Elementarni aspekti izračunljivosti

Kraljević, Petra

Elementarni aspekti izračunljivosti

Kraljević, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Kraljević

ELEMENTARNI ASPEKTI IZRAČUNLJIVOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, doc. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na svesrdnoj pomoći te uloženom vremenu i trudu pri izradi mog diplomskog rada.
Zahvaljujem svojim roditeljima čija me ljubav hrabrila i bila mi vjetar u leđa u svim dosadašnjim izazovnim trenucima.
Hvala mojoj sestri i bratu koji su mi bili neprestani podsjetnik da na svakom putu ima mjesta za puno osmijeha.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo neke elementarne aspekte izračunljivosti. U prvom poglavlju bavimo se pojmom izračunljive funkcije. Prvo definiramo pojam programa, a zatim i sam pojam izračunljive funkcije te dajemo neke primjere izračunljivih funkcija. Nakon toga proučavamo presudoprograme. Naposlijetku, bavimo se makro-programima te pojmom makro-izračunljivosti. Dokazujemo da je svaka makro-izračunljiva funkcija izračunljiva. U drugom poglavlju proučavamo rekurzivne funkcije. Prvo definiramo operatore kompozicije i primitivne rekurzije, a nakon toga definiramo primitivno rekurzivne funkcije te dajemo neke primjere tih funkcija. Nakon uvođenja μ-operatora, definiramo rekurzivne funkcije te dokazujemo da je svaka rekurzivna funkcija izračunljiva. U trećem poglavlju definiramo prebrojive skupove te dokazujemo neka osnovna svojstva tih skupova. Proučavamo i konačne nizove te dokazujemo glavni rezultat trećeg poglavlja: skup svih izračunljivih funkcija je prebrojiv. Iz toga zaključujemo da postoje neizračunljive funkcije.

Poglavlje 1

Izračunljive funkcije

1.1 Programi

Želimo matematički opisati pojam programa.
Zamišljamo da imamo memoriju koja se sastoji od tzv. registara $R_0, R_1, R_2, ...$
Registri su mjesta u koja se mogu pohraniti elementi iz $\mathbb{N}$, pri čemu uzimamo da je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.
Program je konačan niz instrukcija $P_0, P_1, ..., P_n$, a instrukcije mogu biti sljedećeg tipa:

1. $i \uparrow$ (gdje je $i \in \mathbb{N}$)
   Ova instrukcija povećava sadržaj registra R_i za 1. Nakon izvršavanja ove instrukcije prelazi se na izvršavanje prve sljedeće instrukcije u programu. Dakle, ako je P_j instrukcija ovog tipa, onda se nakon njenog izvršavanja prelazi na izvršavanje instrukcije P_{j+1}.

2. $i \downarrow k$ (gdje su $i, k \in \mathbb{N}, k \leq n$)
   Ova instrukcija smanjuje sadržaj registra R_i za 1 ako je taj sadržaj veći od 0 te se nakon njenog izvršavanja prelazi na izvršavanje prve sljedeće instrukcije u programu. Ako je sadržaj registra R_i bio 0, onda se sadržaj niti jednog registra ne mijenja te se prelazi na izvršavanje $(k+1)$-ve instrukcije u programu, tj. na izvršavanje instrukcije P_k.

3. $\rightarrow k$
   Izvršavanjem te instrukcije ne mijenja se sadržaj nijednog registra nego se prelazi na izvršavanje instrukcije P_k.

Na početku programa izvršava se naredba P_0. Program staje s izvršavanjem ako smo došli do zadnje naredbe (tj. do P_n) i nakon toga prešli na "sljedeću" (koje nema, dakle, "ispali" smo iz programa).

Osim instrukcija navedenog tipa imamo još jednu instrukciju, instrukciju $\otimes$, čiji je smisao sljedeći: kad program dođe do ove instrukcije, staje s izvođenjem.

Za instrukciju tipa 1 kažemo da je instrukcija povećavanja, a za instrukciju tipa 2 kažemo da je instrukcija smanjivanja.

Primjer 1.1.1. *Promotrimo program:*

- *0.* $7 \uparrow$
- *1.* $7 \downarrow 0$
- *2.* $7 \uparrow$

Pretpostavimo da je x sadržaj registra R_7 prije izvršavanja programa. Nakon izvršavanja prve naredbe sadržaj registra R_7 je $x + 1$, nakon izvršenja druge naredbe je x te nakon izvršenja treće naredbe sadržaj je $x + 1$ i tada program staje. Sadržaji svih ostalih registara ostaju nepromijenjeni.

Primjer 1.1.2. *Promotrimo program:*

- *0.* $7 \downarrow 0$
- *1.* $7 \uparrow$
- *2.* $7 \uparrow$

Neka je x sadržaj registra R_7 prije izvođenja programa. Ako je $x \geq 1$, onda program staje s izvršavanjem te se u registru R_7 nalazi $x + 1$, dok sadržaji ostalih registara ostaju nepromijenjeni. Ako je pak $x = 0$, onda program nikad ne staje s izvršavanjem.

Primjer 1.1.3. *Neka je $i \in \mathbb{N}$. Napišimo program koji sadržaj registra R_i svodi na 0, a sadržaji svih ostalih registara ostaju nepromijenjeni. Program je sljedeći:*

- *0.* $i \downarrow 2$
- *1.* $\rightarrow 0$
- *2.* $\otimes$

Primjer 1.1.4. *Neka je $i, j, k \in \mathbb{N}$ td. $i \neq j, j \neq k$. Napišimo program koji će sadržaj registra R_i "prekopirati" u R_j i pri tome će sadržaji svih registara, osim R_j i R_k ostati nepromijenjeni. Program je sljedeći:*

- *0.* $j \downarrow 2$
- *1.* $\rightarrow 0$
- *2.* $k \downarrow 4$
- *3.* $\rightarrow 2$
- *4.* $i \downarrow 8$
- *5.* $j \uparrow$
- *6.* $k \uparrow$
- *7.* $\rightarrow 4$
- *8.* $k \downarrow 11$
- *9.* $i \uparrow$
- *10.* $\rightarrow 8$
- *11.* $\otimes$

1.2 Izračunljive funkcije

Definicija 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Neka je P program. Kažemo da P računa funkciju f ako za sve $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće: program P staje ako su u registrima R_1 do R_k redom brojevi od x_1 do x_k, a u svim ostalim registrima 0 te se nakon izvršavanja programa P u registru R_0 nalazi $f(x_1, x_2, ..., x_k)$.*

Primjer 1.2.2. *Neka je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x$. Neka je P sljedeći program.*

- *0.* $1 \downarrow 3$
- *1.* $0 \uparrow$
- *2.* $\rightarrow 0$
- *3.* $\otimes$

Tada P računa f.
Uočimo da program P računa funkciju g, $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x_1, x_2) = x_1$. *Ako sa Q označimo program koji je isti kao i P, osim što je prva naredba* $2 \downarrow 3$ *(umjesto* $1 \downarrow 3$*), onda Q računa h, gdje je* $h : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $h(x_1, x_2) = x_2$.

Definicija 1.2.3. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. *Za funkciju f kažemo da je izračunljiva ako postoji program koji računa f.*

Primjer 1.2.4. *Neka je* $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$. *Funkcija f je izračunljiva. Program koji je računa je sljedeći:*

- *0.* $1 \downarrow 3$
- *1.* $0 \uparrow$
- *2.* $\rightarrow 0$
- *3.* $0 \uparrow$
- *4.* $\otimes$

Primjer 1.2.5. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $f(x, y) = x + y$. *Tada je f izračunljiva funkcija. Naime, sljedeći program računa funkciju f.*

- *0.* $1 \downarrow 3$
- *1.* $0 \uparrow$
- *2.* $\rightarrow 0$
- *3.* $2 \downarrow 6$
- *4.* $0 \uparrow$
- *5.* $\rightarrow 3$
- *6.* $\otimes$

Primjer 1.2.6. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $f(x, y) = x \cdot y$. *Tada je f izračunljiva funkcija. Sljedeći program računa funkciju f.*

- *0.* $2 \downarrow 9$
- *1.* $1 \downarrow 5$
- *2.* $0 \uparrow$
- *3.* $3 \uparrow$
- *4.* $\to 1$
- *5.* $3 \downarrow 8$
- *6.* $1 \uparrow$
- *7.* $\to 5$
- *8.* $\to 0$
- *9.* $\otimes$

Definicija 1.2.7. *Za* $x, y \in \mathbb{N}$ *definiramo*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

Za funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ *kažemo da je modificirano oduzimanje.*

Primjer 1.2.8. *Modificirano oduzimanje je izračunljiva funkcija. Program koji je računa je sljedeći:*

- *0.* $2 \downarrow 3$
- *1.* $1 \downarrow 6$
- *2.* $\to 0$
- *3.* $1 \downarrow 6$
- *4.* $0 \uparrow$
- *5.* $\to 3$
- *6.* $\otimes$

Primjer 1.2.9. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $f(x) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & y \geq 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$. *Pokažimo da je f izračunljiva funkcija. Promotrimo sljedeći program:*

- *0.* $2 \downarrow 10$
- *1.* $2 \uparrow$
- *2.* $2 \downarrow 6$
- *3.* $3 \uparrow$
- *4.* $1 \downarrow 10$
- *5.* $\to 2$
- *6.* $0 \uparrow$
- *7.* $3 \downarrow 2$
- *8.* $2 \uparrow$
- *9.* $\to 7$
- *10.* $\otimes$

Tvrdimo da ovaj program računa funkciju f. Pretpostavimo da se u registrima R_1 i R_2 nalaze brojevi x i y, a da je u svim ostalim registrima 0. Ako je $y = 0$ onda je $f(x, 0) = 0$, a nakon instrukcije 0. program prelazi na instrukciju 10. te staje s izvršavanjem, pa u registru R_0 ostaje 0.

Pretpostavimo sada da je $y \geq 1$. Tada nakon izvršavanja instrukcija 0. i 1. stanje registara ostaje nepromijenjeno te dolazimo do instrukcije 2. čime ulazimo u petlju koju čine instrukcije 2., 3., 4. i 5. Nakon prolaska kroz tu petlju, stanje registara $R_0, R_1, R_2, ...$ izgleda ovako: $0, x - y, 0, y, 0, 0, ...$ (uz pretpostavku da je $y \leq x$). Iz petlje izlazimo instrukcijom 2. nakon koje slijedi instrukcija 6. kojom se sadržaj registra R_0 poveća za 1. Petljom koju čine instrukcije 7., 8. i 9. dolazimo do sljedećeg stanja registara: $1, x - y, y, 0, 0, ...$. Nakon ove petlje vraćamo se na instrukciju 2. Nakon izvršavanja petlji 2.-5. stanje registara je sljedeće: $1, x - 2y, 0, y, 0, ...$ (uz pretpostavku da je $2y \leq x$).
Instrukcijom 6. stanje registra R_0 se poveća na 2, a petljom 7.-9. dolazimo do sljedećeg stanja registara: $2, x - 2y, y, 0, 0, ...$

Označimo $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$. Tada je $k \leq \frac{x}{y} \leq k + 1$ pa je $ky \leq x \leq (k + 1)y$. Ponavljajući gornji postupak, jasno je da dolazimo do sljedećeg stanja: $k, x - ky, y, 0, ...$ Pri tome, sljedeća instrukcija koju program izvršava je 2. Iz $x < (k+1)y$ slijedi $x - ky < y$ pa zaključujemo da ćemo u petlji 2.-5. iskočiti na instrukciji 4., nakon koje će se izvršiti instrukcija 10. i program će stati s izvršavanjem. U registru R_0 je k, odnosno $f(x, y)$.

1.3 Pseudoprogrami

Promotrimo sada jednu drugačiju vrstu programa.
Prije svega promotrimo novu vrstu instrukcija - pseudoinstrukcije. Imamo tri tipa pseudoinstrukcija.

1. $(k, i \uparrow, k')$, gdje je $k, i, k' \in \mathbb{N}$
   Za k kažemo da je oznaka ove pseudoinstrukcije, a za k' kažemo da je pokazivač. Ova pseudoinstrukcija povećava sadržaj registra R_i za 1, a nakon njenog izvršavanja prelazimo na izvršavanje instrukcije s oznakom k'.

2. $(k, i \downarrow l, k')$, gdje su $k, i, l, k' \in \mathbb{N}$
   Za k kažemo da je oznaka ove pseudoinstrukcije. Za l i k' kažemo da su pokazivači. Ova pseudoinstrukcija smanjuje sadržaj registra R_i za 1 te prelazi na izvršavanje instrukcije s oznakom k' ako je sadržaj registra R_i veći od 0. Ako je sadržaj registra jednak 0, tada prelazimo na izvršavanje instrukcije s oznakom l.

3. $(k, \otimes)$, gdje je $k \in \mathbb{N}$
   Za k kažemo da je oznaka ove pseudoinstrukcije. Ovom pseudoinstrukcijom program staje s izvršavanjem.

Neka je Γ konačan skup pseudoinstrukcija tako da vrijede sljedeća svojstva:

1. ako su q i $q' \in \Gamma$ takvi da je $q \neq q'$, onda je oznaka pseudoinstrukcije q različita od oznake pseudoinstrukcije q',

2. ako je $q \in \Gamma$ te ako je k pokazivač od q, onda postoji $q' \in \Gamma$ tako da je k oznaka od q',

3. postoji $q \in \Gamma$ tako da je 0 oznaka od q,

4. ako je $(k, i \downarrow l', l) \in \Gamma$ onda l' mora biti oznaka neke pseudoinstrukcije iz Γ.

Podrazumijevamo da izvršavanje programa kreće sa pseudoinstrukcijom kojoj je oznaka 0, a staje kad dođemo do pseudoinstrukcije tipa $(k, \otimes)$.

Definicija 1.3.1. *Za pseudoprogram Γ kažemo da računa funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ako za sve $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće: pseudoprogram Γ staje ako su u registrima R_1 do R_k*

redom brojevi od x_1 do x_k, a u svim ostalim registrima 0 te se nakon izvršavanja pseudo-programa Γ u registru R_0 nalazi $f(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kažemo da je pseudoizračunljiva ako postoji pseudoprogram koji je računa.

Primjer 1.3.2. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 1$. Je li f pseudoizračunljiva?*
Neka je $\Gamma = \{(0, 0 \uparrow, 1), (1, \otimes)\}$. Tada je Γ pseudoprogram koji računa f. Također, pseudo-program Γ' računa f gdje je $\Gamma' = \{(0, 0 \uparrow, 56), (56, \otimes)\}$. Dakle, f je pseudoizračunljiva.

Primjer 1.3.3. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$. Je li f pseudoizračunljiva?*
Neka je $\Gamma = \{(0, 1 \downarrow 2, 1), (1, 0 \uparrow, 0), (2, \otimes)\}$. Tada je Γ pseudoprogram koji računa f.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$.
Neka je $\Gamma' = \{(0, 1 \downarrow 2, 1), (1, 0 \uparrow, 0), (2, 0 \uparrow, 3), (3, \otimes)\}$. Tada je Γ' pseudoprogram koji računa f. Dakle, f je pseudoizračunljiva.

Primjer 1.3.4. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$.*
Neka je $\Gamma = \{(0, 1 \downarrow 2, 1), (1, 0 \uparrow, 0), (2, 2 \downarrow 4, 3), (3, 0 \uparrow, 2), (4, \otimes)\}$. Tada je Γ pseudoprogram koji računa funkciju f, dakle, f je pseudoizračunljiva.

Teorem 1.3.5. *Svaka izračunljiva funkcija je pseudoizračunljiva.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija. Tada postoji program P koji računa f. Imamo $P = (p_0, p_1, ..., p_n)$. Neka je S skup svih $i \in \mathbb{N}$ tako da postoji $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tako da vrijedi $p_j = i \uparrow$ ili $p_j = i \downarrow k$ za neki k. Očito je S konačan skup. Stoga postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da $N \notin S$.

Za $k \in \{0, 1, ..., n\}$ neka je

$$(*)\quad A_k = \begin{cases} (k, p_k, k+1), & ako\ je\ p_k\ instrukcija\ povećavanja\ ili\ smanjivanja \\ (k, \otimes), & ako\ je\ p_k = \otimes \\ (k, N\uparrow, l), & ako\ je\ p_k = \to l \end{cases}$$

Neka je $A_{n+1} = (n+1, \otimes)$. Za svaki $k \in \{0, 1, ..., n+1\}$ vrijedi da je A_k pseudoinstrukcija. Nadalje, k je oznaka od A_k.
Ovaj postupak kojim instrukcijama programa pridružujemo jednu pseudoinstrukciju možemo opisati na sljedeći način:

$$\begin{array}{lll} k. & i\uparrow & \rightsquigarrow\ (k, i\uparrow, k+1) \\ k. & i\downarrow j & \rightsquigarrow\ (k, i\downarrow j, k+1) \\ k. & \to j & \rightsquigarrow\ (k, N\uparrow, j) \\ k. & \otimes & \rightsquigarrow\ (k, \otimes) \end{array}$$

Ako je p_n instrukcija povećavanja ili smanjivanja, definiramo $\Gamma = \{A_0, ..., A_n, A_{n+1}\}$, a inače $\Gamma = \{A_0, ..., A_n\}$.

Tvrdimo da je Γ pseudoprogram.

- Neka su $q, q' \in \Gamma$, $q \neq q'$. Tada je $q = A_k$ i $q' = A_{k'}$ za neke $k, k' \in \{0, ..., n+1\}, k \neq k'$. Oznaka od q je k, a oznaka od q' je k', dakle, oznake od q i q' su različite.
- Neka je $q \in \Gamma$ te neka je l pokazivač od q. Imamo $q = A_k$ za neki $k \in \{0, ..., n+1\}$. Uočimo da je k različito od $n+1$ jer pseudoinstrukcija A_{n+1} nema pokazivač. Dakle, $k \in \{0, ..., n\}$. Iz $(*)$ slijedi da je $A_k = (k, p_k, k+1)$ i p_k je instrukcija povećavanja ili smanjivanja ili $A_k = (k, N\uparrow, l')$ i $p_k = \to l'$.

  Promotrimo prvi slučaj, tj. $A_k = (k, p_k, k+1)$ i p_k je instrukcija povećavanja ili smanjivanja.
  Očito je $k+1$ pokazivač od A_k, dakle $l = k+1$. Ako je $k < n$ onda je $k+1 \leq n$, tj. $l \leq n$ pa je $A_l \in \Gamma$, a oznaka od A_l je očito l.

Prema tome, postoji $q' \in \Gamma$ tako da je l oznaka od q'.
Ako je $k = n$, onda je $p_n = k$ instrukcija povećavanja ili smanjivanja pa je $A_{n+1} \in \Gamma$. Imamo $l = k + 1 = n + 1$, dakle, l je oznaka od A_{n+1}. Prema tome, postoji $q' \in \Gamma$ tako da je l oznaka od q'.
Promotrimo drugi slučaj, tj. $A_k = (k, N \uparrow, l')$ i $p_k = \!\!\rightarrow l'$.
Dakle, $q = (k, N \uparrow, l')$ pa je $l = l'$. Budući da je $(p_0, ..., p_n)$ program i $p_k = \!\!\rightarrow l'$, mora vrijediti $l' \leq n$, odnosno $l \leq n$. Stoga je $A_l \in \Gamma$, a l je oznaka od A_l.
Stoga, postoji $q' \in \Gamma$ tako da je l oznaka od q'.

- Vrijedi: $A_0 \in \Gamma$ i 0 je oznaka od A_0.
- Uočimo, zadovoljen je i uvjet 4. iz definicije pseudoprograma.

Prema tome, Γ je pseudoprogram.

Pretpostavimo da je $k \in \{0, ..., n\}$ i da je $p_k \neq \otimes$.
Lako se vidi da instrukcija p_k djeluje na registre $R_0, R_1, ...$ isto kao i pseudoinstrukcija A_k te da pritom vrijedi jedno od sljedećeg:

1. $\exists l \in \{0, ..., n\}$ tako da izvršavanje programa P prelazi na instrukciju P_l, a pseudoprogram Γ prelazi na pseudoinstrukciju A_l.
2. $k = n$ i "ispali smo" iz programa P, a u Γ smo prešli na pseudoinstrukciju A_{n+1}.

Iz ovoga zaključujemo da program P i pseudoprogram Γ djeluju jednako. Budući da P računa f, imamo da pseudoprogram Γ također računa f.
Dakle, f je pseudoizračunljiva. □

Definicija 1.3.6. *Neka je Γ pseudoprogram te P program.*
Kažemo da su Γ i P ekvivalentni ako za bilo koje stanje registara djeluju jednako, tj. ili i Γ i P stanu za zadano stanje registara i nakon izvršavanja Γ i izvršavanja P stanje registara je isto ili niti Γ niti P ne staju.

Primjer 1.3.7. *Neka je* $\Gamma = \{(0, 6 \uparrow, 3), (3, 4 \downarrow 5, 5), (5, 6 \uparrow, 1), (1, 3 \downarrow 5, 4), (4, \otimes)\}$. *Očito je Γ pseudoprogram.*
Neka je P sljedeći program:

- *0.* $6 \uparrow$
- *1.* $4 \downarrow 2$
- *2.* $6 \uparrow$
- *3.* $3 \downarrow 2$

- *4.* $\otimes$

Lako se vidi da su Γ *i P ekvivalentni.*

Primjer 1.3.8. *Neka je* $\Gamma = \{(0, 6\uparrow, 3), (3, 4\downarrow 5, 4), (5, 6\uparrow, 1), (1, 3\downarrow 5, 4), (4, \otimes)\}$. *Očito je* Γ *pseudoprogram.*
Neka je P sljedeći program:

- *0.* $6\uparrow$
- *1.* $4\downarrow 2$
- *2.* $\otimes$

Lako se vidi da su Γ *i P ekvivalentni.*

Primjer 1.3.9. *Neka je* $\Gamma = \{(0, 6\uparrow, 3), (3, 1\downarrow 5, 5), (5, 6\uparrow, 1), (1, 5\downarrow 5, 4), (4, \otimes)\}$. *Očito je* Γ *pseudoprogram.*
Neka je P sljedeći program:

- *0.* $6\uparrow$
- *1.* $1\downarrow 2$
- *2.* $6\uparrow$
- *3.* $5\downarrow 2$
- *4.* $\otimes$

Lako se vidi da su Γ *i P ekvivalentni.*

1.4 Makro-programi

Teorem 1.4.1. *Neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *izračunljiva funkcija. Neka su* $i_0, i_1, i_2, ..., i_k \in \mathbb{N}$ *međusobno različiti brojevi te neka je* $N \in \mathbb{N}$. *Tada postoji progam P sa sljedećim svojstvom: ako su u registrima* $R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_k}$ *brojevi* $x_1, x_2, ..., x_k$ *onda program P staje i nakon njegovog izvršavanja u registru* R_{i_0} *nalazi se broj* $f(x_1, x_2, ..., x_k)$*, pri čemu sadržaj registra* R_i *za svaki i* $\leq N$*, i* $\neq i_0$ *ostaje nepromijenjen.*

Dokaz. Budući da je f izračunljiva funkcija postoji program $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ koji računa f. Odaberemo $M \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $v \in \{0, ..., n\}$ vrijedi:

1. ako je $q_v = i\uparrow$ onda je $i < M$

2. ako je $q_v = i \downarrow k$ onda je $i < M$.

Nakon izvođenja programa Q sadržaji registara $R_M, R_{M+1}, ...$ ostaju nepromijenjeni. I obratno, sadržaji registara $R_M, R_{M+1}, ...$ ne utječu na izvršavanje programa Q u sljedećem smislu: ako su u registrima $R_1, R_2, ..., R_k$ brojevi $x_1, x_2, ..., x_k$, a u svakom registru R_i je 0 za svaki $i < M$ i $i \notin \{1, ..., k\}$ onda program Q staje za takve ulazne podatke te se nakon njegovog izvršavanja u registru R_0 nalazi $f(x_1, x_2, ..., x_k)$.
Možemo pretpostaviti da je M veći od $i_0, ..., i_k$ te da je $M > N$.
Traženi program je sljedeći:

- 0. $M \downarrow 2$
- 1. $\rightarrow 0$
- 2. $M + 1 \downarrow 4$
- 3. $\rightarrow 2$
- 4. $M + 2 \downarrow 6$
- 5. $\rightarrow 4$
  $\vdots$
- 2N. $M + N \downarrow 2N + 2$
- 2N+1. $\rightarrow 2N$
- 2N+2. $0 \downarrow 2N + 5$
- 2N+3. $M \uparrow$
- 2N+4. $\rightarrow 2N + 2$
- 2N+5. $1 \downarrow 2N + 8$
- 2N+6. $M + 1 \uparrow$
- 2N+7. $\rightarrow 2N + 5$
  $\vdots$
- 2N+(3N+2) $N \downarrow 5N + 4$
- 5N+3. $M + N \uparrow$
- 5N+4. $\rightarrow 5N + 2$

- 5N+5. $0 \downarrow 5N+7$
- 5N+6. $\rightarrow 5N+5$
- 5N+7. $1 \downarrow 5N+8$
- 5N+8. $\rightarrow 5N+7$
  $\vdots$
- 5N+2(M-1)+5. $M-1 \downarrow 5N+2M+5$
- 5N+2M+4. $\rightarrow 5N+2M+3$
- 5N+2M+5. $2M \downarrow 5N+2M+7$
- 5N+2M+6. $\rightarrow 5N+2M+5$
- 5N+2M+7. $M+i_1 \downarrow 5N+2M+11$
- 5N+2M+8. $1 \uparrow$
- 5N+2M+9. $2M \uparrow$
- 5N+2M+10. $\rightarrow 5N+2M+7$
- 5N+2M+11. $2M \downarrow 5N+2M+14$
- 5N+2M+12. $M+i_1 \uparrow$
- 5N+2M+13. $\rightarrow 5N+2M+11$
  $\vdots$
- 5N+2M+7k. $M+i_k \downarrow 5N+2M+7k+4$
- 5N+2M+7k+1. $k \uparrow$
- 5N+2M+7k+2. $2M \uparrow$
- 5N+2M+7k+3. $\rightarrow 5N+2M+7k$
- 5N+2M+7k+4. $2M \downarrow 5N+2M+7k+7$
- 5N+2M+7k+5. $M+i_k \uparrow$
- 5N+2M+7k+6. $\rightarrow 5N+2M+7k+4$

- 5N+2M+7k+7. q'_0
  $\vdots$
- 5N+2M+7k+7+n. q'_n
- 5N+2M+7k+n+8. $M + i_0 \downarrow 5N + 2M + 7k + 10$
- 5N+2M+7k+n+9. $\rightarrow 5N + 2M + 7k + n + 8$
- 5N+2M+7k+n+10. $0 \downarrow 5N + 2M + 7k + n + 13$
- 5N+2M+7k+n+11. $M + i_0 \uparrow$
- 5N+2M+7k+n+12. $\rightarrow 5N + 2M + 7k + n + 10$
- 5N+2M+7k+n+13. $1 \downarrow 5N + 2M + 7k + n + 15$
- 5N+2M+7k+n+14. $\rightarrow 5N + 2M + 7k + n + 13$
  $\vdots$
- 5N+2M+7k+n+2N+11. $N \downarrow 7N + 2M + 7k + n + 13$
- 7N+2M+7k+n+12. $\rightarrow 7N + 2M + 7k + n + 11$
- 7N+2M+7k+n+13. $M \downarrow 7N + 2M + 7k + n + 16$
- 7N+2M+7k+n+14. $0 \uparrow$
- 7N+2M+7k+n+15. $\rightarrow 7N + 2M + 7k + n + 13$
  $\vdots$
- 7N+2M+7k+n+3N+13. $M + N \downarrow 10N + 2M + 7k + n + 16$
- 10N+2M+7k+n+14. $N \uparrow$
- 10N+2M+7k+n+15. $\rightarrow 10N + 2M + 7k + n + 13$
- 10N+2M+7k+n+16. $\otimes$.

Pri tome su $q'_o, ..., q'_n$ modificirane instrukcije $q_0, ..., q_n$ na sljedeći način:

$$q'_i = \begin{cases} q_i, & \textit{ako je } q_i = l \uparrow \\ l \downarrow (5N + 2M + 7k + 7 + n), & \textit{ako je } q_i = l \downarrow n \\ \rightarrow (5N + 2M + 7k + 7 + n), & \textit{ako je } q_i = \rightarrow n \\ \rightarrow (5N + 2M + 7k + 7 + n + 1), & \textit{ako je } q_i = \otimes. \end{cases}$$

Program započinje instrukcijama $0.-(2N+1)$. pomoću kojih se sadržaji registara $R_M, ..., R_{M+N}$ svode se na 0, a zatim se instrukcijama $(2N+2).-(5N+4)$. sadržaji registara R_j kopiraju u R_{M+j} za svaki $j \in \{0, ..., N\}$. Nakon toga, instrukcijama $(5N+5).-(5N+2M+4)$. sadržaje registara R_j za svaki $j \in \{0, ..., M-1\}$ svodimo na 0. Instrukcijama $(5N+2M+5).-(5N+2M+7k+6)$. odvija se kopiranje sadržaja registara R_{M+i_j} u R_j za svaki $j \in \{1, ..., k\}$ pri čemu kopirane vrijednosti ostaju sačuvane u R_{M+i_j} za svaki $j \in \{1, ..., k\}$. Sada se, nakon izvođenja programa Q (instrukcije $(5N+2M+7k+7).-(5N+2M+7k+7+n)$.), u registru R_0 nalazi $f(x_1, ..., x_k)$. Potom se, instrukcijama $(5N+2M+7k+n+8).-(5N+2M+7k+n+12)$. vrši kopiranje sadržaja registra R_0 u R_{i_0} (ako je $i_0 \neq 0$), a onda se instrukcijama $(5N+2M+7k+n+13).-(7N+2M+7k+n+12)$. sadržaji registara R_j za svaki $j \in \{0, ..., N\} \backslash i_0$ svode na 0, te se instrukcijama $(7N+2M+7k+n+13).-(10N+2M+7k+n+15)$. odvija završno kopiranje sadržaja registara R_{M+j} u R_j za svaki $j \in \{0, ..., N\} \backslash i_0$. Ovdje program staje s izvršavanjem. □

Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija, neka su $i_0, i_1, ..., i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti prirodni brojevi te neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada postoji program P sa svojstvima iz prethodnog teorema.
Odaberimo jedan takav program P i označimo ga sa $f(R_{i_1}, ..., R_{i_k}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$.
Za $f(R_{i_1}, ..., R_{i_k}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$ kažemo da je makro-instrukcija. Sada ćemo u pisanju programa osim instrukcija koristiti i makro-instrukcije i takve ćemo "programe" zvati makro-programi.

Primjer 1.4.2. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$. Znamo da je f izračunljiva funkcija. Za međusobno različite $i_0, i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ i $N \in \mathbb{N}$ umjesto $f(R_{i_1}, R_{i_2}) \xrightarrow{N} R_{i_0}$ pišemo $R_{i_1} + R_{i_2} \xrightarrow{N} R_{i_0}$.*

Primjer 1.4.3. *Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x$.
Znamo da je g izračunljiva funkcija. Za međusobno različite $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ i $N \in \mathbb{N}$ umjesto $f(R_{i_1}) \xrightarrow{N} R_{i_0}$ pišemo $R_{i_1} \xrightarrow{N} R_{i_0}$.*

Primjer 1.4.4. *Promotrimo sljedeći makro-program:*

- *0.* $2 \downarrow 4$
- *1.* $R_0 + R_1 \xrightarrow{2} R_3$
- *2.* $R_3 \xrightarrow{2} R_0$
- *3.* $\to 0$
- *4.* $\otimes$

Ako je u registru R_1 broj x, u registru R_2 broj y, a u svim ostalim registrima 0, onda će nakon izvršavanja navedenog makro-programa u registru R_0 biti broj $x \cdot y$.

1.5 Makro-izračunljivost i izračunljivost

Definicija 1.5.1. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija te neka je P neki makro-program. Kažemo da makro-program P računa funkciju f ako vrijedi sljedeće: makro-program P staje ako su u registrima R_1 do R_k redom brojevi od x_1 do x_k, a u svim ostalim registrima 0 te se nakon izvršavanja makro-programa P u registru R_0 nalazi $f(x_1, x_2, ..., x_k)$.*

Definicija 1.5.2. *Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kažemo da je makro-izračunljiva ako postoji makro-program koji je računa.*

Teorem 1.5.3. *Svaka makro-izračunljiva funkcija je izračunljiva.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ makro-izračunljiva funkcija. Tada postoji makro-program P koji računa f. Makro-program P je konačan niz $p_0, p_1, ..., p_n$ gdje je p_i instrukcija ili makro-instrukcija za svaki $i \in \{0, ..., n\}$.
Pretpostavimo da je $i \in \{0, ..., n\}$ takav da je p_i makro-instrukcija. Tada je p_i program čije su instrukcije $q_0, q_1, ..., q_m$. Želimo makro-program P zamijeniti makro-programom P' koji sadrži iste instrukcije i makro-instrukcije kao P osim što je makro-instrukcija p_i zamijenjena instrukcijama $q_0, q_1, ..., q_m$.
P' ima oblik $p'_0, p'_1, ..., p'_{i-1}, q'_0, q'_1, ..., q'_m, p'_{i+1}, ..., p'_n$ pri čemu su $p'_0, p'_1, ..., p'_n$ instrukcije ili makro-instrukcije dobivene modifikacijom od $p_0, p_1, ..., p_n$, a $q'_0, q'_1 ..., q'_m$ dobivene modifikacijom od $q_0, q_1, ..., q_m$.
Pri tome se ta modifikacija odnosi na prikladnu zamjenu pokazivača te na eventualnu zamjenu instrukcije $\otimes$ u slučaju $q_0, q_1, ..., q_m$ instrukcijom $\to k$ za odgovarajući k.
Makro-program P' djeluje isto kao makro-program P pa je posebno P' makro-program koji računa funkciju f.
Uočimo da je broj makro-instrukcija u P' za jedan manji od broja makro-instrukcija u P.
Zaključujemo sljedeće: ako postoji makro-program koji računa f i u kojem ima ukupno l makro-instrukcija ($l \geq 1$) onda postoji i makro-program koji računa f u kojem ukupno ima $l - 1$ makro-insktrukcija.
Iz ovoga je jasno da postoji makro-program koji računa f s ukupno 0 makro-instrukcija, dakle, postoji program koji računa f.
Prema tome, f je izračunljiva funkcija. □

Primjer 1.5.4. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x^y$, *pri čemu uzimamo* $0^0 = 1$. *Dokažimo da je* f *izračunljiva funkcija.*
Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x,y) = x \cdot y$. *Vidjeli smo ranije da je* g *izračunljiva funkcija. Za međusobno različite* $i_0, i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ *i* $N \in \mathbb{N}$ *umjesto* $f(R_{i_1}, R_{i_2}) \xrightarrow{N} R_{i_0}$ *pišemo* $R_{i_1} \cdot R_{i_2} \xrightarrow{N} R_{i_0}$.
Promotrimo sljedeći makro-program:

- *0.* $0 \uparrow$
- *1.* $2 \downarrow 5$
- *2.* $R_0 \cdot R_1 \xrightarrow{2} R_3$
- *3.* $R_3 \xrightarrow{2} R_0$
- *4.* $\to 1$
- *5.* $\otimes$

Lako se vidi da navedeni makro-program računa funkciju f. *Prema tome,* f *je izračunljiva.*

Poglavlje 2

Rekurzivne funkcije

2.1 Kompozicija i primitivna rekurzija

Definicija 2.1.1. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Neka su* $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *te neka je* $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. *Definiramo funkciju* $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa* $h(x) = g(f_1(x), ..., f_n(x))$, *za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$.
Za h kažemo da je funkcija dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, ..., f_n$.
Uočimo sljedeće: ako je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^n$ *funkcija definirana sa* $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$, $x \in \mathbb{N}^k$, *onda je* $h(x) = g(F(x))$, *za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$, *dakle,* $h = g \circ F$.

Definicija 2.1.2. *Neka je* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *te neka su* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definiramo funkciju* $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} h(0, y_1, ..., y_n) &= f(y_1, ..., y_n) \\ h(x+1, y_1, ..., y_n) &= g(h(x, y_1, ..., y_n), x, y_1, ..., y_n). \end{aligned}$$

Ovdje, dakle, za fiksirane $y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$ *definiramo* $h(x, y_1, ..., y_n)$ *induktivno za* $x \in \mathbb{N}$.
Za funkciju h kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

Primjer 2.1.3. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(x, y) = x + y$.
Postoje li funkcije f *i* g *takve da je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g*?*
Uočimo da za takve funkcije f *i* g *mora vrijediti* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$. *Neka su* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$. *Tada je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g *ako i samo ako za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi sljedeće:*

$$h(0, y) = f(y)$$
$$h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y).$$

Nadalje, to vrijedi ako i samo ako za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *imamo:*

$$y = f(y) \tag{1}$$
$$(x + 1) + y = g(h(x, y), x, y). \tag{2}$$

Definirajmo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *sa* $f(y) = y$, $g(a, b, c) = b + c + 1$. *Tada iz (1) i (2) slijedi da je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g.
S druge strane, definirajmo sada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *sa* $f(y) = y$, $g(a, b, c) = a + 1$. *Tada iz (1) i (2) također zaključujemo da je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g.

Propozicija 2.1.4. *Neka je* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka je* $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *funkcija. Tada postoje funkcije* f *i* g *takve da je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g.

Dokaz. Definirajmo $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sa $f(y_1, ..., y_n) = h(0, y_1, ...y_n)$. Nadalje, neka je $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, x, y_1, ..., y_n) = h(x + 1, y_1, ..., y_n)$. Tada je jasno da za sve $x, y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$h(0, y_1, ..., y_n) = f(y_1, ..., y_n)$$
$$h(x + 1, y_1, ..., y_n) = g(h(x, y_1, ..., y_n), x, y_1, ..., y_n).$$

Prema tome, h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. $\square$

2.2 Primitivno rekurzivne funkcije

Definicija 2.2.1. *Neka su $z, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $z(x) = 0$, $s(x) = x + 1$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $j \in \{1, ..., n\}$. Neka je $I_j^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ projekcija na j-tu koordinatu, tj. funkcija definirana sa $I_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$ za sve $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$.*
Za funkcije z, s i I_j^n ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, j \in \{1, ..., n\}$) kažemo da su inicijalne funkcije.

Definiramo niz skupova $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ induktivno na sljedeći način. Neka je S_0 skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skup S_m. Neka je $K = \{h \mid \exists g, f_1, ..., f_n \in S_m$ tako da je h dobivena kompozicijom od $g, f_1, ..., f_n\}$. Neka je $P = \{h \mid \exists f, g \in S_m$ tako da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i $g\}$.
Definirajmo $S_{m+1} = S_m \cup K \cup P$. Time smo definirali niz skupova $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Uočimo da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ svaki element od S_m funkcija oblika $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Definicija 2.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Kažemo da je f primitivno rekurzivna funkcija ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in S_m$.*

Uočimo da je svaka inicijalna funkcija primitivno rekurzivna. Naime, svaka inicijalna funkcija je element od S_0 (postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in S_m$, $m = 0$).
Uočimo da prema induktivnoj definiciji niza skupova $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vrijedi $S_m \subseteq S_{m+1}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Iz ovoga lako zaključujemo da za sve $m, m' \in \mathbb{N}$ tako da je $m \leq m'$ vrijedi $S_m \subseteq S_{m'}$ (indukcijom po m').

Propozicija 2.2.3.

(i) Pretpostavimo da su $g, f_1, ..., f_n$ primitivno rekurzivne funkcije te da je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, ..., f_n$. Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

(ii) Pretpostavimo da su f i g primitivno rekurzivne funkcije te da je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz.

(i) Budući da je g primitivno rekurzivna, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $g \in S_{m_0}$. Nadalje, za svaki $j \in \{1, ..., n\}$ funkcija f_j je primitivno rekurzivna pa postoji $m_j \in \mathbb{N}$ tako da je $f_j \in S_{m_j}$. Neka je $M = \max\{m_0, m_1, ..., m_n\}$. Tada je $m_0 \leq M$, $m_1 \leq M$,..., $m_n \leq M$ pa je $S_{m_0} \subseteq S_M$, $S_{m_1} \subseteq S_M$,..., $S_{m_n} \subseteq S_M$. Stoga imamo $g, f_1, ..., f_n \in S_M$. Budući da je h dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, ..., f_n$, vrijedi da je $h \in S_{M+1}$. Time je tvrdnja (i) dokazana.

(ii) Budući da su f i g primitivno rekurzivne funkcije, postoje $m_1 \in \mathbb{N}$ i $m_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $f \in S_{m_1}$ i $g \in S_{m_2}$. Neka je $M = \max\{m_1, m_2\}$. Tada je $m_1 \leq M$ i $m_2 \leq M$ pa je $S_{m_1} \subseteq S_M$ i $S_{m_2} \subseteq S_M$. Stoga su $f, g \in S_M$ pa je $h \in S_{M+1}$. Dakle, tvrdnja (ii) vrijedi.

□

2.3 Primjeri primitivno rekurzivnih funkcija

Primjer 2.3.1. *Neka je $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y, z) = x+1$. Je li ta funkcija primitivno rekurzivna?*
Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(x, y, z) = s(I_1^3(x, y, z))$. Stoga je h dobivena kompozicijom funkcija s i I_1^3 koje su primitivno rekurzivne (jer su inicijalne). Dakle, h je primitivno rekurzivna prema prvom dijelu Propozicije 2.2.3.

Primjer 2.3.2. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = x + y$. Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $f(y) = y$ i $g(a, b, c) = a + 1$. Prema Primjeru 2.1.3 vrijedi da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Funkcija f je primitivno rekurzivna jer je inicijalna ($f = I_1^1$), a g je primitivno rekurzivna prema prethodnom primjeru. Stoga je h primitivno rekurzivna prema drugom dijelu Propozicije 2.2.3.*

Primjer 2.3.3. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = x \cdot y$.*
Želimo dokazati da je h primitivno rekurzivna funkcija. U tu svrhu pokušajmo naći primitivno rekurzivne funkcije f i g takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$. Tada je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g ako i samo ako za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} h(0, y) &= f(y) \\ h(x + 1, y) &= g(h(x, y), x, y), \end{aligned}$$

tj. ako i samo ako za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= f(y) \\ (x + 1) \cdot y &= g(x \cdot y, x, y). \end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi za funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiranu sa $g(a, b, c) = a + c$. Stoga je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija z i g.

Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $zb(x, y) = x + y$. Za sve $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi $g(a, b, c) = zb(a, c)$, tj. $g(a, b, c) = zb(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c))$. Ovo znači da je g dobivena kompozicijom funkcija zb, I_1^3, I_3^3. Prema prethodnom primjeru, funkcija zb je primitivno rekurzivna pa iz prvog dijela Propozicije 2.2.3 slijedi da je g primitivno rekurzivna funkcija.

Iz drugog dijela Propozicije 2.2.3 i iz činjenice da je h dobivena primitivnom rekurzijom od z i g slijedi da je h primitivno rekurzivna.

Napomena 2.3.4. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x,y) = f(y,x)$. Tada je i h primitivno rekurzivna funkcija.*
Naime, uočimo da je $h(x,y) = f(I_2^2(x,y), I_1^2(x,y))$ što znači da je h dobivena kompozicijom f, I_2^2, I_1^2 pa je, po Propoziciji 2.2.3, h primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.3.5. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x,y) = x^y$. Dokažimo da je h primitivno rekurzivna.*
U tu svrhu dovoljno je dokazati da je funkcija $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $h'(x,y) = h(y,x)$ primitivno rekurzivna. Naime, za sve $x,y \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(x,y) = h'(y,x)$ pa primitivna rekurzivnost od h' povlači, prema prethodnoj napomeni, primitivnu rekurzivnost od h. Vrijedi $h'(x,y) = y^x$.
Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$. Tada je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g ako i samo ako za sve $x,y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} h'(0,y) &= f(y) \\ h'(x+1,y) &= g(h'(x,y), x, y), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 1 &= f(y) \\ y^{x+1} &= g(y^x, x, y). \end{aligned}$$

Uočimo da za funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiranu sa $g(a,b,c) = a \cdot c$ vrijedi zadnja jednakost. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f(y) = 1$ za svaki $y \in \mathbb{N}$. Tada je h' dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.
Da bismo dokazali da je h' primitivno rekurzivna dovoljno je sada, prema drugom dijelu Propozicije 2.2.3, dokazati da su f i g primitivno rekurzivne. Za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(y) = s(z(y))$. Dakle, f je kompozicija funkcija s, z pa iz Propozicije 2.2.3 (i) slijedi da je f primitivno rekurzivna.
Neka je $mn : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $mn(x,y) = x \cdot y$. Znamo da je mn primitivno rekurzivna (Primjer 2.3.3). Vrijedi da je $g(a,b,c) = mn(I_1^3(a,b,c), I_3^3(a,b,c))$. Dakle, g je kompozicija funkcija mn, I_1^3, I_3^3 pa iz Propozicije 2.2.3 (i) slijedi da je g primitivno rekurzivna. Zaključujemo da je h' primitivno rekurzivna, dakle, i h je primitivno rekurzivna funkcija.

Propozicija 2.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Svaka konstantna funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Za $c \in \mathbb{N}$ označimo sa f_c konstantnu funkciju $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s vrijednošću c, dakle, $f_c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f_c(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dokažimo da je f_c primitivno rekurzivna funkcija za svaki $c \in \mathbb{N}$ indukcijom po c (ako to dokažemo, dokazali smo tvrdnju propozicije).
Za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi $f_0(x_1, ..., x_k) = 0$, tj. $f_0(x_1, ..., x_k) = z(I_1^k(x_1, ..., x_k))$. Stoga je f_0 kompozicija funkcija z, I_1^k, a iz Propozicije 2.2.3 (*i*) slijedi da je f_0 primitivno rekurzivna funkcija.
Pretpostavimo da je f_c primitivno rekurzivna funkcija za neki $c \in \mathbb{N}$. Za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi $f_{c+1}(x_1, ..., x_k) = c + 1 = s(c)$, tj. $f_{c+1}(x_1, ..., x_k) = s(f_c(x_1, ..., x_k))$. Stoga je f_{c+1} kompozicija funkcija s i f_c pa slijedi da je f_{c+1} primitivno rekurzivna funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.3.7. *Neka je $c \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana induktivno sa $h(0) = c$, $h(x + 1) = g(h(x), x)$. Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $H(x, y) = h(x)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Neka su $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $F(y) = c$ i $G(a, b, c) = g(a, b)$. Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $H(0, y) = h(0) = c = F(y)$, odnosno

$$H(0, y) = F(y) \tag{1}$$

te $H(x + 1, y) = h(x + 1) = g(h(x), x) = g(H(x, y), x) = G(H(x, y), x, y)$, tj.

$$H(x + 1, y) = G(H(x, y), x, y). \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je funkcija H dobivena primitivnom rekurzijom od F i G. Funkcija F je konstantna pa je primitivno rekurzivna prema prethodnoj propoziciji. Iz definicije funkcije G slijedi da je $G(a, b, c) = g(I_1^3(a, b, c), I_2^3(a, b, c))$, dakle, G je kompozicija funkcija g, I_1^3, I_2^3 pa slijedi da je G primitivno rekurzivna (funkcija g je prema pretpostavci propozicije primitivno rekurzivna). Iz činjenice da je H dobivena primitivnom rekurzijom od F i G slijedi da je H primitivno rekurzivna. Iz definicije H slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(x) = H(x, 0)$, tj. $h(x) = H(I_1^1(x), z(x))$.
Dakle, h je dobivena kompozicijom funkcija H, I_1^1, z pa zaključujemo da je h primitivno rekurzivna funkcija.

□

Neka je $pr : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$pr(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Primjer 2.3.8. *Funkcija pr je primitivno rekurzivna. Dokažimo to.*
Uočimo da je za svaki $x \in \mathbb{N}$ $pr(x+1) = x$. *Stoga za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *vrijedi sljedeće:*

$$pr(0) = 0$$
$$pr(x+1) = I_2^2(pr(x), x).$$

Iz Propozicije 2.2.3 slijedi da je pr primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.3.9. *Modificirano oduzimanje je primitivno rekurzivna funkcija.*
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $h(x, y) = y \dot{-} x$. *Neka je* $x, y \in \mathbb{N}$.
Tvrdimo da je

$$y \dot{-} (x+1) = pr(y \dot{-} x). \tag{1}$$

Promotrimo prvo slučaj $y \geq x+1$. *Tada je* $y \dot{-} (x+1) = y - (x+1)$. *Nadalje vrijedi* $y \geq x$ *i* $y - x \geq 1$ *pa je* $pr(y \dot{-} x) = pr(y-x) = (y-x) - 1$. *Stoga (1) vrijedi.*
Promotrimo sada slučaj $y < x+1$. *Tada je* $y \dot{-} (x+1) = 0$. *S druge strane, iz* $y < x+1$ *slijedi* $y - 1 < x$ *pa* $(y-1)+1 \leq x$, *odnosno* $y \leq x$. *Stoga je* $pr(y \dot{-} x) = pr(0) = 0$. *Prema tome, (1) vrijedi.*
Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcije definirane sa* $f(y) = y$ *i* $g(a, b, c) = pr(a)$. *Za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *prema (1) vrijedi* $y \dot{-} (x+1) = g(y \dot{-} x, x, y)$, *tj.* $h(x+1, y) = g(h(x, y), x, y)$.
Očito je $h(0, y) = y$. *Prema tome, za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$h(0, y) = f(y)$$
$$h(x+1, y) = g(h(x, y), x, y).$$

To znači da je funkcija h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Funkcija f je primitivno rekurzivna jer je inicijalna. Vrijedi $g(a, b, c) = pr(a) = pr(I_1^3(a, b, c))$ *pa je g primitivno rekurzivna funkcija. Iz činjenice da su f i g primitivno rekurzivne, slijedi da je h primitivno rekurzivna. Neka je* φ *modificirano oduzimanje. Za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\varphi(x, y) = h(y, x)$ *pa iz Napomene 2.3.4 slijedi da je* φ *primitivno rekurzivna funkcija.*

2.4 Rekurzivne funkcije

Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija. Pretpostavimo da za sve $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ tako da je $g(x_1, ..., x_n, y) = 0$. Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f(x_1, ..., x_n) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, ..., x_n, y) = 0\}$. Za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g. Broj $\min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, ..., x_n, y) = 0\}$ označavamo i sa $\mu y(g(x_1, ..., x_n, y) = 0)$.
Dakle, $f(x_1, ..., x_n) = \mu y(g(x_1, ..., x_n, y) = 0)$ za sve $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$.

Definirajmo sada induktivno niz skupova $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način. Neka je T_0 skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skup T_m.
Neka su K', P' i M' skupovi definirani na sljedeći način:
$K' = \{h \mid \exists g, f_1, ..., f_n \in T_m$ tako da je h dobivena kompozicijom od $g, f_1, ..., f_n\}$,
$P' = \{h \mid \exists f, g \in T_m$ tako da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i $g\}$ i
$M' = \{f \mid \exists g \in T_m$ tako da je f dobivena primjenom $\mu - operatora$ na $g\}$.

Definirajmo $T_{m+1} = T_m \cup K \cup P \cup M$. Na taj način smo dobili niz skupova funkcija $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Definicija 2.4.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in T_m$.*

Propozicija 2.4.2. *Svaka primitivno rekurzivna funkcija je rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ i $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nizovi funkcija iz definicija primitivno rekurzivnih i rekurzivnih funkcija. Tvrdimo da je

$$S_m \subseteq T_m \tag{1}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo to indukcijom.
Tvrdnja očito vrijedi za $n = 0$ ($S_0 = T_0$).
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_m \subseteq T_m$. Neka su K i P skupovi funkcija definirani kao u definiciji niza skupova $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Neka su K', P' i M' skupovi funkcija definirani kao u definiciji niza skupova $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Iz $S_m \subseteq T_m$ slijedi da je $K \subseteq K'$ te da je $P \subseteq P'$. Stoga je $S_m \cup K \cup P$ podskup od $T_m \cup K' \cup P' \cup M'$, tj. $S_{m+1} \subseteq T_{m+1}$. Time smo dokazali da tvrdnja (1) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$.
Iz ovoga je sada lako dokazati da je svaka primitivno rekurzivna funkcija rekurzivna. Naime, ako je f primitivno rekurzivna funkcija onda postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $f \in S_m$, što povlači $f \in T_m$ pa je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.4.3.

(i) Neka su $g, f_1, ..., f_n$ rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, ..., f_n$. Tada je h rekurzivna funkcija.

(ii) Neka su f i g rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je h rekurzivna funkcija.

(iii) Neka je g rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je f funkcija dobivena primjenom μ-operatora na g. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Propozicije 2.2.3. □

Definicija 2.4.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Kažemo da je S rekurzivan skup ako je karakteristična funkcija skupa S, $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.*
Podsjetimo se da je $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

Primjer 2.4.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Skupovi $\emptyset$ i $\mathbb{N}^k$ su rekurzivni.*
Naime, funkcije $\chi_\emptyset$ i $\chi_{\mathbb{N}^k}$ su primitivno rekurzivne (prema Propoziciji 2.3.6) pa su i rekurzivne.

2.5 Izračunljivost rekurzivnih funkcija

Propozicija 2.5.1. *Neka su $g, f_1, ..., f_n$ izračunljive funkcije. Pretpostavimo da je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, ..., f_n$. Tada je h izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Imamo $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, za neki $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Da bismo dokazali da je h izračunljiva, dovoljno je napisati makro-program koji je računa (Teorem 1.5.3). Lako se vidi da sljedeći makro-program računa funkciju h:

- 0\. $f_1(R_1, ..., R_k) \xrightarrow{\text{k}} R_{k+1}$
- 1\. $f_2(R_1, ..., R_k) \xrightarrow{\text{k+1}} R_{k+2}$
- 2\. $f_3(R_1, ..., R_k) \xrightarrow{\text{k+1}} R_{k+3}$
  $\vdots$
- $n-1$. $f_n(R_1, ..., R_k) \xrightarrow{\text{k+n-1}} R_{k+n}$
- n. $g(R_{k+1}, ..., R_{k+n}) \xrightarrow{\text{k+n}} R_0$.

□

Propozicija 2.5.2. *Neka su f i g izračunljive funkcije. Pretpostavimo da je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je h izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Imamo $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, za neki $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Nije teško pokazati da sljedeći makro-program računa funkciju h:

- 0\. $f(R_2, ..., R_{n+1}) \xrightarrow{\text{n+2}} R_{n+2}$
- 1\. $1 \downarrow 6$

- 2. $g(R_{n+2}, R_{n+3}, R_2, ..., R_{n+1}) \xrightarrow{\text{n+4}} R_{n+4}$
- 3. $R_{n+4} \xrightarrow{\text{n+4}} R_{n+2}$
- 4. $n + 3 \uparrow$
- 5. $\to 1$
- 6. $R_{n+2} \xrightarrow{\text{n+4}} R_0$.

□

Propozicija 2.5.3. *Neka je g izračunljiva funkcija. Pretpostavimo da je f funkcija dobivena primjenom μ-operatora na g. Tada je f izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Imamo $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ gdje je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Sljedeći makro-program računa funkciju f:

- 0. $g(R_1, , ..., R_{n+1}) \xrightarrow{\text{n+2}} R_{n+2}$
- 1. $n + 2 \downarrow 4$
- 2. $n + 1 \uparrow$
- 3. $\to 0$
- 4. $R_{n+1} \xrightarrow{\text{n+2}} R_0$

□

Teorem 2.5.4. *Svaka rekurzivna funkcija je izračunljiva.*

Dokaz. Neka je $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz skupova funkcija iz definicije rekurzivne funkcije. Dokažimo indukcijom da za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće: svaki element od T_m je izračunljiva funkcija. Vrijedi da je T_0 skup svih inicijalnih funkcija. Prema Primjeru 1.2.4 funkcija s je izračunljiva, očito je funkcija z izračunljiva, a ako su $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i $j \in \{1, ..., n\}$ onda je I^n_j izračunljiva funkcija jer je

$$0. \ R_j \to R_0$$

makro-program koji je računa. Prema tome, svaka inicijalna funkcija je izračunljiva, dakle, svaki element od T_0 je izračunljiva funkcija.
Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ te da je svaki element od T_m izračunljiva funkcija. Želimo dokazati da je svaki element od T_{m+1} izračunljiva funkcija.
Imamo

$$T_{m+1} = T_m \cup K' \cup P' \cup M' \tag{1}$$

(gdje su K', P', M' skupovi definirani kao u definiciji niza skupova $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$).
Pretpostavimo da je $h \in K'$. Tada postoje $g, f_1, ..., f_n \in T_m$ tako da je h dobivena kompozicijom od $g, f_1, ..., f_n$. Prema induktivnoj pretpostavci funkcije $g, f_1, ..., f_n$ su izračunljive pa iz Propozicije 2.5.1 slijedi da je h izračunljiva funkcija. Prema tome, svaki element od K' je izračunljiva funkcija. Na isti način, koristeći Propoziciju 2.5.2, zaključujemo da je svaki element od P' izračunljiva funkcija. Također, koristeći Propoziciju 2.5.3 zaključujemo da je svaki element od M' izračunljiva funkcija.
Iz (1) slijedi da je svaki element od T_{m+1} izračunljiva funkcija.
Dakle, dokazali smo da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ svaki element od T_m izračunljiva funkcija. Budući da je svaka rekurzivna funkcija element od T_m za neki $m \in \mathbb{N}$, vrijedi tvrdnja teorema. $\square$

Poglavlje 3

Prebrojivost

3.1 Prebrojivi skupovi

Definicija 3.1.1. *Za skup S kažemo da je prebrojiv ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji surjekcija $f : \mathbb{N} \to S$.*

Primjer 3.1.2. *Skup $\mathbb{N}$ je prebrojiv.*
Naime, funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x$ je očito surjekcija.

Primjer 3.1.3. *Svaki konačan skup je prebrojiv.*
Naime, neka je S konačan skup. Ako je $S = \emptyset$ onda je S očito prebrojiv. Pretpostavimo da $S \neq \emptyset$. Tada imamo $S = \{x_0, ..., x_m\}$ za neki $m \in \mathbb{N}$.
Definirajmo $f : \mathbb{N} \to S$ sa

$$f(n) = \begin{cases} x_n, & ako\ je\ n \leq m \\ x_0, & inače. \end{cases}$$

Tada je f surjekcija pa je prema tome S prebrojiv skup.

Primjer 3.1.4. *Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv. Dokažimo to.*
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definrana na sljedeći način: za $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \geq 1$, neka je $f(x)$ eksponent kojim prost broj 2 ulazi u rastav od x na proste faktore, a ako je $x = 0$, definiramo $f(x) = 0$. Nadalje, neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način: za $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \geq 1$, neka je $g(x)$ eksponent kojim prost broj 3 ulazi u rastav od x na proste faktore, a ako je $x = 0$, definiramo $g(x) = 0$. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x) = (f(x), g(x))$. Tvrdimo da je h surjekcija. Neka je $u \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Tada je $u = (a, b)$, za neke $a, b \in \mathbb{N}$. Definirajmo $x = 2^a \cdot 3^b$. Vrijedi $f(x) = a$ i $g(x) = b$ pa je $h(x) = (a, b)$, tj. $h(x) = u$. Prema tome, h je surjekcija, dakle, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv skup.

Napomena 3.1.5. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ surjekcije. Tada je $g \circ f : S \to V$ surjekcija.*
Naime, ako je $z \in V$, onda postoji $y \in T$ tako da je $g(y) = z$ te nadalje postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$. Stoga je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

Propozicija 3.1.6. *Neka je $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih prebrojivih skupova. Tada je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Budući da je S_i prebrojiv i neprazan, postoji surjekcija $f_i : \mathbb{N} \to S_i$. Definirajmo $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ sa $F(i, n) = f_i(n)$. Tvrdimo da je F surjekcija. Neka je $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $y \in S_i$. Budući da je f_i surjekcija, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $f_i(n) = y$. To znači da je $F(i, n) = y$. Prema tome, F je surjekcija. Prema Primjeru 3.1.4, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv skup. Stoga postoji surjekcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Funkcija $F \circ h : \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ je surjekcija prema prethodnoj napomeni. Dakle, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ je prebrojiv skup. □

Korolar 3.1.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $A_0, ..., A_n$ neprazni prebrojivi skupovi. Tada je $A_0 \cup ... \cup A_n$ prebrojiv skup.*

Dokaz. Definirajmo niz skupova $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa

$$S_i = \begin{cases} A_i, & i \in \{0, ..., n\} \\ A_n, & i > n. \end{cases}$$

Tada je $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih prebrojivih skupova pa je prema Propoziciji 3.1.6 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ prebrojiv skup. No, očito vrijedi da je $A_0 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Prema tome, $A_0, ..., A_n$ je prebrojiv skup. □

Propozicija 3.1.8. *Neka su S i T skupovi takvi da je S prebrojiv. Pretpostavimo da postoji surjekcija $f : S \to T$. Tada je T prebrojiv.*

Dokaz. Budući da je S prebrojiv, postoji surjekcija $g : \mathbb{N} \to S$. Tada je, prema Napomeni 3.1.5, $f \circ g : \mathbb{N} \to T$ surjekcija. Prema tome, T je prebrojiv skup. □

Propozicija 3.1.9. *Svaki podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.*

Dokaz. Neka je S prebrojiv skup te neka je $T \subseteq S$. Ako je $T = \emptyset$ onda je očito T prebrojiv. Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Odaberemo $t_0 \in T$. Definirajmo funkciju $f : S \to T$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in T \\ t_0, & x \notin T. \end{cases}$$

Ako je $y \in T$ onda za $x = y$ vrijedi $f(x) = y$. Prema tome, f je surjekcija pa iz prethodne propozicije slijedi da je T prebrojiv skup. □

3.2 Konačni skupovi

Podsjetimo se da je konačan niz u nekom skupu S bilo koja funkcija oblika $\{0, ..., n\} \to S$ gdje je $n \in \mathbb{N}$. Za takav konačan niz kažemo da je duljine n.

Primjer 3.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je skup $\mathbb{N}^k$ prebrojiv.*
Odaberimo međusobno različite proste brojeve $p_1, ..., p_k$. Za $j \in \{1, ..., k\}$ neka je $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način: za $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \geq 1$, neka je $f_j(x)$ eksponent kojim prost broj p_j ulazi u rastav od x na proste faktore, a ako je $x = 0$, definiramo $f_j(x) = 0$. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa $F(x) = (f_1(x), ..., f_k(x))$. Dokažimo da je F surjekcija.
Neka je $u \in \mathbb{N}^k$. Tada je $u = (a_1, ..., a_k)$, gdje su $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$. Definirajmo $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$. Tada je $F(x) = (a_1, ..., a_k) = u$. Prema tome, F je surjekcija pa slijedi da je $\mathbb{N}^k$ prebrojiv skup.

Teorem 3.2.2. *Neka je S prebrojiv skup te neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je skup svih konačnih nizova duljine n u skupu S prebrojiv.*

Dokaz. Označimo sa Σ skup svih konačnih nizova duljine n u S. Ako je $S = \emptyset$, tada je $\Sigma = \emptyset$ pa je Σ prebrojiv skup. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji surjekcija $f : \mathbb{N} \to S$. Definirajmo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^{n+1} \to \Sigma$ na sljedeći način: za $(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$, neka je $\Phi(x_1, ..., x_{n+1}) : \{0, ..., n\} \to S$, $(\Phi(x_1, ..., x_{n+1}))(i) = f(x_{i+1})$.
Želimo pokazati da je Φ surjekcija.
Neka je $\sigma \in \Sigma$. Tada je $\sigma : \{0, ..., n\} \to S$. Za svaki $i \in \{0, ..., n\}$ imamo $\sigma(i) \in S$ pa budući da je f surjekcija, postoji $y_i \in \mathbb{N}$ takav da $\sigma(i) = f(y_i)$. Dakle, imamo brojeve $y_0, ..., y_n \in \mathbb{N}$. Definirajmo $(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ sa $x_i = y_{i-1}$ za $i \in \{1, ..., n + 1\}$. Tvrdimo da je

$$\Phi(x_1, ..., x_{n+1}) = \sigma. \tag{1}$$

Ovo su dvije funkcije $\{0, ..., n\} \to S$ pa je dovoljno provjeriti da se podudaraju za svaki $i \in \{0, ..., n\}$. Neka je $i \in \{0, ..., n\}$. Imamo

$$\Phi(x_1, ..., x_{n+1})(i) = f(x_{i+1}) = f(y_i) = \sigma(i),$$

dakle,

$$\Phi(x_1, ..., x_{n+1})(i) = \sigma(i).$$

Prema tome, vrijedi (1).
Time smo dokazali da za svaki $\sigma \in \Sigma$ postoji $x \in \mathbb{N}^{n+1}$ takav da je $\Phi(x) = \sigma$. Stoga je $\Phi : \mathbb{N}^{n+1} \to \Sigma$ surjekcija. Iz Propozicije 3.1.8 i Primjera 3.2.1 slijedi da je Σ prebrojiv. □

Korolar 3.2.3. *Neka je S prebrojiv skup. Tada je skup svih konačnih nizova u S prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ onda je tvrdnja korolara jasna. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je Σ_n skup svih konačnih nizova duljine n u S. Prema prethodnom teoremu, Σ_n je prebrojiv skup za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, očito je Σ_n neprazan skup za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz Propozicije 3.1.6 slijedi da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ prebrojiv skup. No, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ je upravo skup svih konačnih nizova u S. Time je korolar dokazan. □

3.3 Neizračunljive funkcije

Neka je $\mathcal{I}_\uparrow$ skup svih instrukcija oblika $i \uparrow$ (za neki $i \in \mathbb{N}$). Analogno, neka je $\mathcal{I}_\downarrow$ skup svih instrukcija oblika $i \downarrow k$ (za neke $i, k \in \mathbb{N}$) te neka je $\mathcal{I}_\rightarrow$ skup svih instrukcija oblika $\rightarrow k$ (za neki $k \in \mathbb{N}$). Neka je $\mathcal{I}$ skup svih instrukcija. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_\uparrow \cup \mathcal{I}_\downarrow \cup \mathcal{I}_\rightarrow \cup \{\otimes\}. \tag{1}$$

Propozicija 3.3.1. *Skup $\mathcal{I}$ je prebrojiv.*

Dokaz. Prema (1) i Korolaru 3.1.7 dovoljno je dokazati da su skupovi $\mathcal{I}_\uparrow$, $\mathcal{I}_\downarrow$, $\mathcal{I}_\rightarrow$ i $\otimes$ prebrojivi. Skup $\{\otimes\}$ je očito konačan pa je prebrojiv. Funkcija $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_\uparrow$ koja svakom $i \in \mathbb{N}$ pridružuje instrukciju $i \uparrow$ je očito surjekcija. Prema tome, $\mathcal{I}_\uparrow$ je prebrojiv skup. Analogno, vidimo da je skup $\mathcal{I}_\rightarrow$ prebrojiv. Funkcija $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_\downarrow$ koja uređenom paru (i, k) pridružuje instrukciju $i \downarrow k$ je surjekcija pa iz Primjera 3.1.4 i Propozicije 3.1.8 slijedi da je $\mathcal{I}_\downarrow$ prebrojiv skup. □

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih programa.

Propozicija 3.3.2. *Skup $\mathcal{P}$ je prebrojiv.*

Dokaz. Neka je Σ skup svih konačnih nizova u $\mathcal{I}$. Iz prethodne propozicije i Korolara 3.2.3 slijedi da je Σ prebrojiv skup. Svaki program je konačan niz instrukcija pa prema tome, $\mathcal{P} \subseteq \Sigma$. Iz Propozicije 3.1.9 slijedi da je $\mathcal{P}$ prebrojiv skup. □

Propozicija 3.3.3. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \rightarrow T$ injekcija. Pretpostavimo da je T prebrojiv skup. Tada je S prebrojiv skup.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : S \rightarrow f(S)$ sa $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$. Tada je g injekcija jer je f injekcija. Ako je $y \in f(S)$, onda postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ pa je $g(x) = y$. Prema tome, g je surjekcija. Dakle, g je bijekcija pa je $g^{-1} : f(S) \rightarrow S$ bijekcija (pa posebno i surjekcija). Očito je $f(S) \subseteq T$ pa iz Propozicije 3.1.9 slijedi da je $f(S)$ prebrojiv skup. Sada iz Propozicije 3.1.8 slijedi da je S prebrojiv skup. □

Propozicija 3.3.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka je C skup svih izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Tada je C prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $f \in C$. Tada je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija, pa postoji program P_f koji je računa. Na taj način imamo definiranu funkciju $\Phi : C \to \mathcal{P}$, $\Phi(f) = P_f$. Tvrdimo da je Φ injekcija.
Neka je $f, g \in C$ takvi da je $P_f = P_g$. Pretpostavimo da su $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ brojevi koji se nalaze u registrima $R_1, .., R_k$ te da se u svim ostalim registrima nalazi 0. Znamo da za te ulazne podatke program P_f staje te da se nakon njegovog izvršavanja u R_0 nalazi $f(x_1, .., x_n)$. Isto tako znamo da program P_g staje za navedene ulazne podatke te da se nakon njegovog izvršavanja u R_0 nalazi $g(x_1, .., x_n)$. Budući da je $P_f = P_g$ vrijedi $f(x_1, .., x_n) = g(x_1, .., x_n)$. Zaključujemo da je $f = g$. Prema tome, Φ je injekcija. Prema Propoziciji 3.3.2 skup $\mathcal{P}$ je prebrojiv pa je, prema prethodnoj propoziciji, i skup C prebrojiv. □

Korolar 3.3.5. *Skup svih izračunljivih funkcija je prebrojiv.*

Dokaz. Za $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ neka je C_k skup svih izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Tada je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} C_k$ skup svih izračunljivih funkcija. Prema prethodnoj propoziciji i prema Propoziciji 3.1.6, skup $\bigcup_{k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} C_k$ je prebrojiv. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Definicija 3.3.6. *Za skup koji nije prebrojiv kažemo da je **neprebrojiv**.*

Teorem 3.3.7. *Skup svih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je neprebrojiv.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ prebrojiv skup. Tada postoji surjekcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$. Dakle, za svaki $f \in \mathcal{F}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $f = \Phi(i)$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $f(n) = \Phi(n)(n) + 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f \in \mathcal{F}$ pa postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $f = \Phi(i)$. Slijedi da je $f(n) = \Phi(i)(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa posebno za $n = i$ dobivamo $f(i) = \Phi(i)(i)$. No, iz definicije od f slijedi da je $f(i) = \Phi(i)(i) + 1$ što je kontradikcija. Prema tome, skup $\mathcal{F}$ nije prebrojiv. □

Korolar 3.3.8. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \to T$ injekcija. Pretpostavimo da je S neprebrojiv skup. Tada je T neprebrojiv skup.*

Dokaz. Kada bi T bio prebrojiv onda bi, prema Propoziciji 3.3.3, S bio prebrojiv što je nemoguće po tvrdnji. □

Korolar 3.3.9. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je skup svih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ neprebrojiv.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}'$ skup svih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tako da za $f \in \mathcal{F}$ vrijedi $\Phi(f) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\Phi(f)(x_1, ..., x_k) = f(x_1)$ za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je Φ injekcija.
Pretpostavimo da su $f, g \in \mathcal{F}$ tako da je $\Phi(f) = \Phi(g)$. Za bilo koji $x \in \mathbb{N}$ tada vrijedi

$\Phi(f)(x, 0, ..., 0) = \Phi(g)(x, 0, ..., 0)$, tj. $f(x) = g(x)$. Prema tome, $f = g$. Dakle, Φ je injekcija pa iz prethodnog korolara i Teorema 3.3.7 slijedi da je $\mathcal{F}'$ neprebrojiv. $\square$

Korolar 3.3.10. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada postoji funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koja nije izračunljiva. Čak štoviše, skup svih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koje nisu izračunljive je neprebrojiv.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, neka je C skup svih izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te neka je $\mathcal{N}$ skup svih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koje nisu izračunljive. Znamo da je C prebrojiv skup (prema Propoziciji 3.3.4) te da je $\mathcal{F}$ neprebrojiv skup (prema prethodnom korolaru). Očito vrijedi

$$C \cup \mathcal{N} = \mathcal{F}. \tag{1}$$

Kada bi $\mathcal{N}$ bio prebrojiv, onda bi iz Propozicije 3.1.6 i (1) slijedilo da je $\mathcal{F}$ prebrojiv, što je kontradikcija. Prema tome, $\mathcal{N}$ je neprebrojiv. $\square$

Bibliografija

[1] S. Mardešić, *Matematička analiza 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[3] M. Vuković, *Izračunljivost*, dostupuno na `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/izn-skripta-2009.pdf` (kolovoz 2020.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo neke elementarne aspekte izračunljivosti. U prvom poglavlju bavili smo se pojmom izračunljive funkcije: prvo smo definirali pojam programa pa pojam izračunljive funkcije, a zatim smo naveli neke primjere izračunljivih funkcija. Nadalje, proučavali smo presudoprograme i makro-programe. U nastavku smo obradili pojam makro-izračunljivosti te dokazali da je svaka makro-izračunljiva funkcija izračunljiva. U drugom poglavlju proučavali smo rekurzivne funkcije. Najprije smo definirali operatore kompozicije i primitivne rekurzije, a nakon toga i primitivno rekurzivne funkcije te smo pokazali neke primjere tih funkcija. Nakon uvođenja μ-operatora, definirali smo rekurzivne funkcije te dokazali da je svaka rekurzivna funkcija izračunljiva. U trećem poglavlju definirali smo prebrojive skupove, a zatim dokazali neka osnovna svojstva tih skupova. Proučavali smo i konačne nizove te naposlijetku dokazali glavni rezultat trećeg poglavlja: skup svih izračunljivih funkcija je prebrojiv. Na samom smo kraju izveli zaključak da onda postoje funkcije koje nisu izračunljive.

Summary

In this thesis, we studied some elementary aspects of computability. In the first chapter, we dealt with the concept of a computable function: first we defined the notion of a program, then the notion of a computable function, and then we gave some examples of computable functions. Furthermore, we studied the pseudoprograms and the macro-programs. In the following, we presented the concept of macro-computability and then we proved that every macro-computable function is computable. In the second chapter, we studied recursive functions. Firstly we defined operators such as composition and primitive recursion and we defined primitive recursive functions after which we showed some examples of these functions. After introducing the μ-operator, we defined recursive functions and proved that every recursive function is computable. In the third chapter, we defined countable sets and then proved some basic characteristics of these sets. We also studied the finite strings and finally proved the main result of the third chapter: the set of all computable functions is countable. At the very end, we concluded that then there are functions that are not computable.

Životopis

Moje ime je Petra Kraljević. Rođena sam 17. veljače 1997. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Medvedgrad pohađala sam u Zagrebu u razdoblju od 2003. do 2011. godine nakon čega sam u istom gradu upisala srednju školu, matematičku V. gimnaziju koju sam završila 2015. godine. Neposredno nakon, upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu gdje sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika-smjer nastavnički, a nakon toga studij sam nastavila na diplomskom sveučilišnom studiju Matematika-smjer nastavnički.