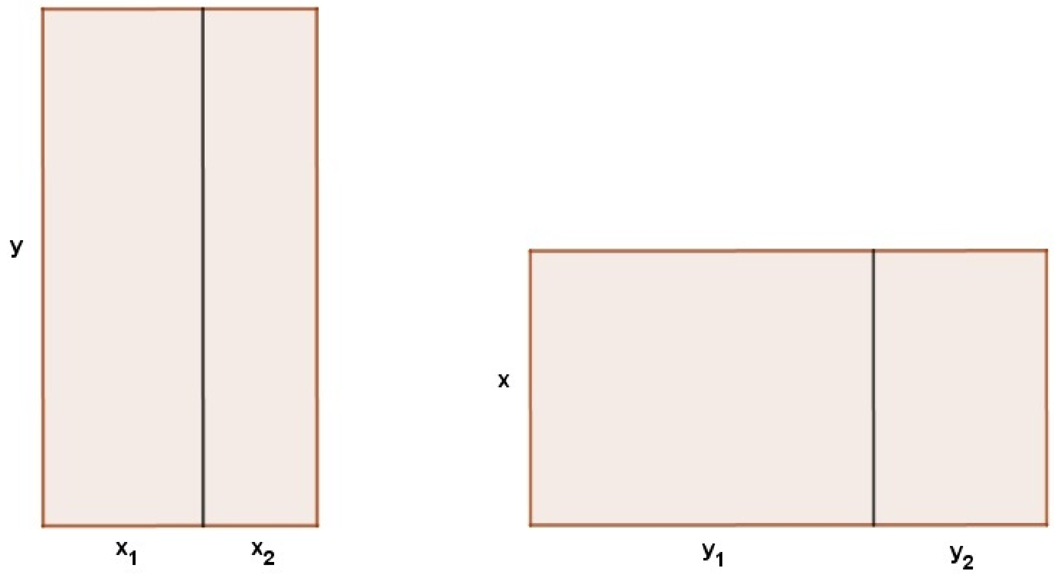
Tada će vrijediti

$$T(x_1, y) + T(x_2, y) = T(x_1 + x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^+ \tag{4.14}$$

$$T(x, y_1) + T(x, y_2) = T(x, y_1 + y_2), \quad \forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+. \tag{4.15}$$

Uz pretpostavku da je površina kvadrata duljine stranice 1 jednaka 1, vrijedi još i

$$T(1, 1) = 1. \tag{4.16}$$



Slika 4.1 Pravokutnik

Fiksira li se y i označi $f_y(x) = T(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^+$, jednadžba (4.14) postaje

$$f_y(x_1 + x_2) = f_y(x_1) + f_y(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Funkcija $f_y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu. Kao što znamo, tada vrijedi

$$f(qx) = qf_y(x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ i za sve pozitivne racionalne brojeve q. Funkcija f_y pozitivna je iz same definicije, a rastuća iz

$$f(x + y) = f(x) + f(y) > f_y(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $x \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$[nx] \leq nx < [nx] + 1,$$

gdje $[nx]$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od nx . Slijedi

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n},$$

odnosno

$$0 \leq x - \frac{[nx]}{n} < \frac{1}{n}.$$

Označimo

$$r_n = \frac{[nx]}{n} \quad i \quad R_n = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n}.$$

Sada kada smo definirali racionalne nizove r_n i R_n, označimo $c_y = f_y(1)$. Tada vrijedi

$$c_y \cdot r_n = r_n \cdot f_y(1) = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = R_n \cdot f_y(1) = c_y \cdot R_n.$$

S obzirom da na to da je $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} R_n = x$ slijedi

$$f_y(x) = c_y \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Označimo $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tako da $c(y) = c_y$. Iz Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe dobiva se $T(x, y) = c(y)x$, odakle prema (4.15) vrijedi

$$c(y_1) + c(y_2) = c(y_1 + y_2), \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+,$$

pa funkcija c također zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu. Dakle postoji konstanta $c_0 > 0$ (jer je $T(x, y) > 0, \forall x, y > 0$) takva da je $c(y) = c_0 y$. Iz ovoga slijedi $T(x, y) = c_0 xy$ te prema (4.16) dobiva se da je $c_0 = 1$ pa je

$$T(x, y) = xy.$$

Time smo došli do dobro poznate formule za izračunavanje površine pravokutnika.

Primjena funkcionalnih jednadžbi na binomni koeficijent

Kombinatorika je grana matematike koja se radi u srednjoškolskom obrazovanju. Ona proučava probleme prebrojavanja, raspoređivanja i svrstavanja. Često se javljaju zadaci s kombinacijama bez ponavljanja.

Primjer 4.4.1: Na koliko se načina može napraviti sladoledni kup od različitih kuglica sladoleda (različitih vrsta) ako u ponudi imamo čokoladu, vaniliju, jagodu, šumsko voće i punč?

Rješenje: Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ skup svih vrsta sladoleda. Treba se izračunati broj kombinacija sladoleda s tri različite vrste. To se računa na način

$$K_3(5) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Rješenje se dobilo upotrebom binomnog koeficijenta. Kombinacije bez ponavljanja r-tog razreda u skupu od n elemenata definiramo kao svaki r-član podskup skupa od n elemenata. Broj kombinacija bez ponavljanja računamo kao

$$K_r(n) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Učenici često zaborave kompliciranije formule ili zamijene mjesta varijablama. Cilj upotrebe funkcionalnih jednadžbi jest da se preko razumijevanja formula dođe do samog izvoda formule.

Neka je funkcija $f : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ zadana tako da $f(r)$ predstavlja ukupan broj načina izbora r različitih elementa od ponuđenih n elementa. Jasno da je $f(0) = 1$ (na 1 način možemo izabrati 0 elementa, to jest ne izabrati nijedan element). Izbor $r + 1$ od n elementa možemo podijeliti u dva koraka: prvo se izabere r elemenata, a nakon toga, od preostalih $n - r$ elementa izabere se još jedan. Prvi korak može se napraviti na $f(r)$ načina, a drugi na $n - r$ načina. Pritom moramo imati na umu da će se isti ishodi dobiti više puta. Točnije svaki ishod će biti ponovljen $r + 1$ puta jer na toliko načina skup od $r + 1$ elemenata možemo podijeliti na dva skupa od kojih jedan ima r, a drugi 1 element. Slijedi da je

$$(r + 1)f(r + 1) = (n - r)f(r),$$

odnosno

$$f(r + 1) = \frac{n - r}{r + 1} f(r) = \frac{n - r}{r + 1} \cdot \frac{n - (r - 1)}{r} f(r - 1) = \ldots = \frac{(n - r) \cdot (n - r + 1) \cdot \ldots \cdot n}{(r + 1) \cdot r \cdot \ldots \cdot 1} f(0). \tag{4.17}$$

Jednadžba (4.17) zapisana pomoću faktorijela glasi

$$\frac{n!}{(n - r)!} = r! f(r),$$

time se dolazi do željene formule

$$f(r) = \frac{n!}{(n - r)!r!} = \binom{n}{r}.$$

Primjena funkcionalnih jednadžbi na skalarni produkt

Vektori u nastavi matematike pojavljuju se već u sedmom razredu osnovne škole, gdje je glavni ishod prepoznati, definirati i nacrtati vektor. Također vektori se rade i u srednjoškolskoj matematici u prvom i/ili u trećem razredu srednje škole ovisno o tjednom broju sati matematike. U trećem razredu srednje škole učenici se nalaze pred pojmom skalarnog produkta koji stvara velike probleme u nastavi zbog nerazumijevanja formule.

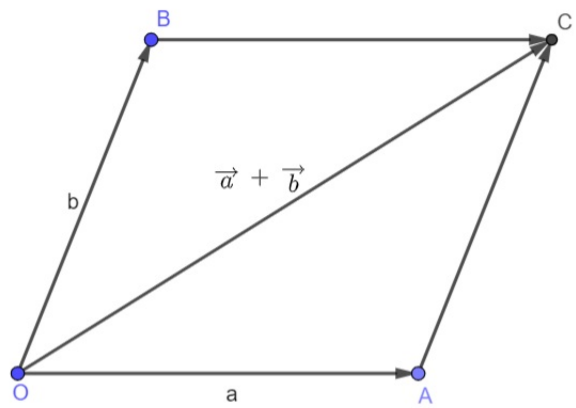
Do formule za skalarni produkt može se doći primjenjujući funkcionalne jednadžbe, no ipak se nekih definicija i svojstava vektora te skalarnog produkta treba prisjetiti.

Definicija 4.4.1. *Za usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kaže se da su ekvivalentne ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište. To se piše $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*

Definicija 4.4.2. *Vektor je klasa ekvivalencije prema relaciji $\sim$ na skupu svih usmjerenih dužina $\overrightarrow{AB}$, pri čemu su A i B točke trodimenzionalnog prostora. Skup svih vektora označavamo s V^3.*

Definicija 4.4.3. *Neka je $O \in E^3$ prema volji izabrana točka i neka su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ dani svojim predstavnicima s početkom u točki O, $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Zbroj vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je vektor $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}]$, pri čemu je C jedinstvena točka u E^3 takva da je četverokut OACB paralelogram*

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OC}].$$



Slika 4.2 Zbrajanje vektora - pravilo paralelograma

Definicija 4.4.4. *Neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$. Modul ili duljina vektora $\overrightarrow{a}$ duljina je dužine $\overline{AB}$. Kut između dva vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ manji je kut od dva kuta određena zrakama OA i OB gdje je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\overrightarrow{B} = [\overrightarrow{OB}]$.*

Skalarno množenje preslikavanje je $\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ koje ima sljedeća svojstva:

a) pozitivna definitnost

$$\vec{a}^2 \geq 0, \quad \forall \vec{a} \in V^3$$

$$\vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$

b) komutativnost

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

c) kvaziasocijativnost

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R}$$

d) distributivnost prema zbrajanju

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3.$$

Duljinu vektora definiramo na sljedeći način:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}}.$$

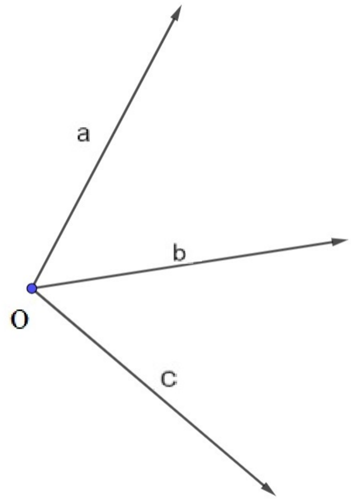
Dakle

$$|\vec{a}| = 1 \iff \vec{a}^2 = 1. \tag{4.18}$$

Nadalje pretpostavimo da vrijedi

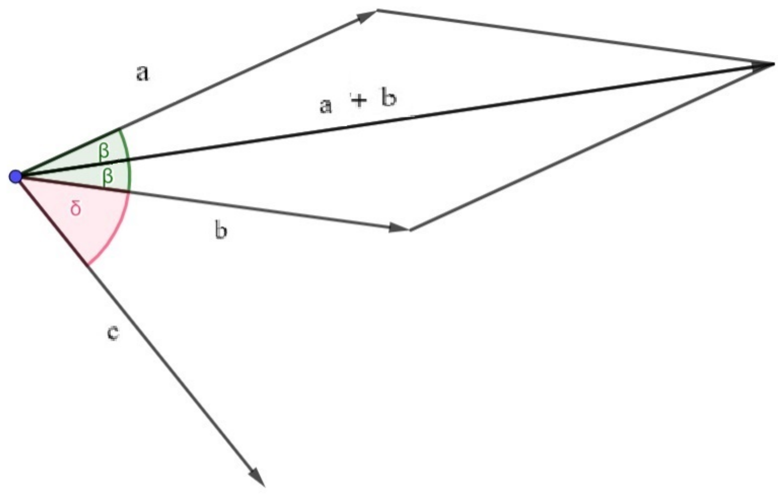
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}. \tag{4.19}$$

Neka je točka O ishodište koordinatnog sustava. Uzmimo tri proizvoljna jedinična vektora (kao na slici 4.1).



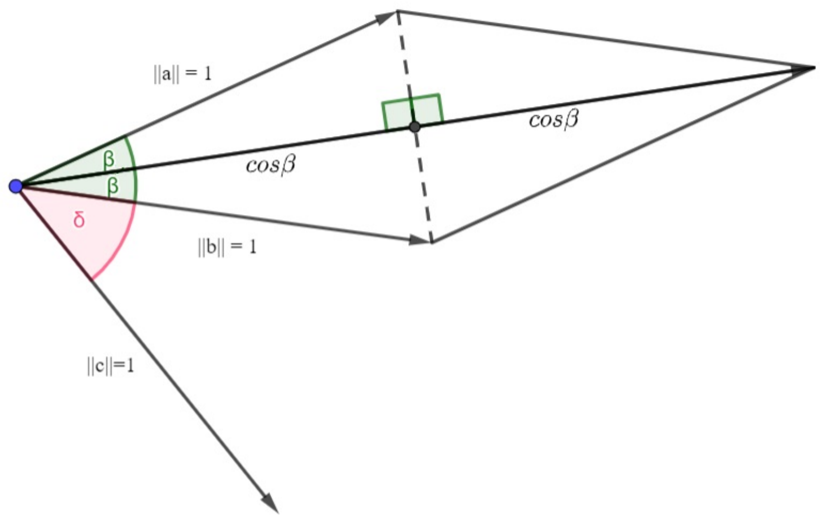
Slika 4.3

Kut koji zatvaraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ jednak je kutu koji zatvaraju vektori $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. (Vektori se zbrajaju prema pravilu paralelograma. Kako su dani vektori jedinični vektori, zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ vektor je koji dijeli kut između vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ na dva sukladna kuta.) Označimo kut između vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ te kut između vektora $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ s β, a kut između vektora $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ s δ (kao na Slici 4.4).



Slika 4.4

Primjenom trigonometrije dobiva se da je duljina vektora $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ jednaka $2\cos\beta$ (vidi Sliku 4.5).



Slika 4.5

Označimo s $f(\alpha)$ skalarni produkt između dva vektora jedinične duljine koji zatvaraju kut α. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = f(2\beta + \delta) + f(\delta).$$

Primjenjujući svojstvo kvaziasocijativnosti, distributivnosti prema zbrajanju te normirajući vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, dobiva se

$$\begin{aligned} f(2\beta + \delta) + f(\delta) &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} \\ &= \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|} \cdot \overrightarrow{c} \qquad (4.20) \\ &= 2\cos\beta \cdot f(\beta + \delta). \end{aligned}$$

Zamijene li se varijable β i δ varijablama x i y dobiva se

$$f(2y + x) + f(x) = 2f(x + y) \cdot \cos y \tag{4.21}$$

te kada se zamijeni varijabla x s $x - y$ i uvrsti u (4.21) vrijedi

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot \cos y.$$

Kako bi se dobilo rješenje ove funkcionalne jednadžbe, potrebno je uvrstiti određene vrijednosti x i y: prvo se uvrštava $x = 0$ i $y = t$, zatim $x = \frac{\pi}{2} + t$ i $y = \frac{\pi}{2}$ i konačno $x = \frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2} + t$.

$$\begin{aligned} f(0+t) + f(0-t) &= 2f(0) \cdot \cos t \\ f(\frac{\pi}{2} + t + \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2} + t - \frac{\pi}{2}) &= 2f(\frac{\pi}{2} + t) \cdot \cos\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + t) + f(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - t) &= 2f(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + t). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Sređivanjem dobivenih jednadžbi, dobiva se

$$\begin{aligned} f(t) + f(-t) &= 2f(0) \cdot \cos t \\ f(\pi + t) + f(t) &= 2f(\frac{\pi}{2} + t) \cdot 0 \\ f(\pi + t) + f(-t) &= 2f(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + t). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Označimo $p := f(0)$ i $q := f(\frac{\pi}{2})$. Tada je

$$\begin{aligned} f(t) + f(-t) &= 2p \cdot \cos t \\ f(\pi + t) + f(t) &= 0 \\ f(\pi + t) + f(-t) &= 2q \cdot (-\sin t). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Riječ je o sustavu triju jednadžbi. Zbroji li se prva i druga jednadžba iz (4.24), dobiva se

$$2f(t) + f(\pi + t) + f(-t) = 2p \cdot \cos t. \tag{4.25}$$

Sada se od (4.25) oduzme treća jednadžba iz (4.24)

$$2f(t) = 2p \cdot \cos t + 2q \cdot \sin t,$$

to je ekvivalentno

$$f(t) = p \cdot \cos t + q \cdot \sin t$$

gdje je $t \in [0, \pi]$.

Kako je $f(0)$ skalarni produkt dva jedinična vektora koji zatvaraju kut 0, vrijedi da je $f(0) = a^2$, gdje je $|\overrightarrow{a}| = 1$. Iz tog slijedi da je $p = 1$. Također kako je $f(\frac{\pi}{2})$ skalarni produkt između dva okomita jedinična vektora vrijedi da je $f(\frac{\pi}{2}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, gdje vrijedi da je $f(\frac{\pi}{2}) = a^2$, gdje je $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$. Zato je $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, odnosno $q = 0$.

$$f(t) = \cos t.$$

Generalizacijom dobiva se da za proizvoljne vektore $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ vrijedi

$$\overrightarrow{ab} = (\lambda\overrightarrow{e_a})(\mu\overrightarrow{e_b}) = \lambda\mu(\overrightarrow{e_a}\overrightarrow{e_b}) = \lambda\mu\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}), \tag{4.26}$$

gdje je $\overrightarrow{e_a}$ jedinični vektor koji ima isti smjer kao i vektor $\overrightarrow{a}$, a $\overrightarrow{e_b}$ jedinični vektor koji ima isti smjer kao i vektor $\overrightarrow{b}$. Vektori se množe skalarima λ i μ da bi se dobili vektori određenih duljina. Iz toga slijedi zaključak da je $\lambda = |\overrightarrow{a}|$ i $\mu = |\overrightarrow{b}|$. Pa se (4.26) može zapisati kao

$$\overrightarrow{ab} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}). \tag{4.27}$$

Jednadžba (4.27) poznata je formula za skalarni produkt.

Bibliografija

[1] A. Bapić, A. Gvozden, A. Sarajlić, M. Vikalo, I. Zenunović, A. Zlatarevic, *Elementarna matematika sa stanovista više matematike, Bilješke s predavanja*, dostupno na http://mehmednurkanovic.com/wp-content/uploads/2017/07/emsvm.pdf (rujan 2020.).

[2] D. Bessenyei, *The theory of functional equations in high school education,Teaching Mathematics and Computer Sciences*, 10/2 (2012), 345-360

[3] M. Bombardelli, Ž. M. Šipuš, *Analitička geometrija*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf (rujan 2020.).

[4] F. M. Bruckler, *Augustin Louis Cauchy*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/images/uploads/714.pdf (rujan 2020.).

[5] C. Efthimiou, *Introduction to Functional Equations: Theory and Problem–solving Strategies for Mathematical Competitions and Beyond*, AMS, 2011

[6] C. G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007

[7] *Natjecanja iz matematike u RH*, dostupno na http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm(rujan 2020.).

Sažetak

Ovaj diplomski rad sastavljen je od četiri poglavlja. U prvom poglavlju dan je povijesni uvod u funkcionalne jednadžbe od njihove prve pojave pa do prvih rješenja, kao i kratke biografije matematičara koji su doprinijeli razvoju teorije funkcionalnih jednadžbi.

Funkcionalne jednadžbe dviju varijabli tema su drugog poglavlja ovog diplomskog rada. Tu je proučavana Cauchyjeva funkcionalna jednadžba, Cauchyjeva eksponencijalna funkcionalna jednadžba te Jenesenova jednadžba.

Glavna su tema trećeg poglavlja metode rješavanja funkcionalnih jednadžbi s jednom varijablom. Prezentirane su metoda zamjene varijable i metoda linearizacije.

U posljednjem poglavlju riječ je o zadacima koji se javljaju u srednjoškolskim udžbenicima matematike ili na matematičkim natjecanjima. Na kraju je navedeno nekoliko primjera problema koji se reduciraju na osnovne funkcionalne jednadžbe, ali taj dio je primjeren za najdarovitije učenike jer je izvan nastavnog sadržaja.

Summary

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, a historical introduction to functional equations from their first occurrences to the first solutions is presented, and short biographies of mathematicians who contributed to the development of theory of functional equations are given.

The functional equations of two variables are the topic of the second chapter of this thesis. We studied the Cauchy functional equation, the Cauchy exponential functional equation and the Jensen functional equation.

The main topic of the third chapter are the methods of solving functional equations with one variable. We presented the method of substitution and the linearization method.

In the last chapter we deal with problems that appear in high school mathematics as well as in mathematical competitions. We end with several examples of problems which reduce to basic functional equations, but this is appropriate only for the most talented students since this is beyond high school curriculum.

Životopis

Ružica Juras rođena je 15. srpnja 1995. godine u Čakovcu. Svoje djetinjstvo provela je u općini Strahoninec gdje je 2002. godine upisala Osnovnu školu Strahoninec. Nakon toga je 2010. godine upisala Gimnaziju Josipa Slavenskog Čakovec. Srednjoškolsko obrazovanje završila je 2014. godine, te je iste godine upisala preddiplomski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija 2018. godine, na istom fakultetu upisala je diplomski studij nastavničkog smjera.