

# Matematičko modeliranje dinamike stavova

---

Jurić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:827611>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-31**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Matematičko modeliranje dinamike stavova

---

Jurić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:827611>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marija Jurić

**MATEMATIČKO MODELIRANJE**  
**DINAMIKE STAVOVA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Boris Muha

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Primjeri modela dinamike stavova</b>	<b>2</b>
1.1 Klasični model (CM)	3
1.2 Friedkin-Johnsen model (FJM)	4
1.3 Time variant model (TVM)	4
1.4 Model ograničenog povjerenja (BCM, HKM)	5
<b>2 Konsenzus u dinamici mišljenja s neprekidnim vremenom</b>	<b>8</b>
2.1 Uvod i definicija modela	8
2.2 Globalne interakcije i bezuvjetno nastajanje konsenzusa	10
Kontrakcija promjera	11
2.3 Lokalne interakcije i klasteriranje	15
Formiranje klastera	15
Broj klastera	18
Numeričke simulacije s lokalnom dinamikom	19
2.4 $K = 1$ : Uniformna povezanost implicira konsenzus	22
Konsenzus u lokalnoj dinamici mišljenja	22
2.5 Heterofilna dinamika <i>pojačava</i> konsenzus: Simulacije	24
1D simulacije	25
Klasteri i <i>podružnice</i>	26
2D simulacije	27
2.6 Dinamika u diskretnom vremenu	28
Konsenzus s globalnim interakcijama	29
Klasteriranje s lokalnim interakcijama	29
Numeričke simulacije u diskretnoj dinamici	31
<b>3 Modeliranje utjecaja konstantnog signala na dinamiku stavova</b>	<b>33</b>
3.1 Uvod i definicija modela	33

<i>SADRŽAJ</i>	iv
3.2 Teorem o konstantnom signalu . . . . .	35
3.3 Simulacije . . . . .	38
<b>A Dodatak: Simulacije u MATLAB-u</b>	<b>46</b>
A.1 Simulacije: drugo poglavlje . . . . .	46
A.2 Simulacije: treće poglavlje . . . . .	49
<b>Bibliografija</b>	<b>52</b>

# Uvod

Analiza procesa formiranja stavova u nekom društvu zahtijeva interdisciplinarni pristup i suradnju sociologa, filozofa, fizičara i matematičara. U ovom radu definirat ćemo, analizirati i interpretirati nekoliko jednostavnih matematičkih modela koji opisuju taj proces. Takve modele nazivamo modelima dinamike stavova.

Rad je podijeljen na tri poglavlja i jedan dodatak. U prvom poglavlju prezentiramo nekoliko poznatih modela dinamike stavova s diskretnim vremenom koji se bave problemom nastanka konsenzusa odnosno podijeljenih mišljenja unutar nekog društva. Uz definicije modela navest ćemo i glavne analitičke rezultate.

U drugom poglavlju analiziramo jedan model dinamike mišljenja s neprekidnim vremenom. Krećemo od pretpostavke da je društvo samoorganizirana struktura, odnosno da proces formiranja stavova njegovih članova ovisi samo o njihovim međusobnim interakcijama. Interakcije, koje mogu biti globalne ili ograničene, vode do stvaranja jednog ili više klastera(grupa) istomišljenika. Grupiranje agenata u jedan klaster ekvivalentno je postizanju konsenzusa. U poglavlju ćemo se baviti pronalaskom dovoljnih uvjeta za konsenzus, te ćemo pomoću računalnih simulacija ilustrirati kako priroda interakcija agenata utječe na strukturu njihovih stavova.

U trećem poglavlju pretpostavljamo da je društvo pod utjecajem konstantnog signala koji može označavati npr. karizmatičnog vođu, skupinu radikala, marketinšku kampanju itd. Koristeći jednostavan model s diskretnim vremenom, na primjeru skupine radikala, analiziramo utjecaj takvog signala na formiranje stavova društva.

Dodatak sadrži dijelove MATLAB koda korištenog za izradu simulacija u drugom i trećem poglavlju.

Sadržaj rada pretežno prati reference [6], [5] i [11].

# Poglavlje 1

## Primjeri modela dinamike stavova

U ovom poglavlju prezentiramo četiri diskretna dinamička modela, često korištena za opis i analizu procesa formiranja mišljenja u nekoj grupi agenata. Prvo dajemo opis općenite forme tih modela, zatim navodimo konkretne modele i iznosimo glavne analitičke rezultate (bez dokaza). Sadržaj poglavlja pretežno prati referencu [6].

Pretpostavimo da imamo  $N$  agenata koji ažuriraju svoja mišljenja u diskretnim vremenskim trenucima,  $T = \mathbb{N}_0$ . Mišljenje agenta  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  u trenutku  $t$  predstavljamo realnim brojem  $x_i(t) \in \mathbb{R}$ . Ovaj slučaj se ponekad naziva "neprekidnom dinamikom mišljenja", u suprotnosti s "diskretnom dinamikom mišljenja", u kojoj je skup mogućih vrijednosti mišljenja agenta diskretan. Vektor  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$  predstavlja *profil mišljenja* u trenutku  $t$ . Za svaka dva agenta  $i$  i  $j$  s  $a_{ij}$  označimo *važnost* (težinu, utjecaj) koju agent  $i$  pridaje agentu  $j$  pri ažuriranju svog stava. Dodatno, pretpostavimo da vrijedi  $\sum_j a_{ij} = 1$  i  $a_{ij} \geq 0$  za sve  $i, j$ . Uz ove pretpostavke i oznake, općeniti proces prilagodbe mišljenja agenta  $i$  možemo opisati sljedećom jednačinom:

$$x_i(t+1) = a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{iN}x_N(t), \quad t \in T. \quad (1.1)$$

Mišljenje agenta  $i$  u trenutku  $(t+1)$  je dano težinskim prosjekom svih mišljenja u prethodnom trenutku. Pretpostavimo još i da težine mogu biti ovisne o vremenu i/ili profilu mišljenja, odnosno,  $a_{ij} = a_{ij}(t, \mathbf{x}(t))$ . Ako sve težine posložimo u kvadratnu  $N \times N$  matricu,  $A(t, \mathbf{x}(t)) = \{a_{ij}(t, \mathbf{x}(t))\}$ , 1.1 možemo zapisati kao:

$$\mathbf{x}(t+1) = A(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t).$$

Matrica  $A$  je nenegativna i zbroj elemenata svakog retka jednak je 1, pa je  $A$  stohastička matrica.

Analiza modela sastoji se u ispitivanju postojanja ravnotežnog profila mišljenja,  $\mathbf{x}^\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \dots, x_N^\infty)^T \in \mathbb{R}^N$ , za kojeg vrijedi  $x_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_i^\infty$ , za svaki  $1 \leq i \leq N$ . Kažemo da je postignut konsenzus ako postoji  $x_{con}^\infty \in \mathbb{R}$  takav da vrijedi  $x_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_{con}^\infty \in \mathbb{R}$ .



## 1.1 Klasični model (CM)

Prvi, ujedno i najjednostavniji, model oblika 1.1 je:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) \text{ za } t \in T \quad (1.2)$$

s fiksnim težinama. Ovaj model se u literaturi često naziva klasičnim. Sredinom sedamdesetih razvili su ga DeGroot [2] i Lehrer [10]. Očito za sve  $t \in T$  vrijedi  $\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}(0)$ , pa se stoga analiza ovog modela svodi na analizu potencija matrice težina,  $A$ .

Za ovaj model kažemo da ima *svojstvo konsenzusa* ako za svaki početni profil  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^N \exists x_{con}^\infty \in \mathbb{R}$  za koji  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_{con}^\infty$  za sve  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

**Teorem 1.1.1** (Konsenzus u CM). [6, Theorem 1]

- (i) Klasični model ima svojstvo konsenzusa ako za svaka dva agenta  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  postoji neki  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  takav da vrijedi  $a_{ik} > 0$  i  $a_{jk} > 0$ .
- (ii) Klasični model ima svojstvo konsenzusa ako i samo ako postoji  $t_0 \in T$  takav da je barem jedan stupac matrice  $A^{t_0}$  strogo pozitivan.

Tvrđnju o podjeli mišljenja u dinamici opisanoj klasičnim modelom izreći ćemo samo neformalno. Za tu svrhu potreban nam je pojam *primitivne* matrice, Za matricu  $A$  kažemo da je *primitivna* ako je neka njena potencija  $A^t$  striktno pozitivna, tj. ne sadrži nule. Iz prvog dijela prethodnog teorema zaključujemo da je primitivnost matrice  $A$  dovoljan uvjet za nastanak konsenzusa.

Općenito, danu grupu agenata možemo podijeliti u podgrupe, na način da se prvih  $g$  izoliranih podgrupa sastoji samo od *esencijalnih agenata*, odnosno, agenta koji pridaju pozitivne težine samo ostalim agentima svoje grupe. Za takvu podgrupu kažemo da ima *primitivnu strukturu* ako je njena pripadna podmatrica težina primitivna.

Dokazano je da vrijedi:

- (i) Dinamika dana klasičnim modelom, za svaki početni profil mišljenja, konvergira prema ravnotežnom profilu mišljenja ako i samo ako su sve podgrupe esencijalnih agenata primitivne. Taj konačni ravnotežni profil mišljenja ovisi samo o početnim mišljenjima esencijalnih agenata.
- (ii) Posebno, ravnotežan profil mišljenja je konsenzus ako i samo ako postoji samo jedna podrupa esencijalnih agenata ( $g=1$ ).

## 1.2 Friedkin-Johnsen model (FJM)

Devedesetih godina prošlog stoljeća N. Friedkin i E. Johnsen [3], s ciljem modeliranja društvenog utjecaja na formiranje mišljenja, u klasičan model uvode dodatan parametar, *stupanj*  $g_i$ .  $g_i$  označava važnost koju agent  $i$  pridaje svojem početnom mišljenju,  $x_i(0)$ , a  $1 - g_i$  predstavlja *osjetljivost* agenta  $i$  na utjecaj mišljenja svih agenata u prethodnom vremenskom razdoblju, definiran kao i u klasičnom modelu. Ažuriranje mišljenja u ovom modelu dano je jednadžbom:

$$x_i(t + 1) = g_i x_i(0) + (1 - g_i)(a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{iN}x_N(t)), \quad (1.3)$$

odnosno, u matričnom obliku

$$x_i(t + 1) = G\mathbf{x}(0) + (I - G)A\mathbf{x}(t) \text{ za } t \in T.$$

Gdje je  $I$  matrica identiteta, a  $G$  dijagonalna matrica s vrijednostima  $g_i$  na dijagonali:  $G_{ij} = 0$ , za  $i \neq j$ ;  $G_{ii} = g_i$ . Uočimo da je klasičan model poseban slučaj FJ modela, za  $G = 0$ . Indukcijom se može pokazati da za  $t \in T$  vrijedi:  $\mathbf{x}(t) = V(t)\mathbf{x}(0)$ , gdje je matrica  $V(t)$  dana s  $V(t) = M^t + (\sum_{k=0}^{t-1} M^k)G$ , za  $M = (I - G)A$

**Teorem 1.2.1.** [6, Theorem 3]

(i) Neka je  $G \neq 0$  i pretpostavimo da je  $A$  ireducibilna matrica (ne postoji matrica permutacije  $P$  za koju je  $PAP^T$  blok gornjetrokutasta matrica). Tada za svaki početni profil  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^N$  postoji stabilan profil  $\mathbf{x}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$  i vrijedi

$$\mathbf{x}^\infty = (I - M)^{-1}G\mathbf{x}(0).$$

(ii) Konsenzus  $\mathbf{x}^\infty = (x_{con}^\infty, x_{con}^\infty, \dots, x_{con}^\infty)^T$  se postiže ako i samo ako je  $x_i(0) = x_{con}^\infty$  za sve agente i s pozitivnim stupnjem  $g_i > 0$ .

**Napomena 1.2.2.** Prethodni teorem kaže da ako postoji barem jedan agent s pozitivnim stupnjem  $g_i$  i "dovoljno pozitivnih težina", dinamika mišljenja 1.3, za proizvoljni početni profil, konvergira prema stabilnom profilu  $\mathbf{x}^\infty$ . Taj se stabilni profil tada može izračunati iz težina, stupnjeva i početnog profila. Konsenzus se postiže ako su svi agenti s pozitivnim  $g_i$  već na početku suglasni.

## 1.3 Time variant model (TVM)

Sljedeći model koji prezentiramo je time variant model. Njegova jednadžba glasi:

$$\mathbf{x}(t + 1) = A(t)\mathbf{x}(t) \text{ za } t \in T. \quad (1.4)$$

To je linearan model u kojem težine ovise o vremenu. Korišten je za opis i analizu formiranja mišljenja grupe agenata koji s vremenom pridaju sve veću težinu svom mišljenju, a manju težinu mišljenjima ostalih agenata, tzv. "hardening of positions". Intuitivno, ovisnost težina o vremenu ne predstavlja prepreku za konsenzus, dok god one dovoljno dugo ostanu pozitivne. Međutim, ako težine *prebrzo* konvergiraju prema nuli konsenzus ne može biti postignut.

Formalne tvrdnje koje vrijede za TV model izreći ćemo za agente čija mišljenja mogu biti višedimenzionalna, odnosno mišljenje agenta  $i$  u trenutku  $t$  dano s  $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$ . Model zapišimo kao:

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t) \text{ za } 1 \leq i \leq N, t \in T.$$

Vidimo da je  $x_i(t+1)$  konveksna kombinacija od  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  i s  $[\mathbf{x}(t)] := \max_{ij} |x_i(t) - x_j(t)|$  označimo promjer profila mišljenja u trenutku  $t$ ,  $|\cdot|$  je neka norma na  $\mathbb{R}^d$ . Može se pokazati da se u TV modelu taj promjer s vremenom smanjuje. Analognu tvrdnju ćemo dokazati u Poglavlju 2, za model dinamike mišljenja s neprekidnim vremenom.

Sada za  $s, t \in T$ ,  $s < t$  definirajmo matricu  $B(t, s) = A(t-1)A(t-2)\cdots A(s)$  akumuliranih težina između perioda  $s$  i  $t$ .

**Teorem 1.3.1.** [6, Theorem 4] *Pretpostavimo da postoji niz  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$  u  $T$  i niz  $\delta_1, \delta_2, \cdots$  u  $[0, 1]$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m = \infty$  takvi da vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^N \min \{b_{ik}(t_m, t_{m-1}), b_{jk}(t_m, t_{m-1})\} \geq \delta_m$$

za sve  $m \geq 1$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ . Tada za sve  $x_i(0) \in \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq i \leq N$ , postoji konsenzus

$$x_{con}^{\infty} \in \text{conv}\{x_i(0), \dots, x_N(0)\},$$

gdje je  $\text{conv}\{\{x_i(0)\}_i\}$  konveksna ljuska početnih mišljenja. Odnosno, vrijedi  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_{con}^{\infty}$ , za sve  $1 \leq i \leq N$ .

## 1.4 Model ograničenog povjerenja (BCM, HKM)

Posljednji model kojeg navodimo u ovom poglavlju je model *ograničenog povjerenja* (eng. *bounded confidence*). Prema svojim autorima, filozofu Raineru Hegselmannu i matematičaru Ulrichu Krauseu, naziva se još i Hegselmann-Krause model ograničenog povjerenja (skraćeno HKM). Prvi je put objavljen 1997. godine [8], a populariziran je 2002. u [6], od kada su nastale i proučavane su njegove brojne modificirane verzije. HKM je nelinearan model tipa 1.1 u kojem  $A(\mathbf{x}(t))$  ne ovisi eksplicitno o vremenu. Osnovna ideja

modela je da svaki agent pri ažuriranju vlastita mišljenja u obzir uzima samo ostale agente čiji stavovi nisu *predaleko* od njegova vlastita stava, tj. za koje je  $|x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon_i$ , gdje je  $\varepsilon_i > 0$  *razina povjerenja* koja određuje veličinu intervala povjerenja agenta  $i$ . Označimo skup svih agenata u blizini agenta  $i$  u trenutku  $t$  s:

$$\mathcal{N}_i(t) = \{1 \leq j \leq N \mid |x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon_i\} \quad (1.5)$$

gdje  $|\cdot|$  označava apsolutnu vrijednost realnog broja. Tada je broj *susjeda* agenta  $i$  u trenutku  $t$  jednak  $|\mathcal{N}_i(t)|$ . U originalnom HK modelu se pretpostavlja da agent  $i$  mišljenjima svih svojih susjeda daje jednak značaj, a ostale ignorira:

$$a_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{za } j \notin \mathcal{N}_i(t), \\ \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} & \text{za } j \in \mathcal{N}_i(t). \end{cases}$$

Odnosno, model je dan jednadžbom :

$$x_i(t+1) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t) \text{ za } t \in T. \quad (1.6)$$

U nastavku ćemo pretpostaviti da svi agenti imaju istu razinu povjerenja,  $\varepsilon_i = \varepsilon$ , za svaki  $1 \leq i \leq N$ . Posebna značajka ovog modela, u usporedbi s prethodno navedenim modelima, je to da će se konsenzus mišljenja, ako postoji, postići u konačnom vremenu.

Prije nego navedemo neka osnovna svojstva HK modela, definirat ćemo nekoliko pojmova.

Neka je  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$  profil mišljenja u trenutku  $t$ , kažemo da između dva agenta  $i$  i  $j$  postoji *rascjep* (eng. *split*) ako vrijedi  $|x_i(t) - x_j(t)| > \varepsilon$

Profil mišljenja  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$  zovemo  $\varepsilon$ -*profilom* ako postoji poredak mišljenja  $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_N}$  takav da su svaka dva susjedna agenta jedan drugom unutar intervala povjerenja:

$$x_{i_{k+1}} - x_{i_k} \leq \varepsilon \quad \text{za sve } 1 \leq k \leq N-1.$$

Za HK model, s uniformnom razinom povjerenja  $\varepsilon$ , vrijedi sljedeće:

- (i) Dinamika ne mijenja poredak mišljenja, tj. za svaka dva agenta  $i$  i  $j$  vrijedi :  $x_i(t) \leq x_j(t)$  povlači  $x_i(t+1) \leq x_j(t+1)$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je profil  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$  u svakom trenutku uređen, tj. da vrijedi  $x_i(t) \leq x_j(t)$ , za  $i < j$ .
- (ii) Ako se u određenom trenutku između dva agenta stvori rascjep, taj rascjep će postojati zauvijek.
- (iii) Ako se za dani početni profil postigne konsenzus, tada profil mišljenja u svim trenucima mora biti  $\varepsilon$ -profil.

Za dva agenta  $i, k \in \{1, \dots, N\}$  i  $s, t \in T, s < t$ , niz  $(i_0, i_1, \dots, i_{t-s})$  zovemo *lanac povjerenja od  $i$  do  $k$*  za vremenski interval  $(s, t)$  ako vrijedi

- (i)  $i_0 = i, i_{t-s} = k$ ,
- (ii)  $i_l \in \mathcal{N}_{i_{l-1}}(t-l)$  za  $l = 1, 2, \dots, t-s$ .

Konsenzus se postiže, za dani početni profil, ako za ekvidistantni niz trenutaka vrijedi sljedeće: Za svaka dva agenta  $i$  i  $j$  postoji treći agent,  $k$ , do kojeg postoji lanac povjerenja od  $i$  i od  $j$ . Ta je tvrdnja preciznije izrečena u sljedećem teoremu.

**Teorem 1.4.1** (Konsenzus u BC dinamici). [6, Theorem 5] *Za dani početni profil mišljenja konsenzus se postiže (u konačnom vremenu) ako postoji  $h \geq 1$  takav da za sve  $m \in N$  vrijedi sljedeće: Za svaka dva agenta  $i$  i  $j$  postoji treći agent  $k$  takav da postoje lanci povjerenja od  $i$  do  $k$  i od  $j$  do  $k$  za  $((m-1)h, mh)$ .*

U slučaju da se konsenzus u HK dinamici ne postiže, agenti se podijele u maksimalne podgrupe (klustere) s lokalnim konsenzusima.

**Teorem 1.4.2** (Podjela mišljenja u BC dinamici). [6, Theorem 6] *Za svaki početni profil mišljenja postoji  $t^* \in T$ , prirodni brojevi  $1 \leq n_1 < \dots < n_k = N$  i brojevi  $x_{c_j} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq k$  takvi da za sve  $t \geq t^*$  vrijedi:*

$$x_i(t) = x_{c_1} \text{ za sve } 1 \leq i \leq n_1,$$

za  $2 \leq j \leq k$ :

$$x_i(t) = x_{c_j} \text{ za sve } n_{j-1} < i \leq n_j.$$

## Poglavlje 2

# Konsenzus u dinamici mišljenja s neprekidnim vremenom

### 2.1 Uvod i definicija modela

U ovom poglavlju, prateći rad Motscha i Tadmora [11], definirat ćemo i analizirati neprekidan dinamički model za opis formiranja mišljenja. Započinjemo definirajući generalnu klasu modela s neprekidnim vremenom korištenih za opisivanje *samoorganizirane* dinamike, one dinamike čije je ponašanje određeno isključivo međusobnom interakcijom agenata. Promatramo razvoj  $N$  agenata,  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Svakog od agenata identificiramo njegovom pozicijom  $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$  koja sadrži neke podatke o atributima agenta  $i$  u trenutku  $t$ . Svaki agent prilagođava svoju poziciju prema pozicijama svojih susjeda:

$$\frac{d}{dt}x_i = \alpha \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j - x_i), \quad a_{ij} \geq 0. \quad (2.1)$$

$\alpha > 0$  predstavlja skalirajući parametar, a koeficijenti  $a_{ij}$ , kao u ranije navedenim modelima, mjere jačinu utjecaja između agenata  $i$  i  $j$ : veći  $a_{ij}$  označava da agent  $i$  agentu  $j$  daje veću važnost pri prilagodbi svoje pozicije. Koeficijenti  $a_{ij}$  mogu ovisiti o pozicijama agenata (npr. o apsolutnoj razlici pozicija agenata  $i$  i  $j$ ), pa su modeli iz klase 2.1 nelinearni:

$$a_{ij} = a_{ij}(\mathcal{X}(t)), \quad \mathcal{X}(t) := \{x_p(t)\}_{p=1}^N.$$

Primjetimo da ako je  $A$  stohastička matrica, pripadni vremenski diskretan sustav od 2.1:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \alpha (Ax(t) - x(t)),$$

za  $\alpha = 1$  i  $\Delta t = 1$ , ekvivalentan je 1.1 sustavu iz prvog poglavlja.

Razlikujemo dvije glavne klase ovih modela: globalnu i lokalnu. U globalnoj dinamici svi agenti utječu jedni na druge, tj. postoji  $\eta \in \mathbb{R}$  za kojeg  $a_{ij} > \eta > 0$ . Dovoljno jake globalne interakcije vode do stvaranja tzv. *bezuvjetnog konsenzusa*, u smislu da se sve početne konfiguracije agenata koncentriraju oko ravnotežnog stanja, "konsenzusa"  $x_{con}^{\infty}$ :

$$x_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_{con}^{\infty}$$

Ovdje se pojam konsenzusa tumači u ovisnosti o kontekstu konkretne dinamike.

Model s lokalnom dinamikom je nešto realističniji. Interakcije među agentima su ograničene na njihove lokalne susjede. Vrijedi  $a_{ij} \geq 0$ , tj. neke vrijednosti u matrici  $A$  mogu biti jednake 0. Dinamika ovisi o povezanosti težinskog grafa koji odgovara matrici težina  $A$ . Agenti imaju tendenciju koncentriranja u jedan ili više odvojenih *klastera*.

Modeli 2.1 su dosad korišteni u raznim kontekstima, kao što su npr. razvoj jezika, traćanje, nastanak jata ili krda, robotika, razni biološki i ekološki sustavi itd. U ovom radu baviti ćemo se modelom iz klase 2.1 koji opisuje proces formiranja stavova, odnosno, nastanak konsenzusa ili podjele mišljenja. Promatramo evoluciju mišljenja  $N$  agenata koji čine neko društvo.  $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$  označava vektor mišljenja agenta  $i$  u trenutku  $t$ . Interakcija između agenata opisana je sljedećim sustavom diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\frac{d}{dt}x_i = \alpha \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j - x_i), \quad a_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\sigma_i} \quad \phi_{ij} := \phi(|x_j - x_i|). \quad \sigma_i = \sum_j \phi(|x_i - x_j|) \quad (2.2)$$

Ovdje,  $0 \leq \phi \leq 1$  predstavlja skaliranu *funkciju utjecaja* koja djeluje na „razliku mišljenja“  $|x_i - x_j|$ . Metrika  $|\cdot|$  ovisi o specifičnom kontekstu problema koji se obrađuje. U [11] obrađen i je i slučaj kada je  $\sigma_i = N$ , odnosno kada je  $A$  simetrična, no mi se ovdje nećemo baviti njime. Model 2.2, u kojem matrica težina nije simetrična, zvat ćemo nesimetričnim modelom. Uočimo da 2.2 možemo interpretirati i kao verziju HK modela [7], izloženog u prvom poglavlju, s neprekidnim vremenom, Ovdje je gornja granica nosača funkcije  $\phi$  ekvivalentna granici povjerenja  $\varepsilon$  iz HK modela. Njegova vremenska diskretizacija je generalizacija HK modela 1.6, o čemu će biti više govora u odjeljku 2.6.

Globalno nasuprot lokalnom ponašanju modela 2.2 ovisi o funkciji utjecaja  $\phi$ . U odjeljku 2.2. analizirat ćemo globalnu verziju. Ako je nosač funkcije  $\phi$ , definiran kao  $\text{Supp}\{\phi(\cdot)\} = [0, R], R \in \mathbb{R}$ , dovoljno velik, u smislu da pokriva konveksnu ljusku od  $\mathcal{X}(0) = \{x_p(0)\}_p$ , tada globalne interakcije vode do stvaranja konsenzusa mišljenja. U odjeljku 2.3 proučit ćemo ponašanje modela 2.2 u kojem su interakcije među agentima ograničene na njihove lokalne susjede. Za gornji rub nosača funkcije  $\phi$  tada vrijedi  $R < \max_{i,j} |x_i(0) - x_j(0)|$ . Analizirat ćemo proces formiranja klastera. Slučaj u kojem se agenti s lokalnim interakcijama okupe u jedan klaster, odnosno nastane konsenzus, obrađen je u 2.4.

Odjeljak 2.5 posvećen je ideji Motscha i Tadmora da *heterofilija*, tendencija ka povezivanju s različitim, a ne sličnim, *pojačava* konsenzus. Heterofilna dinamika karakterizirana

je lokalnim interakcijama i funkcijom utjecaja,  $\phi$ , koja je *rastuća* funkcija međusobne razlike mišljenja agenata,  $\phi_{ij} = \phi(|x_i - x_j|)$ . Što je dinamika heterofilnija, u smislu da funkcija utjecaja ima strmiji rast na svom kompaktnom nosaču, to se više koncentrira, tj. približava se manjem broju klastera.

## 2.2 Globalne interakcije i bezuvjetno nastajanje konsenzusa

U ovom odjeljku predstaviti ćemo uvjete potrebne za koncentriranje oko nastajućeg konsenzusa u globalnoj dinamici 2.1, odnosno 2.2. Započinjemo s argumentom konveksnosti matrice susjednosti  $A = \{a_{ij}\}$ .

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je matrica  $A$  redak-stohastička:

$$\sum_j a_{ij} = 1. \quad (2.3)$$

Doista, reskaliranjem  $\alpha$  po potrebi imamo da je  $\sum_{j \neq i} a_{ij} \leq 1$ , i pa možemo definirati  $a_{ii} := 1 - \sum_{j \neq i} a_{ij} \geq 0$ .

Sada 2.1 zapišimo u obliku:

$$\frac{d}{dt} x_i = \alpha (\bar{x}_i - x_i), \quad \bar{x}_i := \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j. \quad (2.4)$$

Dakle, ako s  $\Omega(t)$  označimo konveksnu ljusku skupa mišljenja  $\{x_p\}_p$  u trenutku  $t$ , tada se, prema 2.4,  $x_i$  „opušta“ na težinsku prosječnu vrijednost  $\bar{x}_i \in \Omega(t)$ , a  $\Omega(t)$  predstavlja „barijeru“ za dinamiku. Slijedi da pozicije u općem samoorganizirajućem modelu 2.1 ostaju ograničene.

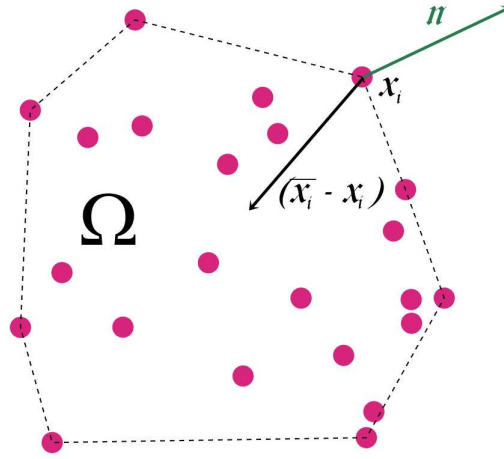
**Propozicija 2.2.1.** *Konveksna ljuska od  $\{x_p\}_p$  se vremenom smanjuje, u smislu da konveksna ljuska  $\Omega(t) := \text{Conv}(\{x_i(t)\}_{i \in [1, N]})$ , zadovoljava:*

$$\Omega(t_2) \subset \Omega(t_1), \quad t_2 > t_1 \geq 0. \quad (2.5)$$

*Dokaz.* Dokaz tvrdnje se može pronaći u [11] i u [7]. Ovdje navodimo samo skicu: Promatramo model zapisan kao u 2.4.  $\Omega(t)$  je konveksna ljuska konačnog skupa točaka, pa je ona konveksan poligon. Kako je  $\bar{x}_i$  konveksna kombinacija točaka iz konveksne ljuske  $\Omega(t)$ , slijedi  $\bar{x}_i \in \Omega(t)$  za svaki  $i$ . Sad uzmimo bilo koji vrh  $x_i$  od  $\Omega(t)$ . Tada je vektor  $(\bar{x}_i - x_i)$  usmjeren prema unutrašnjosti (v. Slika 2.1). Preciznije, ako s  $n$  označimo bilo koji vektor normale od  $\Omega$  u točki  $x_i$  usmjeren prema vani, tada vrijedi  $\langle \dot{x}_i, n \rangle = \alpha \langle \bar{x}_i - x_i, n \rangle \leq 0$ .

□





Slika 2.1: Konveksna ljuska  $\Omega$  skupa mišljenja  $x_i$

**Napomena 2.2.2.** *Konsenzus je postignut kada opadajući  $\Omega(t)$  postane jedna točka,  $\Omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \{x_{con}^\infty\}$ , odnosno kada vrijedi*

$$\max_i |x_i(t) - x_{con}^\infty| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

### Kontrakcija promjera

Propozicija 2.2.1 kaže da  $\{x_i(t)\}_i$  ostaju uniformno ograničeni i da je promjer,  $\max_{ij} |x_i(t) - x_j(t)|$ , nerastući kroz vrijeme. Da bi došlo do koncentracije, moramo potvrditi da promjer  $\mathbf{x}(t)$  pada na 0.

**Teorem 2.2.3.** *Razmotrimo samoorganizirajući model 2.1 sa stohastičkom matricom utjecaja  $A$  2.3. Neka*

$$[\mathbf{x}(t)] := \max_{ij} |x_i(t) - x_j(t)|$$

označava promjer profila mišljenja  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^\top$ . Tada promjer zadovoljava procjenu koncentracije:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t)] \leq -\alpha \eta_A(\mathbf{x}(t)) [\mathbf{x}(t)], \quad \eta_A := \min_{ij} \sum_k \min\{a_{ik}, a_{jk}\}. \quad (2.6)$$

Posebno, ako koncentracijski faktor  $\eta_A$  sporo opada, tako da vrijedi

$$\Theta(t) := \int_0^t \eta_{A(X(s))} ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty, \quad (2.7)$$

agenci se koncentriraju u smislu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)| = 0. \quad (2.8)$$

Štoviše, iz

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha\Theta(t)) dt < \infty, \quad (2.9)$$

slijedi da se  $X(t)$  približava konsenzusu,  $x_i(t) \rightarrow x_{con}^\infty \in \Omega(0)$ , s eksponencijalnom stopom konvergencije

$$|x_i(t) - x_{con}^\infty| \lesssim \exp(-\alpha\Theta(t)) [\mathbf{x}(0)] \quad \text{za sve } i = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Prvo ćemo iskazati pomoćnu tvrdnju koju ćemo koristiti prilikom dokaza ovog teorema.

**Lema 2.2.4** (Grönwallova nejednakost u diferencijalnoj formi). *Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  interval oblika  $[a, \infty)$ , ili  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ , za  $a < b$ . Neka su  $u$  i  $\beta$  realne, neprekidne funkcije definirane na  $I$ . Ako je  $u$  diferencijabilna na interioru  $I^\circ$  od  $I$  i ako vrijedi nejednakost*

$$u'(t) \leq \beta(t)u(t), \quad t \in I^\circ,$$

tada je  $u$  ograničena rješenjem odgovarajuće diferencijalne jednadžbe  $v'(t) = \beta(t)v(t)$ :

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s) ds\right), \quad \text{za sve } t \in I.$$

*Dokaz.* Započinjemo s procjenom koja kvantificira kontrakciju stohastičke matrice  $A$  u induciranoj vektorskoj seminormi  $[\cdot]$  (budući da ova veza postoji isključivo zbog konveksnosti redak-stohastičke matrice  $A$ , potiskujemo vremensku ovisnost od  $\mathbf{x}$  i  $\bar{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ),

$$[\mathbf{x}] = \max_{i,j} |x_i - x_j|, \quad 1 - \eta_A = \max_{i,j} \frac{1}{2} \sum_k |a_{ik} - a_{jk}|.$$

Prvo želimo dokazati:

$$[A\mathbf{x}] \leq (1 - \eta_A) [\mathbf{x}]. \quad (2.11)$$

Dokazujemo teorem za opću vektorsku normu  $|\cdot|$ . Fiksirajmo  $i$  i  $j$ , koje ćemo kasnije odabrati, i definirajmo  $\eta_k := \min\{a_{ik}, a_{jk}\}$  t.d su  $a_{ik} - \eta_k$  i  $a_{jk} - \eta_k$  nenegativni. Tada, za proizvoljni  $w \in \mathbb{R}^d$ , imamo

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{x}_i - \bar{x}_j, w \rangle &= \sum_k a_{ik} \langle x_k, w \rangle - \sum_k a_{jk} \langle x_k, w \rangle \\
 &= \sum_k (a_{ik} - \eta_k) \langle x_k, w \rangle - \sum_k (a_{jk} - \eta_k) \langle x_k, w \rangle \\
 &\leq \sum_k (a_{ik} - \eta_k) \max_k \langle x_k, w \rangle - \sum_k (a_{jk} - \eta_k) \min_k \langle x_k, w \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k |a_{ik} - a_{jk}| \max_k \langle x_k, w \rangle - \frac{1}{2} \sum_k |a_{ik} - a_{jk}| \min_k \langle x_k, w \rangle \\
 &\leq (1 - \eta_A) \left( \max_k \langle x_k, w \rangle - \min_k \langle x_k, w \rangle \right) \\
 &\leq (1 - \eta_A) \max_{kl} \langle x_k - x_l, w \rangle \leq (1 - \eta_A) \max_{kl} |x_k - x_l| |w|_*
 \end{aligned}$$

U posljednjem koraku smo upotrijebili karakterizaciju norme  $|\cdot|$  pomoću njenog duala,  $|w|_* = \sup_{z \neq 0} \langle w, z \rangle / |z|$  tako da  $\langle z, w \rangle \leq |z| |w|_*$ . Sad odaberimo  $i$  i  $j$  kao *maksimalan* par, takav da vrijedi  $[\bar{\mathbf{x}}] = |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ ; imamo:

$$[\mathbf{Ax}] = [\bar{\mathbf{x}}] = |\bar{x}_i - \bar{x}_j| = \sup_{w \neq 0} \frac{\langle \bar{x}_i - \bar{x}_j, w \rangle}{|w|_*} \leq (1 - \eta_A) \max_{k,l} |x_k - x_l| = (1 - \eta_A) [\mathbf{x}]$$

pa slijedi 2.11. Nadalje, promatrimo vremenski diskretan sustav povezan s 2.1:

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \alpha (A\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)).$$

Koristeći 2.11 dobivamo:

$$[\mathbf{x}(t + \Delta t)] = [(1 - \alpha\Delta t) \mathbf{x}(t) + \alpha\Delta t A\mathbf{x}(t)] \leq (1 - \alpha\Delta t) [\mathbf{x}(t)] + \alpha\Delta t (1 - \eta_A) [\mathbf{x}(t)],$$

ili, nakon sređivanja,

$$\frac{[\mathbf{x}(t + \Delta t)] - [\mathbf{x}(t)]}{\Delta t} \leq -\alpha\eta_A [\mathbf{x}(t)],$$

a granica 2.6 slijedi puštanjem  $\Delta t \rightarrow 0$ . Sada iz 2.6, Gronwallove nejednakosti i pretpostavke 2.7 imamo

$$[\mathbf{x}(t)] = \max_{ij} |x_i(t) - x_j(t)| \leq \exp\left(-\alpha \int_0^t \eta_{A(X(s))} ds\right) [\mathbf{x}(0)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad (2.12)$$

što dokazuje 2.8. Nadalje, opet koristeći Gronwallovu nejednakost, dobijemo

$$\begin{aligned}
 |x_i(t_2) - x_i(t_1)| &= \left| \int_{\tau=t_1}^{t_2} \dot{x}_i(\tau) d\tau \right| = \left| \int_{\tau=t_1}^{t_2} \alpha(\bar{x}_i - x_i) d\tau \right| \leq \alpha \max_{ij} \int_{\tau=t_1}^{t_2} |x_j(\tau) - x_i(\tau)| d\tau \\
 &\leq \alpha \int_{\tau=t_1}^{t_2} \exp(-\alpha\Theta(\tau)) d\tau [\mathbf{x}(0)], \quad \Theta(\tau) = \int_0^\tau \eta_{A(X(s))} ds,
 \end{aligned}$$

iz pretpostavke 2.9 proizlazi da postoje  $t_2 > t_1 \gg 1$  takvi da desna strana izraza teži prema 0, pa vrijedi  $|x_i(t_2) - x_i(t_1)| \rightarrow 0$  za  $t_2 > t_1 \gg 1$ . Slijedi da limes  $x_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_i^\infty$  postoji, te zbog 2.12 zaključujemo da se svi agenti koncentriraju oko iste granične pozicije, nastajućeg konsenzusa,  $x_{con}^\infty \in \Omega(0)$ . Procjena stope koncentriranja 2.10 slijedi iz 2.12.  $\square$

Teorem 2.3 povezuje nastanak konsenzusa s ponašanjem  $\int^t \eta_{A(\mathcal{X}(s))} \uparrow \infty$ . U nastavku ćemo dati ocjenu za donju granicu "koncentracijskog faktora"  $\eta_A$ .

**Definicija 2.2.5.** (aktivni skupovi) Fiksirajmo  $\theta > 0$ . Aktivni skup,  $\Lambda(\theta)$ , je skup agenata koji utječu na svakog drugog agenta  $s$  „više“ od  $\theta$ ,

$$\Lambda(\theta) := \{j \mid a_{ij} \geq \theta \text{ za svaki } i\}. \quad (2.13)$$

Uočimo, jer se  $a_{ij}$  mijenja s vremenom,  $a_{ij} = a_{ij}(\mathcal{X}(t))$ , broj agenata u aktivnom skupu  $\Lambda(\theta)$  također ovisi o vremenu, označavamo ga s  $\lambda(\theta) = \lambda(\theta, t) := |\Lambda(\theta, t)|$ .

Iz očite donje granice koncentracijskog faktora,  $\eta_A \geq \max_\theta \theta \cdot \lambda(\theta)$  i Teorema 2.2.3 slijedi sljedeći korolar.

**Korolar 2.2.6.** Promjer samoorganiziranog modela 2.1, sa stohastičkom matricom susjednosti  $A$ , kao u 2.3, zadovoljava procjenu koncentracije:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t)] \leq -\alpha \left( \max_\theta \theta \cdot \lambda(\theta, t) \right) [\mathbf{x}(t)]. \quad (2.14)$$

Posebno, donja granica  $\eta_A \geq N \cdot \min_{ij} a_{ij}$ , koja odgovara  $\theta = \min_{ij} a_{ij}$  i  $\lambda(\theta, t) = N$ , uz Teorem 2.2.3, povlači da za svaki  $i$  vrijedi [4]:

$$|x_i(t) - x_{con}^\infty| \lesssim \exp\left(-\alpha N \int_0^t m(s) ds\right) [\mathbf{x}(0)], \quad m(s) := \min_{ij} a_{ij}(s). \quad (2.15)$$

Sad ćemo pokazati primjenu Korolara 2.2.6 na model 2.2 i iznijeti dovoljan uvjet za nastanak konsenzusa. Uočimo da vrijedi:

$$a_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\sigma_i} \geq \frac{\phi_{ij}}{N}, \quad \sigma_i = \sum_k \phi_{ik} \leq N.$$

Prema Propoziciji 2.2.1, promjer  $[\mathbf{x}(t)]$  je nerastući, pa vrijedi

$$\begin{aligned} N a_{ij}(\mathcal{X}(t)) &\geq N \frac{\phi(|x_j(t) - x_i(t)|)}{N} \geq \min_{r \leq [\mathbf{x}(t)]} \phi(r) \geq \min_{r \leq [\mathbf{x}(0)]} \phi(r), \\ N \min_{ij} a_{ij}(\mathcal{X}(t)) &\geq \min_{r \leq [\mathbf{x}(0)]} \phi(r), \end{aligned}$$

što povlači sljedeću propoziciju.

**Propozicija 2.2.7.** (bezuovjetni konsenzus) Promotrimo model dinamike stavova 2.2 s funkcijom utjecaja  $\phi(r) \leq 1$  i pretpostavimo da vrijedi:

$$m := \min_{r \leq [\mathbf{x}(0)]} \phi(r) > 0. \quad (2.16)$$

Tada dolazi do eksponencijalno brze konvergencije prema konsenzusu  $x_{con}^\infty$ ,

$$|x_i(t) - x_{con}^\infty| \lesssim \exp(-\alpha m t) [\mathbf{x}(0)]. \quad (2.17)$$

**Napomena 2.2.8.** Iz propozicije 2.2.7 slijedi bezuvjetni konsenzus pod pretpostavkom globalne interakcije, naime, prema 2.16 svaki agent stupa u interakciju sa svakim drugim agentom ako:

$$a_{ij} \geq \frac{1}{N} \phi(|x_i - x_j|) \geq \frac{m}{N} > 0.$$

## 2.3 Lokalne interakcije i klasteriranje

U ovom ćemo odjeljku analizirati samooorganizirajuću dinamiku 2.1 grupe koja se sastoji od  $N$  agenata,  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^N$ , koji ne djeluju globalno jedni na druge, što znači da neke vrijednosti u njihovoj matrici susjednosti mogu biti jednake 0,  $a_{ij} \geq 0$ . Dinamikom upravljaju lokalne interakcije i njihovo dugoročno ponašanje vodi do formiranja jednog ili više klastera.

### Formiranje klastera

**Definicija 2.3.1.** Klaster,  $C$ , definiramo kao povezani podskup agenata,  $\{x_i\}_{i \in C}$ , koji je odvojen od svih drugih agenata izvan  $C$ :

$$\#1. a_{ij} \neq 0 \text{ za sve } i, j \in C; \quad i \quad \#2. \sum_{j \in C} a_{ij} = 1, \quad i \in C.$$

Važna značajka klastera je njihova samostalna dinamika, u smislu da vrijedi

$$\frac{d}{dt} x_i = \alpha \sum_{j \in C} a_{ij} (x_j - x_i), \quad \sum_{j \in C} a_{ij} = 1, \quad i \in C.$$

U takvim samostalnim klasterima vrijede iste tvrdnje o koncentraciji kao u globalnoj dinamici iznesene u odjeljku 2. Posebice, ako klaster  $C(t)$  dovoljno dugo ostane povezan i izoliran, tada njegovi agenti imaju tendenciju koncentriranja oko lokalnog konsenzusa,

$$x_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_C^\infty \text{ za sve } i \in C$$

Komplikacija u ovom slučaju je, pak, posljednja *ako* tvrdnja: Agenti izvan  $C$  mogu utjecati na razvoj agenata u  $C$ , i, posebno, različiti klasteri se s vremenom mogu spojiti. U nastavku se usredotočujemo na model dinamike mišljenja 2.2

$$\frac{d}{dt}x_i = \alpha \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i), \quad a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_i} \phi(|x_i - x_j|). \quad (2.18)$$

Prisjetimo se da  $\sigma_i$  označava stupanj,

$$\sigma_i = \sum_j \phi(|x_i - x_j|), \quad (2.19)$$

Pretpostavljamo da je funkcija utjecaja  $\phi$  ima kompaktan nosač:

$$\text{Supp}\{\phi(\cdot)\} = [0, R]. \quad (2.20)$$

Klaster  $C = C(t) \subset \{1, 2, \dots, N\}$  je određen konačnim promjerom funkcije utjecaja  $\phi$  t.d. vrijede sljedeća svojstva:

$$\#1. \max_{i,j \in C(t)} |x_i(t) - x_j(t)| \leq R; \quad \text{i} \quad \#2. \min_{i \in C(t), j \notin C(t)} |x_i(t) - x_j(t)| > R.$$

U slučaju globalne dinamike,  $R \gg [\mathbf{x}(0)]$ , cijela skupina agenata se može smatrati jednim klasterom. Ovdje razmatramo lokalnu dinamiku, u kojoj je  $R$  relativno malen u odnosu na onaj u globalnoj dinamici:  $R < [\mathbf{x}(0)]$ . Ranije iznese tvrdnje o globalnom koncentriranju oko stanja konsenzusa ovdje nisu primjenjive. Umjesto toga, lokalna dinamika dovodi do koncentriranja agenata u jedan ili više klastera (v. Sl. 2.4 i 2.6). Glavni interes u modeliranju grupne dinamike je dugoročno ponašanje takvih klastera. Generički scenarij je skupina agenata particionirana u kolekciju klastera,  $C_k, k = 1, 2, \dots, K$ , t.d. vrijedi

$$\begin{cases} |x_i(t) - x_j(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 & \text{ako } i, j \in C_k \leftrightarrow |x_i(t) - x_j(t)| \leq R \\ |x_i(t) - x_j(t)| > R & \text{ako } i \in C_k, j \in C_l, \quad k \neq l. \end{cases}$$

U nastavku ćemo identificirati klasu početnih konfiguracija profila mišljenja,  $X(0)$ , koje se razvijaju u konačno mnogo klastera,  $C_k, k = 1, 2, \dots, K$ . Posebno, želimo procijeniti broj takvih klastera,  $K$ , za  $t \gg 1$ .

Sljedeći rezultat pokazuje da ako rješenje sustava 2.2 ima ograničenu varijaciju u vremenu, onda mora biti particionirano na klasterne.

**Propozicija 2.3.2.** (formiranje klastera) Neka je  $\mathcal{X}(t) = \{x_p(t)\}_p$  rješenje modela dinamike stavova 2.2 čija funkcija utjecaja ima kompaktan nosač  $\text{Supp}\{\phi(\cdot)\} = [0, R]$ , i pretpostavimo da ima ograničenu varijaciju u vremenu:

$$\int^{\infty} |\dot{x}_i(s)| ds < \infty. \quad (2.21)$$

Tada se  $\mathcal{X}(t)$  približava ravnotežnom stanju  $\mathbf{x}^{\infty} = (x_1^{\infty}, \dots, x_N^{\infty})^{\top}$ , koje je particionirano na  $K$  klastera,  $\{C_k\}_{k=1}^K$ , tako da  $\{1, 2, \dots, N\} = \cup_{k=1}^K C_k$  i vrijedi

$$\begin{cases} x_i(t) \rightarrow x_{C_k}^{\infty} \in \mathbb{R}^d & \text{za } t \rightarrow \infty \text{ za sve } i \in C_k, \\ |x_i(t) - x_j(t)| > R & \text{za } t \gg 1 \text{ za } i \in C_k, j \in C_l, \quad k \neq l. \end{cases} \quad (2.22)$$

*Dokaz.* Pretpostavka 2.21 implicira

$$|x_i(t_2) - x_i(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}_i(s)| ds \ll 1 \quad \text{za } t_2 > t_1 \gg 1,$$

stoga se svaki agent približava vlastitom ravnotežnom stanju,  $x_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_i^{\infty}$ . Uz to tvrdimo da  $\dot{x}_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Budući da izraz na desnoj strani 2.18,

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\alpha}{\sigma_i(t)} \sum_j \phi(|x_j(t) - x_i(t)|) (x_j(t) - x_i(t)), \quad \sigma_i(t) = \sum_j \phi(|x_j(t) - x_i(t)|), \quad (2.23)$$

ima limes (jer  $x_i \rightarrow x_i^{\infty}$ ), slijedi da  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i(t)$  postoji i prema 2.21 mora biti jednak nula,  $\dot{x}_i(t) \rightarrow 0$ . Sada, pomnožimo 2.23 sa  $\sigma_i(t)$  i uzmimo skalarni produkt s  $x_i$  i sumirajmo:

$$\sum_i \sigma_i \langle \dot{x}_i, x_i \rangle = \alpha \sum_{ij} \phi_{ij} \langle x_j - x_i, x_i \rangle \equiv -\frac{\alpha}{2} \sum_{ij} \phi_{ij} |x_j - x_i|^2. \quad (2.24)$$

Budući da su  $x_i \in \Omega(0)$ ,  $\sigma_i \leq N$  uniformno ograničeni i  $\dot{x}_i(t) \rightarrow 0$  na lijevoj strani, slijedi da i izraz na desnoj strani konvergira prema 0. Prijelazom na limes izraza na desnoj strani dobivamo:

$$\phi(|x_i^{\infty} - x_j^{\infty}|) |x_i^{\infty} - x_j^{\infty}|^2 = 0 \quad \text{za sve } i, j \leq N. \quad (2.25)$$

Dakle, ako je  $|x_i^{\infty} - x_j^{\infty}| > R$ ,  $\phi(|x_i^{\infty} - x_j^{\infty}|) = 0$ , agenti  $i$  i  $j$  se nalaze u odvojenim klasterima. Inače, kad su u istom klasteru, npr.  $i, j \in C_k$  t.d.  $|x_i^{\infty} - x_j^{\infty}| < R$ , tada  $\phi(|x_i^{\infty} - x_j^{\infty}|) > 0$ , i zbog 2.25 slijedi da moraju imati isto ravnotežno stanje,  $x_i^{\infty} = x_j^{\infty} =: x_{C_k}^{\infty}$ , odnosno, vrijedi 2.22.  $\square$

## Broj klastera

Uočimo, ako je  $\mathbf{x}^\infty = (x_1^\infty, \dots, x_N^\infty)^\top$  ravnotežno stanje od 2.18, tada je  $\mathbf{x}^\infty$  svojstveni vektor povezan s nelinearnim problemom svojstvene vrijednosti:

$$A(\mathbf{x}^\infty)\mathbf{x}^\infty = \mathbf{x}^\infty,$$

koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_N(A(\mathbf{x}^\infty)) = 1$ . Sljedeća propozicija govori o vezi između broja klastera i kratnosti svojstvene vrijednosti  $\lambda_N = 1$  matrice  $A$ .

**Propozicija 2.3.3.** *Pretpostavimo da je skupina  $N$  agenata  $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$  particionirana u  $K$  klastera,  $\{1, 2, \dots, N\} = \cup_{k=1}^{K(t)} C_k$ . Tada je broj klastera,  $K = K(t)$ , jednak geometrijskoj kratnosti od  $\lambda_N(A(\mathbf{x}(t))) = 1$*

$$K(t) = \{\#\lambda_N(A(x(t))) \mid \lambda_N(A(x(t))) = 1\}. \quad (2.26)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da se dinamika 2.18 u trenutku  $t$  sastoji od  $K = K(t)$  klastera,  $\cup_{k=1}^{K(t)} C_k$ . Definiramo vektor  $\mathbf{r}^k = (r_1^k, \dots, r_N^k)^\top$  t.d.

$$r_j^k = \begin{cases} 1 & j \in C_k \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Očito su vektori  $\{\mathbf{r}^k\}_{k=1}^{K(t)}$  linearno nezavisni.

Dobivamo

$$(A\mathbf{r}^k)_i = \sum_j a_{ij}r_j^k = \sum_{j \in C_k} a_{ij}.$$

Koristeći činjenicu da je  $A$  stohastička matrica i da vrijedi  $a_{ij} = 0$  ako su  $x_i$  i  $x_j$  u različitim klasterima, dolazimo do

$$\sum_{j \in C_k} a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i \in C_k \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = r_i^k,$$

I zato je  $A\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^k$ . Dakle, za svaki klaster  $C_k$  postoji odgovarajući svojstveni vektor  $\mathbf{r}^k$  koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_N(A) = 1$ . Još nam preostaje dokazati da ne postoji niti jedan drugi takav vektor. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji  $\mathbf{r}$  za koji vrijedi  $A\mathbf{r} = \mathbf{r}$ ,

$$\sum_j a_{ij}r_j = r_i \quad \text{za svaki } i.$$

Fiksirajmo klaster  $C_k$ . Tada za bilo koji  $p \in C_k$  imamo:

$$\sum_{j \in C_k} a_{pj}r_j = r_p.$$



Neka je sada  $r_q$  najveća komponenta vektora  $\mathbf{r}$  za  $q \in C_k$ . Zbog  $\sum_{j \in C_k} a_{qj} = 1$  i  $r_q = \sum_{j \in C_k} a_{qj} r_j \leq \sum_{j \in C_k} a_{qj} r_q = r_q \sum_{j \in C_k} a_{qj} = r_q$ , mora vrijediti  $\sum_{j \in C_k} a_{qj} r_j = \sum_{j \in C_k} a_{qj} r_q$ . Iz toga sljedi da su sve komponente vektora  $\mathbf{r}$  koje odgovaraju indeksima iz  $C_k$  jednake, pa se  $\mathbf{r}$  može napisati kao linearna kombinacija vektora  $\mathbf{r}^k$ . Zaključujemo da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda_N(A(\mathbf{x}(t))) = 1$  jednaka broju klastera  $K$ .

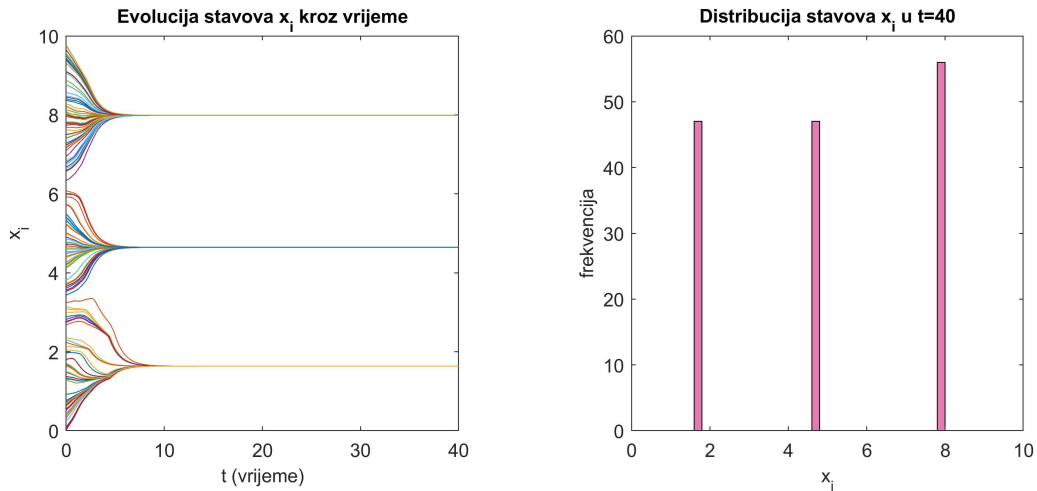
□

## Numeričke simulacije s lokalnom dinamikom

U ovom odjeljku koristeći 1D i 2D simulacije ilustriramo nastanak klastera u nesimetričnom modelu mišljenja:

$$\frac{d}{dt}x_i = \sum_{j \neq i} \frac{\phi_{ij}}{\sum_k \phi_{ik}} (x_j - x_i), \quad \phi_{ij}(t) = \phi(|x_j(t) - x_i(t)|), \quad x_i(t) \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.27)$$

Za funkciju utjecaja,  $\phi$ , koristimo karakterističnu funkciju intervala  $[0, 1]$ :  $\phi(r) = \chi_{[0,1]}(r)$ , numerička metoda koju koristimo za rješavanje sustava ODJ 2.27 je klasična Runge-Kutta metoda s vremenskim korakom  $\Delta t = 0.05$  (v. A.1).

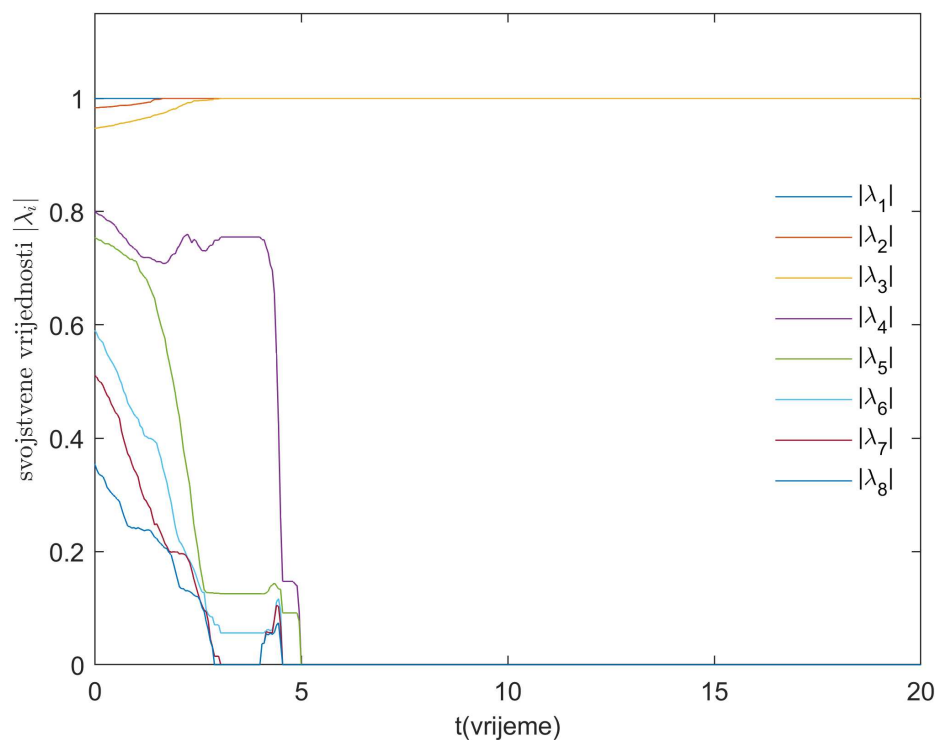


Slika 2.2: (lijevo) Model mišljenja 2.27 s  $N = 150$  agenata i  $\phi = \chi_{[0,1]}$ ; (desno) histogram distribucije  $x_i$  u  $t = 40$ .

Prvo izvodimo simulaciju jednodimenzionalnog modela mišljenja,  $d = 1$ , s početnom konfiguracijom od  $N = 150$  agenata uniformno distribuiranih na intervalu  $[0, 10]$ . Na Slici 2.2, lijevo, prikazujemo evoluciju mišljenja  $x_i(t)$  kroz vrijeme. Vidimo formiranje tri klastera do trenutka  $t \approx 4.5$ . Na istoj slici, desno, prikazan je histogram distribucije

agenata u konačnom trenutku simulacije  $t = 40$ . Vidimo da je udaljenost među klasterima veća od  $R = 1$ , što je u skladu s Propozicijom 2.3.2. Primjećujemo i da se broj mišljenja u pojedinačnim klasterima razlikuje.

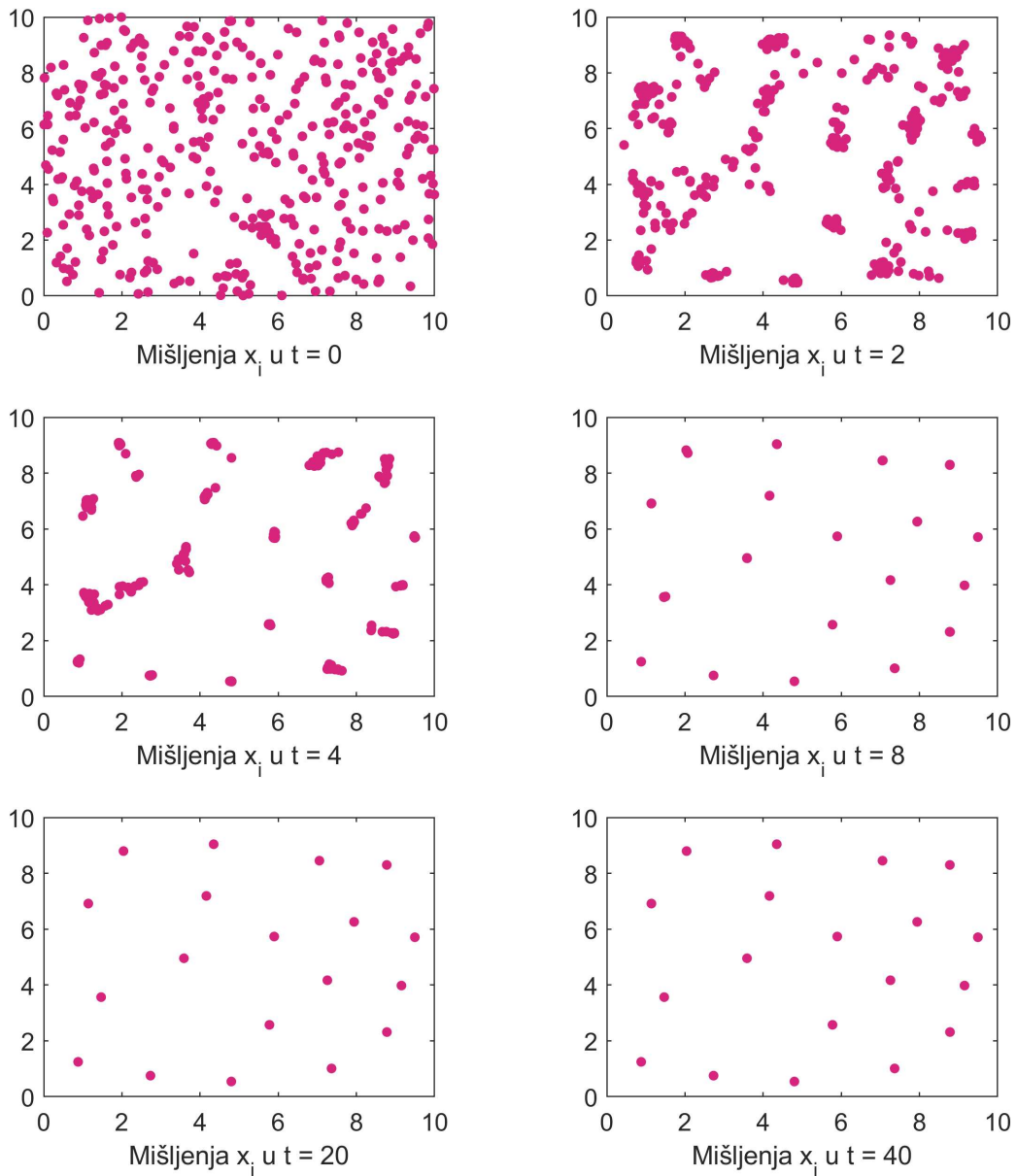
Da bismo detaljnije analizirali formiranje klastera, promatramo i razvoj svojstvenih vrijednosti matrice interakcije  $A(\mathbf{x}(t))$ . Na Slici 2.3, prikazane su apsolutne vrijednosti prvih osam svojstvenih vrijednosti matrice  $A$ . Od  $t = 0$  do  $t \approx 4.5$ , primjećujemo da prve tri svojstvene vrijednosti konvergiraju prema 1. Do trenutka  $t = 5$  sve ostale svojstvene vrijednosti padaju na 0. Nakon toga je matrica  $A(\mathbf{x}(t))$  konstantna. Ovo ilustrira Propoziciju 2.3.3, koja kaže da je broj klastera u trenutku  $t$  jednak kratnosti svojstvene vrijednosti  $\lambda_N = 1$  matrice  $A$ .



Slika 2.3: Apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti matrice  $A$  (2.27) tijekom simulacije sa slike 2.2. Broj svojstvenih vrijednosti jednakih 1 odgovara broju klastera.

Sada ilustriramo dinamiku dvodimenzionalnog,  $d = 2$ , modela mišljenja 2.27. Pokrećemo model s početnim uvjetom od  $N = 400$  agenata, koji su uniformno distribuirani na kocki  $[0, 10] \times [0, 10]$ . Kao funkciju utjecaja koristimo  $\phi(r) = \chi_{[0,1]}(r)$ . Na Slici 2.4 prikazano je nekoliko slika simulacije u različitim trenucima ( $t = 0, 2, 4, 8, 20$  i  $40$  vremenskih jedinica). Kao i u 1D slučaju, prvo uočavamo brzu tranziciju prema formiranju

klastera (od  $t = 0$  do  $t = 8$ ). Vidimo i da trenutku  $t = 20$  dinamika postiže ravnotežno stanje, u kojem svi klasteri su međusobno udaljeni za više od  $R = 1$ .



Slika 2.4: 2D simulacije modela 2.27 s  $N = 400$  agenata i  $\phi = \chi_{[0,1]}$ .

## 2.4 K = 1: Uniformna povezanost implicira konsenzus

Nastanak konsenzusa u modelu mišljenja podrazumijeva da graf dinamike mora ostati povezan, tj.  $|x_i(t) - x_j(t)| \ll R$  barem za  $t \gg 1$ . Sada ćemo razmotriti obrnutu tvrdnju, odnosno, da konsenzus slijedi iz uniformne povezanosti grafa. Odgovarajući graf modela 2.1,  $\mathcal{G}_A := (\mathcal{X}, A(\mathcal{X}))$  je povezan ako su svaka dva agenta  $x_i(t)$  i  $x_j(t)$  povezana pomoću puta  $\Gamma_{ij} := \{k_1 = i < k_2 < \dots < k_r = j\}$  duljine  $r_{ij} \leq N$ . Uniformnu povezanost mjerimo njenom „najslabijom karikom“. Započinjemo s definicijom uniformne povezanosti za opći model 2.1, a zatim pomoću metode energije obrađujemo slučaj  $K = 1$  u modelu 2.2.

**Definicija 2.4.1.** (Uniformna povezanost) Samoorganizirana dinamika 2.1 je povezana ako postoji  $\mu(t) > 0$ , te put  $\Gamma_{ij}$  između svaka dva agenta  $i$  i  $j$  takvi da vrijedi

$$\min_{k_l \in \Gamma_{ij}} a_{k_l, k_{l+1}}(\mathcal{X}(t)) \geq \mu(t) > 0 \quad \text{za sve } i, j. \quad (2.28)$$

Posebno, ako vrijedi  $\mu(t) \geq \mu > 0$ , kažemo da je  $\mathcal{X}(t)$  uniformno povezan.

Alternativno, uniformna povezanost od 2.1 zahtijeva postojajne  $\mu = \mu_A > 0$  neovisnog o vremenu, t.d.

$$\left( A^N(\mathcal{X}(t)) \right)_{ij} \geq \mu^N > 0.$$

### Konsenzus u lokalnoj dinamici mišljenja

U nastavku razmatramo pitanje konsenzusa u nesimetričnom modelu 2.2. Povezanost u modelu dinamike mišljenja definiramo u terminima funkcija  $\phi_{ij}$ , što je ekvivalentno definiciji 2.4.1 pomoću koeficijenata matrice interakcije,  $a_{ij}$ , razlika je samo u dijeljenju sa stupnjem  $\sigma_i$  koji ne utječe na predznak.

**Teorem 2.4.2.** (povezanost implicira konsenzus) Neka je  $\mathcal{X}(t) = \{x_p(t)\}_p$  rješenje nesimetričnog modela mišljenja 2.2 čija funkcija utjecaja ima kompaktan nosač,  $\text{Supp}\{\phi(\cdot)\} = [0, R]$ ,

$$\sigma_i \frac{d}{dt} x_i(t) = \alpha \sum_j \phi_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad \sigma_i = \sum_k \phi_{ik}.$$

Ako  $\mathcal{X}(t)$  ostane povezan kroz vrijeme, u smislu da je svaki par agenata  $(i, j)$  povezan putem  $\Gamma_{ij}$ , t.d.

$$\min_{k_l \in \Gamma_{ij}} \phi(|x_{k_{l+1}} - x_{k_l}|) \geq \mu > 0 \quad \text{za sve } i, j,$$

tada  $\phi$  ima ograničenu varijaciju u vremenu  $i$ , posljedično,  $\mathcal{X}(t)$  se približava konsenzusu  $x_i(t) \rightarrow x_{con}^\infty$  s eksponencijalnom stopom konvergencije

$$|x_i(t) - x_{con}^\infty| \lesssim e^{-am(t-t_0)} [\mathbf{x}(0)], \quad m = \min_{r \leq R/2} \phi(r) > 0. \quad (2.29)$$

*Dokaz.* Uvodimo funkcional energije:

$$\varepsilon(t) := \alpha \sum_{i,j} \Phi(|x_j(t) - x_i(t)|), \quad \Phi(r) := \int_{s=0}^r s\phi(s) ds, \quad (2.30)$$

koji s vremenom opada,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varepsilon(t) &= \alpha \sum_{i,j} \phi_{ij} \langle \dot{x}_j - \dot{x}_i, x_j - x_i \rangle = -2\alpha \sum_{i,j} \phi_{ij} \langle \dot{x}_i, x_j - x_i \rangle \\ &= -2 \sum_i \langle \dot{x}_i, \alpha \sum_{j \neq i} \phi_{ij} (x_j - x_i) \rangle = -2 \sum_i \sigma_i |\dot{x}_i|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da bismo odozgo ograničili desnu stranu izraza u 2.30, pomnožimo 2.2 s  $x_i$  i sumirajmo. Dobivamo:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{2} \sum_{i,j} \phi_{ij} |x_i - x_j|^2 &= -\alpha \sum_{i,j} \phi_{ij} \langle x_i - x_j, x_i \rangle = \sum \sigma_i \langle x_i, \dot{x}_i \rangle \\ &\leq \sqrt{\sum_i \sigma_i |x_i|^2} \sqrt{\sum_i \sigma_i |\dot{x}_i|^2} \leq N \max_i |x_i(0)| \sqrt{\sum_i \sigma_i |\dot{x}_i|^2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dobivamo pad energije:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha^2 C_0^2 \left( \sum_{i,j} \phi_{ij} |x_i - x_j|^2 \right)^2, \quad C_0 = \frac{1}{N \max_i |x_i(0)|}. \quad (2.33)$$

Dakle, jer vrijedi:

$$\int_0^\infty \left( \sum_{i,j} \phi_{ij}(t) |x_i(t) - x_j(t)|^2 \right)^2 dt < \frac{2}{\alpha^2 C_0^2} \varepsilon(0) < \infty$$

suma  $\sum_{i,j} \phi_{ij}(t) |x_i(t) - x_j(t)|^2$  mora u nekom trenutku postati proizvoljno malena, odnosno, postoji  $t_0 > 0$  t.d.

$$\sum_{i,j} \phi_{ij}(t_0) |x_i(t_0) - x_j(t_0)|^2 \leq \frac{\mu}{4N} R^2, \quad (2.34)$$

i, zbog uniformne povezanosti

$$\frac{\mu}{N} |x_i(t_0) - x_j(t_0)|^2 \leq \sum_{k_l \in \Gamma_{ij}} \phi_{k_l, k_{l+1}}(t_0) |x_{k_l}(t_0) - x_{k_{l+1}}(t_0)|^2 \leq \frac{\mu}{4N} R^2 \quad (2.35)$$

Dakle, u trenutku  $t_0$  dinamika se koncentrira tako da njen promjer  $[\mathbf{x}(t_0)] = \max_{i,j} |x_i(t_0) - x_j(t_0)| \leq R/2$ , i, jer je  $[\mathbf{x}(\cdot)]$  nerastuća funkcija vremena, slijedi  $[\mathbf{x}(t)] \leq R/2$ . Pomoću Propozicije 2.2.7, zaključujemo da postoji trenutak  $t_0$  nakon kojeg energija eksponencijalno pada:

$$Na_{ij} \geq \phi(|x_i(t) - x_j(t)|) \geq \min_{r \leq [\mathbf{x}(t)]} \phi(r) \geq \min_{r \leq R/2} \phi(r) = m, \quad t > t_0,$$

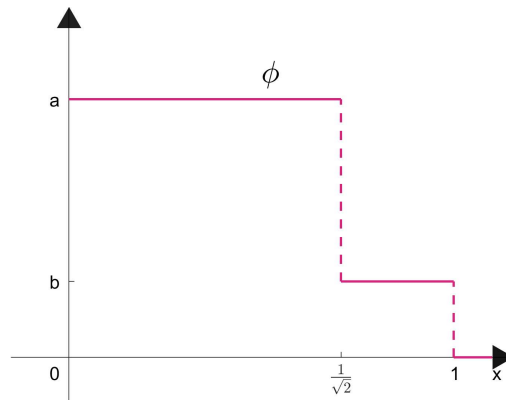
i konsenzus slijedi iz Korolara 2.2.6. □

## 2.5 Heterofilna dinamika pojačava konsenzus: Simulacije

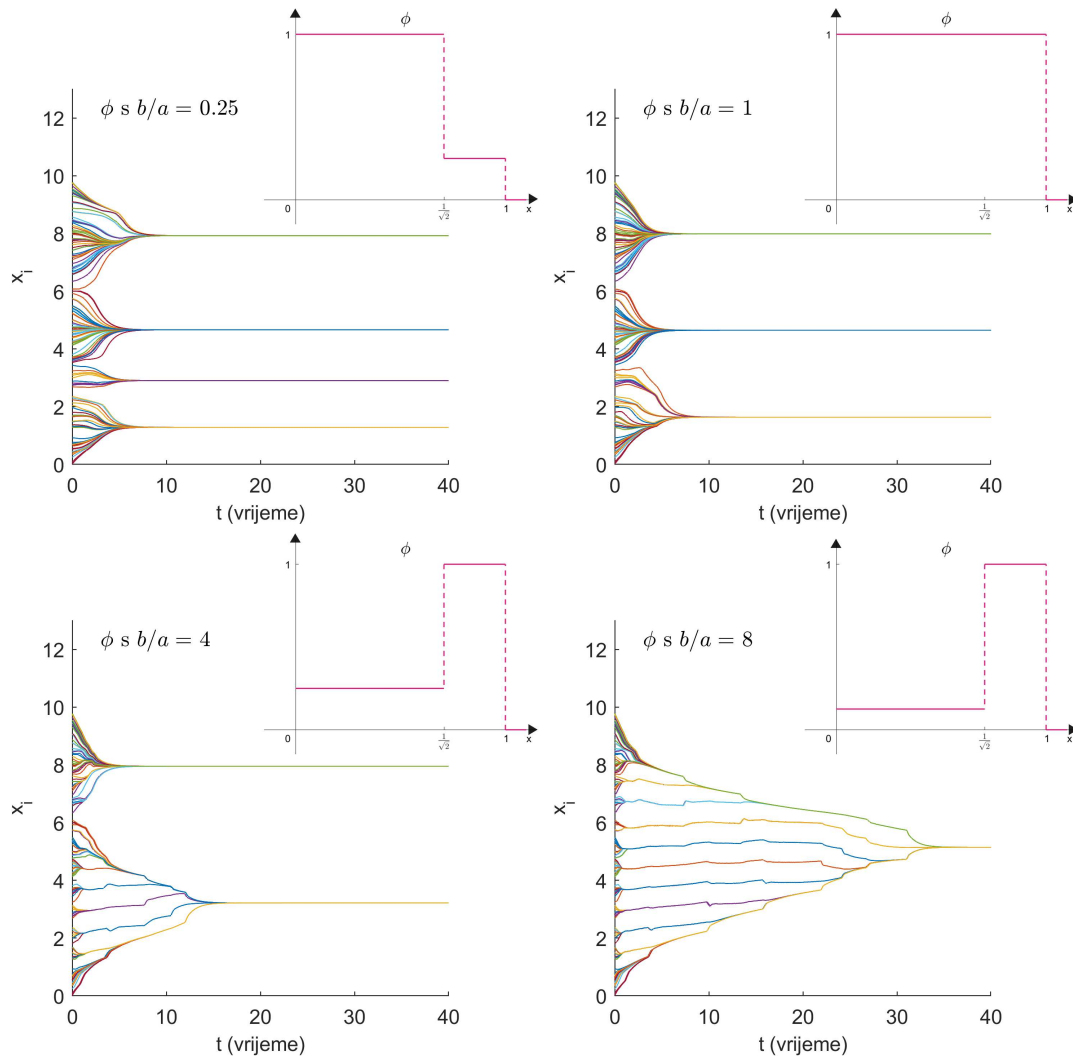
Kao što smo primijetili ranije, dugoročno ponašanje lokalnog modela dinamike mišljenja 2.2 ovisi o detaljima interakcija, koeficijentima  $\{a_{ij}\}$ , odnosno o funkciji utjecaja  $\phi$  s kompaktnim nosačem. Sljedeći cilj je istražiti kako profil od  $\phi$  utječe na formiranje klastera. Numeričke simulacije prezentirane u ovom odjeljku dovode do glavnog zaključka da ako je  $\phi$  rastuća funkcija (na svom nosaču) broj klastera  $\{C_k\}_{k=1}^K$  će biti manji, u usporedbi s nerastućim funkcijama. Posebno, ako profil od  $\phi$  raste dovoljno brzo vrijedi  $K = 1$ . Dakle, heterofilna dinamika pospešuje postizanje konsenzusa. U simulacijama kao funkciju utjecaja  $\phi$  koristimo jednostavnu step funkciju [11] definiranu s:

$$\phi(r) = \begin{cases} a & \text{za } r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ b & \text{za } \frac{1}{\sqrt{2}} < r \leq 1, \\ 0 & \text{za } r > 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

Bitna veličina je omjer  $\frac{b}{a}$  koji mjeri odnos utjecaja „dalekih“ i „bliskih“ susjeda (v.Sl. 2.5).



Slika 2.5: Funkcija utjecaja  $\phi$  korištena u simulacijama. Što je  $b/a$  veći, dinamika je heterofilnija.



Slika 2.6: Simulacije modela 2.27 s različitim funkcijama utjecaja  $\phi$ . Broj klastera opada sa smanjenjem utjecaja bližih susjeda, odnosno, povećanjem utjecaja daljih susjeda. Za  $b/a=8$ , dinamika konvergira prema konsenzusu.

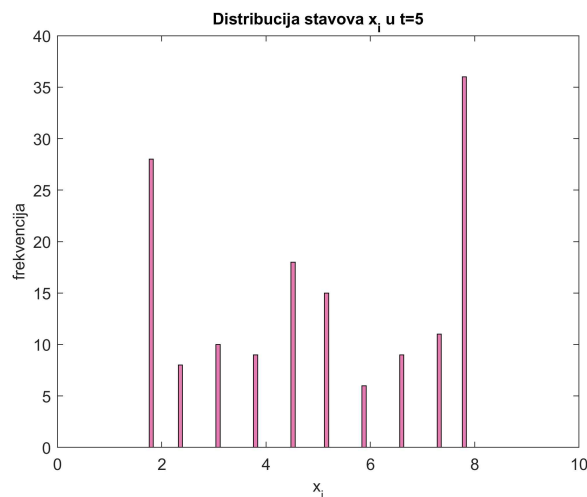
## 1D simulacije

Započinjemo s četiri simulacije jednodimenzionalne dinamike stavova 2.27 sa  $N = 150$  agenata čija su mišljenja uniformno distribuirana na  $[0, 10]$ . Koristimo istu početnu konfiguracijom kao na Slici 2.2. Da bismo istražili kako dinamika ovisi o step funkciji utjecaja

2.36. Koristimo četiri različita omjera,  $\frac{b}{a} = 0.25, 1, 4$  i  $8$ . Povećanje  $\frac{b}{a}$ , reflektira tendenciju „vezivanja s drugačijima“. Kao što je prikazano na Slici 2.6 za omjere  $\frac{b}{a} = 0.25, 1$  i  $4$  odgovarajući broj ravnotežnih klastera iznosi redom  $K = 4, 3, 2$ . Posebno, za  $\frac{b}{a} = 8$ , dinamika konvergira prema konsenzusu,  $K = 1$ . Ove simulacije pokazuju da će smanjenje utjecaja bliskih susjeda, a time i povećanje intenziteta utjecaja daljih susjeda, pogodovati povećanju povezanosti i postizanju konsenzusa.

### Klasteri i podružnice

Na Slici 2.6 za omjere  $\frac{b}{a} = 4$  i  $\frac{b}{a} = 8$  uočavamo pojavljivanje *podružnica*, u kojima su podskupine agenata konvergirale prema istom mišljenju, no za razliku od klastera, agenti iz podružnica su i dalje u interakciji s *autsajderima* koji su od njih udaljeni za strogo manje od  $R = 1$ . Posebno, na Slici 2.7, u simulaciji s omjerom  $\frac{b}{a} = 8$ , u trenutku  $t = 5$  možemo identificirati 10 podružnica međusobno udaljenih za otprilike  $0.7$  prostornih jedinica što odgovara prekidu funkcije  $\phi(\cdot)$ , koja u  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$  skoči s  $0.125$  na  $1$ . One se s vremenom

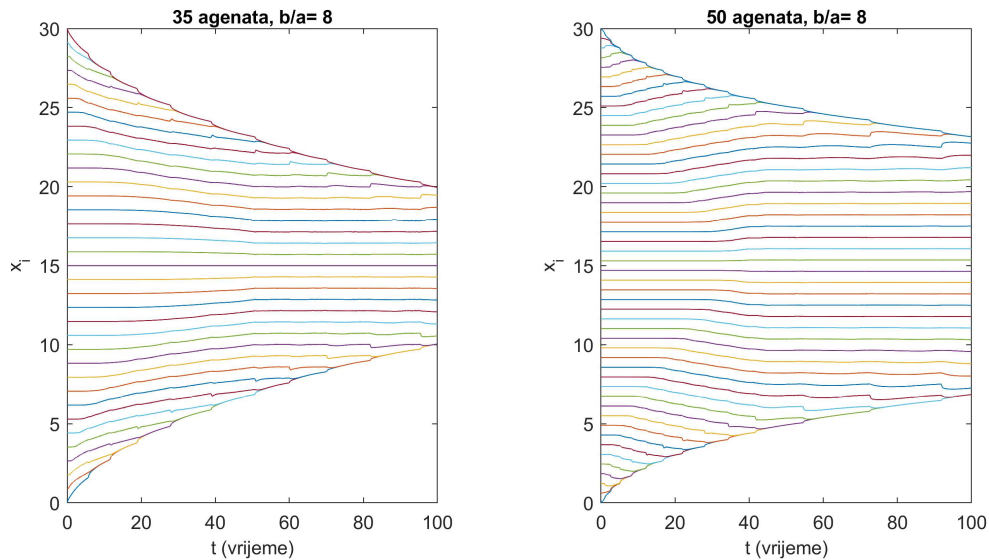


Slika 2.7: Distribucija  $\{x_p\}_p$  u simulaciji sa Slike 2.6 s  $b/a = 8$  u trenutku  $t = 5$ .

spajaju i tvore jedan konačan klaster, konsenzus, u  $t \approx 33$ . Dakle, odlučujući faktor u nastanku konsenzusa nije broj podružnica, već njihove dugoročno povezane komponente.

Da bismo ilustrirali pojavljivanje udaljenosti  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  između dvije najbliže *podružnice*, ponovimo simulacije modela 2.27, s  $\frac{b}{a} = 8$ , koristeći posebne početne konfiguracije u kojima su sva mišljenja jednoliko raspoređena s  $|x_{i+1} - x_i| = d_*$ ,  $0 < d_* < 1$ . Na Slici 2.8 vidimo da agenti  $\{x_i\}_i$  prilagođavaju svoja mišljenja t.d. se udaljenosti najbližih susjeda,  $|x_{i+1} - x_i|$ , približavaju  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  za  $t \gg 1$ .

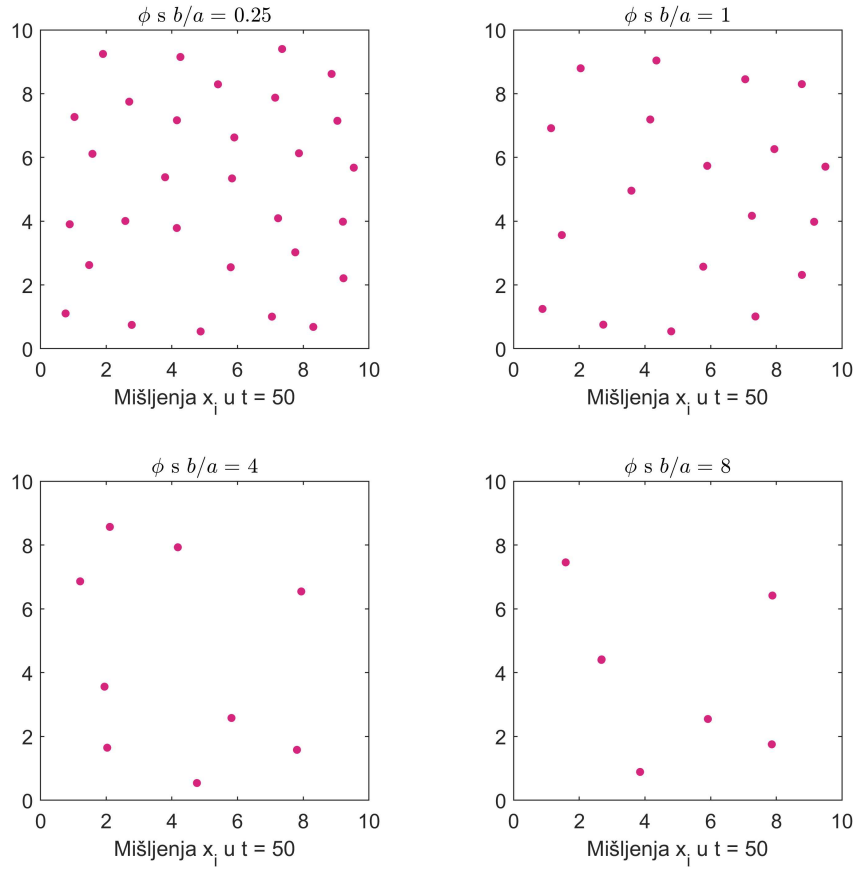




Slika 2.8: Simulacija nesimetričnog modela s ekvidistantnim početnim profilom mišljenja: (lijevo)  $|x_{i+1} - x_i| = 0.9$ ; (desno)  $|x_{i+1} - x_i| = 0.6$ . Najbliži susjedi prilagođavaju međusobnu udaljenost na  $1/\sqrt{2} \approx 0.7$  prostornih jedinica; na lijevom grafu trajektorije se približavaju, dok se na desnom udaljavaju.

## 2D simulacije

Nadalje, s ciljem analize utjecaja profila funkcije  $\phi$  na formiranje klastera, izvest ćemo i nekoliko 2D simulacija modela 2.27. Koristimo istu početnu distribuciju kao na Slici 2.4, s 400 agenata uniformno raspoređenih na kocki  $[0, 10] \times [0, 10]$ . Kao u 1D modelu odabiremo step funkcije utjecaja  $\phi$  s omjerima  $\frac{b}{a} = 0.25, 1, 4$  i  $8$ . Na Slici 2.9 prikazana su stanja dinamika u konačnom trenutku simulacija ( $t = 50$ ), kada su svi klasteri udaljeni za više od  $R = 1$ . Kao i u jednodimenzionalnom slučaju vidimo da se povećanjem utjecaja daljih i smanjenjem utjecaja bližih susjeda ravnotežni broj klastera smanjuje. Za omjere  $\frac{b}{a} = 0.25, 1, 4, 8$  konačni broj klastera je redom 30, 19, 9 i 6. Dakle, heterofilnija funkcija utjecaja ponovno pojačava efekt klasteriranja.



Slika 2.9: 2D simulacije  $N = 400$  agenata, s istim početnim distribucijama i funkcijama utjecaja  $\phi$  s  $b/a = 0.25, 1, 4, 8$ . Na slici su prikazani stabilizirani klasteri ( $t = 50$ ), udaljeni za više od  $R = 1$ . Uočavamo efekt *heterofilije*: smanjenje utjecaja bližih susjeda vodi do manjeg broja klastera na kraju simulacije.

## 2.6 Dinamika u diskretnom vremenu

U ovom odjeljku proširujemo prethodne rezultate modela s neprekidnim vremenom 2.2 na diskretan slučaj:

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} = \alpha \frac{\sum_j \phi_{ij}(x_j(t) - x_i(t))}{\sum_j \phi_{ij}} \quad (2.37)$$

Posebno, za  $\alpha = \frac{1}{\Delta t}$ , uz oznaku  $x_i^n = x_i(n\Delta t) = x_i(t_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , sustav:

$$x_i^{n+1} = \frac{\sum_{j=1}^N \phi_{ij} x_j^n}{\sum_{j=1}^N \phi_{ij}}, \quad \phi_{ij} = \phi(|x_j^n - x_i^n|), \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (2.38)$$

je generaliziracija Hegselmann-Krausovog model iz prvog poglavlja. Klasični HK se dobije za  $\Delta t = 1$  i  $\phi(r) = \chi_{[0,\varepsilon]}(r)$ . U nastavku ćemo proučiti svojstva diskretne dinamike 2.38.

## Konsenzus s globalnim interakcijama

Mnogi rezultati koji vrijede za neprekidnu dinamiku 2.2 vrijede i ovdje. Npr. konveksna ljuska svih mišljenja  $\Omega$  se s vremenom smanjuje

$$\Omega(n+1) \subset \Omega(n).$$

Također, dinamika 2.38 će konvergirati prema konsenzusu ako u početku svi agenti međusobno komuniciraju. Preciznije, argumenti slični onima u 2.2.7 daju sljedeći rezultat.

**Teorem 2.6.1.** *Pretpostavimo da je  $m = \min_{r \in [0, [\mathbf{x}(0)]]} \phi(r) > 0$ . Tada promjer diskretne dinamike 2.38 zadovoljava*

$$[\mathbf{x}^n] \leq (1 - m)^n [\mathbf{x}^0] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.39)$$

i slijedi konvergencija prema konsenzusu,  $x_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_{con}^\infty \in \Omega(0)$ .

*Dokaz.* Koristeći procjenu kontrakcije 2.11 koju slijedi ograničenje  $\eta_A \geq \max_{\theta} \theta \cdot \lambda(\theta)$  dobivamo

$$[\mathbf{x}^{n+1}] \leq (1 - \eta_A) [\mathbf{x}^n] \leq (1 - \theta \cdot \lambda(\theta, t_n)) [\mathbf{x}^n], \quad a_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\sum_j \phi_{ij}}.$$

Fiksirajmo  $\Theta = m/N$ , tada aktivni skup  $\Lambda(\theta)$  uključuje sve agente, odnosno  $\lambda(\theta, t_n) = N$ , pa zaključujemo

$$[\mathbf{x}^{n+1}] \leq (1 - \frac{m}{N} N) [\mathbf{x}^n] \leq (1 - m) [\mathbf{x}^n].$$

Raspisivanjem dobijemo

$$[\mathbf{x}^{n+1}] \leq (1 - m)^{n+1} [\mathbf{x}^0],$$

a primjenom  $\lim_n$ , zbog  $(1 - m) < 1$  slijedi 2.39. Konvergenciju prema konsenzusu  $x_{con}^\infty \in \Omega(0)$  dobijemo kombinirajući 2.39 s činjenicom da je niz konveksnih ljuski rješenja  $\{\Omega(n)\}_0^\infty$  padajući.  $\square$

## Klasteriranje s lokalnim interakcijama

U ovom odjeljku analiziramo ponašanje diskretne dinamike 2.38 s lokalnim interakcijama. Ponajviše nas zanima formiranje klastera, te nam je cilj izvesti analogon Propozicije 2.3.2.

**Propozicija 2.6.2.** Neka je  $\mathcal{X}^n = \{x_p^n\}_p$  rješenje diskretne dinamike mišljenja 2.38 čija funkcija utjecaja ima kompaktan nosač,  $\text{Supp}\{\phi(\cdot)\} = [0, R]$ . Pretpostavimo da se dinamika dovoljno brzo približava stabilnom stanju t.d.

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sum_i |x_i^{n+1} - x_i^n| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (2.40)$$

Tada se  $\mathcal{X}^n$  približava ravnotežnom stanju,  $\mathbf{x}^\infty = (x_1^\infty, \dots, x_N^\infty)^\top$ , koje je particionirano na klasterne  $\{C_k\}_k$ , t.d.  $\{1, 2, \dots, N\} = \cup_{k=1}^K C_k$  i vrijedi

$$x_i^n \rightarrow x_{C_k}^\infty \quad \text{za sve } i \in C_k. \quad (2.41)$$

*Dokaz.* Prema pretpostavci 2.40 vrijedi

$$|x_i^{n_2} - x_i^{n_1}| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2-1} |x_i^{n+1} - x_i^n| \ll 1 \quad \text{za } n_2 > n_1 \gg 1,$$

stoga se  $\mathbf{x}^n$  približava limesu,  $x_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i^\infty$ . Zapišimo diskretnu dinamiku 2.38 u obliku:

$$\sum_j \phi_{ij} (x_i^{n+1} - x_i^n) = \sum_j \phi_{ij} (x_j^n - x_i^n)$$

Sada promotrimo skalarni produkt prethodne jednadžbe s  $x_i^n$ , te sumirajmo po  $i$ . Koristeći činjenicu da je  $\phi_{ij}$  simetrična funkcija dobijemo:

$$\sum_{ij} \phi_{ij} \langle x_i^{n+1} - x_i^n, x_i^n \rangle = \sum_{ij} \phi_{ij} \langle x_j^n - x_i^n, x_i^n \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \phi_{ij} |x_j^n - x_i^n|^2.$$

Kako su  $\phi_{ij}, x_i^n$ , i prema pretpostavci, rep  $\sum_{n=m}^{\infty} |x_i^{n+1} - x_i^n|$  ograničeni, možemo zaključiti da suma na desnoj strani konvergira prema 0:

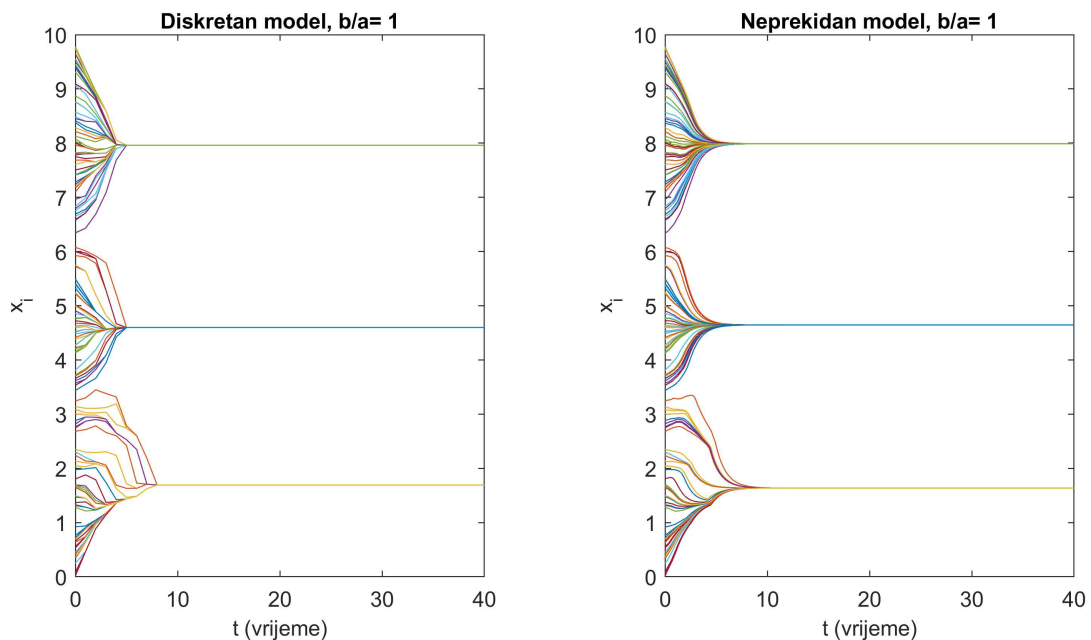
$$\phi_{ij} |x_j^n - x_i^n|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(|x_j^\infty - x_i^\infty|) |x_j^\infty - x_i^\infty|^2 = 0.$$

Stoga su  $x_j^\infty$  i  $x_i^\infty$  ili u odvojenim klasterima,  $|x_j^\infty - x_i^\infty| > R$ , ili su u graničnoj točki istog klastera,  $i, j \in C_l$ , pa vrijedi  $x_j^\infty = x_i^\infty$ .  $\square$

Slijedi iskaz diskretnog analogona Teorema 2.4.2 bez dokaza.

**Teorem 2.6.3.** Neka je  $\mathcal{X}^n = \{x_k^n\}_k$  rješenje diskretne dinamike mišljenja 2.38 s nerastućom funkcijom utjecaja koja ima kompaktan nosač,  $\text{Supp}\phi(\cdot) = [0, R]$ . Ako je  $\mathcal{X}^n$  uniformno povezan za svaki  $n$ , tada konvergira prema konsenzusu.

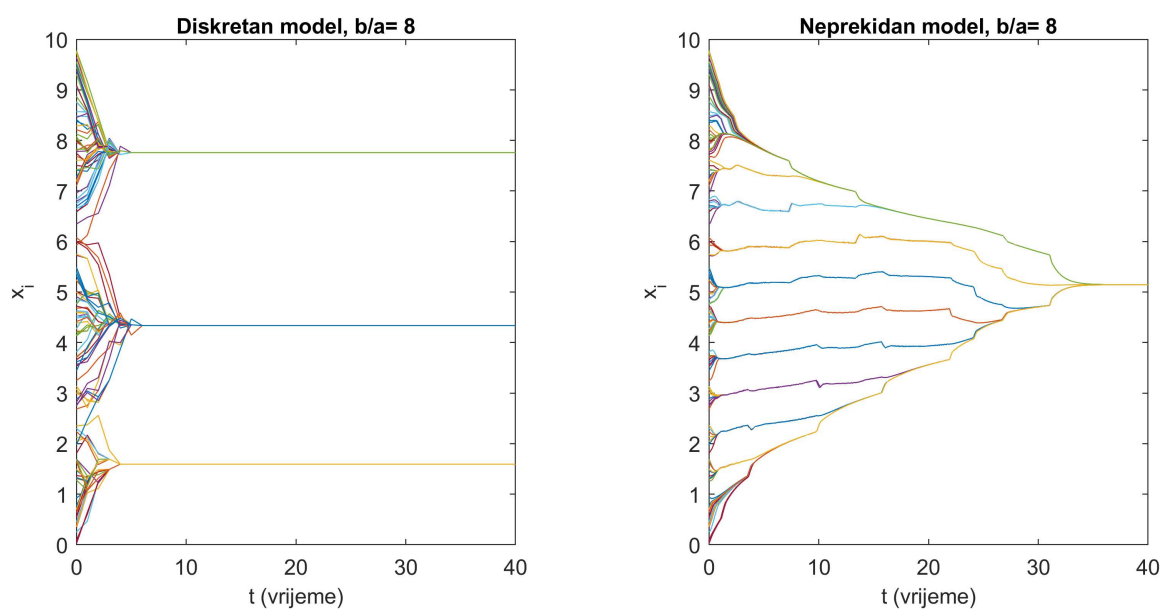
*Dokaz.* Dokaz se može pronaći u [11]. Kao i u Teoremu 2.4.2 u dokazu se koristi funkcional energije, s nekim dodatnim pretpostavkama.  $\square$



Slika 2.10: Simulacije diskretne 2.38 i neprekidne 2.27 dinamike s  $\phi = \chi_{[0,1]}$  i istom uniformnom početnom distribucijom mišljenja. U oba slučaju uočavamo formaciju tri klastera.

### Numeričke simulacije u diskretnoj dinamici

Na kraju ovog poglavlja ćemo se još jednom poslužiti numeričkim simulacijama. Sada želimo prikazati razliku između vremenski neprekidnog modela stavova 2.2 i njegove diskretne verzije 2.38. Simulacije neprekidnog i diskretnog modela izvodimo s istim početnim uvjetima kao i ranije. Prvo provodimo simulacije za funkciju utjecaja  $\phi = \chi_{[0,1]}$ . Rezultati su prikazani na Slici 2.10. Vidimo da su diskretna i kontinuirana dinamika u ovom slučaju vrlo slične. Sada simuliramo trajektorije koristeći funkciju utjecaja  $\phi = 0.125\chi_{[0,1/\sqrt{2}]} + \chi_{(1/\sqrt{2},1]}$  s  $\frac{b}{a} = 8$ . Rezultati su prikazani na Slici 2.11. Situacija je bitno drugačija nego na Slici 2.10. Ovoga puta neprekidna dinamika konvergira prema distribuciji s uniformno razmaknutim podružnicama, koje se naposljetku spoje te dinamika doseže konsenzus. U diskretnoj dinamici primjećujemo da originalni poredak  $\{x_i\}_i$  više nije sačuvan i da se trajektorije sijeku. Broj ravnotežnih klastera je isti kao i za funkciju utjecaja s manjim omjerom  $\frac{b}{a}$ . Možemo zaključiti da u ovom slučaju heterofilnost, odnosno rastuća funkcija utjecaja, nema značajan učinak na stvaranje klastera, što je u skladu s Teoremom 2.6.3 koji povezuje postizanje konsenzusa u diskretnom slučaju s nerastućom funkcijom utjecaja.



Slika 2.11: Simulacije diskretne 2.38 i neprekidne 2.27 dinamike  $\phi = 0.125\chi_{[0,1/\sqrt{2}]} + \chi_{(1/\sqrt{2},1]}$ , s istim početnim profilom mišljenja.

## Poglavlje 3

# Modeliranje utjecaja konstantnog signala na dinamiku stavova

### 3.1 Uvod i definicija modela

U ovom poglavlju definiramo i analiziramo model koji pokušava objasniti neke važne aspekte dinamike stavova pod utjecajem nekog *konstantnog signala*, npr. radikalne grupe, karizmatičnog vođe i sl. Sadržaj poglavlja uglavnom prati referencu [5]. Model su definirali Hegselmann i Krause, i zapravo se radi o modifikaciji njihova klasičnog modela koji je prezentiran u prvom poglavlju. Kao i ranije, promatramo  $N$  agenata među kojima postoji stalna razmjena mišljenja. Oni u diskretnim vremenskim trenutcima,  $t = 0, 1, \dots$ , ažuriraju svoja mišljenja po principu klasične HK dinamike s ograničenim povjerenjem.  $x_i(t) \in [0, 1]$  označava mišljenje agenta  $i$  u trenutku  $t$ . Takve agente nazivamo *normalnima*. Iz razdoblja u razdoblje, prisutan je konstantan signal, kvantificiran s  $R \in [0, 1]$ . U svakom radoblju signal može biti poslan  $\#R$  puta;  $\#R \in \{1, 2, \dots\}$  predstavlja jakost ili intenzitet signala. Taj signal utječe na normalne agente koji su mu *dovoljno blizu*. Kao u prvom poglavlju, s  $\varepsilon$  označimo razinu povjerenja normalnih agenata. Agent  $i$  primi signal ako i samo ako se signal nalazi unutar njegovog intervala povjerenja, odnosno ako vrijedi  $|x_i - R| \leq \varepsilon$ . Ako agent  $i$  primi signal, tada se on broji  $\#R$  puta u postupku ažuriranja mišljenja agenta  $i$ , zajedno s mišljenjima drugih, normalnih, agenata  $j$  za koje vrijedi  $|x_i - x_j| \leq \varepsilon$ . Definirajmo skup normalnih susjeda agenta  $i$  u trenutku  $t$ :

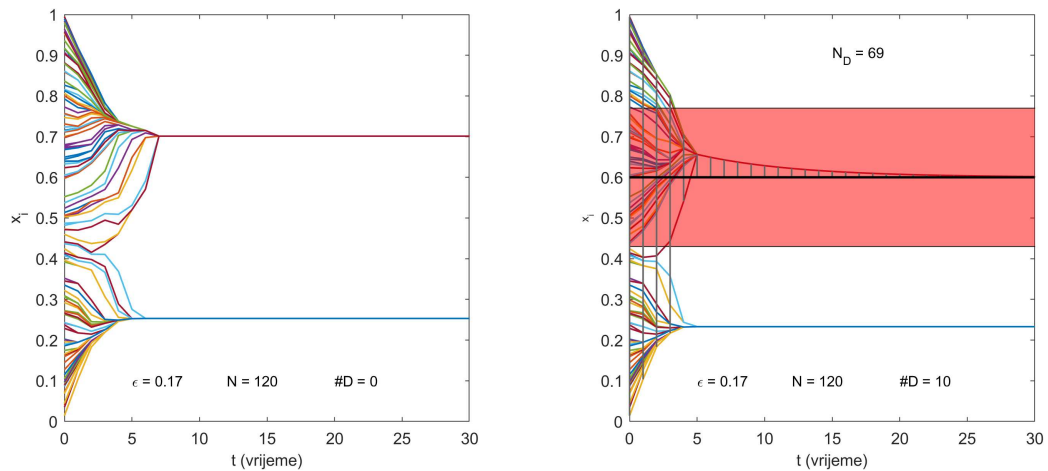
$$\mathcal{N}_i(t) = \{j \in 1, \dots, N \mid |x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon\}$$

i sa  $|\mathcal{N}_i(t)|$  označimo broj normalnih susjeda agenta  $i$  u trenutku  $t$ . Sada ažuriranje mišljenja agenta  $i$  možemo prikazati na sljedeći način:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t), & \text{za } |x_i(t) - R| > \varepsilon \\ \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)| + \#R} (\sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t) + \#R \cdot R), & \text{za } |x_i(t) - R| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.1)$$

Konstantan signal iz prethodno opisne dinamike možemo interpretirati na brojne načine. Ovdje ćemo nabrojati neke od njih.

- Karizmatični vođa koji snažno djeluje na normalne agente koji su pod njegovim utjecajem.  $\#R$  predstavlja stupanj njegove karizmatičnosti, a  $R$  može biti bilo koji broj iz  $[0, 1]$ .
- Skupina dogmatista, koji se zauvijek drže svog mišljenja  $R \in [0, 1]$ .
- Kampanja iz koje se pomoću nekog kanala komunikacije šalje poruka  $R$  s određenim intenzitetom  $\#R$ .
- Skupina od  $\#R$  radikala koji zauzimaju neki ekstreman stav u blizini gornje ili donje granice intervala mišljenja  $[0, 1]$ , a mišljenja normalnih agenata na njih ne utječu.



Slika 3.1: 120 normalnih agenata, s istom uniformnom početnom distribucijom i razinom povjerenja  $\epsilon = 0.17$ . Lijevo: BC dinamika bez dogmatika. Desno: BC dinamika s 10 dogmatika čije je mišljenje  $D = 0.6$ .

Na Slici 3.1 prikazane su dvije simulacije s istom početnom uniformnom distribucijom 120 normalnih agenata na intervalu  $[0, 1]$  i razinom povjerenja  $\epsilon = 0.17$ . Na lijevom dijelu slike prikazane su trajektorije u modelu bez dogmatika. Agenti se na kraju simulacije particioniraju na dva klastera na pozicijama 0.25 i 0.7. Na desnom dijelu slike prikazana je dinamika s 10 dogmatika čije je mišljenje na poziciji 0.6. Ružičasto područje prostora mišljenja označava direktan utjecaj dogmatika, a sive, vertikalne linije pokazuju dokle seže njihov indirektan utjecaj na normalne agente. Na normalnog agenta  $j$  koji se nalazi izvan područja direktnog utjecaja dogmatika utječe agent  $i$  koji se istovremeno nalazi pod direktnim utjecajem dogmatika i u  $\mathcal{N}_j(t)$ . Agent  $j$  može dalje utjecati na druge normalne agente



$k$  unutar čijeg se područja povjerenja nalazi i tako se utjecaj dogmatika širi. Na Slici 3.1 vidimo da kroz prva tri vremenska perioda dogmatici utječu na sve normalne agente. U četvrtom periodu dolazi do pucanja njihovog lanca utjecaja, nakon čega gornji dio profila mišljenja, 69 normalnih agenata, konvergira prema poziciji dogmatika  $D = 0.6$ . Ostali normalni se koncentriraju na poziciji 0.23. Dakle, samo 10 dogmatika, što je otprilike 7.7% ukupne populacije normalnih agenata i dogmatika, uzrokovalo je konvergenciju više od polovine normalnih agenata prema dogmatskom mišljenju.

U nastavku poglavlja ćemo konstantan signal interpretirati kao skupinu radikala koja utječe na normalne agente. Započnimo s glavnim teoremom koji kaže da za proizvoljnu razinu pouzdanosti  $\varepsilon$  i intenzitet signala  $\#R$ , sustav konvergira prema stabilnoj segregaciji normalnih agenata, na one koji se približe radikalnoj poziciji  $R$ , i na one koje se u konačnom vremenu udruže u grupe(klastere). Taj teorem, međutim, ne govori ništa o točnim brojevima normalnih agenata koji završe u radikalnoj poziciji, niti o strukturi grupa normalnih agenata koji "izbjegnu signal".

## 3.2 Teorem o konstantnom signalu

Kao i prije, neka je  $I = 1, 2, \dots, N$  skup normalnih agenata. Radi jednostavnosti neka se skupina radikala sastoji od samo jednog člana  $r$  (v. Nap.3.2.3) i neka je  $I^* = I \cup \{r\}$  skup svih agenata. Za  $i \in I^*$  definiramo skup  $\mathcal{N}_i(t) = \{j \in I^* \mid |x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon\}$  i za  $j \in I^*$

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\#\mathcal{N}_i(t)} & \text{za } j \in \mathcal{N}_i(t) \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je interakcija među agentima, za  $t = 0, 1, 2, \dots$  dana s:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \sum_{j \in I^*} a_{ij}(t)x_j(t) & \text{za } i \in I \\ x_r(t) &= R, \quad R \in [0, 1] & \text{za } i = R. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vrijedi sljedeći rezultat.

**Teorem 3.2.1** (Teorem konstantnog signala). (i) *Postoji skup  $J$  (može biti prazan) normalnih agenata i točka u vremenu  $T$  t.d. na svakog agenta iz  $J$  djeluje lanac utjecaja radikala  $r$  za svaki  $t \geq T$*

(ii) *Mišljenja svih agenata u  $J$  konvergiraju prema mišljenju radikala.*

(iii) *Mišljenja svih ostalih normalnih agenata koji nisu u  $J$  konvergiraju u konačnom vremenu prema mišljenju (ili više mišljenja) različitom od radikalnog.*

*Dokaz.* Definiramo li

$$a_{rj}(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } j = r \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

interakcije svih agenata mogu biti opisane s

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in I^*} a_{ij}(t)x_j(t) \quad \text{za sve } i \in I^*$$

ili, za profil  $X^*(t) = (x_r(t), \mathbf{x}(t))$ , kompaktno s

$$X^*(t+1) = A(t)X^*(t) \quad \text{za } t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

gdje  $A(t)$  predstavlja  $(n+1) \times (n+1)$  stohastičku matricu s vrijednostima  $a_{ij}(t)$  za  $i, j \in I^*$ , uređenima kao  $(r, 1, 2, \dots, n)$ . Matrica  $A(t)$  može biti definirana i na sljedeći način. Neka je  $J(t)$  skup normalnih agenata na koje radikal ima (izravni ili ne izravni) utjecaj u trenutku  $t$ . Odnosno, vrijedi  $i \in J(t)$  ako i samo ako postoji lanac  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  normalnih agenata (koji se još zove i  $\varepsilon$ -lanac) takav da

$$a_{ii_1}(t) > 0, a_{i_1i_2}(t) > 0, \dots, a_{i_k r}(t) > 0.$$

Očito za normalnog agenta  $j \notin J(t)$  vrijedi  $a_{jr}(t) = 0$ , a, ako je  $i \in J(t)$  vrijedi i  $a_{ij}(t) = 0$ . Stoga, je matrica  $A(t)$  oblika

$$\begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{pmatrix}$$

gdje  $B(t)$  sadrži vrijednosti  $a_{ij}$  za  $i, j \in \{r\} \cup J(t)$ , a  $C(t)$  sadrži vrijednosti  $a_{ij}$  za  $i, j \in I \setminus J(t)$ . Moguće je da se gornja *blok* struktura promijeni s vremenom. Dokaz se provodi u četiri koraka.

1. Pokažimo da postoji  $T$  takav da  $J(t) = J$  za sve  $t \geq T$ . Prvo dokazujemo da za sve  $t$  vrijedi  $J(t+1) \subset J(t)$ . BSO, za fiksirani  $t$  možemo označiti normalne agente s  $x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots \leq x_N(t)$ . Pretpostavimo da  $i \notin J(t)$  i  $x_i(t) \leq x_r(t) = R$ . Tada postoji  $j \in I$  takav da

$$x_i(t) \leq x_j(t) < x_{j+1}(t) \leq x_r(t) \text{ uz } x_{j+1}(t) - x_j(t) > \varepsilon$$

Zbog uređenosti od  $\mathbf{x}(t)$  mora vrijediti

$$a_{jh}(t) = 0 \text{ za } j+1 \leq h, h = r \text{ i } a_{j+1,h} = 0 \text{ za } h \leq j.$$

Stoga

$$x_j(t+1) = \sum_{h \in I^*} a_{jh}(t)x_h(t) \leq x_j(t)$$

i

$$x_{j+1}(t+1) = \sum_{h \in I^*} a_{j+1,h}(t) \geq x_{j+1}(t)$$

Slijedi  $x_{j+1}(t+1) - x_j(t+1) \geq x_{j+1}(t) - x_j(t) > \varepsilon$ , što zajedno sa  $x_1(t+1) \leq x_2(t+1) \leq \dots \leq x_N(t+1)$  daje  $i \notin J(t+1)$ . Isti argument se vrijedi u slučaju  $i \notin J(t)$  i  $x_r(t) \leq x_i(t)$ . Time je dokazano  $J(t+1) \subset J(t)$  za sve  $t$ . Nadalje, kako je  $J(t)$  padajući niz konačnih skupova slijedi da postoji trenutak  $T$  nakon kojeg je  $J(t)$  konstantan, tj. za  $t \geq T$  vrijedi  $J(t) = J$ , gdje  $J$  može biti prazan skup.

2. Koristeći prvi korak i dekompoziciju  $A(t)$  na  $B(t)$  i  $C(t)$  da, zaključujemo da za  $t \geq T$ , interakcija agenata iz  $J^* = \{r\} \cup J$  i onih iz  $I \setminus J$  nije uparena, odnosno da vrijedi

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in J^*} a_{ij}(t)x_j(t) \text{ za } i \in J^* \quad (3.4)$$

i

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in I \setminus J} a_{ij}(t)x_j(t) \text{ za } j \in I \setminus J \quad (3.5)$$

Na ova dva različita podsustava primijenit ćemo dvije različite metode.

3. Za sustav 3.4 koristit ćemo rezultat iz [9] (Korolar 8.5.10.) koji kaže: Ako matrica  $A(t)$  (restringirana na  $J^*$ ) ima pozitivnu dijagonalu, ako je minimalna pozitivna vrijednost u matrici ograničena odozdo s pozitivnom konstantom, i ako je  $A(t)$  koherentna, slijedi konvergencija prema konsenzusu. Slijedi da svi agenti iz  $J$  konvergiraju prema radikalnom stavu jer je  $r \in J^*$ . Sad još moramo provjeriti da  $A(t)$  zadovoljava pretpostavke tog korolara. Prvo, elementi dijagonale matrice  $A$  su pozitivni jer vrijedi  $a_{ii}(t) \geq \frac{1}{N+1}$  za  $i \in I$  i  $a_{rr}(t) = 1$ . Drugo, svi elementi su ograničeni odozdo konstantom,  $a_{ij}(t) \geq \frac{1}{N+1}$  ukoliko je  $a_{ij}(t) > 0$ . Još nam preostaje dokazati koherentnost od  $A(t)$  (restringirane na  $J^*$ ). Prvo definiramo pojam koherentnosti matrice.

**Definicija 3.2.2.** Za skup  $\emptyset \neq M \subset I^*$  kažemo da je saturiran za  $A(t)$  ako iz  $i \in M$  i  $a_{ij}(t) > 0$  slijedi  $j \in M$ . Matrica  $A(t)$  je **koherentna** ako svaka dva neprazna skupa koja su za nju saturirana imaju neprazan presjek.

Neka su  $M$  i  $M'$  neprazni podskupovi od  $J^*$  saturirani za  $A(t)$  i neka  $i \in M$ ,  $j \in M'$ . Ako  $i = j = r$ , tada  $r \in M \cap M'$ . Ako  $i = r$ ,  $j \neq r$ , tada  $j \in J = J(t)$  za  $t \geq T$ , i stoga, postoji lanac  $(i_1, \dots, i_k)$  u  $I$  takav da vrijedi  $a_{ji_1}(t) > 0$ ,  $a_{i_1 i_2}(t) > 0$ , ...,  $a_{i_k r}(t) > 0$ . Kako je  $M'$  saturiran slijedi  $i_1 \in M'$ ,  $i_2 \in M'$ , ...,  $r \in M'$ . Stoga je  $r \in M \cap M'$ . Slično vrijedi i za  $i \neq r$ ,  $j = r$ . Konačno, neka je  $i \neq r$ ,  $j \neq r$ , tj.  $i, j \in J = J(t)$  za  $t \geq T$ . Tada postoji

lanac od  $i$  do  $r$  te od  $j$  do  $r$ , a kako su  $M$  i  $M'$  saturirani, slijedi  $r \in M \cap M'$ . Ovime je dokazano da je matrica  $A(t)$  koherentna za sve  $t \geq T$ . Vrijedi (ii) dio teorema.

4. Sustav 3.5 je uobičajeni nemodificirani BC-model, prezentiran u prvom poglavlju. Dokaz za tvrdnju (iii), o konvergenciji mišljenja u konačnom vremenu u modelu bez radikala, se može pronaći u [6](Dodatak D).

□

**Napomena 3.2.3.** *Teorem vrijedi i za slučaj u kojem imamo više radikala koji dijele isto mišljenje  $R$ . Označimo li s  $H$  skup radikala, interakcija normalnog agenta i se može zapisati kao*

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in I} a_{ij}(t)x_j(t) + \left( \sum_{h \in H} a_{ih}(t) \right) R.$$

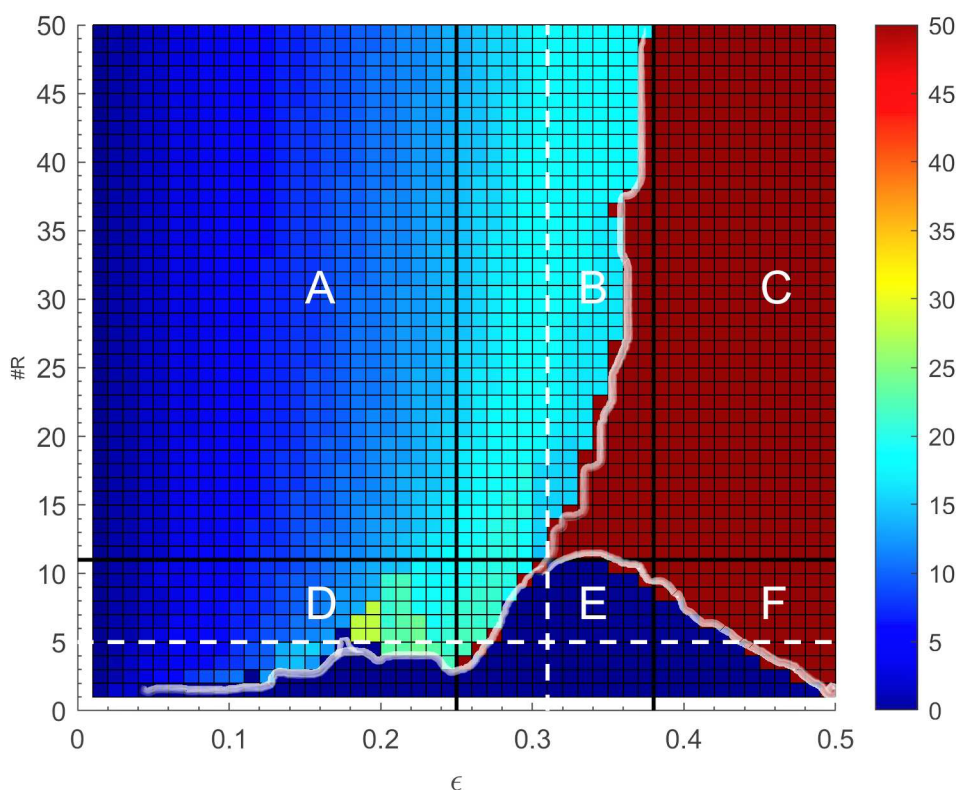
*Odaberemo li proizvoljan  $r \in H$  i definiramo  $\tilde{a}_{ir}(t) = \sum_{h \in H} a_{ih}(t)$  vidimo da vrijedi  $\tilde{a}_{ir}(t) = 0$  akko  $|x_i(t) - x_r(t)| > \varepsilon$ . Time smo  $H$  reprezentirali sa samo jednim radikalom,  $r$ , s težinom  $|H|$ .*

### 3.3 Simulacije

Hegelsmann i Krause su u [5] detaljno analizirali model 3.1 koristeći se simulacijama. Ovdje ćemo pomoću MATLAB-a replicirati neke od rezultata tih simulacija (v. A.2). Strategija simulacije koju se koristili bila je sljedeća: U svakoj simulaciji zanima nas broj radikaliziranih normalnih agenata, kojeg ćemo označiti s  $N_R$ . Prirodno je pretpostaviti da  $N_R$  značajno ovisi o broju radikala u usporedbi s brojem normalnih (o njihovom omjeru), o razini povjerenja  $\varepsilon$  i poziciji radikala  $R$ . Pretpostavimo da imamo 50 normalnih agenata i najradikalniju moguću poziciju, tj,  $R = 1.0$ . Preostala dva parametra: broj radikala i  $\varepsilon$  postavljamo u dvodimenzionalni parametarski prostor. Na  $x$  os smještamo razinu povjerenja koja raste od 0.01 do 0.5. Na  $y$ -osi broj radikala raste od 1 do 50, kada je broj radikala jednak broju normalnih agenata. Izvodimo simulacije za svaku od  $50 \times 50$  kombinacija parametara  $\langle \varepsilon, \#R \rangle$ . Nakon što se simulacija stabilizira, u smislu da za svaki  $i$  vrijedi  $|x_i(t) - x_i(t+1)| \leq 10^{-5}$ , analiziramo broja radikaliziranih normalnih agenata. Mišljenje normalnog agenta  $i$  se smatra gotovo radikalnim ako vrijedi  $|x_i(t) - R| \leq 10^{-3}$ .

Svaka od  $50 \times 50$  simulacija, započinje istom, ekvidistantnom početnom distribucijom  $N$  mišljenja normalnih agenata, koju nazivamo *distribucijom očekivane vrijednosti*.

$$x_i(0) = \frac{i}{N+1}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.6)$$



Slika 3.2: Konačan broj radikaliziranih normalnih agenata za svaku od  $50 \times 50$  kombinacija parametara  $\epsilon$  i  $\#R$ . Svaka simulacija je izvedena s  $N = 50$  normalnih agenata i s početnom distribucijom očekivane vrijednosti.

Ovakav početni profil je uređen, tj. za sve  $i \leq N - 1$  vrijedi:  $x_i(t) \leq x_{i+1}(t)$ .  $i$ -to mišljenje se nalazi točno tamo gdje bi se u prosjeku nalazilo nakon beskonačno mnogo ponavljanja uniformne slučajno distribucije  $N$  mišljenja. Drugim riječima, jednačba 3.6 daje očekivanu vrijednost  $i$ -tog mišljenja u uniformnoj slučajnoj distribuciji.

Ovime se u potpunosti rješavamo slučajnosti. Svi elementi u simulacije su deterministički. Iako bi se zbog ekvidistantne strukture početnog profila mogli zanemariti neki važni efekti prouzrokovani varijacijama udaljenosti između susjednih mišljenja, uporaba distribucije očekivane vrijednosti ima i neke prednosti. U slučaju da se u  $50 \times 50$  mreži konstelacija parametara uoče neka zanimljiva ponašanja, npr. kontraintuitivne (ne)monotonosti, korištenje neslučajnog početnog profila omogućava direktno proučavanje jedinstvenih pojedinačnih simulacija koje su generirale zbunjujući makroefekt.

Rezultat simulacije pojedinačnih izvođenja za  $50 \times 50$  konstelacija parametara  $\langle \epsilon, \#R \rangle$  prikazan je na Slici 3.2. Konačni broj radikaliziranih normalnih agenata označen je odgo-

varajućom bojom. A radi lakšeg referenciranja, velikim slovima A, B, C, D, E i F označena su određena područja parametarskog prostora, podijeljena crnim linijama (2 vertikalne, 1 horizontalna). Na osi y broj radikala raste u koracima. Stoga, iznenadne i dramatične promjene boja u vertikalnom smjeru predstavljaju dramatične promjene u broju radikaliziranih normalnih agenata, koje su uzrokovane samo jednim dodatnim radikalom. Analogno, dramatična promjena boje u vodoravnom smjeru je dramatična promjena broja radikaliziranih normalnih agenata uzrokovana porastom  $\varepsilon$  za 0.01

Detaljnim pregledom parametarskog prostora, može se uočiti da postoje samo dva glatka područja u kojima se broj  $N_R$  kreće monotono, A i C. U svim ostalim područjima postoje vrijednosti parametara,  $\varepsilon$  i  $\#R$ , u kojima se  $N_R$  naglo mijenja. Na Slici 3.2 prikazane bijelim linijama koje se nazivaju *linijama osjetljivosti*. Za te vrijednosti konačan broj radikaliziranih normalnih agenata je izuzetno osjetljiv na inicijalne uvjete. Područje podijeljenog prostora parametara nazivamo *divljim* akko

- (i) sadrži ne-monotonosti (i padajuće i rastuće) obzirom na jedan ili oba parametra,
- (ii) kroz njega prolazi linija osjetljivosti.

S obzirom na tu definiciju, možemo razlikovati dva divlja područja: U vertikalnom smjeru  $E \cup B$ , u horizontalnom smjeru  $D \cup E \cup F$ .

### Divlja područja

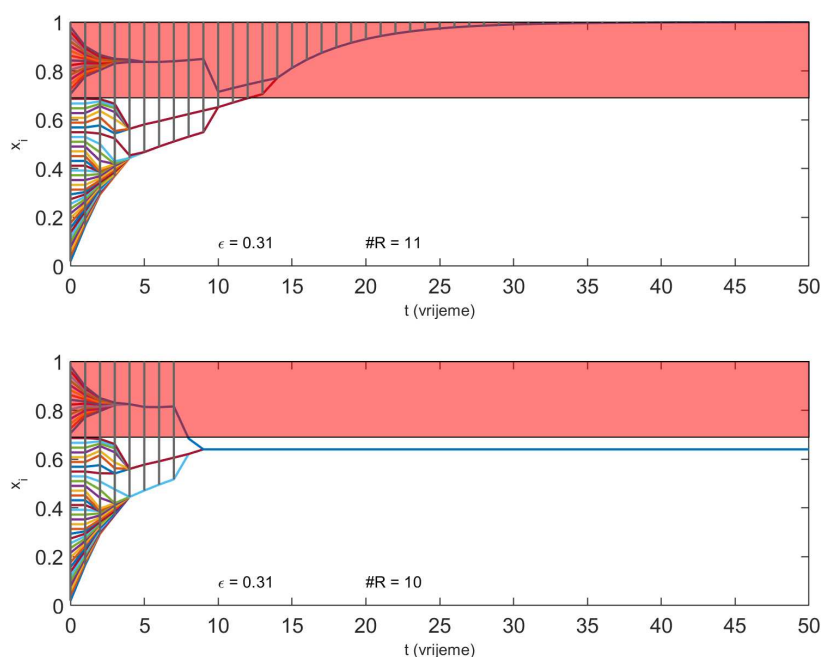
Prateći isprekidane bijele linije na Slici 3.2 pet puta prelazimo preko linija osjetljivosti. Za svaku od tih točaka presjeka prikazujemo pripadne pojedinačne simulacije koje su rezultirale naglom promjenom u broju  $N_R$ .

U vertikalnom smjeru za  $\varepsilon = 0.31$ , povećanjem broja radikala, dolazi do naglih promjena:

- kada  $\#R$  naraste s 10 na 11, broj radikaliziranih normalnih agenata skoči s 0 na 50. (v. Sliku 3.3)
- kada  $\#R$  naraste s 13 na 14, konačni broj radikaliziranih normalnih padne s 50 na 16. (v. Sliku 3.4)

U horizontalnom smjeru za  $\#R = 5$ , povećanjem razine povjerenja, nagle promjene se događaju:

- za  $\varepsilon = 0.16, 0.17, 0.18$ ,  $N_R$  prvo pada s 13 na 0, pa opet naraste na 28. (v. Sliku 3.5)
- za  $\varepsilon = 0.26, 0.27, 0.28$ ,  $N_R$  prvo naraste s 13 na 50, pa padne na 0. (v. Sliku 3.6)
- za  $\varepsilon = 0.42, 0.43$ ,  $N_R$  naraste s 0 na 50. (v. Sliku 3.7)



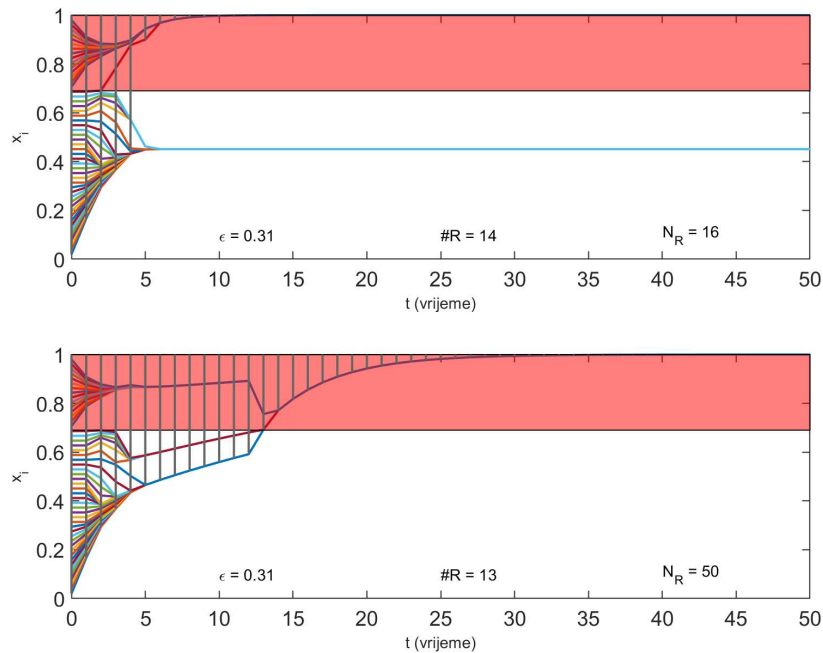
Slika 3.3: Jedan dodatani radikal uzrokuje skok s nula na 50 radikaliziranih normalnih agenata.

Kao i ranije tamnosive, vertikalne linije na svim slikama povezuju normalne agente koji se nalaze pod direktnim ili indirektnim utjecajem radikala, a ružičasto područje prostora mišljenja označava direktan utjecaj radikala.

Analizom slika simulacija koje ilustriraju što se dogodilo u trenucima velikih promjena broja  $N_R$  dolazimo da nekoliko važnih zaključaka.

1. Važnu ulogu u svim objašnjenjima naglih skokova  $N_R$  imaju mostovi između normalnih i radikalnih agenata. Oni zahtijevaju, kao vrstu *mola*, normalne agente koji se, za dani level pouzdanosti  $\epsilon$ ,
  - (a) nalaze unutar područja direktnog utjecaja radikala
  - (b) nalaze unutar intervala pouzdanosti ostalih normalnih agenata koji nisu pod direktnim utjecajem radikala

Takve mostove nazivamo "mostovi tipa  $R$ ". Oni su ključni za utjecaj radikala izvan njihova ograničenog prostora utjecaja, odnosno radikalima omogućuju neizravni utjecaj na normalne agente. Postoji i druga vrsta mostova koja povezuje normalne agente, Oni zahtijevaju (opet kao vrstu *mola*) normalne agente (u skupini ili pojedinačne), koji, za dani  $\epsilon$ ,



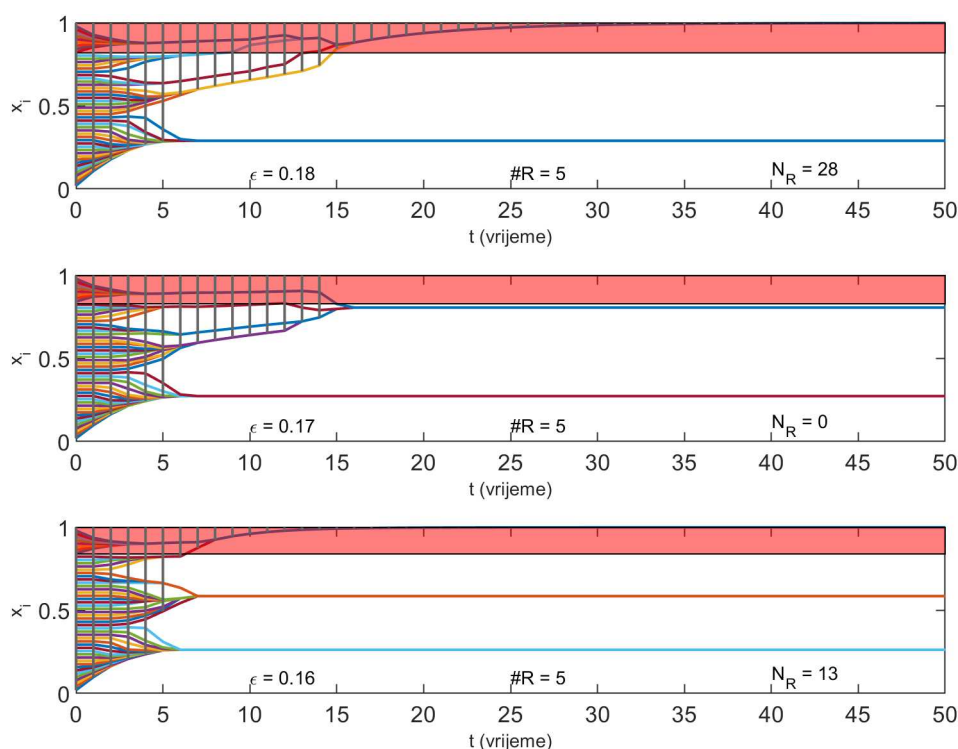
Slika 3.4: Jedan dodatan radikal uzrokuje skok s 50 na 16 radikaliziranih normalnih agenata.

- (a) pripadaju pouzdanim intervalima barem dva druga normalna agenta (klastera ili pojedinačna)
- (b) ne nalaze se unutar intervala pouzdanosti jedni drugima

Ove mostove nazivamo "mostovi tipa  $N$ ". Neprekinuti lanca mostova, koji započinje mostom tipa  $R$  a u nastavku sadrži mostove tipa  $N$ , omogućuje radikalima da utječu čak i na najudaljenije normalne agente. No, izuzev skupine radikala, molovi naših mostova se mogu pomicati kroz vrijeme, što može dovesti do uništenja starih i stvaranja novih mostova.

2. Nagli skokove  $N_R$  prema dolje, sa svih na nijednog, ili na značajno manju proporciju, koji su se pojavili za određene kombinacije parametara  $\epsilon$  i  $\#R$  (na Slikama 3.4, 3.5, 3.6) se također mogu interpretirati u terminima mostova. Na Sl.3.4 jedan dodatni radikal uzrokuje povlačenje prema gore, koje preko mosta tipa  $R$ , ruši bitan most tipa  $N$ . Pomični mol mosta tipa  $N$  se pomiče strogo u smjeru  $R$ . Time se sposobnost premošćivanja, dana s  $\epsilon$ , prekomjerno optereti i most tipa  $R$  puca. Na Sl.3.5 i Sl.3.6, zbog povećanja  $\epsilon$ , dolazi do povlačenja pomičnog mola mosta tipa  $R$  izvan područja direktnog utjecaja radikala, pa dolazi do rušenja mosta tipa  $R$  (Sl.3.5, dno i sredina; Sl.3.6, sredina i vrh). Očito, jedan dodatan radikal i rastući  $\epsilon$  na različite načine

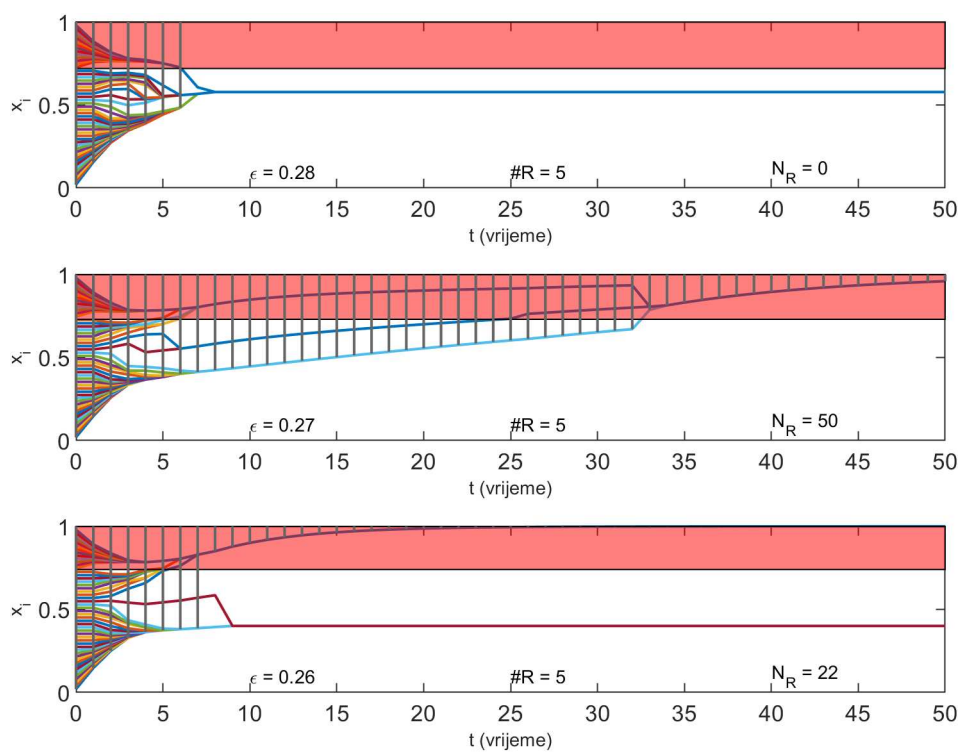




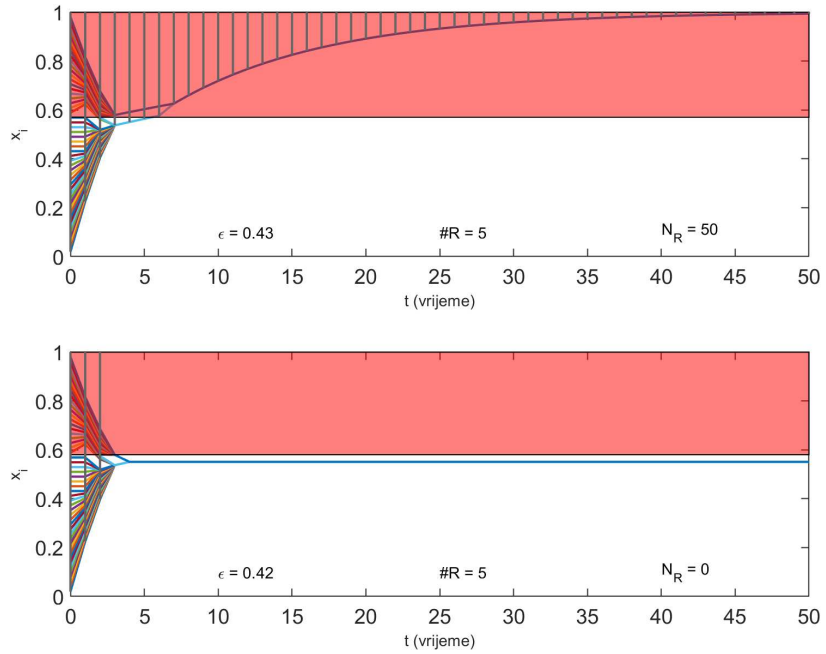
Slika 3.5: Maleno povećanje razine povjerenja  $\varepsilon$  ima velik učinak na  $N_R$ .

mogu oštetiti funkcionalni lanac mostova. Naime, sve veći broj radikala dovodi do povlačenja prema gore, a rastući  $\varepsilon$  uzrokuje jače kontrankcije u smjeru središta prostora mišljenja (v.  $\varepsilon$ -dijagram (v. Sl.3.8). Te dvije sile su međusobno povezane :  $\varepsilon$  kontrolira snagu kontrakcijske sile, ali i određuje, što je pod utjecajem sile koja vuče prema gore, koliko god ta sila bila snažna. Povlačenje prema gore, uzrokovano rastom  $\#R$ , može poremetiti molove mostova tipa  $N$  i/ili prebrzo privući mol mosta tipa  $R$ . Povećanje  $\varepsilon$  uzrokuje jaču kontrakciju, što može pomaknuti mol  $R$ -mosta te ga odvući iz prostora direktnog utjecaja radikala.

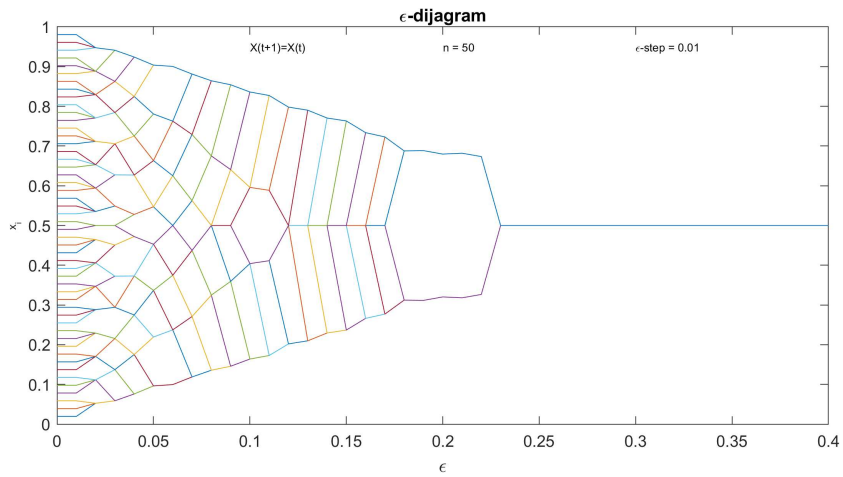
3. Iznenadni skokovi broja radikaliziranih normalnih agenata prema gore, na Sl.3.3 i Sl.3.5(sredina i vrh) mogu se objasniti time da zbog malenog povećanja  $\varepsilon$ , donji klaster normalnih više ne djeluje na mol mosta tipa  $R$ , pa on završi u radikalnoj poziciji. Na Sl.3.6(dolje i sredina) maleno povećanje  $\varepsilon$  omogući stvaranje mosta tipa  $N$ . Dok na Sl.3.7 povećanje  $\varepsilon$  spriječava mol mosta tipa  $R$  da napusti područje izravnog utjecaja radikala. Očito, skokove prema gore također možemo objasniti pomoću djelovanja ranije navedenih sila, koje može dovesti do ponovnog djelovanja prethodno srušenih mostova ili do stvaranja molova za nove mostove.



Slika 3.6: Maleno povećanje razine povjerenja  $\epsilon$  rezultira velikim promjenama  $N_R$ .



Slika 3.7: Maleno povećanje razine povjerenja  $\epsilon$  rezultira povećanjem  $N_R$  s nula na 50.



Slika 3.8:  $\epsilon$ -dijagram: 50 normalnih agenata s početnom distribucijom očekivane vrijednosti. Na x-osi je  $\epsilon = 0.01, \dots, 0.5$ . Za svaku vrijednost  $\epsilon$  izvodimo simulaciju dok se ne stabilizira, u smislu  $\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{x}(t)$ . Na y-osi je prostor mišljenja  $[0, 1]$ . Svaka horizontalna linija povezuje konačne pozicije jednog od agenata u svim stabiliziranim simulacijama.

# Dodatak A

## Dodatak: Simulacije u MATLAB-u

Sve simulacije prezentirane u ovom radu izrađene su koristeći MATLAB. U nastavku su priloženi dijelovi korištenog koda uz kratka objašnjenja.

### A.1 Simulacije: drugo poglavlje

Ovdje ćemo opisati simulaciju sa Slike 2.4. Želimo prikazati razvoj dinamike mišljenja 2.27 s 400 agenata čija su mišljenja dvodimenzionalna i u početnom trenutku uniformno distribuirana na kocki  $[0, 10] \times [0, 10]$ . Za funkciju utjecaja koristimo  $\phi(r) = \chi_{[0,1]}(r)$ , a simulaciju zaustavljamo u trenutku 50. Započinjemo s inicijalizacijom varijabli:

```
N=400;
xp=10*rand(1,N);
xd=10*rand(1,N);
xu=[xp',xd'];      -----> x(0) je matrica dimenzije N x 2
T=50;
```

Za numeričko rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi danog modelom 2.27 koristimo klasičnu Runge-Kutta metodu, znanu i kao Runge-Kutta metodu s četiri stadija (RK4)[1]. Općenito, sustav običnih diferencijalnih jednadžbi dan s:

$$\frac{d}{dt}x_i = f_i(t, \mathbf{x}), \quad \text{uz početni uvjet } x_i(t_0) = x_i^{(0)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad 1 \leq i \leq N, \quad t_0 \geq \mathbb{R}$$

na intervalu  $[t_0, t_s]$  rješavamo tako da interval  $[t_0, t_s]$  podijelimo na  $s$  jednakih dijelova:

$$h = \frac{t_s - t_0}{s}, \quad t_j = t_0 + jh, \quad j = 1, \dots, s.$$

Aproksimaciju rješenja  $x_i^{(j+1)}$  u točki  $t_{j+1}$  računamo iz  $x_i^{(j)}$  korištenjem aproksimacije oblika

$$x_i(t+h) \approx x_i(t) + h\Phi_i(t, \mathbf{x}(t), h, f_i), \quad i = 1, \dots, N$$

te dolazimo do rekurzije

$$x_i^{(j+1)} \approx x_i^{(j)} + h\Phi_i(t_j, \mathbf{x}^{(j)}, h, f_i), \quad j = 0, 1, \dots, s-1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Funkciju  $\Phi_i$  zovemo funkcija prirasta. Različite numeričke metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi određene su različitim funkcijama prirasta. U klasičnoj RK metodi funkcija  $\Phi_i$  glasi:

$$\Phi_i = \frac{1}{6} \left( k_{1,i}^{(j)} + 2k_{2,i}^{(j)} + 2k_{3,i}^{(j)} + k_{4,i}^{(j)} \right)$$

gdje su  $\mathbf{k}_1^{(j)}, \mathbf{k}_2^{(j)}, \mathbf{k}_3^{(j)}, \mathbf{k}_4^{(j)} \in \mathbb{R}^N$  dani s:

$$\begin{aligned} k_{1,i}^{(j)} &= f_i(t_j, x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_N^{(j)}) \\ k_{2,i}^{(j)} &= f_i\left(t_j + \frac{h}{2}, x_1^{(j)} + \frac{h}{2}k_{1,1}^{(j)}, x_2^{(j)} + \frac{h}{2}k_{1,2}^{(j)}, \dots, x_N^{(j)} + \frac{h}{2}k_{1,N}^{(j)}\right) \\ k_{3,i}^{(j)} &= f_i\left(t_j + \frac{h}{2}, x_1^{(j)} + \frac{h}{2}k_{2,1}^{(j)}, x_2^{(j)} + \frac{h}{2}k_{2,2}^{(j)}, \dots, x_N^{(j)} + \frac{h}{2}k_{2,N}^{(j)}\right) \\ k_{4,i}^{(j)} &= f_i\left(t_j + h, x_1^{(j)} + hk_{3,1}^{(j)}, x_2^{(j)} + hk_{3,2}^{(j)}, \dots, x_N^{(j)} + hk_{3,N}^{(j)}\right) \end{aligned}$$

U svakom koraku, odnosno za  $0 \leq j \leq s-1$ , za svakog agenta  $1 \leq i \leq N$  moramo izračunati četiri vrijednosti. Dakle, za primjenu Runge-Kutta metode u MATLAB-u potrebno je prvo odrediti funkciju  $F = (f_1, \dots, f_N)$  u našem primjeru. Vidimo da je  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , jednaka desnoj strani jednadžbe modela 2.27, odnosno da opisuje ažuriranje mišljenja agenta  $i$ . Sada možemo definirati funkciju  $F=NS12d$  s:

```
function dxdtN = NS12d(t, x)
pom=size(x);
N=pom(1);
dxdtN=zeros(N,2);          -----> dxdtN je matrica dimenzija Nx2
Fi=matfil2d(x);           -----> matrica {phi_ij(t)}
for i=1:N
    zbrFi=sum(Fi(i,:)); -----> nazivnik u jednadzbi 2.27
    dxdtN(i,:)=0;         -----> tu spremamo sum_ij a_ij(x_j(t) - x_i(t))
    for j=1:N
        A(i,j)=Fi(i,j)/zbrFi;
        if (j~=i)
            dxdtN(i,:)=dxdtN(i,:)+A(i,j)*(x(j,:)-x(i,:));
        end
    end
end
end
end
```

Argumenti funkcije *NS12d* su vrijeme  $t \geq 0$  i profil mišljenja  $\mathbf{x}(t)$  dimenzija  $N \times 2$ . Izlazna varijabla je također matrica dimenzija  $N \times 2$ . U prethodnoj funkciji pozvana je i funkcija *matfi12d* koja vraća matricu  $\{\phi_{i,j}(t)\}$ :

```
function fi = matfi12d(x)
a=1; b=1; g=1/sqrt(2); --->  $\phi(r) = 1\chi_{[0,1/\sqrt{2}]} + 1\chi_{(1/\sqrt{2},1]}$ 
pom=size(x);
N=pom(1);
fi=zeros(N);
for i=1:N
    for j=1:N
        abraz=norm(x(j,:)-x(i,:)); ---> euklidska norma
        fi(i,j)=figab(abraz,g,a,b);
    end
end
end
```

Funkcija *rk4sys2d*, koja implementira RK4 metodu, za argumente argument prima handle funkcije *NS12d*, početni uvjet, rubove intervala i h.

```
fun=@NS12d;
[t1, x1]=rk4sys2d(fun,0,T, xu, 0.05);

function [t,x]=rk4sys2d(f,a,b,x0,h)---> [a,b]=[t_0,t_s]
N=pom(1);
st=(b-a)/h; ---> broj trenutaka u kojima racunamo  $x_i^{(j)}$ 
t = linspace(a,b,st+1); ---> trenutci
x = zeros([(st+1) N 2]); ---> 3D array-dvije (st+1)xN matrice
x(1,:,1)=x0(:,1); ---> prve komponente misljenja u prvu matricu
x(1,:,2)=x0(:,2); ---> druge komponente misljenja u drugu matricu
-----> zapocinjemo s RK4 metodom
k1 = h * f(a, x0);
k2 = h * f(a + h / 2, x0 + k1 / 2);
k3 = h * f(a + h / 2, x0 + k2 / 2);
k4 = h * f(a + h, x0 + k3);
novix= x0 + k1 / 6 + k2 / 3 + k3 / 3 + k4 / 6;
x(2,:,1)=novix(:,1);
x(2,:,2)=novix(:,2);
for i =2:st
    pP3=x(i,:,1);
    pD3=x(i,:,2);
    xi=[pP3' pD3'];
    k1 = h * f(t(i), xi);
    k2 = h * f(t(i) + h / 2, xi + k1 / 2);
```

```

k3 = h * f(t(i) + h / 2, xi + k2 / 2);
k4 = h * f(t(i) + h , xi + k3 );
novix= xi + k1 / 6 + k2 / 3 + k3 / 3 + k4 / 6;
x(i+1, :, 1) =novix(:,1);
x(i+1, :, 2)=novix(:,2);
end
end

```

Funkcija *rk4sys2d* vraća vektor s vremenskim trenutcima  $t$  i 3D array  $x$ . Retci u  $x$  označavaju indekse trenutaka u kojima smo računali aproksimacije funkcija, stupci matrica označavaju agente. Ako želimo doći do, primjerice, druge komponente mišljenja agenta  $i = 7$  u trenutku  $t = 30$  napisat ćemo:

```
x(30/h +1, 7, 2);
```

Na kraju, za prikaz rezultata simulacije koristimo *tiledlayout* i *scatterplot* funkciju iz MATLAB-a. Implementacija RK4 metode za jednodimenzionalne agente je slična prethodnoj, i nešto je jednostavnija, pa je iz tog razloga nećemo ovdje opisati.

## A.2 Simulacije: treće poglavlje

Kao što je ranije rečeno, simulacije iz odjeljka 3.3 su replika simulacija iz [5]. Ovdje ćemo pokazati izradu jedne od slika iz tog odjeljka, Slike 3.2, te izradu Slike 3.1.

Na Slici 3.2 prikazan je konačan broj radikaliziranih normalnih agenata za  $50 \times 50$  kombinacija parametara  $\varepsilon$  i  $\#R$ . Prvo incijaliziramo varijable:

```

veps=0.01:0.01:0.5; -----> vektor s vrijednostima  $\varepsilon$ 
vbrR=1:50; ----->vektor s brojem radikala  $\#R$ 
brp=length(veps) ----->duljina vektora veps i vbrR (=50)
R=1.0; -----> radikalna pozicija
N=50; -----> broj normalnih agenata
xe=(1:n)/(n+1); -----> distribucija ocekivane vrijednosti
T=550; -----> završni trenutak simulacija

```

Većina dinamika se stabilizira do  $t = 30$ , no za njih nekoliko je potrebno više vremena. Zato je ovdje vrijeme prekida simulacije  $T=550$ . Nadalje, definiramo funkciju *BCRazur* koja za danu početnu distribuciju, broj normalnih i radikalnih agenata, razinu povjerenja  $\varepsilon$ , radikalnu poziciju  $R$  i vrijeme  $T$  vraća matricu  $X$  dimenzija  $N \times (T + 1)$  s mišljenjima svih agenata u razdoblju od 0 do  $T$ . Funkcija vraća i broj radikaliziranih normalnih agenata na kraju simulacije,  $N_R$ .

```
function [X,Nr] = BCRazur(x0,N,T,R,brR,eps)
```

```

X=zeros([n (T+1)]);
X(:,1)=x0;
for t=2:T+1
    for i=1:n
        Ni=0;    -----> broj susjeda agenta i
        brojnik=0;
        -----> utjecaj normalnih agenata na normalne agente
        for j=1:n
            if(abs(X(i,t-1)-X(j,t-1))<=eps)
                brojnik = brojnik + X(j, t-1);
                Ni = Ni +1;
            end
        end
        -----> utjecaj radikala na normalne agente
        if (abs(X(i,t-1)- R)<=eps)
            brojnik = brojnik + R*brR;
            Ni = Ni+ brR;
        end
        X(i,t)=brojnik/Ni;
    end
end
xT= X(:, (T+1))  --->misljenja normalnih agenata u t=T
xdR=abs(pomT-R) --->udaljenosti normalnih agenata od R
Nr=sum(xdR<=0.001)--->u t=T od R udaljeni za manje od 10^(-3)
end

```

Trebamo spremiti konačan broj radikaliziranih normalnih agenata za svaku kombinaciju parametara  $\varepsilon$  i  $\#R$ :

```

NR=zeros([brp brp]);---> matrica u koju spremamo N_R
for i=1:brp
    for j=1:brp
        [X, NR(i, j)]=BCRazur(xe, n, T, R, vbrR(j), veps(i));
    end
end
end

```

Koristeći funkciju *surf* izrađujemo sliku.

```

hINT=surf(veps, vbrR, NR')
colormap('jet')
view(0, 90)  ---> namjestamo azimut i kut elevacije tako da
              vidimo plohu "odozgo"

```

Slika3.1 prikazuje dvije simulacije sa  $N = 120$  normalnih agenata, uniformno distribuiranih na intervalu  $[0, 1]$ . Prva simulacija odgovara uobičajenoj BC dinamici, dok druga opisuje modificiranu BC dinamiku s 10 dogmatika, čije mišljenje *zauvijek* ostaje na poziciji



0.6. Funkcija koja opisuje ažuriranje mišljenja u dinamici s dogmaticima je, već korištena funkcija, *BCRauzr*. Za dinamiku bez dogmatika/radikala koristimo funkciju:

```
function X = BCazurbezR(X0,n,T,eps)
X=zeros([n (T+1)]);
X(:,1)=X0;
for t=2:T+1
    for i=1:n
        Ni=0;          -----> broj susjeda agenta i
        brojnik=0;
        for j=1:n
            if(abs(X(i,t-1)-X(j,t-1))<=eps)
                brojnik = brojnik + X(j,t-1);
                Ni = Ni + 1;
            end
        end
        X(i,t)=brojnik/Ni;
    end
end
end
```

*BCazurbezR* vraća matricu mišljenja svih normalnih agenata od trenutka 0 do  $T$ . Kombinirajući *tiledlayout* i funkciju *plot* crtamo trajektorije oba modela. Zatim odredimo granice indirektnog utjecaja dogmatika, te uz pomoć nekoliko grafičkih funkcija iz MATLAB-a označimo područje izravnog i neizravnog utjecaja dogmatika.

# Bibliografija

- [1] Nela Bosner i Tina Bosner, *Numerička analiza, 24. predavanje*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/24nb.pdf>, 2012.
- [2] Morris H DeGroot, *Reaching a consensus*, Journal of the American Statistical Association **69** (1974), br. 345, 118–121.
- [3] Noah E Friedkin i Eugene C Johnsen, *Social influence and opinions*, Journal of Mathematical Sociology **15** (1990), br. 3-4, 193–206.
- [4] Seung Yeal Ha i Eitan Tadmor, *From particle to kinetic and hydrodynamic descriptions of flocking*, 2008, <http://aimsciences.org//article/id/ab0b07d7-56dc-4ba7-ab04-85dce5a3c0cc>, str. 415.
- [5] Rainer Hegselmann i Ulrich Krause, *Opinion dynamics under the influence of radical groups, charismatic leaders, and other constant signals: A simple unifying model*, Networks & Heterogeneous Media **10** (2015), br. 3, 477.
- [6] Rainer Hegselmann, Ulrich Krause et al., *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation*, Journal of artificial societies and social simulation **5** (2002), br. 3, [https://www.math.fsu.edu/~dgalvis/journalclub/papers/02\\_05\\_2017.pdf](https://www.math.fsu.edu/~dgalvis/journalclub/papers/02_05_2017.pdf).
- [7] Pierre Emmanuel Jabin i Sebastien Motsch, *Clustering and asymptotic behavior in opinion formation*, Journal of Differential Equations **257** (2014), br. 11, 4165–4187, [http://seb-motsch.com/wp-content/uploads/2014/08/clustering\\_opinion\\_formation.pdf](http://seb-motsch.com/wp-content/uploads/2014/08/clustering_opinion_formation.pdf).
- [8] Ulrich Krause, *Soziale dynamiken mit vielen interakteuren. eine problemskizze*, Modellierung und Simulation von Dynamiken mit vielen interagierenden Akteuren **3751** (1997), 2.
- [9] ———, *Positive dynamical systems in discrete time: theory, models, and applications*, sv. 62, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015.

- [10] Keith Lehrer, *Social consensus and rational agnology*, *Synthese* (1975), 141–160.
- [11] Sebastien Motsch i Eitan Tadmor, *Heterophilious dynamics enhances consensus*, *SIAM review* **56** (2014), br. 4, 577–621, <https://arxiv.org/pdf/1301.4123.pdf>.

# Sažetak

Formiranje stavova, bilo unutar jednog čitavog društva bilo unutar manje grupe, vrlo je složen proces. U matematičkim modelima koristeći se dinamičkim sustavima pojednostavljujemo socijalne interakcije, ljude promatramo kao stilizirane figure, no nastojimo zadržati najbitnija obilježja komunikacije te njihovom analizom doći do zaključaka primjenjivih u stvarnosti. U ovom radu dan je pregled nekoliko jednostavnih modela dinamike mišljenja baziranih na interakcijama agenata. U glavnom fokusu modela je problem postizanja konsenzusa. U prvom poglavlju kratko su opisani neki od najpoznatijih modela te vrste s diskretnim vremenom. Drugo poglavlje bavi se modelom konsenzusa s neprekidnim vremenom, u kojem su mišljenja agenata opisana sustavom nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. Analizirali smo model s globalnim i lokalnim interakcijama te opisali interakcije koje osiguravaju postizanje konsenzusa i one koje vode do podjele društva na tzv. klastere. Računalnim simulacijama je ilustrirano kako u lokalnoj dinamici, u kojoj su interakcije ograničene na skupine agenata čija mišljenja nisu *predaleko*, tendencija ka povezivanju s *drugacijima* povećava izgleda za postizanje konsenzusa. U posljednjem poglavlju predstavljen je modificirani BC (*eng. bounded confidence*) model koji opisuje društvo s lokalnim interakcijama, ograničenima na radijus povjerenja, u prisutnosti nepromjenjivog signala. Simulacijama je pokazano kako različite kombinacije radijusa povjerenja i jačine signala utječu na formiranje mišljenja agenata.

# Summary

Opinion formation, either within an entire society or within a smaller group, is a very complex process. In mathematical models, using dynamic systems, we simplify social interactions, view people as stylized figures, but we try to keep the most important features of communication and analyse them to reach conclusions applicable in reality. This thesis provides an overview of several simple models of opinion dynamics based on agent interactions. The main focus of the models is the problem of reaching consensus. The first chapter briefly describes some of the most well-known models of this type with discrete time. The second chapter deals with the continuous-time consensus model, in which the opinions of agents are described by a system of nonlinear differential equations. We analyzed the model with global and local interactions and described the interactions that ensure the achievement of consensus and those that lead to the division of society into so-called clusters. Computer simulations illustrated that in local dynamics, where interactions are limited to groups of agents whose opinions are not *too far apart*, the tendency to connect more with *the different* increases the likelihood of reaching consensus. The last chapter presents a modified BC (bounded confidence) model that describes a society with local interactions, limited to a radius of confidence, in the presence of a fixed signal. Simulations have shown how different combinations of confidence radius and signal strength affect the formation of agents' opinions.

# Životopis

Rođena sam 08. ožujka 1993. godine u Zadru gdje sam završila osnovnu školu i opću gimnaziju. 2011. godine upisala sam studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te sam u srpnju 2017. godine stekla diplomu prvostupnice matematike. Nakon završetka preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij Financijska i poslovna matematika.