Znameniti matematički zadaci kroz povijest

Kroupa, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Kroupa

ZNAMENITI MATEMATIčKI ZADACI KROZ POVIJEST

Diplomski rad

Zagreb, rujan 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Kroupa

ZNAMENITI MATEMATIčKI ZADACI KROZ POVIJEST

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Ovim putem zahvaljujem se svojoj poštovanoj mentorici doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler koja je prihvatila mentorstvo te me svojim stavom i zanimljivim predavanjima iz kolegija Povijest matematike zainteresirala za ovaj diplomski rad i daljnje obrazovanje o povijesti matematike. Također se zahvaljujem svojim roditeljima što su mi omogućili obrazovanje i uvijek bili neizmjerna podrška.

Sadržaj

Uvod

Dobro je poznato da se matematika razvila i razvijala kroz rješavanje različitih zadataka. Cilj ovog rada je predstaviti različite zanimljive zadatke iz povijesti matematike (formulaciju, osnovne crte rješavanja, utjecaj na daljnji razvoj) iz različitih matematičkih disciplina. Neki matematički zadatci u povijesti ističu se bilo svojim formulacijama, nerijetko zabavnim ili pak po posljedicama (činjenici da su potakli mnoga daljnja matematička istraživanja). Spomenut ćemo i neke manje poznate zadatke, ali opet zanimljive za uvid ili korištenje u nastavi matematike. Zadaci su u poglavlja raspoređeni prema matematičkoj disciplini kojoj pripadaju. Za sve spomenute matematičare u fusnotama dajemo kratke biografske bilješke, za koje smo koristili [25, 33].

Poglavlje 1

Aritmetika i algebra

Čuvene su neke izreke o aritmetici: „Što bi bio život bez aritmetike, osim scene iz horora?” ili „U aritmetici ljubavi, jedan plus jedan jednako je sve, a dva minus jedan jednako je ničemu” [33]. U osnovnoj školi prvo učimo brojati do deset, onda do sto, a zatim postepeno povećavamo našu sposobnost korištenja računskih operacija: zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, korjenovanja, potenciranja. Aritmetika je najstarija matematička disciplina koja se bavi navedenim računskim operacijana. Ona je svuda oko nas. Bitna je za rješavanje mnogih svakodnevnih zadataka, bili oni jednostavni ili složeni. Naziv discipline potječe od grčke riječi *arithmetike*, koja se sastoji od riječi *arithmos* (broj) i *tike* (umijeće). No, aritmetičke zadatke nalazimo još puno prije antičke Grčke, u starom Egiptu i Sumeriji. Apstraktizacijom aritmetike na račun s nepoznatim veličinama nastala je pak algebra, matematička disciplina koja se bavi svojstvima računskih operacija, a u svakodnevnom i školskom govoru se pod algebrom uglavnom misli na rješavanje jednadžbi. Naziv algebra potječe od arapske riječi *al-džabr* (skupljanje razlomljenih dijelova). U ovom poglavlju prezentirat ćemo neke od najzanimljivijih aritmetičkih i algebarskih zadataka u povijesti, pri čemu redoslijed nije kronološki.

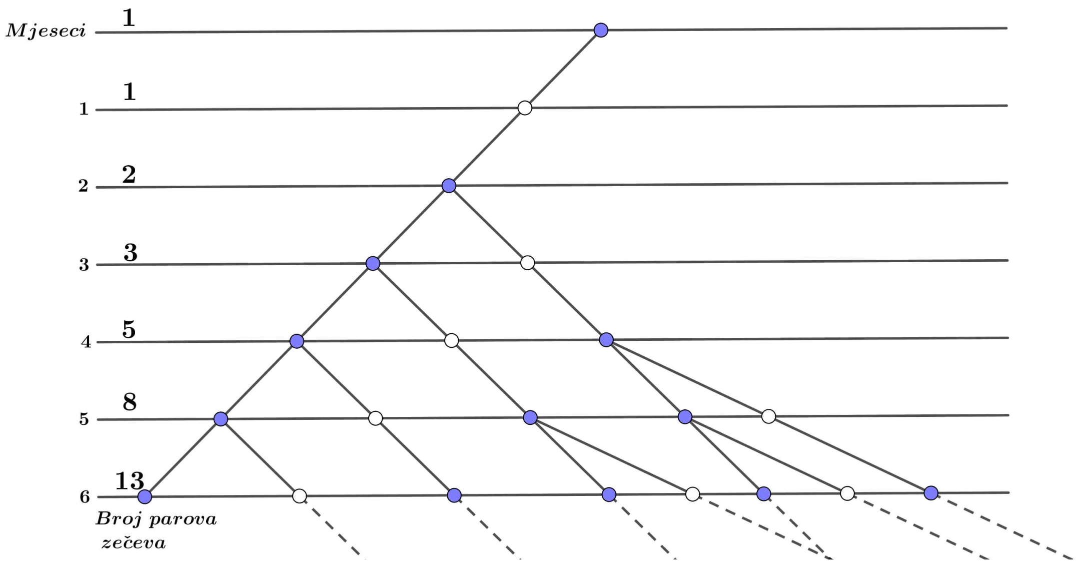
1.1 Fibonaccijev problem zečeva

Leonarno iz Pise[1] poznat kao **Fibonacci**, napisao je najutjecajnije matematičko djelo srednjovjekovne Europe, *Liber Abaci* (Knjiga o računanju, prvo izdanje 1202.). U toj je knjizi uveden i *Fibonaccijev niz* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., tj. niz kojem su prva dva člana jednaka 1, a svaki sljedeći je zbroj prethodnih dvaju [18]. Dobio ga je razmatrajući sljedeći zadatak:

[1]Leonardo iz Pise (otprilike 1180.–1250.) bio je srednjovjekovni talijanski matematičar, poznat po tome što je popularizirao uporabu indoarapskih brojeva u Europi te što je uveo razlomačku crtu.

„Seljak je kupio par zečeva. Ako zečevi postaju zreli nakon dva mjeseca, koliko će parova zečeva biti nakon 12 mjeseci, ako pretpostavimo da svaki mjesec svaki par koti novi muško-ženski par (nema miješanja parova te uz pretpostavku da ne ugibaju)?"

Rješenje Fibonaccijevog zadatka dano je na slici 1.1, na kojoj je za svaki mjesec (horizontalna crta) ukupni broj točaka jednak broju tada živućih parova zečeva. Plave točke označavaju parove koji se okote taj mjesec, a bijele one koji su preživjeli iz prethodnih mjeseci.



Slika 1.1: Grafičko rješenje Fibonnacijevog problema zečeva.

Kao što vidimo, brojevi parova zečeva čine niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Uočimo da je svaki član tog niza dobiven kao zbroj prethodna dva člana. Sljedeći članovi niza su: 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., dakle nakon 12 mjeseci biti će ukupno 233 para zečeva.

Fibonaccijevi su brojevi ime dobili u 19. st. (ime im je dao **Eduard Lucas**[2]) i pokazali su se vrlo zanimljivim i primjenjivim u matematici i izvan nje. Fibonaccijev niz $(F_n)_n$ zadovoljava rekurzivnu relaciju:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 3.$$

[2]Eduard Lucas (1842.–1891.) bio je francuski matematičar, koji se bavio teorijom brojeva.

Eksplicitnu formulu za n-ti Fibonaccijev broj pronašao je **Abraham de Moivre**[3] 1730. godine. Iz te formule uočavamo povezanost Fibonaccijevih brojeva s omjerom zlatnog reza (vidi odjeljak 1.2):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Utjecaj člana $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ je zanemariv, jer je $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, stoga je dovoljno izračunati prvi član $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ i zaokružiti rezultat na najbliži cijeli broj koji nije veći od njega da bi se dobila točna cjelobrojna vrijednost F_n. Drugim riječima:

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\right]\right\rfloor,$$

gdje $\lfloor x \rfloor$ predstavlja najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x. Primjerice, za $n = 13$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{13} + \frac{1}{2} = 233{,}4991416, \text{ stoga je } F_{13} = 233 \ \ [18,\ 33].$$

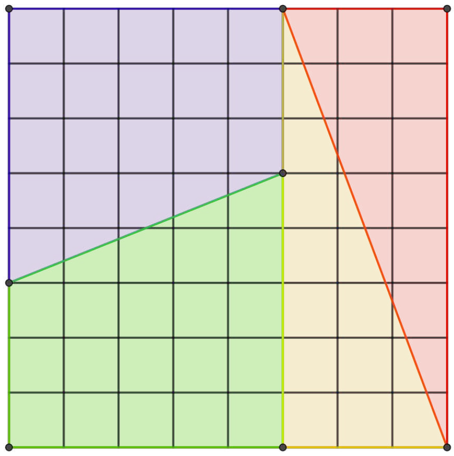
1.2 Paradoksi 64 = 65?! i 169 = 168?!

Promotrimo „šahovsku" ploču dimenzije 8×8 podijeljenu na četiri dijela: dva sukladna pravokutna trapeza s osnovicama 3 i 5 i visinom 5 te dva sukladna pravokutna trokuta s katetama 3 i 8, kao što je prikazano na slici 1.2.

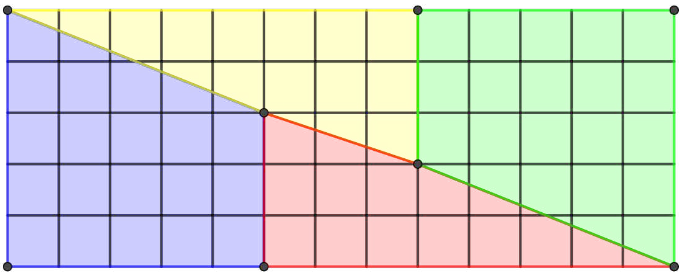
Površina cijele ploče je očigledno 64 kvadratne jedinice. Ako opisana četiri dijela zajedno spojimo u oblik pravokutnika, kao što je prikazano na slici 1.3, dobivamo pravokutnik dimenzije 5×13 koji sadrži 65 malih kvadrata, tj. čija je površina 65 kvadratnih jedinica. Dakle, $64 = 65$?!

Slično, ako podijelimo „šahovsku" ploču dimenzije 13×13 (površine 169 kvadratnih jedinica) na četiri dijela kao na slici 1.4 i složimo dijelove kako je prikazano na slici 1.5, dobivamo pravokutnik dimenzije 8×21 koji sadrži 168 malih kvadrata (jedan kvadrat manje). U ovom slučaju dobivamo $169 = 168$?! Kako je to moguće?

[3]Abraham de Moivre (1667.–1754.) bio je francuski matematičar, poznat po formuli koja povezuje kompleksne brojeve i trigonometriju te po uvođenju normalne distribucije u vjerojatnosti



Slika 1.2: Šahovska ploča 8×8.



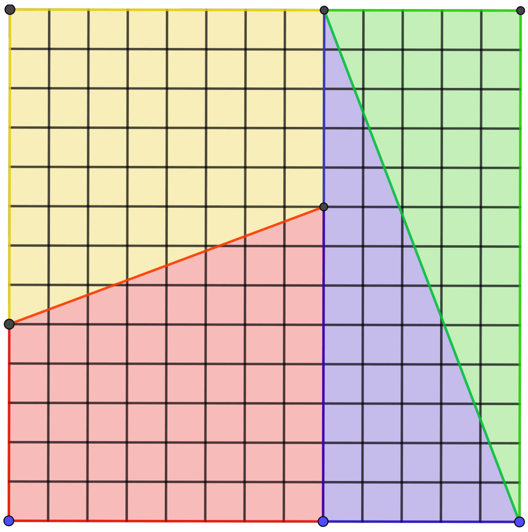
Slika 1.3: Pravokutnik dimenzije 5×13.

Postoje dva načina da razjasnimo ove paradokse. Jedan je geometrijski, a jedan temeljem činjenice da su brojevi 5, 8, 13, 21 uzastopni Fibonaccijevi brojevi koji zadovoljavaju relaciju poznatu kao **Cassinijev**[4] identitet za Fibonaccijeve brojeve:

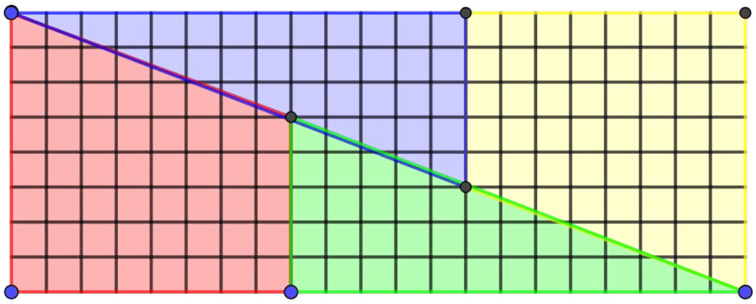
$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

U prvom slučaju imamo: $F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$, uvrstimo u relaciju, dobivamo: $13 \cdot 5 - 8 \cdot 8 = 1$ (jedan kvadrat više). U drugom slučaju imamo: $F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21$, uvrsimo u jednakost i dobivamo: $21 \cdot 8 - 13 \cdot 13 = -1$, (jedan kvadrat manje). Općenito, uzimajući Fibonaccijeve brojeve F_{n-1}, F_n i F_{n+1} možemo podijeliti bilo koji $F_n \times F_n$ kvadrat na četiri dijela pomoću slične konstrukcije koja, nakon sastavljanja, tvori pravokutnik dimenzija $F_{n+1} \times F_{n-1}$. Prema Cassinijevom identitetu, razlika površina kvadrata stranice

[4]Giovanni Domenico Cassini (1625.–1712.) bio je francuski astronom, matematičar, inžinjer i astrolog talijanskog podrijetla. U matematici su po njemu nazvani krivulja (Cassinijev oval) i identitet (Cassinijev identitet za Fibonaccijeve brojeve).



Slika 1.4: Šahovska ploča 13×13.

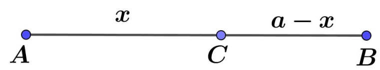


Slika 1.5: Pravokutnik dimenzije 8×21.

F_n i pravokutnika sa stranicama F_{n-1} i F_{n+1} je 1, jedan kvadrat bit će prividno dodan ako je n paran, a prividno izgubljen, ako je n neparan [33].

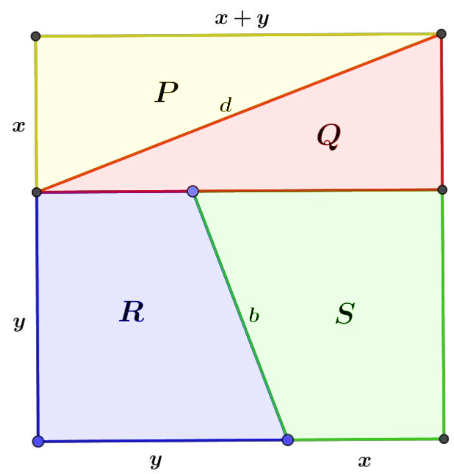
Pogledajmo kako prividni paradoks objasniti geometrijski. Promotrimo slučaj šahovske ploče 8×8. Označimo s d duljinu hipotenuze pravokutnih trokuta, s b duljinu kraka trapeza i s m dijagonalu pravokutnika sa slike 1.3. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut dobivamo: $d = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}5440$. Nadalje je $b = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}3852$ i $m = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \approx 13{,}9284$. Očito je $\sqrt{73} + \sqrt{29} > \sqrt{194}$. Zaključujemo da hipotenuza pravokutnog trokuta, krak trapeza i dijagonala pravokutnika čine trokut. Odnosno, na slici 1.3 krije se paralelogramska rupa sa stranicama duljina $\sqrt{73}$ i $\sqrt{29}$ površine 1. Analogno se događa u drugom opisanom slučaju.

Postavlja se pitanje, je li moguće da se prilikom preslagivanja kvadrata na opisani način u pravokutniku ipak ne pojavi paralelogram? Odgovor je potvrdan. Ako dužinu $\overline{AB}$ podijelimo točkom C na dva dijela tako da je omjer duljina većeg dijela i cijele dužine jednak omjeru duljina manjeg dijela i većeg dijela, kažemo da smo dužinu podijelili u **omjeru zlatnog reza**.



Slika 1.6: Podjela dužine u omjeru zlatnog reza.

Označimo li dužinu $\overline{AB}$ s a i duljinu dužine $\overline{AC}$ s x, definicija omjera zlatnog reza može se zapisati kao $a : x = x : (a - x)$, odakle je $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Broj $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ naziva se **omjerom zlatnog reza ili zlatnim brojem**. No, u kakvoj je on vezi s upravo opisanim problemom? Promotrimo pitanje jednakosastavljivosti kvadrata i pravokutnika: Postoji li takva podjela stranice kvadrata da se dijelovi P, Q, R i S, kao što su prikazani na slici 1.7, stvarno mogu presložiti u pravokutnik? Neka je stranica kvadrata podijeljena na dijelove x i y, pri čemu je $0 < x < y$.

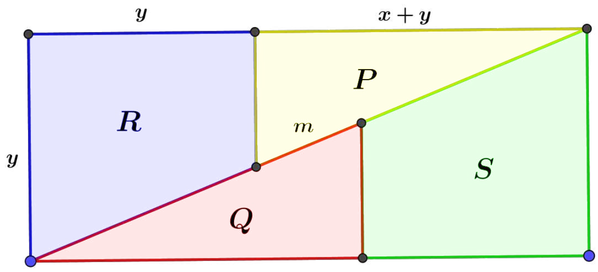


Slika 1.7: Podjela kvadrata na dijelove.

Prvi uvjet koji mora vrijediti da bi se ti dijelovi kvadrata mogli presložiti u pravokutnik kao na slici 1.8 jest jednakost površina kvadrata i pravokutnika: $(x + y)^2 = y \cdot (x + 2y)$. Iz tog uvjeta dobivamo da je

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot y,$$

tj. brojevi x i y u omjeru su zlatnog reza.



Slika 1.8: Presloženi dijelovi kvadrata u pravokutnik.

Ako su brojevi x i y u omjeru zlatnog reza, onda se pri preslagivanju u pravokutnik ne pojavljuje paralelogram. Točnije, dokažimo da je $d + b = m$, pri čemu je d duljina hipotenuze trokuta P s katetama x i $x + y$, b je duljina kraka trapeza R, a m je duljina dijagonale pravokutnika sa stranicama y i $x + 2y$. Pri dokazu ove tvrdnje koristimo se činjenicom da za omjer zlatnog reza vrijedi da je $\varphi^2 = 1 - \varphi$. Iz **Pitagorinog poučka** dobivamo

$$d^2 = 3y^2,$$
$$b^2 = 3(1-\varphi)y^2,$$
$$m^2 = 3(\varphi+2)y^2.$$

Pomoću ovih izraza lako se vidi da je $d + b = m$. Dakle, u slučaju kad je stranica kvadrata razdijeljena na dijelove kojima su duljine u omjeru zlatnog reza, preslagivanjem dijelova na opisani način dobiva se pravokutnik. To je jedini slučaj diobe stranice kvadrata kad se pojavljuje takva situacija [24, 33].

1.3 Problem kvadratnih brojeva

U Fibonaccijevoj knjizi *Liber Quadratorum* (Knjiga kvadrata, 1225.) filozof **Ivan iz Palerma**[5] postavio je sljedeći problem:

[5]Ivan iz Palerma bio je prevoditelj s arapskog na latinski, radio je na dvoru cara Friedricha II.

„Pronađi kvadratne brojeve, takve da kada im dodaš ili oduzmeš 5, opet dobiješ kvadratni broj [33].”

Ovaj problem možemo interpretirati kao pronalaženje cjelobrojnih rješenja sustava jednadžbi $x^2+5=y^2$, $x^2-5=z^2$. Fibonacci je bio uspješan u rješavanju općenitijeg problema u kojem je uveo ono što je nazivao *kongruentnim brojevima*, a to su brojevi n oblika:

$$ab(a+b)(a-b), \text{kada je } a+b \text{ paran,}$$
$$4ab(a+b)(a-b), \text{kada je } a+b \text{ neparan.}$$

Pokazao je da su kongruentni brojevi uvijek djeljivi sa 24, te da cjelobrojna rješenja sustava

$$x^2+n=y^2$$
$$x^2-n=z^2$$

mogu biti pronađena jedino ako je n kongruentan broj. Budući da je Ivan iz Palerma zahtijevao da je $n = 5$ i kako 5 nije kongruentan, slijedi da problem nema cjelobrojnih rješenja. Međutim, rješenje postoji u skuou racionalnih brojeva. Iz činjenie da je $720 = 12^2 \cdot 5$ kongruentni broj ($a = 5$ i $b = 4$) te da je $41^2 + 720 = 49^2$ i $41^2 - 720 = 31^2$, dijeljenjem obje jednadžbe sa 12^2 dobivamo da je

$$x = \frac{41}{12},\ y = \frac{49}{12},\ z = \frac{31}{12} \quad [33].$$

1.4 Linearne, kvadratne, kubne i jednadžbe 4. stupnja

Al-Hvarizmi[6] napisao je udžbenik algebre *Hisab al-džabr wa-ĺ-mukabala* (830.) iz čijeg je naziva izvedena riječ **algebra** (*al-džabr)*. Dao je klasifikaciju linearnih i kvadratnih jednadžbi koja proizlazi iz činjenice da se veličine u njima tretiraju geometrijski pa ne mogu biti 0 niti negativne. Razlikuje šest tipova jednadžbi:[7]

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = c,\ bx = c,\ ax^2+bx = c,\ ax^2+c = bx,\ ax^2 = bx+c,$$

gdje su a i b pozitivni brojevi. Budući da se razmatraju samo pozitivna rješenja, jedini tip koji bi mogao imati dva rješenja jest peti tip, čega je Al-Hvarizmi bio svijestan. Redukcija proizvoljne linearne ili kvadratne jednadžbe na jedan od tih šest tipova provodi se

[6] Al-Hvarizmi (otprilike 780.–850.) bio je prvi veliki arapski matematičar koji je djelovao u Kući mudrosti. Poznat po tome što s njime započinje razvoj prave algebre.

[7] Ističemo da ovakva notacija nije postojala prije 17. stoljeća, no radi lakše razumljivosti teksta u ovom radu starije rezultate opisujemo u modernoj notaciji.

operacijama *al-džabr* (prebacivanje negativnih članova s jedne na drugu stranu jednakosti) i *al-mukabala* (oduzimanje pozitivnih članova od obiju strana kako si se skupili članovi iste potencije). Dao je i pravila za rješavanje svakog od navedenih tipova i (geometrijski) dokaz za svaki primjer [18].

Primjer 1.4.1. *Jedan Al-Hvarizmijev zadatak glasi: „Kvadrat i deset korijena čine 39 jedinica.", odnosno u modernoj notaciji*

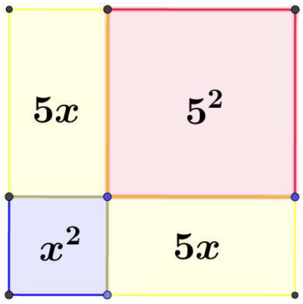
$$x^2 + 10x = 39.$$

Radi se o jednadžbi četvrtog tipa u njegovoj gore navedenoj klasifikaciji.

Postupak za rješenje, kod Al-Hvarizmija, je sljedeći:

1. *Uzmi pola broja korijena:* $10/2 = 5$*;*
2. *kvadriraj dobiveno:* $5^2 = 25$*;*
3. *dobiveno pribroji broju jedinica:* $39 + 25 = 64$*;*
4. *korjenuj:* $\sqrt{64} = 8$*;*
5. *od toga oduzmi pola broja korijena:* $8 - 5 = 3$*. 3 je traženo rješenje.*

Postupak je opravdao i geometrijski (slika 1.9) i lako je uočiti da se ovdje radi o svođenju na potpun kvadrat, odnosno o modernoj formuli za rješenja kvadratne jednadžbe, uz izbjegavanje računa s negativnim brojevima [*11*].



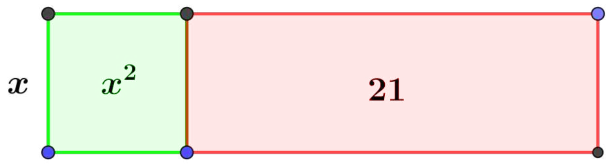
Slika 1.9: Al-Hvarizmijevo rješenje jednadžbe $x^2 + 10x = 39$.

Primjer 1.4.2. *Al-Hvarizmi je riješio i jednu jednadžbu petog tipa, u modernom zapisu* $x^2 + 21 = 10x$*.*

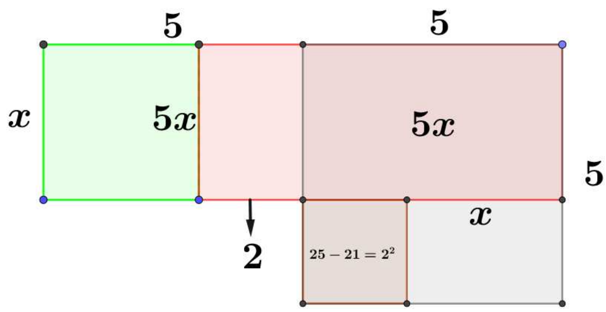
Al-Hvarizmijev postupak je i ovdje svođenje na potpun kvadrat:

1. *Prepolovi broj korijena:* $10/2 = 5$*;*
2. *dobiveno pomnoži sa sobom:* $5 \cdot 5 = 25$*;*
3. *od toga oduzmi* 21 *koji je dodan kvadratu:* $25 - 21 = 4$*;*
4. *uzmi njegov kvadratni korijen, 2, i oduzmi ga od pola broja korijena, od 5:* $5 - 2 = 3$*;*
5. *3 je traženi korijen, čiji kvadrat je 9.*
6. *Ili, možemo dodati kvadratni korijen polovici broja korijena i zbroj je 7. To je onda korijen kojeg tražimo i kvadrat je 9.*

Al-Hvarizmijeva geometrijska interpretacija rješenja vidi se na slikama 1.10 i 1.11.



Slika 1.10: Zadatak $x^2 + 21 = 10x$.



Slika 1.11: Geometrijsko objašnjenje rješenja zadatka $x^2 + 21 = 10x$ [11].

Omar Khayyam[8], u svome djelu poznatom kao *Algebra*, je proširio Al-Hvarizmijevu klasifikaciju i na kubne jednadžbe. Tako je dobio ukupno 19 tipova jednadžbi, od kojih su 5 bez konstantnog člana pa se svode na kvadratne. Ostale su u modernoj notaciji sljedeće:

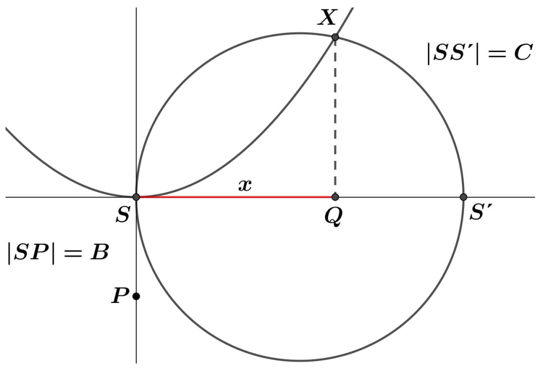
$$x^3 = c$$

[8]Omar Khayyam (1048.–1131.) bio je perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik. Dao je klasifikaciju kubnih jednadžbi, s geometrijskim rješenjima pomoću sjecišta konika.

$$
\begin{gathered}
x^3 + bx = c \\
x^3 + c = bx \\
x^3 = bx + c \\
x^3 + ax^2 = c \\
x^3 + c = ax^2 \\
x^3 = ax^2 + c \\
x^3 + ax^2 + bx = c \\
x^3 + ax^2 + c = bx \\
x^3 + bx + c = ax^2 \\
x^3 = ax^2 + bx + c \\
x^3 + ax^2 = bx + c \\
x^3 + bx = ax^2 + c \\
x^3 + c = ax^2 + cx.
\end{gathered}
$$

Za svaki od navedenih tipova Khayyam daje rješenje presjekom konika [11].

Primjer 1.4.3. *Khayyamovo rješenje kubne jednadžbe tipa $x^3 + bx = c$, gdje su b i c pozitivni brojevi, je kako slijedi. Označimo $b = B^2$. Iz omjera $c : b = C$ slijedi da je $c = B^2C$. Promatramo kružnicu promjera C i parabolu s tjemenom S na toj kružnici. Os parabole je tangenta na kružnicu, razmak fokusa i ravnalice je $B/2$ (slika 1.12).*



Slika 1.12: Khayyamovo rješenje zadatka $x^3 + bx = c$.

S X označimo sjecište kružnice i parabole. Neka je Q projekcia točke X na promjer kružnice $\overline{SS'}$ te neka je P točka na osi narabole sa svojstvom $|SP| = B$. Budući da je X

na paraboli, vrijedi: $|SQ|^2 = |SP| \cdot |XQ|$, *tj.* $\frac{x}{|XQ|} = \frac{B}{x}$. *Kako je* X *na kružnici, to je* $\triangle SS'X$ *pravokutan pa je* $\triangle SQX \sim \triangle XQS'$. *Slijedi da je* $\frac{x}{|XQ|} = \frac{|XQ|}{C-x}$. *Stoga je*

$$\frac{B}{x} = \frac{x^2/B}{C-x},$$

odnosno $x = |SQ|$ [*11*].

Talijanski matematičari 16. stoljeća bavili su se problemom rješivosti kubnih jednadžbi bez kvadratnog člana u radikalima, tj. tražili su postupak (formulu) kojom bi se kao i kod kvadratne jednadžbe direktno iz koeficijenata, korištenjem samo osnovnih računskih operacija (konačno mnogo puta) mogla izračunati rješenja. Uočili su da se supstitucijom $x = y \pm \frac{a}{3}$ (ako je s a označen koeficijent uz kvadratni član) svaka normirana kubna jednadžba svodi na takvu, dakle da je dovoljno naći rješenja kubnih jednadžbi drugog, trećeg i četvrtog tipa iz Khayyamove klasifikacije.

Primjer 1.4.4. *Jednadžba* $x^3 + 3x^2 = x + 4$, *se supstitucijom* $x = y - 1$ *svodi na* $y^3 = 4y + 1$.

Koeficijenti u ta tri tipa reduciranih kubnih jednadžbi su $b = A^2 > 0$ i $c = B^3 > 0$, uzimajući u obzir princip homogenosti (duljine se mogu zbrajati samo s duljinama, površine s površinama, volumeni s volumenima). Oko 1515. **Scipione del Ferro**[9] našao je algebarsku metodu za rješavanje (rješenje u radikalima) kubnih jednadžbi tipa $x^3 + bx = c$. Njegovo rješenje ponovno je otkrio **Niccolo Tartaglia**[10], a to je rješenje na ostala dva tipa proširio **Girolamo Cardano**[11] [13].

Koristeći modernu notaciju i račun koji dozvoljava negativne brojeve, njihova rješenja sva tri tipa reduciranih kubnih jednadžbi možemo objediniti u sljedeći postupk. U jednadžbi oblika $x^3 - 3px - 2q = 0$ koristimo supstituciju $x = u + v$. Raspisivanjem dobivamo: $u^3 + v^3 + 3(uv - p)(u + v) - 2q = 0$. Ako uzmemo $uv = p$, onda preostaje $u^3 + v^3 = 2q$. Stoga se umjesto polazne jednadžbe rješava sustav:

$$u^3 + v^3 = 2q, \quad u^3 v^3 = p^3.$$

Dobivamo:

[9] Scipione del Ferro (1463.–1526.) bio je profesor matematike u Bologni. Riješio je prvi tip reducirane kubne jednadžbe.

[10] Niccolo Tartaglia (1500.–1557.) bio je samouki matematičar iz Brescie. Osim po doprinosu rješenju kubne jednadžbe, poznat je po uvidu da projektil ima javeći domet ako se ispali pod kutem od 45°.

[11] Girolamo Cardano (1501.–1576.) bio je milanski liječnik, matematičar, astrolog i kockar. Poznat je po sukobu s Tartagliom oko rješenja kubne jednadžbe. Dva najpoznatija njegova djela su *Ars Magna* (1545.) i *Liber de Ludo Aleae*.

$$x = u + v = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Broj $D = q^2 - p^3$ zove se diskriminantom kubne jednadžbe. Ako je $D = 0$, sva rješenja su realna (i jedno je bar dvostruko). Ako je $D > 0$, samo jedno rješenje je realno, a druga dva su konjugirano kompleksna. Ako je $D < 0$, u i v su kompleksni, no kubna jednadžba ima tri različita realna rješenja [13].

Primjer 1.4.5. *Tartaglia-Cardanovom metodom riješimo jednadžbu iz Cardanove Ars Magne,* $x^3 = 15x + 4$. *Vidimo da je tu* $p = 5$ *i* $q = 2$. *Stoga redom imamo:*

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 = 4,\ u^3v^3 &= 125,\\
uv &= 5,\\
v &= \frac{5}{u},\\
u^3 + \frac{125}{u^3} &= 4,\\
u^6 - 4u^3 + 125 &= 0,\\
(u^3 - 2)^2 + 121 &= 0,\\
u^3 - 2 &= \pm\sqrt{-121}.
\end{aligned}$$

Budući da je Cardano znao da $x^3 = 15x + 4$ *ima rješenje* $x = 4$, *iako je smatrao da drugi korijen negativnog broja ne postoji, prihvatio je ovo kao međukorak te je ovo ujedno prva pojava kompleksnih brojeva u povijesti matematike. Odabravši varijantu s* $+$, *iz toga je dalje izračunao* $v^3 = 4 - u^3 = 2 - \sqrt{-121}$ *i stoga je*

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

No, je li uistinu dobiveno rješenje jednako 4? To je nešto kasnije dokazao Rafael Bombelli[12]. *Kako? Uočio je prvo da, ako to uopće jest smisleno, onda je* $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}$. *Promotrimo prvo izraz:*

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}.$$

[12]Rafael Bombelli (1526.–1572.) bio je inžinjer i matematičar iz Bologne, proučavao je Cardanova djela. Dokazao je da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe i opisao račun s kompleksnim brojevima (drugim korijenima negativnih brojeva).

Kubiranjem i sređivanjem, dobivamo

$$2+\sqrt{-121} = 2+11\sqrt{-1} = a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)\sqrt{-1},$$

iz čega slijedi da je

$$2 = a(a^2-3b^2),\ \ 11 = b(3a^2-b^2).$$

Dobivamo $a = 2$ *i* $b = 1$. *Stoga je*

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4\ \ [13].$$

Lodovico Ferrari[13] je dopunio metodu za rješavanje kubne jednadžbe do metode za rješavanje jednadžbe četvrtog stupnja. Njegovu metodu opisat ćemo samo na primjeru.

Primjer 1.4.6. *Ferrarijevom metodom riješimo jednadžbu* $x^4+4x^3-17x^2-24x+36 = 0$.

Supstitucijom $x = y-1$ *(x je y minus* $\frac{1}{4}$ *koeficijenta uz* x^3*) eliminiramo kubni član, te dobivamo jednadžbu kojoj članove* 2. *i* 4. *stupnja pišemo na lijevoj strani, a ostatak na desnoj (*$y^4-23y^2 = -18y-40$*). Lijevu stranu svodimo na potpuni kvadrat, pribrojimo* $\left(\frac{23}{2}\right)^2$ *i dobijemo:*

$$\left(y^2-\frac{23}{2}\right)^2 = \frac{369}{4}-18y.$$

Uvodimo dodatnu nepoznanicu t pribrajanjem $t^2+2t(y^2-23/2)$. *Sređivanjem izraza dobivamo:*

$$\left(y^2-\frac{23}{2}+t\right)^2 = 2ty^2-18y+t^2-23t+\frac{369}{4}.$$

Odaberimo jedan t za koji je diskriminanta desne strane s obzirom na x jednaka 0*, npr.* $t = \frac{1}{2}$. *Uvrštavanjem dobivamo:*

$$(y^2-11)^2 = y^2-18y+81 = (y-9)^2.$$

Stoga je redom

$$y^2-11 = \pm(y-9),$$
$$y_{1,2,3,4} = -5,-1,2,4,$$
$$x_{1,2,3,4} = -6,-2,1,3\ \ [18,\ 11,\ 13].$$

[13]Lodovico Ferrari(1522.–1565.) bio je talijanski matematičar kojeg je Cardano poučavao.

1.5 Newtonov zadatak sa životinjama

Ovaj zadatak je zadatak zabavnog karaktera. Pojavljuje se u **Newtonovoj**[14] knjizi *Universal Arithmetick* (Univerzalna aritmetika, 1720.). Zadatak glasi:

„U 4 tjedna, 12 goveda pojede $3\frac{1}{3}$ jutara pašnjaka, a u 9 tjedana 21 govedo pojede 10 jutara pašnjaka. Uzimajući u obzir jednoliku brzinu rasta trave, koliko će goveda trebati da bi pojeli 24 jutra u razdoblju od 18 tjedana [33]?"

Traži se broj goveda. Uvedimo sljdeće oznake:

Neka su a_1, a_2, a brojevi goveda u svakoj od rečenica (a_1 i a_2 su zadani, a je nepoznanica), zatim neka su b_1, b_2, b redom brojevi jutara koje ta goveda pojedu razdobljima od c_1, c_2 odnosno c tjedana (to su sve zadani iznosi). U ovom problemu se kao (nepoznate) konstante uzimaju početna količina trave x na pašnjaku, zatim količina trave y koju jedno govedo pojede u jednom tjednu te količina trave z koja izraste na jednom jutru u jednom tjednu.

Uzimajući u obzir dane uvjete, dobivamo sustav:

$$b_1(x + c_1z) = a_1c_1y,$$
$$b_2(x + c_2z) = a_2c_2y,$$
$$b(x + cz) = acy.$$

Uvrstimo numeričke podatke iz izvornog problema:

$$3\frac{1}{3}(x + 4z) = 12 \cdot 4 \cdot y,$$
$$10\,(x + 9z) = 21 \cdot 9 \cdot y,$$
$$24\,(x + 18z) = a \cdot 18 \cdot y.$$

Podijelimo prvu s drugom jednadžbom, s ciljem eliminacije y:

$$\frac{3\frac{1}{3}(x + 4z)}{10\,(x + 9z)} = \frac{12 \cdot 4 \cdot y}{21 \cdot 9 \cdot y},$$

$$630\,(x + 4z) = 480\,(x + 9z),$$

[14] Isaac Newton (1642.–1727.) bio je engleski fizičar, matematičar i astronom. Jedan je od najznačajnijih znanstvenika u povijesti, poznat po sukobu oko prventstva o otkriću infinitezimalnog računa.

$$15\,x = 18\,z,$$

dakle je $x = 1{,}2\,z$. Uvrštavanjem u bilo koju od prethodne dvije jednadžbe, recimo su $10(x+9z) = 21 \cdot 9 \cdot y$ dobivamo $\frac{z}{y} = \frac{9}{10}$. Dobivene vrijednosti, tj. $x = 1{,}2z$ i $\frac{z}{y} = \frac{9}{10}$ uvrstimo u posljednju jednakost te izrazimo a:

$$a = \frac{40z}{y} = 40 \cdot \frac{9}{10} = 36.$$

Zaključujemo da će 36 goveda u 18 tjedana pojesti 24 jutra pašnjaka [33].

Poglavlje 2

Teorija brojeva

Gauß[1] je jednom rekao: „Matematika je kraljica znanosti, a teorija brojeva kraljica matematike [33]." Teorija brojeva je vrlo velika i atraktivna grana matematike koja proučava svojstva cijelih brojeva. Prepuna je mnogih „dubokih" i lijepih teorema. Više od bilo koje druge grane matematike, postavila je „zamke" matematičarima i natjerala čak i neke ugledne matematičare da naprave niz pogrešnih pretpostavki. Vjerojatno najzanimljiviji zadatak iz teorije brojeva u povijesti matematike jest **veliki Fermatov**[2] **teorem**, čija je povijest tema za sebe, te njega stoga ovdje nećemo opisivati već čitatelje upućujemo na literaturu, npr. [35] i [39].

2.1 Pitagorejske trojke

Egipćani i **Babilonci** poznavali su specijalni slučaj **Pitagorinog**[3] teorema, odnosno pitagorejsku trojku $(3, 4, 5)$. **Pitagorejska** uređena je trojka prirodnih brojeva (x, y, z) takva da je zbroj kvadrata prvih dvaju od njih jednak kvadratu trećeg: $x^2 + y^2 = z^2$. Ako su svi članovi pitagorejske trojke relativno prosti, nazivamo ju **primitivnom pitagorejskom trojkom**. Već su pitagorejci znali da pitagorejskih trojki ima beskonačno mnogo (za svaki broj $n \in \mathbb{N}$ brojevi $2n, n^2 - 1$ i $n^2 + 1$ čine pitagorejsku trojku). Ako je (x, y, z) (primitivna) pitagorejska trojka, onda je (kx, ky, kz) također pitagorejska trojka za bilo koji pozitivni cijeli broj k [18].

[1] Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.) bio je njemački matematičar i astronom. Svestrani matematički genij i jedan od najvećih matematičara u povijesti.

[2] Pierre de Fermat (1607.–1665.) bio je francuski matematičar i pravnik, poznat po svojim doprinosima iz teorije brojeva, analitičke geometrije te vjerojatnosti.

[3] Pitagora sa Samosa (otprilike 582.–496. pr. Kr.) bio je prvi „pravi" matematičar, vrlo važna osoba koja je doprinijela razvoju matematike. Osnovao Pitagorejsku školu u kojoj su se sva otkrića pripisivala njemu.

Trokut čije strane tvore pitagorejsku trojku nazivamo Pitagorinim trokutom, a on je nužno pravokutan. Obrat ne vrijedi, npr. trokut sa duljinama stranica $x = y = 1$ i $z = \sqrt{2}$ jest pravokutan trokut, ali $(1, 1, \sqrt{2})$ nije Pitagorina trojka jer $\sqrt{2}$ nije cijeli broj.

Glinena pločica *Plimpton* 322 je starobabilonska tablica pitagorejskih trojki, nastala oko 1800. pr. Kr. i najstariji je poznati zapis o pitagorejskim trojkama. Babilonci su općenito poznavali (iskaz) Pitagorinog poučka. Jedan od babilonskih zadataka je sljedeći:

„4 je duljina i 5 dijagonala. Kolika je širina? Nije poznata. 4 puta 4 jest 16. 5 puta 5 je 25. Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9. Što da oduzmem da dobijem 9? 3 puta 3 jest 9. 3 je širina [6]."

U **staroindijskoj** *Baudhayaninoj Sulvasutri* (oko 800. pr. Kr.) koristi se Pitagorin teorem, odnosno njegov specijali slučaj za jednakokračni pravokutni trokut: „Konop rastegnut preko dijagonale kvadrata daje površinu dvostruku površini polaznog kvadrata [18]." Kasnije se u *Sulvasutrama*[4] može naći i opći oblik koji se koristi za razne konstrukcije: „Konop rastegnut preko dijagonle pravokutnika daje površinu koju čine vodoravna i okomita stranica [18]."

Pitanje određivanja pitagorejskih trojki svodi se na sljedeći zadatak: Treba naći cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$? Traženje cjelobrojnih rješenja Pitagorine jednadžbe je u stvari traženje rješenja nelinearne **diofantske**[5] **jednadžbe**, stoga su pitagorejske trojke među najstarijim poznatim rješenjima neke diofantske jednadžbe. Kroz povijest se oko pronalaženja pitagorejskih trojki razvio niz zanimljivih zadataka.

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{2.1}$$

diofantska je jednadžba drugog stupnja. Naš je zadatak pronaći prirodne brojeve x, y, z koji su rješenje jednadžbe (2.1). U tu svrhu najprije nađimo u parovima relativno proste brojeve x, y, z koji zadovoljavaju jednadžbu (2.1), tj. primitivne pitagorejske trojke. Jednadžbu možemo pisati u obliku $z^2 - x^2 = y^2$ tj. $(z - x)(z - x) = y^2$, pa imamo

$$z - x = \frac{y}{r} \tag{2.2}$$

[4]*Sulvasutre (Pravila konopa)* najstariji su poznati indijski matematički tekstovi potkraj vedskog razdoblja, pisani su kao dodatci Vedama.

[5]Diofant Aleksandrijski (..) bio je starogrčki matematičar poznat po svome doprinosu u teoriji brojeva i rješavanju jednadžbi.

$$z + x = ry \tag{2.3}$$

pri čemu je $r \in \mathbb{Q}$. Nadalje, nakon zbrajanja (2.2) i (2.3) dobivamo

$$2z = \left(r + \frac{1}{r}\right) y. \tag{2.4}$$

Oduzmemo li od (2.3) jednadžbu (2.2) imamo

$$2x = \left(r - \frac{1}{r}\right) y. \tag{2.5}$$

Podijelimo li (2.4) s (2.5) dobivamo

$$\frac{z}{x} = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1}. \tag{2.6}$$

Stavimo li $r = \frac{a}{b}$, pri čemu su a i b relativno prosti, slijedi $\frac{z}{x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. Kako je $D(a, b) = 1$, slijedi $D(a^2, b^2) = 1$ te su brojevi $a^2 + b^2$ i $a^2 - b^2$ relativno prosti ili je njihova najveća zajednička mjera jednaka 2. Brojevi $a^2 + b^2$ i $a^2 - b^2$ su relativno prosti kad su a i b različite parnosti. Nadalje, brojevi $a^2 + b^2$ i $a^2 - b^2$ imaju najveću zajedničku mjeru 2 u slučaju kada su a i b neparni.

U prvom slučaju jednadžba $\frac{z}{x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ima smisla ako je $z = a^2 + b^2$ te $x = a^2 - b^2$. Uvrstimo li tako odabrane z i x u jednadžbu $(z - x)(z + x) = y^2$ dobivamo $y = 2ab$. Brojevi $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$ su rješenja jednadžbe (2.1), pri čemu su a i b relativno prosti brojevi različite parnosti i $a > b$.

U drugom slučaju kada su a i b neparni brojevi, izraz $\frac{z}{x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ možemo skratiti s 2. Tada je $x = \frac{a^2-b^2}{2}$, $y = ab$, $z = \frac{a^2+b^2}{2}$, a to je rješenje jednadžbe (2.1). Po pretpostavci, a i b su neparni brojevi, tj. brojevi oblika $a = 2m + 1$, $2n + 1$, $m, n \in \mathbb{Z}$ pa imamo

$$x = 2(m - n)(m + n + 1),$$
$$y = (m + n + 1)^2 - (m - n)^2,$$
$$z = (m + n + 1)^2 + (m - n)^2.$$

Brojevi $m + n + 1$ i $m - n$ različite su parnosti i relativno su prosti. Dakle, zaključak za prvi slučaj, vrijedi i za drugi. Trojku (x, y, z), gdje su

$$x = a^2 - b^2,\ y = 2ab,\ z = a^2 + b^2,$$

zovemo **temeljno rješenje jednadžbe** ili **primitivno rješenje** (2.1). Valja napomenuti da se dobivena formula za pronalaženje pitagorejskih trojki naziva **Euklidova**[6] **formula** te se nalazi u Euklidovim *Elementima*. Sva ostala rješenja koja se generiraju kao višekratnici temeljnog zovemo opće rješenje jednadžbe (2.1). Dakle, **opće rješenje jednadžbe** (2.1) je oblika, tj.

$$((a^2 - b^2)t, 2abt, (a^2 + b^2)t),$$

gdje su $a, b, t \in \mathbb{Z}$, za koje je $a > b$ i $D(a, b) = 1$ [27].

Osim navedenog općeg postupka za nalaženje pitagorejskih trojki, navedimo još jedan zanimljivi način, povezan s Fibonaccijevim brojevima.

Počevši od 5, svaki drugi Fibonaccijev broj je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta s cjelobrojnim duljinama stranica, ili drugim riječina, najveći broj u nekoj pitagorejskoj trojci. Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} a &= 2F_n F_{n+1}, \\ b &= F_{n+1}^2 - F_n^2, \\ c &= F_{2n+1}, \end{aligned}$$

gdje je F_n n-ti Fibonaccijev broj. Tada je $a^2 + b^2 = c^2$ [18, 6, 26, 27].

2.2 Konji i bikovi

Ovaj zadatak je **Eulerov**[7] zadatak zabavnog karaktera, a svodi se na linearnu diofantsku jednadžbu s dvije nepoznanice, tj. jednadžbu oblika $ax + by = c$, gdje su a, b, c cijeli brojevi ($ab \neq 0$), a rješenja (x, y) se traže u skupu $\mathbb{Z}^2$. Euler je razvio učinkovitu metodu za rješavanje ovih vrsta jednadžbi koje se mogu koristiti u raznim primjerima. Eulerov zadatak je sljedeći:

„Trgovac kupuje nekoliko konja i bikova za iznos od 1770 talira. Platio je 31 talir za svakog bika i 21 talir za svakog konja. Koliko bikova i konja kupuje trgovac [33]?”

---

[6] Euklid Aleksandrijski (oko 330.–275.pr.Kr) starogrčki je matematičar poznat po svojim *Elementima*. U toj knjizi sadržana su većina saznanja i otkrića u geometriji i teoriji brojeva do kojih su došli Euklid i njegovi prethodnici i suvremenici.

[7] Leonhard Euler (1707.–1783.) bio je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Jedan je od najznaćajnijih i najproduktivnijih matematičara u povijesti, bavio se gotovo svim u njegovo doba postojećim matematičkim disciplinama, a postavio je i temelje nekih novih (teorija grafova, analitička teorija brojeva).

Linearna diofantska jednadžba koja opisuje ovaj problem je

$$31x + 21y = 1770.$$

Nepoznanice su broj bikova x i broj konja y. Da bismo riješili ovu jednadžbu, primjenjujemo Eulerovu metodu polazeći od nepoznanice čiji je koeficijent manji, u ovom slučaju y. Koristeći teorem o dijeljenju s ostatkom, zapisujemo veći od koeficijenata uz nepoznanice (a) preko kvocijenta i ostatka pri dijeljenju s manjim (b), te slobodni član (c) preko kvocijenta i ostatka pri dijeljenju s b:

$$31 = 1 \cdot 21 + 10 \text{ i } 1770 = 84 \cdot 21 + 6.$$

Uvrstimo li te zapise na mjesto a i c u polaznu jednadžbu i izrazimo y, dobivamo

$$y = \frac{-31x + 1770}{21} = -x + 84 + \frac{-10x + 6}{21}.$$

Budući da x i y moraju biti cijeli brojevi, slijedi da $\frac{-10x+6}{21}$ također mora biti cijeli broj. Označimo taj broj sa t. Dobivamo novu diofantsku jednadžbu

$$21t = -10x + 6,$$

čiji su koeficijenti manji u odnosu na polaznu jednadžbu. Izrazimo x (jer je koeficijent ispored x manji) kao

$$x = \frac{-21t + 6}{10} = -2t + \frac{-t + 6}{10} = -2t + u,$$

gdje smo označili da je

$$u = \frac{-t + 6}{10}.$$

Zatim, ponovno dobivamo novu diofantsku jednadžbu

$$t = -10u + 6.$$

Uzimajući u kao slobodni parametar, imamo rješenje

$$t = -10u + 6$$
$$x = -2t + u = 21u - 12$$
$$y = -x + 84 + t = -31u + 102.$$

Pritom x i y ne smiju biti negativni, dakle $\frac{12}{21} \leq u \leq \frac{102}{31}$, odnosno u može biti samo jedan od brojeva 1, 2 ili 3 pa imamo tri rješenja Eulerovog zadatka:

$$x = 9, \quad y = 71,$$
$$x = 30, \quad y = 40,$$
$$x = 51, \quad y = 9 \text{ [33]}.$$

2.3 Zadatak 100 ptica

Najpozatiji i jedan od najstarijih kineskih matematičkih tekstova zove se **Devet poglavlja umijeća računanja** (*Jiuzhang Suanshu*, nastalo između 200. pr. Kr. i 300. n. e.). Sadrži 246 geometrijskih, aritmetičkih i algebarskih zadataka u 9 poglavlja s rješenjima namijenjenih mjeračima, inžinjerima, činovnicima i trgovcima. Jedan od najpoznatijih zadataka *Devet poglavlja* jest **zadatak 100 ptica**:

„Jedan pijevac košta 5 novčića, jedna kokoš 3, a tri pilića zajedno 1. Ako je kupljeno 100 ptica za 100 novčića, koliko je kojih kupljeno [10]?"

Iako se u početku čini da možda nema dovoljno informacija da ga se riješi, problem se može svesti na sustav dviju linearnih diofantskih jednadžbi s tri nepoznanice, koje doista posjeduju beskonačno rješenja. No, s obzirom na posebne uvjete zadatka (tj. da ima 100 ptica i 100 novčića), moguća su samo tri rješenja. Pogledajmo koja.

S x, y i z označimo redom broj pijevaca, kokoši i pilića. Iz činjenice da 3 pilića zajedno koštaju 1 novčić, dobivamo informaciju da jedan pilić košta $\frac{1}{3}$ novčića. Sustav je sljedeći:

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100,$$
$$x + y + z = 100.$$

Iz posljednje jednakosti izrazimo x kao

$$x = 100 - y - z,$$

i uvrstimo u prvu jednakost:

$$5(100 - y - z) + 3y + \frac{1}{3}z = 100.$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$y = 200 - \frac{7}{3}z.$$

Uvrstimo li izraženi y u x dobivamo:

$$x = -100 + \frac{4}{3}z,$$
$$y = 200 - \frac{7}{3}z,$$
$$z = 100 - x - y.$$

Uzevši u obzir da su x, y i z sigurno prirodni brojevi, slijedi:

$$-100 + \frac{4}{3}z > 0,$$

dakle je

$$z > 75.$$

Također je

$$200 - \frac{7}{3}z > 0,$$

pa je

$$z < \frac{600}{7} \approx 85.7.$$

Dakle je $75 < z < 85$. Ispitivanjem 9 mogućih vrijednosti za z dobivamo da su rješenje problema uređene trojke $(4, 18, 78)$, $(8, 11, 81)$, $(12, 4, 84)$.

Zadatak 100 ptica se u raznim varijantama pojavljuje u mnogim drugim kulturama i vremenima. **Alcuin iz Yorka**[8] u svojoj zbirci od 53 zabavna matematička zadatka pod imenom (*Propositiones Alcuini Doctoris Caroli Magni Imeratoris Ad Acuendos Juvenes*) bavio se nekim varijacijama prethodnog problema, ali bez ptica:

1. Neki kupac je rekao: „Želim kupiti 100 svinja sa 100 dinara na način da se nerast kupi za 10 dinara, krmača za pet i dvije male svinje za jedan dinar. Koliko nerasta, krmača i malih svinja trebam kupiti da nemam niti previše niti premalo svinja ili dinara?"

2. „Neki vođa kućanstva imao je 20 slugu. Naredio je da im se daju 20 modiusa[9] kukuruza tako da muškarci prime tri, žene dva, a djeca pola modiusa. Koliko mora biti muškaraca, žena i djece?"

[8] Alcuin iz Yorka (735.–804.) bio je engleski učenjak. Napisao je zbirku zadataka *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Poznat je po zadatcima zabavnog karaktera.

[9] Modius je drevna rimska jedinica za mjerenje.

3. „Neki čovjek htio je kupiti 100 životinja za 100 dinara. Želio je platiti tri dinara po konju, jedan dinar po kravi i jedan dinar za 24 ovce. Koliko je konja, krava i ovaca bilo?”
4. „Neki čovjek je želio kupiti 100 životinja. Naredio je svome sluzi da plati pet dinara po devi, jedan dinar po magarcu i jedan dinar za 20 ovaca. Koliko je deva, magarca i ovaca kupljeno za 100 dinara [1]?”

Samo nekoliko desetljeća nakon Alcuina, sličan, ali zahtjevniji, problem „100 ptica” pojavljuje se u **Mahāvīrinoj**[10] *Ganitasarasangrasa*:

„3 golubova se prodaju za 5 novčića, 5 saras ptica za 7 novčića, 7 labudova za 9 novčića i 9 paunova za 3 novčića. Rečeno je da se doveze 100 ptica za 100 novčića za zabavu kraljevskog sina. Koliko je plaćeno za svaku vrstu ptice koja je kupljena [1]?”

U Mahāvīrinu tekstu nalazi se kratak opis algoritamski organiziranog pravila za generiranje jednog rješenja problema, ovisno o odabiru odgovarajućih množitelja. Njegov se problem može svesti na sustav dviju diofantskih jednadžbi s četiri nepoznanice i on ima 16 smislenih rješenja.

Nekoliko desetljeća nakon toga, slični zadaci nalaze se i kod egipatskog matematičara **Abu Kamila**[11]:

1. „Za 100 dirhama kupuje se 100 ptica tri vrste. Svaka patka je 5 dirhama, 20 vrabaca 1 dirham, a svaki pilić košta 1 dirham. Koliko je kupljeno ptica svake vrste?”
2. „Za 100 dirhama kupuje se 100 ptica četiri vrste. Svaka guska košta 4 dirhama, svaki pilić 1 dirham, dva goluba za 1 dirham i 10 čvoraka za 1 dirham. Koliko je kupljeno ptica svake vrste [1]?”

Drugi zadatak je zahtjevniji od prvoga i svodi se na sustav dviju diofantskih jednadžbi s četiri nepoznanice te posjeduje 98 rješenja. Skoro četiri stoljeća nakon Alcuinova vremena, isti se tip zadatka pojavljuje se u Fibonaccijevoj knjizi *Liber Abaci*, opet u formulaciji s pticama:

„Neki čovijek kupuje 30 ptica i to jarebice, golubove i vrapce za 30 dinara. Jarebica košta 3 dinara, golub 2 dinara i 2 vrapca za 1 dinar. Koliko je ptica svake vrste kupio [1]?”

---

[10] Mahāvīra (9. st.), indijski matematičar koji je proširio mnoge Brahmaguptine rezultate.

[11] Abu Kamil (9.-10. st) bio je egipatski matematičar, prvi arapski matematičar koji je znao rješavati neke diofantske jednadžbe.

Otprilike dva stoljeća nakon Fibonaccija, u svome *Miftah al-hisab* („Key to Arithmetic", 1427.) perzijski astronom i matematičar **Džamšhid al-Kaši**[12] raspravlja o sljedećem zadatku:

„Jedna patka košta 4 novčića, 5 vrabaca 1 novčić i jedan pijetao 1 novčić. Čovijek treba kupiti 100 ptica za 100 novčića. Koliko ptica može kupiti [1]?"

Početkom 16. stoljeća **Christoffer Rudolff**[13] napisao je prvi njemački udžbenik o algebri te se i u njemu pojavljuje jedna od Alcuinovih varijanti zadatka 100 ptica. Poprilično neobična varijanta zadatka pojavljuje se u *Arithmetica Oder Rechenbuch* („Book of Arithmetic", 1587.), knjizi njemačkog proizvođača kalendara **Caspera Thierfeldera**:

„47 ljudi; muškarci, žene i djevojke, zajedno su potrošili 47 novčića. Svaki muškarac dao je 5 novčića, svaka žena 3 i svaka djevojka pola novčića. Koliko je muškaraca, žena i djevojaka bilo prisutno" [1, 10].

2.4 Magični kvadrati

Stari Kinezi prvi su se bavili magičnim kvadratima, a kasnije i Japanci, Indijci, Egipćani i drugi. Magični kvadrat je $n \times n$ kvadratna tablica brojeva u koju su upisani prirodni brojevi od 1 do n^2 tako da je zbroj brojeva u svakom stupcu, retku i na obje dijagonale jednak. Taj zbroj zove se **magičnom sumom** ili **magičnom konstantom** i računa se po sljedećoj formuli:

$$S(n) = \frac{1}{n}(1 + 2 + ... + n^2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{n}\frac{n^2(1+n^2)}{2} = \frac{n(1+n^2)}{2}.$$

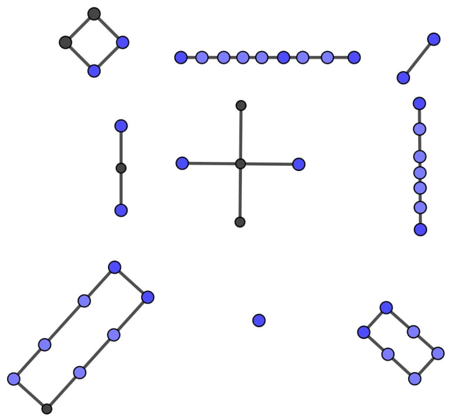
Ovako definirani kvadrati nazivanju se **normalnim magičnim kvadratima**. Normalni magični kvadrati postoje za svaki red n osim za $n = 2$.

Legenda o magičnom kvadratu kaže da je kineski car Yu otkrio magični kvadrat šetajući uz Žutu rijeku (Huang Ho ili Lo) gdje je vidio mističnu kornjaču za koju se smatralo da je spasila grad od silnih poplava. Mistična kornjača je na svome oklopu imala zagonetno raspoređene točke unutar kvadrata (slika 2.1). Proučavajući kornjaču, car je otkrio da je

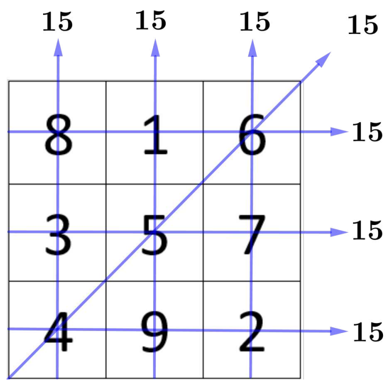
[12]Džamšid al-Kaši (1380.–1429.) bio je posljednji značajni matematičar arapskog srednjevjekovnog svijeta. Glavno djelo mu je *Ključ aritmetike*, koje sadrži binomnu formulu,računanje n-tih korijena, numeričko rješavanje jednadžbi iterativnim postupcima i drugo.

[13]Christoff Rudolff (1499.–1545.) bio je njemački matematičar, poznat po tome što je uveo oznaku za kvadratni korijen.

zbroj točaka u bilo kojem retku, stupcu i dijagonali uvijek jednak i iznosi 15 (slika 2.2). Broj 15 je označavao broj dana u svakom od 24 perioda kineske sunčane godine i tako je pomogao ljudima kontrolirati rijeku. Detalj s leđa Yuove kornjače prozvan je **Lo Shu** (Lo—rijeka, Shu—knjiga). Kvadrat Lo Shu je jedinstven pravi magični kvadrat trećeg reda i svaki drugi magični kvadrat trećeg reda možemo dobiti iz ovoga rotacijom ili zrcaljenjem.



Slika 2.1: Magični kvadrat.



Slika 2.2: Magični kvadrat Lo Shu.

Magični kvadrati 4. reda prvi puta se spominju u indijskoj literaturi. Arapski matematičari prvi su, tako se čini, osmislili metode konstrukcije magičnih kvadrata. Posebno je poznata **Abu'l- Wafina**[14] konstrukcija magičnih kvadrata razlčitih redova. U mnogim su

[14]Abu'l-Wafa al-Buzjani (940.–997/998.) bio je perzijski matematičar i astronom srednjeg vijeka koji je napisao nekoliko knjiga o matematici

konstrukcijama arapskog svijeta kvadrati popunjavani izvana prema sredini. Abu'l-Wafa al-Buzjani također započinje s vanjskim rubom koji se prema određenoj shemi ispunjava s prvim $2n - 2$ brojevima. Recimo da promatramo slučaj reda $n = 9$. To znači da će se na vanjskim rubovima nalaziti prvih $2 \cdot 9 - 2 = 16$ brojeva [4]. Njegova metoda je sljedeća (slika 2.3):

1. Prvih $k - 1$ neparnih brojeva nalaze se u lijevom stupcu. Počinje se iznad donjeg lijevog kuta i nastavlja se prema gore s neparnim brojevima. Budući da je $n = 9$, tj. oblika $n = 2k + 1$, zaključujemo da je $k = 4$ te su brojevi 1, 3 i 5 smješteni u ovaj stupac.

2. Sljedeći neparni broj 7 nalazi se u središnjoj ćeliji donjeg reda, a sljedeći neparni broj u središnjoj ćeliji desnog stupca.

3. Preostalih $k - 1$ neparnih brojeva se postavljaju uzlaznim redoslijedom u slobodne ćelije iznad središta desnog stupca.

4. Sada se smještaju parni brojevi. Prvih $k - 1$ parnih brojeva, tj. 2, 4 i 6 se upisuju, tim redoslijedom, u donji lijevi kut.

5. Sljedeća dva parna broja upisuju se jedna za drugom u lijevom ili desnom gornjem kutu kvadrata.

6. Preostalih $2 \cdot (k - 1)$ brojeva se smještaju u gornji red. Započne se desno od središta i prazne se ćelije popune uzlaznim redoslijedom do gornjeg desnog kuta.

Konačno, slobodne se ćelije popunjavaju komplementima već upisanih brojeva. Ti se komplementi uvijek postavljaju na suprotni kraj svakog retka ili stupca. Jedina iznimka su dva gornja kuta, njihov se komplement mora upisati u dijagonalno suprotni kut. Taj se postupak sada nastavlja izvana prema sredini. Sami postupak popunjavanja možete vidjeti na [4].

Napomene:

1. Broj koji odgovara redu magičnog kvadrata uvijek je na sredini desnog stupca.

2. Srednjih devet brojeva niza brojeva od 1 do n^2 smješteno je u središnjem unutarnjem kvadratu 3×3.

3. Srednja vrijednost svih upisanih brojeva, tj. 41, nalazi se u središnjoj ćeliji kvadrata.

8	80	78	76	75	12	14	16	10
67	22	64	62	61	26	28	24	15
69	55	32	52	51	36	34	27	13
71	57	47	38	45	40	35	25	11
73	59	49	43	41	39	33	23	9
5	19	29	42	37	44	53	63	77
3	17	48	30	31	46	50	65	79
1	58	18	20	21	56	54	60	81
72	2	4	6	7	70	68	66	74

Slika 2.3: Abu'l- Wafina konstrukcija magičnog kvadrata reda $n = 9$.

U arapskoj literaturi također se može naći malo izmijenjene kvadrate u kojima nizovi brojeva koji dolaze u gornji desni kut nisu poredani uzlaznim redoslijedom kao u prethodnom primjeru, već prema silaznom redoslijedu [4].

U 11. st. spominje ih židovski pjesnik, filozof i astronom **Abraham ibn Ezra**[15]. U Europi se magični kvadrat prvi put spominje u 13. stoljeću, a najpoznatiji je magični kvadrat 4. reda s magičnom sumom 34 (slika 2.4) koji se nalazi na bakrorezu **Melancolia I** njemačkog umjetnika **Albrechta Dürera**.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Slika 2.4: Dürerov magični kvadrat (1514.).

Njemački fizičar i teolog iz 16. stoljeća **Heinrich Cornelius Agrippa**[16] konstruirao je

[15]Abraham ibn Ezra (1089.–1167.) bio je židovski rabin, filozof i astronom, živio je i djelovao u tada arapskom (maorskom) Toledu

[16]Heinrich Cornelius Agrippa (1486.–1535.) bio je njemački liječnik, filozof, diplomat, teolog, kabalist,

9 magičnih kvadrata od 3. do 9. reda i svakom je pridružio po jedan od 5 tada poznatih planeta Sunčevog sustava te Sunce i Mjesec.

Iako su do danas pomoću računala konstruirani i veliki magični kvadrati, a tijekom vremena su otkrivene razne metode konstrukcija magičnih kvadrata (za kvadrate neparnog reda, za kvadrate parnog reda djeljivog s 4, za kvadrate parnog reda nedjeljivog s 4), i danas postoji puno otvorenih pitanja oko magičnih kvadrata, primjerice nije poznata formula za broj različitih (dakle, simetrijski neekvivalentnih) magičnih kvadrata reda n niti opća metoda konstrukcije [4, 34].

2.5 Rastav kvadrata

Diofant Aleksandrijski, bio je najveći matematičar potklasičnog razdoblja i posljednji veliki matematičar prije Fibonaccija. Njegovo poznato djelo jest *Aritmetika*, sadrži razne algebarske probleme, jednadžbe i njihove sustave. Neke su od tih jednadžbi i sustava neodređene, tj. imaju nejedinstvena rješenja te Diofant traži pozitivna racionalna rješenja, no danas — već smo to rekli — pod diofantskim jednadžbama podrazumijevamo one kojima tražimo cjelobrojna rješenja. Navodimo dva zadatka iz *Aritmetike*, u modernoj notaciji [18].

Zadatak 1. Zadani kvadrat treba rastaviti na zbroj dvaju kvadrata. Drugim riječima, treba riješiti jednadžbu $x^2 + y^2 = b^2$.

Rješenje: Neka je b dani racionalni broj, a x i y tražena racionalna rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 = b^2$. Da bi osigurao racionalno rješenje, Diofant koristi supstituciju $y = ax - b$, gdje je a proizvoljan racionalan broj. Primjenom supstitucije i raspisivanjem dobivamo jednakost:

$$b^2 - x^2 = a^2x^2 - 2abx + b^2,$$

koja se svodi na: $2abx = (a^2 + 1)x^2$. Stoga je

$$x = \frac{2ab}{a^2 + 1}.$$

Uzevši $b = 4$ kao u Diofantonoj knjizi, za $a = 2$ slijedi da je $x = \frac{16}{5}$ i $y = \frac{12}{5}$, što zadovoljava zadanu jednadžbu:

okultist, astrolog i alkemičar. U svojim djelima žestoko je kritizirao skolastiku i crkvene dogme, zbog čega je proglašen heretikom, a knjige su mu zabranjene.

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{400}{25} = 16.$$

Zadatak 2. Potrebno je odrediti par brojeva zadanog zbroja i zbroja kvadrata, odnosno riješiti sustav $x + y = a, \; x^2 + y^2 = b^2$.

Rješenje: Uočimo da je $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 - (x + y)^2 + x^2 + y^2 = 2b^2 - a^2$. Dakle, $2b^2 - a^2$ mora biti kvadratni broj. Taj je uvjet dovoljan za rješivost zadatka. Rješenja možemo dobiti supstitucijom $y = a - x$:

$$x^2 + (a - x)^2 = b^2,$$

pa je

$$2x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0 \text{ [18]}.$$

2.6 Zakon kvadratnog reciprociteta

Gauß, poznat kao „Princ matematike" je 1801. objavio svoje znamenito djelo *Disquisitiones Arithmeticae*, u kojem je u uveo moderni pojam kongruencije i potpuno dokazo zakon kvadratnog reciprociteta. Međutim, Gauß nije prvi izrekao zakon kvadratnog reciprociteta, već je prvi pružio strogi dokaz, a tijekom svog života objavio je osam različitih dokaza. Povijest zakona kvadratnog reciprociteta ne prestaje s Gaußovim dokazom, brojni su drugi matematičari kasnije pružili drugačije dokaze. Do danas je objavljeno više od 200 dokaza [22]. Zakon kvadratnog reciprociteta tvrdi:

Ako su p i q dva različita broja, onda su oni jedan drugom ili oba ili nijedan kvadratni ostaci, osim ako i p i q pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3 (u tom slučaju točno jedan od njih je kvadratni ostatak drugog). Pritom kažemo da je cijeli broj r **kvadratni ostatak** broja m ako postoji x^2 takav da vrijedi:

$$x^2 \equiv r \pmod{m}.$$

Povijest ovog teorema započinje s Fermatom, koji je proučavio niz teorema o tome kada se prost broj može prikazati pomoću kvadratnih brojeva. Dokazao je da za prost broj p vrijedi:

$$p = x^2 + y^2 \iff p = 2 \text{ ili } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Nakon toga, razmatrao je slične teoreme za proste brojeve oblika $x^2 + ny^2$, $n = \pm 2, \pm 3, -5$. Iako Fermat nikad nije izrekao zakon kvadratnog reciprociteta, neki specijalni slučajevi zakona kvadratnog reciprociteta mogu se lako dobiti iz njegovih rezultata. Zakon kvadratnog reciprociteta prvi je izrekao **Euler**. Njegov prvi dokaz koji se odnosi na zakon kvadratnog reciprociteta danas je poznat kao **Eulerov kriterij** [22]:

„Za cijeli broj a i neparni prost broj p takve da p ne dijeli a vrijedi:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \begin{cases} +1 \pmod{p}, \text{ ako je a kvadratni ostatak mod } p, \\ -1 \pmod{p}, \text{ ako a nije kvadratni ostatak mod } p. \end{cases}$$

Ovo je prvi u nizu rezultata koje su Euler i drugi matematičari naveli i dokazali, što je dovelo do prvog cjelovitog iskaza zakona kvadratnog reciprociteta. Iako je Euler izrekao zakon potpunog zakona kvadratnog reciprociteta, nikad nije pronašao dokaz za njega te je dokaz ovog zakona postao najpopularniji problem teorije brojeva u drugoj polovici 18. stoljeća.

Legendre[17] jedan je od svojih najpoznatijih radova, skraćeno *Recherches d'analyse*, započeo dokazom jednog od Eulerovih rezultata. Označivši s a i A pozitivne proste brojeve koji su kongruentni s $1 \bmod 4$, a s b i B pozitivne proste brojeve koji su kongruentni s 3 modulo 4, navodi osam teorema koji su ekvivalentni zakonu kvadratnog reciprociteta (svih 7 kongruencija su modulo 4) [22]:

1. Ako je $b^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$, onda je $a^{\frac{b-1}{2}} \equiv 1$.
2. Ako je $a^{\frac{b-1}{2}} \equiv -1$, onda je $b^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$.
3. Ako je $a^{\frac{A-1}{2}} \equiv 1$, onda je $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$.
4. Ako je $a^{\frac{A-1}{2}} \equiv -1$, onda je $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$.
5. Ako je $a^{\frac{b-1}{2}} \equiv 1$, onda je $b^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$.
6. Ako je $b^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$, onda je $a^{\frac{b-1}{2}} \equiv -1$.
7. Ako je $b^{\frac{B-1}{2}} \equiv 1$, onda je $B^{\frac{b-1}{2}} \equiv -1$.

Teoremi 1. i 2. su u biti isti, kao i teoremi 3. i 4., te 5. i 6., stoga postoje samo pet različitih slučajeva. Legendre napominje da nije u stanju u potpunosti dokazati teoreme 1., 3, i 7., te da su njegovi ostali teoremi ovisni o drugom teoremu kojeg on ne zna dokazati, a

[17] Adrien-Marie Legendre (1752.–1833.) bio je francuski matematičar i astronom. Dao je značajne doprinose geometriji, statistici, teoriji brojeva, apstraktnoj algebri i matematičkoj analizi.

koji jd danas poznat kao **Dirichletov**[18] **teorem:**

„Neka su a i b relativno prosti pozitivni cijeli brojevi. Tada postoji beskonačno mnogo prostih brojeva koji su kongruentni s a modulo b [22].”

U svome drugome radu, *Essai sur la Theorie des Nombres* (1798.), uveo je danas poznati **Legendreov simbol:**

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } a \text{ kvadratni ostatak modulo } p, \\ -1 \text{ ako } p \text{ dijeli } a, \\ 0, \text{inače.} \end{cases}$$

Uveo je i izraz *reciprocitet* i preformulirao zakon kvadratnog reciprociteta u moderni oblik:

„Neka su p i q dva različita neparna prosta broja. Tada je:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Kao što smo rekli, prvi potpuni dokaz ovog zakona dao je Gauß. Njegov dokaz bio je vrlo sličan onome kako je Legendre pokušao dokazati, ali ga je otkrio neovisno o radu Legendrea. Dokaz je vrlo dugačak te je, kao i kod Legendrea, zahtijevao korištenje određenih lema. Među njima je posebno poznata **Gaußova lema**:

„Ako je $p \equiv 1 \pmod 8$ prost broj, onda postoji neparan prost broj $q < 2\sqrt{p} + 1$ takav da je

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1.\text{”}$$

Gauß je zakon kvadratnog reciprociteta nazvao *Theorema Aureum* (Zlatni teorem) [22].

2.7 Wilsonov teorem

Wilsonov[19] teorem jedan je od poznatijih teorema iz teorije brojeva:

Teorem 2.7.1. *Prirodan broj $p \geq 2$ je prost ako i samo ako je*

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \ (mod \ \ p).$$

[18] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.–1859.) bio je njemački matematičar poznat po gotovo suvremenoj definiciji funkcije i po doprinosima teoriji brojeva.

[19] John Wilson (1741.–1793.) bio je engleski matematičar i učenik Edwarda Waringa.

Prvi ga je iskazao **al-Hajtam**[20] oko 1000. g. pr. Kr. U 18. stoljeću isto je učinio engleski matematičar John Wilson, no ni on, kao ni al-Hajtam, čini se, nije znao dokazati ovaj teorem. **Waring**[21] ga je objavio 1770. i pripisao ga Wilsonu, ali ni on nije dao dokaz te je dokaz ovog teorema 1770. godine bio zanimljiv otvoreni problem teorije brojeva.

Prvi dokaz dao je **Lagrange**[22] 1771. Za razliku od **malog Fermatovog teorema**[23], Wilsonov teorem daje i nužan i dovoljan uvijet da bi broj bio prost.

Postoje dokazi da je već **Leibniz**[24] također bio svjestan rezultata stoljeće ranije, ali nikad ga nije objavio. **Giovanni Vacca**[25] je 1899. pručavao neobjavljene Leibnizove rukopise te je ondje naišao na Leibnizov osvrt na Wilsonov teorem: „Ako se produkt svih cijelih brojeva koji su prethodili danom cijelom broju podijeli sa danim cijelim brojem i ostatak je 1 (ili komplement od 1), onda je dani cijeli broj prost broj. Ako je cijeli broj složen, ostatak je broj koji ima zajednički faktor sa danim cijelim brojem koji je veći od 1." Međutim, ni Leibniz ga nije uspio dokazati [43]. Mi ovdje dajemo jedan od standardnijih suvremenih dokaza ovog Wilsonovog teorema:

Dokaz. Za $p = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Ako je p prost broj veći od 2, tada je p neparan, pa se u produktu $1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot (p-1)$ pojavljuje paran broj faktora. Neka je $k \in \{2, 3, ..., p-2\}$. Brojevi $k, 2k, 3k, ..., (p-1)k, pk$ tvore potpuni sustav ostataka po modulu p, pa u nekom redoslijedu daju ostatke $0, 1, 2, ..., p-1$ po modulu p. S obzirom da $k \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, slijedi $(p-1)k \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ i $pk \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, pa je $kl \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ za jedan (i samo jedan) $l \in \{2, 3, ..., p-2\}$. Pretpostavimo li da je $l = k$, tada imamo $k^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, odnosno $(k-1)(k+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ što povlači $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ ili $k \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$, suprotno tome da je $k \in \{2, 3, ..., p-2\}$. Prema tome skup $\{2, 3, ..., p-2\}$ možemo podijeliti na dva jednaka dijela tako da za svaki k iz jednog dijela postoji jedinstven l iz drugog dijela sa svojstvom $kl \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Slijedi

[20] Ibn al-Hajtam (otprilike 965.–1040.), poznat i pod latiniziranim imenom Alhazen, bio je arapski matematičar i astronom, pridonio je razvoju optike, teorije brojeva, geometrije i prirodne filozofije.

[21] Edward Waring (1736.–1798.) bio je britanski matematičar, pozant po svojim doprinosima iz teorije brojeva, ali bavio se i mnogim drugim matematičkim temama.

[22] Joseph-Louis Lagrange (1736.–1813.) bio je francuski matematičar i astronom. Dao je znatne doprinose iz matematičke analize, teorije brojeva, klasične mehanike i nebeske mehanike.

[23] Ako cijeli broj a nije djeljiv sa prirodnim brojem p, onda je broj $a^{p-1} - 1$ djeljiv s p.

[24] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.) bio je njemački filozof, matematičar i fizičar. Poznat po tome što je u isto vrijeme kao i Isaac Newton otkrio diferencijalni i integralni račun.

[25] Giovanni Vacca (1872.–1953.) bio je talijanski matematičar i asistent Giuseppea Peana. Razvio je složenu iteraciju za broj π.

$$2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2) \equiv \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{\frac{p-3}{2}} (\text{mod } p),$$

odnosno

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}.$$

Za $k = p - 1$ je $k \equiv -1(\text{mod } p)$, pa je konačno

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Dokažimo da iz $p \mid (p-1)! + 1$ slijedi da je p prost broj. Pretpostavimo da p nije prost broj i da ima djelitelj d, $d < p$. Tada $d \mid (p-1)!$ odakle slijedi $d \nmid (p-1)! + 1$ i stoga $p \nmid (p-1)! + 1$. Ovime smo došli u kontradikciju te p mora biti prost [23, 43].

□

2.8 Goldachova hipoteza

Goldbach[26] je 1742. Euleru izrekao sljedeću hipotezu :

„Svaki cijeli broj veći od 2 moguće je napisati kao zbroj tri prosta broja [2]."

On je 1 smatrao prostim brojem, pa kad bismo tu tvrdnju modernizirali, dobijemo: „Svaki cijeli broj veći od 5 moguće je napisati kao zbroj tri prosta broja.". Euler se zainteresirao za tu tvrdnju, te ju je formulirao u tvrdnju koju danas nazivamo Goldbachovom hipotezom:

„Svaki se parni prirodni broj veći od 2, može prikazati kao zbroj dva prosta broja [2]."

Ova je hipoteza, unatoč mnogim naporima uloženim u njeno dokazivanje tijekom više od stoljeća i pol od njena postavljanja, ostala jedan od najpoznatijih do danas nedokazanih matematičkih problema. Za prvih nekoliko parnih prirodnih brojeva većih od 2 lako vidimo da ona vrijedi:

$$4 = 2 + 2,$$

$$6 = 3 + 3,$$

[26]Christian Goldbach(1690.–1764.) bio je njemački matematičar najistaknutiji po svojoj korespondenciji s Leibnizom, Eulerom i Bernoullijem. U pismu Euleru iz 1742. godine navodi svoju poznatu hipotezu.

$$8 = 3 + 5,$$
$$10 = 7 + 3 \text{ ili } 5 + 5,$$
$$12 = 7 + 5,$$
$$14 = 3 + 11 \text{ ili } 7 + 7,$$
$$16 = 11 + 5 \text{ ili } 13 + 3.$$

Od znamenitijih matematičara, tom se tvrnjom bavio **Cantor**[27], koji ju je 1894. provjerio do broja 1000 (zanimljivo je da je tvrdnja dokazana 40-ak godina ranije za brojeve do 10 000).

No, parnih brojeva ima beskonačno mnogo te je potrebno dati dokaz za svih njih. Iako hipoteza još nije dokazana, svakako joj ide u prilog da je svaki prost broj neparan te će tako zbroj dva prosta broja uvijek biti paran.

Goldbachova hipoteza je ekvivalentna tvrdnji da je svaki prirodan broj $n > 17$ zbroj tri različita prosta broja. Dokazano je da je svaki paran broj moguće prikazati kao zbroj od ne više od šest prostih brojeva. Također je dokazano, da je svaki dovoljno velik paran broj moguće zapisati kao zbroj jednog prostog broja i jednog drugog prirodnog broja koji ima najviše dva prosta faktora. Do danas je hipoteza provjerena kompjuterski za brojeve do reda veličine 10^{18} [2].

2.9 Pellova jednadžba

Pellova[28] jednadžba proučavana je stotinama godina prije nego li se Pell rodio. Postavlja se pitanje, je li Pell uopće pridonio proučavanju Pellove jednadžbe? Pellova jednadžba neodređena je kvadratna jednadžba

$$x^2 - ny^2 = 1,$$

gdje je n dani nekvadratni prirodni broj, a traže se cjelobrojna rješenja (x, y).

Prvi doprinos vezan je uz **Brahmaguptu**[29] oko 1000. godina prije Pellovog vremena. Osim Brahmagupte, i drugi su matematičari također proučavali probleme vezane uz Pel-

[27] Georg Cantor (1845.–1918.) bio je njemački matematičar, utemeljitelj teorije skupova.

[28] John Pell (1611.–1685.) bio je engleski matematičar i politički agent u inozemstvu.

[29] Brahmagupta (oko 598.–668) bio je indijski matematičar i astronom koji je prvi opisao računanje s nulom.

lovu jednadžbu, kao npr. Diofant. Posebno je poznat **Arhimedov**[30] *Problem goveda* (*Problema bovinium*) koji se može svesti na Pellovu jednadžbu, no kako algebra (specijalno, jednadžbe) u starogrčko doba nisu postojale, nije vjerojatno da je Arhimed to tako gledao. U tom zadatku treba odrediti broj goveda koja su raspodijeljena u četiri stada raznih boja: bijela, crna, šarena i žuta. U svakom stadu je mnogo bikova i krava:

1. Bijelih bikova je koliko $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ crnih i žutih zajedno.
2. Crnih bikova je koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ šarenih i žutih zajedno.
3. Šarenih bikova je koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ bijelih i žutih zajedno.
4. Bijelih krava je koliko $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ cijelog crnog stada.
5. Crnih krava je koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ cijelog šarenog stada.
6. Šarenih krava je koliko $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ cijelog žutog stada.
7. Žutih krava je koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ cijelog bijelog stada.

Dodatno se zahtijeva da ukupni broj bijelih i crnih bikova bude kvadratni broj te da je ukupni broj žutih i šarenih bikova trokutni broj. Ovaj se problem svodi na Pellovu jednadžbu

$$x^2 - 4729494y^2 = 1,$$

s najmanjim rješenjem reda veličine 10^5 [9].

Promotrimo sljedeće jednakosti:

$$(b^2 - na^2)(d^2 - nc^2) = (bd + nac)^2 - n(bc + ad)^2$$

i

$$(b^2 - na^2)(d^2 - nc^2) = (bd - nac)^2 - n(bc - ad)^2.$$

Ako je

$$b^2 - na^2 = 1 \text{ i } d^2 - nc^2 = 1,$$

onda je

[30] Arhimed (287.–212.pr.Kr.) bio je grčki fizičar, astronom i jedan od najvećih matematičara starog vijeka. Bavio se aproksimacijom broja π, izumio je Arhimedov valjak te je poznat po spirali koja se zove *Arhimedova spirala*.

$$(bd + nac)^2 - n(bc + ad)^2 = 1,$$

$$(bd - nac)^2 - n(bc - ad)^2 = 1.$$

Drugim riječima, ako su (a, b) i (c, d) rješenja Pellove jednadžbe, onda su i $(bc+ad, bd+nac)$, $(bc - ad, bd - nac)$ također njezina rješenja. Ova činjenica je važna za **Brahmaguptinu lemu** koja u modernoj formulaciji glasi: „Ako su (a, b) i (c, d) cjelobrojna rješenja generalizirane Pellove jednadžbe oblika $na^2+k = b^2$ i $nc^2+k' = d^2$, onda su $(bc+ad, bd+nac)$ i $(bc - ad, bd - nac)$ cjelobrojna rješenja Pellove jednadžbe oblika $nx^2 + kk' = y^2$.

Za dokaz te leme zaslužni su Europski europski matematičari 17. stoljeća, ali lemu je Brahmagupta otkrio još oko 628. godine. Indijski su matematičari metodu temeljenu na ovoj lemi nazivali *samasa*, a može se zvati i „metoda kompozicije". Ona je Brahmagupti omogućila napraviti niz temeljnih otkrića u vezi Pellove jednadžbe. Jedan od zaključaka koje je dobio bio je ako (a, b) zadovoljava Pellovu jednadžbu, da onda ju zadovoljava i $(2ab, b^2 + na^2)$. To slijedi izravno primjenom „metode kompozicije" na (a, b) i (a, b). Sada se metoda kompozicije opet može primjeniti na (a, b) i $(2ab, b^2 + na^2)$ kako bi se dobilo drugo rješenje, te je tako uvidio da se iz jednog rješenja Pellove jednadžbe može dobiti mnoštvo rješenja [30].

Ujedno je naglasio ako je (a, b) rješenje jednadžbe $nx^2+k = y^2$, tada primjenom metode kompozicije na (a, b) i (a, b), dobivamo $(2ab, b^2+na^2)$ kao rješenje jednadžbe $nx^2+k^2 = y^2$. Podijelimo li s k^2 dobivamo

$$x = \frac{2ab}{k},\ y = \frac{b^2 + na^2}{k}.$$

Ako je $k = 2$, budući da je (a, b) rješenje od $nx^2 + k = y^2$, imamo da je $na^2 = b^2 - 2$. Tada je

$$x = \frac{2ab}{2} = ab,$$

$$y = \frac{b^2 + na^2}{2} = \frac{2b^2 - 2}{2} = b^2 - 1$$

cjelobrojno rješenje generalizirane Pellove jednadžbe. Ako je $k = -2$, onda je isti postupak, no ako je $k = 4$ ili $k = -4$, metoda je nešto kompliciranija, ali se i dalje temelji na metodi kompozicije. Brahmagupta je pokazao, ako može pronaći (a, b) koja zadovoljavaju generaliziranu Pellovu jednadžbu $na^2 + k = b^2$, gdje je $k = 1, -1, 2, -2, 4, -4$, tada može naći jedno, a samim time i mnoštvo cjelobrojnih rješenja Pellove jednadžbe [30].

Na primjer, pokušamo li riješiti $23x^2 + 2 = y^2$, vidimo da $a = 1$ i $b = 5$ zadovoljava $23a^2 + 2 = b^2$. Koristeći se navedenim argumentom, $x = 5$ i $y = 24$ također zadovoljava Pellovu jednadžbu. Primjenimo li metodu kompozicije na par $(5, 24)$ dobivamo

$$x = 25 \cdot 24, \;\; y = 24^2 + 23 \cdot 5^2 = 115, 1$$

kao drugo rješenje. Primjenimo li metodu kompozicije još jednom, dobivamo

$$x = 11515, \;\; y = 55224.$$

Zatim opet,

$$x = 552480, \;\; y = 2649601,$$

i tako dalje.

Sljedeći korak naprijed napravio je **Bhaskara II**[31] 1150. godine. On je otkrio „cikličku metodu", zvanu *chakravala*, koja je predstavljala algoritam za pronalaženje rješenja Pellove jednadžbe $nx^2 + 1 = y^2$, polazeći od bilo kojeg „bližeg" para (a, b) koji zadovoljava generaliziranu jednadžbu $na^2 + k = b^2$. Možemo pretpostaviti da su a i k relativno prosti, u protivnom možemo podijeliti oba sa njihovom zajedničkom mjerom i dobiti „bliže" rješenje s manjim k. Jasno je da će a i k biti također relativno prosti. Metoda se oslanja na to da za svaki m, $(1, m)$ zadovoljava generaliziranu Pellovu jednadžbu

$$n \cdot 1^2 + (m^2 - n) = m^2.$$

Bhaskara II sada primjenjuje metodu kompozicije na (a, b) i $(1, m)$ kako bi dobio

$$n(am + b^2) + (m^2 - n)k = (bm + na)^2.$$

Podijelimo li s k, dobivamo da je

$$x = \frac{am + b}{k}, \;\; y = \frac{bm + na}{k}$$

rješenje jednadžbe

$$nx^2 + \frac{m^2 - n}{k} = y^2.$$

Budući da su a i k relativno prosti, možemo odabrati m tako da je $am + b$ djeljivo s k, ali onda je i $m^2 - n$ i $bm + na$ također djeljivo s k. S takvim izborom broja m, cjelobrojno rješenje

[31]Bhaskara II (1114.–1185.) bio je indijski matematičar i astronom.

$$x = \frac{am+b}{k}, \ y = \frac{bm+na}{k}$$

je rješenje generalizirane Pellove jednadžbe $nx^2 + \frac{m^2-n}{k} = y^2$, gdje je $\frac{m^2-n}{k}$ također cijeli broj. Bhaskara II je znao da postoji beskonačno m-ova takvih da je $am+b$ djeljivo s k. On je odabirao one m-ove za koje je $m^2 - n$ najmanje po apsolutnoj vrijednosti. Ako je $\frac{m^2-n}{k}$ jedan od brojeva $1, -1, 2, -2, 4, -4$ onda možemo primjeniti Brahmaguptinu metodu za pronalaženje rješenja Pellove jednadžbe $nx^2 + 1 = y^2$. Ako $\frac{m^2-n}{k}$ nije jedna od tih vrijednosti, ponavljamo postupak počevši s $x = \frac{am+b}{k}$, $y = \frac{bm+na}{k}$ za jednadžbu oblika $nx^2 + \frac{m^2-n}{k} = y^2$ na potpuno isti način kako smo primjenili postupak na $na^2 + k = b^2$. Bhaskara II je znao da će proces završiti nakon određenog broja koraka. To se događa kada je jednadžba oblika $nx^2 + t = y^2$, a broj $t = 1, -1, 2, -2, 4, -4$ [30].

Bhaskara II daje primjere u *Bijaganiti*, a prvi je

$$61x^2 + 1 = y^2.$$

Koristeći se gornjom metodom odabiremo m takav da je $(m+8)/3$ cijeli broj, a $m^2 - 61$ najmanji mogući. Uzevši $m = 7$, dobivamo

$$x = 5, \ y = 39,$$

kao rješenje Pellove jednadžbe $nx^2 - 4 = y^2$, ali to je jednadžba koja primjenom Brahmaguptine metode daje

$$x = 226153980, \ y = 1766319049,$$

kao najmanje rješenje $61x^2 + 1 = y^2$.

Sljedeći doprinos Pellovoj jednadžbi dao je **Narayana**[32], koji je u 14. stoljeću napisao komentar Bhaskarine *Bijaganite*. Nayarana je dao neke nove primjere cikličke metode:

$$103x^2 + 1 = y^2.$$

Odabirom $a = 1, b = 10$ dobiva se

$$103 \cdot 1^2 - 3 = 10^2.$$

Odabirom broja m tako da je $m + 10$ djeljivo s -3 i $m^2 - 103$ najmanji mogući, vodi do $m = 11$ i dobivamo

[32]Narayana Pandit (1325.–1400.) bio je indijski matematičar, poznat po doprinosu iz teorije brojeva, kombinatorike i algebre.

$$103 \cdot 7^2 - 6 = 71^2.$$

Sljedeći korak je odabrati m tako da je $7m+71$ djeljivo s -6 i m^2-103 najmanji mogući. Uzevši $m = 7$ dobiva se jednakost

$$103 \cdot 20^2 + 9 = 203^2.$$

Nadalje, odabirom broja m tako da $20m + 203$ djeljivo s 9 i $m^2 - 103$ najmanji mogući. Uzevši $m = 11$ dobivamo jednakost

$$103 \cdot 47^2 + 2 = 477^2.$$

Sada Narayana primjenjuje Brahmaguptinu metodu u već navedeom obliku te za $k = 2$ dobiva

$$x = 22419, \ y = 227528.$$

Sjajne Brahmaguptine, Bhaskarine i Narayanine ideje su u 17. stoljeću europskim matematičarima bile potpuno nepoznate. Europski interes započeo je 1657. kada je Fermat u pismu izazvao sve matematičare Europe i Engleske da pronađu cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 - Ay^2 = 1$, gdje je A bilo koji cijeli broj, a da nije potpuni kvadrat [30].

Jedan od Fermatovih izazovnih problema bio je isti primjer Pellove jednažbe koju je Bhaskara II proučavao 500 godina ranije, a to je pronaći rješenja jednadžbe

$$61x^2 + 1 = y^2.$$

U Fermatovom izazovu sudjelovalo je nekoliko matematičara, među njima i **de Bessy**[33], **Brouncker**[34] i **Wallis**[35]. Brouncker je otkrio metodu koja je u osnovi jednaka metodi nastanka verižnih razlomaka koju je kasnije razvio Lagrange. De Bessy tabelarno je prikazao rješenja Pellove jednažbe za sve n do 150. Wallis je dao dvije metode dokaza Brahmaguptine leme. 1658. godine **Rahn**[36] je objavio knjigu koja je sadržavala primjer Pellove jednadžbe i koju je napisao uz Pellovu pomoć. To je jedina poznata veza između Pella i jednadžbi koje su nazvane po njemu. Wallis je 1685. objavio knjigu u kojoj je jedno poglavlje posvećeno davanju metoda za rješavanje Pellove jednadžbe. Važno je naglasiti

[33] Frenicle de Bessy (1604.–1674.) bio je francuski amaterski matematičar. Poznat je po svojim doprinosima u teoriji brojeva.

[34] William Brouncker (1620.–1684.) bio je irski matematičar koji je osnivač i prvi predsjednik Royal Society u Londonu.

[35] John Wallis (1616.–1703.) bio je engleski matematičar jedan od neposrednih prethodnika infinitezimalnog računa. Uveo je oznaku ∞ za beskonačnost.

[36] Johann Rahn (1622.–1676.) bio je švicarski matematičar koji je prvi upotrijebio simbol $\div$ za dijeljenje.

da je u tom trenutku nekoliko matematičara tvrdilo da Pellova jednadžba $nx^2 + 1 = y^2$ ima rješenje za bilo koji n. Wallis je, opisujući Brounckerovu metodu iznio tu tvrdnju, a Fermat komentirajući rješenja predložena na svoj izazov. Zapravo je Fermat tvrdio da za bilo koji n Pellova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja [30].

Euler je također dokazao Brahmaguptinu lemu, a dao je osnove za rješavanje Pellove jednadžbe verižnim razlomcima. Njegov doprinos je i naziv Pellove jednadžbe. Općenito se vjeruje da je on dao to ime jer je mislio da su glavni doprinosi o kojima je Wallis izvještavao Brounckera zapravo djelo Pella.

Lagrange je 1771. objavio *Additions to Euler's Elements of algebra* koja sadrži strogu verziju Eulerove metode verižnih razlomaka. Tako je strogo dokazano tvrdnju da za svaki n Pellova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Rješenje ovisi o verižnom razlomku broja $\sqrt{n}$. U verižnom razlomku kvadratnog korijena cijelog broja isti nazivnici se periodično ponavljaju. Na primjer:

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}}}}}$$

čiji je period duljine 6. Peta konvergenta[37] od $\sqrt{19}$, neposredno prije točke iza koje se ponavlja period, je $\frac{170}{39}$ i Lagrangeova teorija kaže da je

$$x = 39, \ y = 170,$$

najmanje rješenje Pellove jednadže

$$19x^2 + 1 = y^2.$$

[37]Ako u beskonačnom verižnom razlomku $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, ...]$ uzmemo samo konačno mnogo članova, $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$, onda se takav izraz zove k-ta konvergenta beskonačnog verižnog razlomka x.

Da bismo pronašli beskonačni niz rješenja potenciramo $170 + 39\sqrt{19}$. Na primjer, iz

$$(170 + 39\sqrt{19})^2 = 57799 + 13260\sqrt{19}$$

dobivamo drugo rješenje

$$x = 13260, \; y = 57799$$

i tako dalje za ostale potencije iz skupa prirodnih brojeva [9, 30].

Poglavlje 3

Analiza

Matematička analiza, grana je matematike koja se bavi zasnivanjem i tehnikama diferencijalnog i integralnog računa, te drugih načina korištenja limesa (graničnih vrijednosti) kao što je teorija beskonačnih redova, beskonačnih produkta, ... Diferencijalni i integralni račun zasnovali su Newton i Leibniz motivirani geometrijom (tangenta krivulje, površina ispod krivulje) i mehanikom (odnos brzine čestice i prevaljenog puta).

3.1 Geometrijski redovi

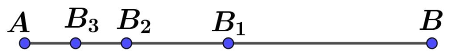
Zenon iz Eleje[1] bio je starogrčki matematičar, poznat po svojim paradoksima o nemogućnosti kretanja. **Aristotel**[2] mu pripisuje četiri paradoksa kretanja, koje je opisao u svome djelu *Fizika*, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora, odnosno vremena, dobiva paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja. Zenonovi paradoksi su zbunjivali, izazivali, inspirirali i zadivljivali filozofe, fizičare, matematičare i školsku djecu više od dvije tisuće godina. Prva dva od njih neposredno su vezani za teoriju redova. To su:

Dihotomija: „Kretanje je nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka itd. Ma koliko god prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja."

Zamislimo stvar koja treba ići od točke A do točke B. Da bi došla do točke B, stvar prvo treba doći do srednje točke B_1 koja je između točaka A i B. Ali, prije nego li se to dogodi, stvar mora doći do točke B_2 koja je između točaka A i B_1. Slično, prije nego li se to učini, mora doći do točke B_3, koja je između A i B_2, i tako dalje. Prema tome, kretanje

[1] Zenon iz Eleje (490.– 430. pr. Kr.) bio je starogrčki matematičar i filozof. Aristotel ga je prozvao izumiteljem dijalektike, ali je on najpoznatiji po svojim paradoksima.

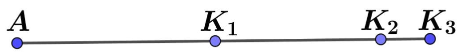
[2] Aristitel (384.–322. pr. Kr.) bio je starogrčki filozof i prirodoslovac. Naglašava važnost logike ili rasuđivanja u filozofiji. Njegov filozofski sustav aristotelizam uči da se ljudsko znanje postiže najprije pomoću osjetnog iskustva.



Slika 3.1: Dihotomija.

nikada ne može početi [41].

Ahil i kornjača: „U utrci, Ahil nikad ne može prestići kornjaču, zato što Ahil prvo mora doći do točke odakle je kornjača pošla. Dok dođe do te pozicije, kornjača se opet malo odmakla, itd. Prema tome kornjača uvijek ima prednost, što znači da Ahil neće nikad stići kornjaču."



Slika 3.2: Ahil i kornjača.

Zamislimo da Ahil trči protiv kornjače. Neka Ahil trči 10 puta brže od kornjače, ali počinje od točke A, 100 metara iza kornjače koja je u točki K_1 (kornjači, koja je sporija, data je prednost). Da bi prestigao kornjaču, Ahil mora prvo doći do točke K_1. Međutin, kada je Ahil stigao do točke K_1, kornjača je prešla 10 metara i došla do točke K_2. Ponovo, Ahil dolazi do točke K_2. Kao i prije, kada je prešao 10 metara, kornjača je metar ispred njega, kod točke K_3, itd. Kornjača će uvijek imati prednost nad Ahilom, nebitno koliko ona mala bila. Prema tome, Ahil nikad ne može prestići kornjaču [41].

Oba paradoksa, *Ahil i Dihotomija*, zavise o podjeli udaljenosti na nizove udaljenosti koji postaju sve manji, pa su podložni istim protuargumentima. Aristotel je istakao, da kao što se smanjuje udaljenost, također se i smanjuje vrijeme da se ta udaljenost prijeđe. Takav pristup rješavanju paradoksa doveo bi do demantiranja tvrdnje da je potrebno beskonačno mnogo vremena da se prijeđe beskonačna udaljenost. Iza 212. pr. Kr. Arhimed je razvio metodu kako bi izveo konačni odgovor za beskonačno mnogo članova koji postaju sve manji. Danas njegove rezultate zapisujemo formalnije, ali su u osnovi ekvivalentni. Ova rješenja su u biti geometrijski redovi. **Geometrijski red** je red oblika

$$a \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

što iznosi $\frac{a}{1-q}$ uz uvjet da je $|q| < 1$ (u suprotnom red je divergentan).

U slučaju *Ahila i kornjače*, treba zamisliti da kornjača trči s konstantnom brzinom v i da dobija prednost od udaljenosti d, a da Ahil trči konstantnom brzinom xv za $x > 1$. Ahilu je vrijeme $\frac{d}{xv}$ da dođe do točke iz koje je kornjača otpočela trku, a za to vrijeme kornjača je prešla put $\frac{d}{x}$. Poslije sljedećeg vremenskog intervala $\frac{d}{x^2 v}$, Ahil je prešao $\frac{d}{x^2}v$, i tako dalje. Prema tome, vrijeme potrebno Ahilu da sustigne kornjaču je

$$\frac{d}{v}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{d}{v(x-1)}\ s.$$

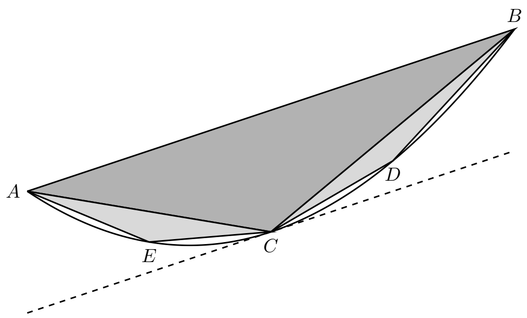
Budući da je ova vrijednost konačna, Ahil će sustići kornjaču. Analogno se razrješava i dihotomija [41].

Arhimed je među ostalim pokazao da površina P segmenta parabole točno $4/3$ površine D trokuta $\triangle ABC$ kojemu je osnovica $\overline{AB}$ tetiva koja određuje segment, a treći vrh C je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom (slika 3.3).

Uklanjanjem trokuta $\triangle ABC$ dobiju se dva nova odsječka u koje se analogno mogu upisati takvi trokuti $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ i tako u beskonačnost.

Arhimed dokazuje da je D točno četiri puta veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. Analogno vrijedi i za ostale tetive, dakle se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina ostatka smanjuje 4 puta. **Eudoksov**[3] princip ekshaustije daje

$$P = D + \frac{1}{4}D + \frac{1}{16}D + ... = D\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}D\ [9].$$



Slika 3.3: Arhimedovo određivanje površine segmenta.

[3]Eudoks iz Knida (408.–355. pr. Kr.) bio je grčki matematičar i astronom. Poznat je po teoriji omjera i razmjera, te metodi ekshaustije, koja je u biti bila antička varijanta limesa.

Za **'Oresmea** [4] su sve mjerljive veličine osim brojeva (koje doživljava na starogrčki način), kontinuirane te se mogu prikazati duljinama, površinama i volumenima. U svojim djelima *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* i *Questiones super geometriam Euclidis* opisuje kako ilustrirati odnos protezanja (extensio) i iznosa (intensio) kvalitete (razne fizikalne pojave, npr. brzina, koje mogu imati različite intenzitete i koje se nalaze u odnosu s protezanjem, npr. vremenom). Intenzitete je nanosio vertikalno kao duljine (*latitudo*) nad vodoravnom crtom, na kojoj su protezanja prikazana isto kao duljine (*longitudo*) te je tako postao prethodnik pojma funkcije i koordinatnog sustava.

Slika 3.4: D'Oresmeova konvergencija geomterijskog reda [12].

D'Oresme je poznat i po prvom dokazu divergencije nekog reda, točnije, harmonijskog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Njegova ideja je u modernom zapisu ekvivalentna standardnom suvremenom dokazu divergencije tog reda:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

Oresme je također, geometrijski, pokazao i konvergenciju geometrijskog reda $\sum_n \frac{2}{2^n}$ [9, 12, 41].

[4]Nicole d' Oresme (1330. - 1382.) bio je francuski znanstvenik i katoličiki biskup koji je istraživao osnove gibanja.

3.2 Leibniz i redovi

Leibnizu je 1672. **Huygens**[5] postavio zadatak sumacije reda recipročnih trokutnih brojeva:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + ... = ?$$

Kako je Leibniz to riješio? Znamo da je n-ti trokutni broj zbroj cijelih brojeva od 1 do n, odnosno

$$T_n = 1 + 2 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Stoga je zbroj recipročnih brojeva prvih N trokutnih bojeva jednak

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{N+1}\right).$$

Očito, kada N teži u beskonačnost $1/(N+1)$ teži u 0, pa je tražena suma reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = 2.$$

Iz ovog je zadatka Leibniz naslutio inverznost sumiranja i diferenciranja (oduzimanja uzastopnih članova) te je tako naslutio međusobnu inverznost deriviranja i integriranja, koju će desetak godina kasnije jasno opisati. Godine 1673. otkrio je i **Leibnizov red**:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

Taj je red skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682. godine [17].

3.3 Keplerov problem bačve

Keplerovo[6] zanimanje za računanje površina i volumena proizlazi iz incidenta koji se dogodio drugi puta kada se ženio 1613. godine u Linzu, Austrija. Naime, Kepler je kupio bačvu vina za vjenčanje te ga je trgovčeva metoda kojom je mjerio volumen bačve, kako

[5]Christiaan Huygens (1629.–1695.) bio je nizozemski astronom, matematičar i fizičar, najviše poznat po doprinosima iz fizike.

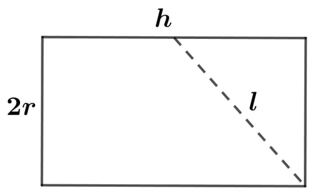
[6]Johannes Kepler (1571. - 1630.) bio je njemački astronom, matematičar i astrolog. Ustanovio je gibanje planeta po elipsama, te time srušio teorije i vjerovanja da se plantei oko Sunca gibaju po kružnicama.

bi odredio cijenu, isprva naljutila. Naime, trgovac je cijenu vina uzimao razmjernu volumenu, što je naravno opravdano, ali je volumen mjerio tako da izmjeri duljinu mokrog dijela štapa kojeg bi utaknuo u rupu u sredini oplošja bačve i gurno do nasuprotnog ruba jedne od osnovica bačve (slika 3.6). Kepler je uočio da duguljasta uska bačva i „zdepasta" mogu dati iste cijene, iako su im očigledno volumeni različiti. To je Keplera nadahnulo da prouči kako izračunati površine i volumene i da napiše knjigu o *Nova stereometria doliorum vinariorum*, što je bio njegov glavni doprinos razvoju integralnog računa [31].

Incident s bačvom i vinom doveo ga je do sljedećeg problema određivanja maksimuma funkcije::

„Koji je najbolji dizajn bačve kako bi njezin „volumen" bio maksimalan [31]?"

Danas se ovaj problem rješava korištenjem derivacija, tako da tražimo stacionarnu točku funkcije duljine štapa u ovisnosti o dimenzijama bačve. Deriviranje u Keplerovo doba još nije postojalo, ali je Kepler uspio (uspoređivanjem volumena bačvi za različite visine i promjere, uzevši da su bačve približno valjkastog oblika) pokazati da će najviše vina za svoje novce dobiti blizu stacionarne točke[7] funkcije volumena V za fiksni l (duljinu umočenog dijela štapa) u ovisnosti o dimenzijama r i h (valjkaste) bačve (slika 3.5), te da se blizu stacionarne točke iznosi volumena jako malo mijenjaju te je tako naslutio suvremeni pojam stacionarne točke funkcije.



Slika 3.5: Keplerov problem bačve.

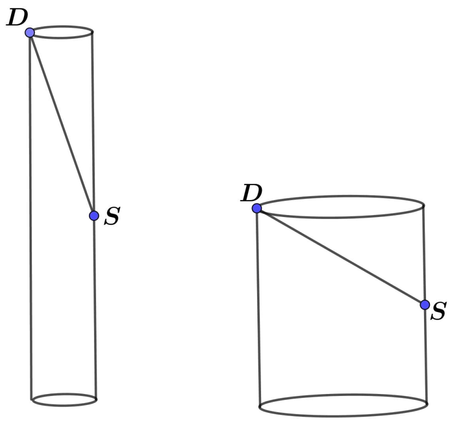
Riješimo Keplerov zadatak na suvremeni način. Želimo maksimizirati

$$V = \pi r^2 h.$$

Koristeći se Pitagorinim poučkom, dobivamo

$$l^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (2r)^2, \text{ što mora biti konstantno.}$$

[7] Stacionarna točka funkcije je nultočka njezine derivacije.



Slika 3.6: Određivanje cijene vina.

Izrazimo r^2:

$$r^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{16}.$$

Sada možemo funkciju V za volumen zapisati kao funkciju jedne varijable h:

$$V = \frac{\pi}{4}l^2 h - \frac{\pi}{16}h^3.$$

Kepler je kao točku maksimuma dobio

$$h = \frac{2l}{\sqrt{3}},$$

no taj je rezultat naslutio eksperimentalno. Mi bismo ga dobili deriviranjem:

$$V' = \frac{\pi}{4}l^2 - \frac{3\pi}{16}h^2.$$

Dobiveno izjednačimo s nulom kako bi odredili stacionarnu točku, odnosno riješimo jednadžbu $V' = 0$.

$$V' = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}l^2 - \frac{3\pi}{16}h^2 = 0 \Leftrightarrow 4l^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{2l}{\sqrt{3}}.$$

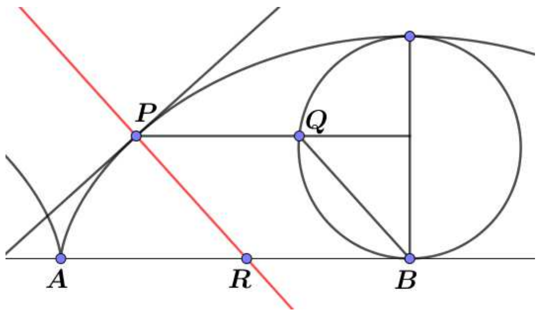
Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, \frac{2l}{\sqrt{3}} \rangle$, a pada na intervalu $\langle \frac{2l}{\sqrt{3}}, +\infty \rangle$. Zaključujemo da je $h = \frac{2l}{\sqrt{3}}$ točka lokalnog maksimuma, a lokalni maksimum iznosi $V(\frac{2l}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi l^3 \sqrt{3}}{9}$ [31].

3.4 Problem određivanja tangente

Prethodnici deriviranju su **Descartes**[8] i **Fermat**. Obojica su razvili metode za određivanje tangenti na krivulje poznatih jednadžbi. Descartes se zanimao za određivanje kutova među krivuljama. Budući da je lako odrediti normalu na kružnicu, Descartes je određivao oskulacijske kružnice[9] krivulja i preko njih jednadžbe normala i tangenti za neke krivulje.

Descartesovo određivanje tangente na cikloidu

Cikloida je ravninska krivulja koju opisuje točka ravnine fiksirana na nekoj kružnici kada se kružnica kotrlja bez klizanja po zadanom pravcu. Ime joj je dao **Galileo**[10]. Neka je P točka cikloide u kojoj tražimo tangentu, odnosno normalu (slika 3.7).



Slika 3.7: Descartesovo određivanje normale na kružnicu.

Iz točke P povučemo okomicu na promjer kružnice cikloide. Ta okomica siječe kružnicu cikloide u točki Q. Spojimo točke Q i B kao što je prikazano na slici 3.7. Kroz točku P povucimo paralelu sa QB. Sjecište paralele s QB i pravca AB je točka R. Tražena normala je pravac PR. Tangenta kroz točku P okomita je na normalu [16].

Fermatova metoda određivanja tangente

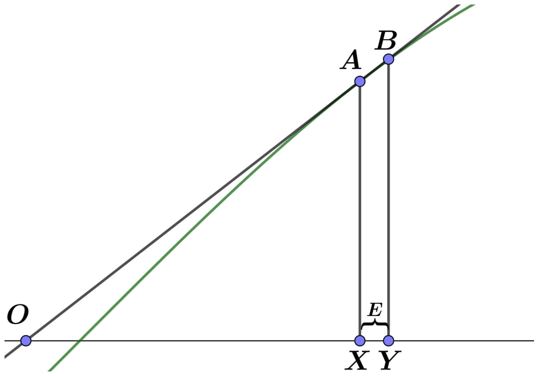
Neka je $A = (x, f(x))$ točka u kojoj tražimo tangentu $y = kx + l$ na krivulju $y = f(x)$. Za mali prirast E su $\triangle OXA$ i $\triangle OYB$ (A i B su točke na krivulji $y = f(x)$) približno slični jer je $f(x + E) \approx k(x + E) + l$.

---

[8]Rene Descartes (1596.–1650.) bio je francuski matematičar, fizičar i utemeljitelj analitičke geometrije.

[9]Oskulacijska kružnica krivulje ili kružnica zakrivljenosti je kružnica koja se u okolini neke točke najtješnje od svih kružnica priljubljuje uz krivulju. Što je krivulja zakrivljenija, polumjer je oskulacijske kružnice manji, tj. polumjer oskulacijske kružnice r u nekoj točki jednak je recipročnoj vrijednosti zakrivljenosti krivulje k u toj točki, $r = \frac{1}{k}$.

[10]Galileo Galilei (1564.–1642.) bio je talijanski matematičar, fizičar, astronom. Zalagao se za heliocentrički sustav.



Slika 3.8: Fermatova metoda određivanja tangente.

Slijedi

$$\frac{|OX|}{|OX| + E} \approx \frac{f(x)}{f(x + E)}.$$

Ako odredimo $|OX|$, onda imamo: $k = \frac{f(x)}{|OX|}$ te se gornja jednakost može prevesti u oblik

$$|OX| = \frac{f(x)}{(f(x + E) - f(x))/E}.$$

Fermat nakon izračunavanja desne strane uzima $E = 0$ i tako dobiva $|OX|$ [16].

Nakon Descartesa i Fermata još su neki matematičari osmislili svoje metode određivanja tangenti na krivulje, no sve su one objedinjene u jedinstvenu metodu kad je utemeljen diferencijalni i integralni račun. Newton i Leibniz su nezavisno jedan od drugog iz mnoštva pojedinačnih metoda i rezultata dobili računsku tehniku — **infinitezimalni račun**. Prvi jasno iskazuju međusobnu inverznost deriviranja i integriranja.

Newtonova metoda deriviranja i integriranja poznata je kao metoda fluksija. On naime problemu pristupa fizikalno (dok je Leibnizov pristup više geometrijski i sličniji suvremenom, a koeficijent smjera tangente kod njega je kvocijent dviju infinitezimalnih veličina dy i dx) [17]. Newton je promatrao veličine ovisne o vremenu - *fluense* $x, y, ..$ i njihove brzine - *fluksije*. Označava ih s $\dot{x}, \dot{y}, ...$, a fluksije fluksija $\ddot{x}, \ddot{y}, ...$ Kod Newtona je koeficijent smjera tangente na krivulju kvocjent $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ dviju konačnih veličina. U računima koristi male priraste $o\dot{x}$ veličine x, gdje s o označava beskonačno mali prirast vremena te iskazuje temeljni zadatak infinitezimalnog računa: „Iz odnosa fluenata treba odrediti odnos njihovih flukcija i obrnuto [17].”

Odredimo tangentu na krivulju $ax^2 - axy - y^3 = 0$ na Newtonov način. Supstutiramo $x + o\dot{x}$ za x i analogno za y:

$$a(x + o\dot{x})^2 - a(x + o\dot{x})(y + o\dot{y}) - (y + o\dot{y})^3 = 0.$$

Raspisivanjem dobivamo:

$$ax^2 + 2ao\dot{x}x + ao^2\dot{x}^2 - axy - axo\dot{y} - ao\dot{x}y - ao^2\dot{x}\dot{y} - y^3 - 3y^2o\dot{y} - 3yo^2\dot{y}^2 - o^3\dot{y}^3 = 0.$$

Zbog polazne jednadžbe preostaje:

$$2ao\dot{x}x + ao^2\dot{x}^2 - axo\dot{y} - ao\dot{x}y - ao^2\dot{x}\dot{y} - 3y^2o\dot{y} - 3yo^2\dot{y}^2 - o^3\dot{y}^3 = 0.$$

Podijelimo s o jer je različit od nule:

$$2a\dot{x}x + ao\dot{x}^2 - ax\dot{y} - a\dot{x}y - ao\dot{x}\dot{y} - 3y^2\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0.$$

Zanemarimo o jer je blizu nule i dobijemo:

$$2a\dot{x}x - a\dot{x}y - a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

Stoga je koeficijent smjera tangente na krivulju u bilo kojoj njezinoj točki (x, y) jednak

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{ax + 3y^2}{2ax - ay} \text{ [16, 17].}$$

3.5 Baselski problem

Godine 1644. **Mengoli**[11] postavio je pitanje:„Koliko iznosi

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{n^2} + ...?\text{”}$$

Problem je postao poznat kad ga je 1689. opisao **Jacob Bernoulli**[12]. Oba brata Bernoulli su ga bezuspješno pokušali riješiti. Euler je 1735. pokazao

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ [17].}$$

Naime, Euler započinje polinomom $p(x)$ stupnja n koji ima sljedeća svojstva:

[11]Pietro Mengoli (1626.–1686.) bio je talijanski matematičar i svećenik iz Bologne. Prvi je postavio poznati Baselski problem te je dokazao da je suma alternirajućeg harmonijskog niza jednaka prirodnom logaritmu broja 2. Također je dokazao da harmonijski niz nije konvergentan.

[12]Jacob Bernoulli (1655.–1705.) bio je švicarski matematičar, brat Johanna Bernoullija. Dao je važne doprinose matematičkoj analizi i teoriji vjerojatnosti.

1. $p(x)$ ima korijene $a_1, a_2, ..., a_n$ različite od nule.
2. $p(0) = 1$.

Tada se $p(x)$ može napisati u sljedećem obliku:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\dots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right).$$

Euler je tvrdio da, *ono što vrijedi za konačni polinom vrijedi i za beskonačni polinom*, tj. red potencija. Tu je tvrdnju primijenio na red:

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

što je red potencija sa svojstvom $p(0) = 1$. Euler je znao da se $\sin(x)$ može napisati u sljedećem obliku:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

Množeći $p(x)$ s x dobio je

$$xp(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin(x).$$

Nultočke dobivenog polinoma su $x = \pm k\pi$ za $k = 1, 2, ...$ jer su to nultočke od $\sin(x)$. Sada možemo upotrijebiti gornju tvrdnju i napisati $p(x)$ kao beskonačni produkt te izjednačiti

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\dots \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right]\dots \end{aligned}$$

U drugom retku pojavljuju se pozitivni i negativni korijeni koji su u posljednjem retku napisati kao razlika kvadrata. Eulerov trik je napisati $p(x)$ na dva različita načina.

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots\right)x^2 + \dots$$

Sada Euler izjednačava koeficijente od x^2 da bi zaključio sljedeće

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots\right),$$

te dobiva

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}\ [17,\ 37].$$

Poglavlje 4

Geometrija

Poznati britanski fizičar **Stephen Hawking** (1942.–2018.), jednom je rekao: „Jednadžbe su samo dosadni dio matematike. Pokušavam vidjeti stvari geometrijski”. Geometriju koja se uči u osnovnoj i srednjoj školi nazivamo euklidskom geometrijom koja je aksiomatizirana u utjecajnom Euklidovom djelu *Elementi*. Euklidovi Elementi prestavljaju pokušaj sinteze sve dotad poznate matematike u 13 knjiga. Značajni su i zbog stila pisanja: teoremi su logički poredani tako da svaki slijedi isključivo iz već dokazanih ili osnovnih tvrdnji (5 aksioma i 5 postulata danih na početku te definicija na početku svake knjige), a zaključci se izvode strogo deduktivno. Sama riječ *geometrija* grčkog je podrijetla („*geo*” = Zemlja, „*metria*” = mjerenje) [33].

4.1 Tri klasična problema

Tijekom 5. st. pr. Kr. starogrčki matematičari su počeli zahtijevati da se sve geometrijske konstrukcije provode isključivo ravnalom i šestarom. Posebno su bila popularna tri, za njih nerješiva, problema:

1. problem udvostručenja kocke

2. problem kvadrature kruga

3. problem trisekcije kuta

Ravnalo se koristi isključivo za spajanje dviju točaka, a šestar za crtanje kružnice kojoj je poznato središte i radijus. Jedine točke koje su konstruktibilne jesu presjeci tako nastalih pravaca i kružnica [18].

Problem udvostručenja kocke

O prvoj pojavi problema udvostručenja kocke ili delijskom problemu govore dva izvora. Prema **Teonu iz Smirne**[1], koji citira **Eratostena**[2], Atenjani su u doba epidemije kuge oko 130. pr. Kr. potražili savjet proročišta na Delosu te dobili odgovor da trebaju izraditi oltar dvostruko veći od tadašnjeg kockastog oltara. Drugi je izvor **Eutocius**[3], koji u komentaru Arhimedova djela *O kugli i valjku* govori da je kralj Minos želio udvostručiti kockasti grob pjesnika Glaukusa [18].

Drugim riječima, za $a > 0$ ravnalom i šestarom treba konstruirati x takav da je:

$$x^3 = 2a^3$$

Prvi bitan napredak oko problema udvostručenja kocke postigao je **Hipokrat s Hiosa**[4]. On je pokazao da se kocka stranice a može udvostručiti ukoliko se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$. Srednje geometrijske porporcionale između duljina a i b su duljine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

Uvrstimo li $b = 2a$ vidimo da je $x = a\sqrt[3]{2}$, tj. x je tražena stranica dvostruko veće kocke. Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja danog problema usmjereni su na konstruiranje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$ [18].

Arhita iz Tarenta[5] najpoznatiji je po doprinosu duplikaciji kocke na temelju Hipokratove ideje. Srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$ odredio je pomoću presjeka cilinra, konusa i torusa. Bitno je naglasiti da nije imao koordinatni sustav, no u modernoj notaciji njegovo rješenje je presjek ploha opisanih jednadžbama

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2,$$

[1] Teon iz Smirne (70.–135.) bio je grčki filozof, astronom i matematičar čija su djela bila pod jakim uticajem pitagorejske škole. Napisao je djelo *Tumačenje matematičkih pojmova korisnih za čitanje Platona*.

[2] Eratosten iz Kirene (276.–194. pr. Kr.) bio je grčki matematičar, kartograf i astronom. Poznat po određivanju zemljinog opsega.

[3] Eutocius (oko 480.–540.) bio je grčki matematičar koji je napisao komentare o nekoliko Arhimedovih djela i o Apolonijevim konikama.

[4] Hipokrat s Hiosa (oko 470.–410. pr. Kr.) bio je grčki matematičar i astronom. Bavio se svim trima klasičnim problemima.

[5] Arhita iz Tarenta (oko 428.–347. pr. Kr.) bio je grčki matematičar i fizičar. Istaknuo je ovisnost visine tona o frekvenciji titraja. Razvio je pojmove aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kvadriranjem prve jednadžbe i uvrštavanjem druge u kvadriranu prvu dobivamo

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2x^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

odnosno

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

(promatramo samo pozitivne korijene). Dijeljenjem posljednje jednadžbe s $\sqrt{x^2 + y^2}$ te treće od polaznih jednadžbi s $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dobivamo

$$a : \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : (2a).$$

Kako točka (x, y, z) koja zadovoljava sve tri jednadžbe leži na presjeku tih ploha, slijedi da za njene koordinate vrijedi da su $\sqrt{x^2 + y^2}$ i $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tražene srednje geometrisjke proporcionale. Primjetimo da je tražena duljina stranica kocke dvostrukog volumena jednaka udaljenosti $\sqrt{x^2 + y^2}$ od ishodišta do projekcije točke (x, y, z) na presjeku opisanog valjka, stošca i torusa na (x, y) ravninu [18].

Menehmu[6] se pripisuje otkriće konika kao presjeka stošca ravninama neparalelnim bazi, vezano za pokušaj rješenja udvostručenja kocke. Njegovo rješenje je u modernoj notaciji sljedeće: Ako je

$$a : x = x : y = y : b,$$

znači da je

$$x^2 = ay,\ y^2 = bx,\ xy = ab.$$

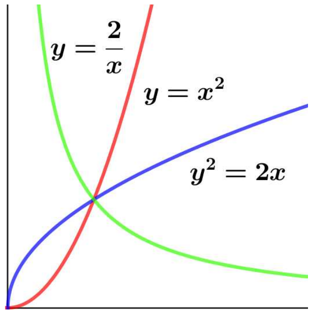
Prema tome, tražene x i y možemo dobiti kao koordinate sjecišta jedne od prvih dviju parabola s hiperbolom kojoj odgovara treća jednadžba ili pak kao sjecište parabola. Kako se problem duplikacije kocke svodi na konstrukciju $\sqrt[3]{2}$, dovoljno je promatrati specijalan slučaj kada je $a = 1$ i $b = 2$. Tada niz jednakosti postaje

$$x^2 = y,\quad y^2 = 2x,\quad xy = 2,$$

što grafički možemo prikazati kao na slici 4.1. Presjek danih krivulja je točka s x apscisom $\sqrt[3]{2}$, što je ujedno i rješenje problema [18].

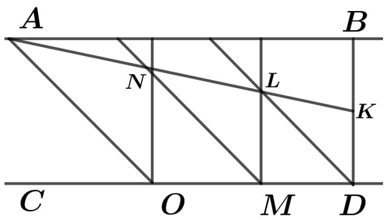
Eratosten iz Kirene zaslužan je za najpoznatije mehaničko rješenje duplikacije kocke, Eratostenov mezolabij. Radi se o mehanizmu za određivanje srednjih geometrijskih proporiconala: ako su dane dvije paralelne fiksirane letve AB i CD i na njih pričvršćena tri

[6]Menehmo (4. st. pr. Kr.) je bio grčki matematičar kojemu s epripisuje otkriće elipse, parabole i hiperbole.



Slika 4.1: Sjecište krivulja $x^2 = y, y^2 = 2x, xy = 2$.

sukladna jednakokračna pravokutna trokuta tako da im po jedna kateta leži na AB, ako trokute dovedemo u položaj kao na slici 4.2 (K je polovište od BD, točke A, N, L, K su kolinearne), onda je $|DK| : |ML| = |ML| : |NO| = |NO| : (2|DK|)$, tj. ako je $|DK| = a$, stranica kocke dvostrukog volumena je $|ML|$. Naravno, ni Arhitino ni Menehmovo ni Eratostenovo rješenje, iako sva točno daju stranicu tražene kocke, nisu zadovoljavala uvjete problema (konstruktibilnost ravnalom i šestarom). Danas znamo da je problem duplikacije nerješiv [18].



Slika 4.2: Eratostenov mezolabij.

Problem kvadrature kruga

Problem je sljedeći:

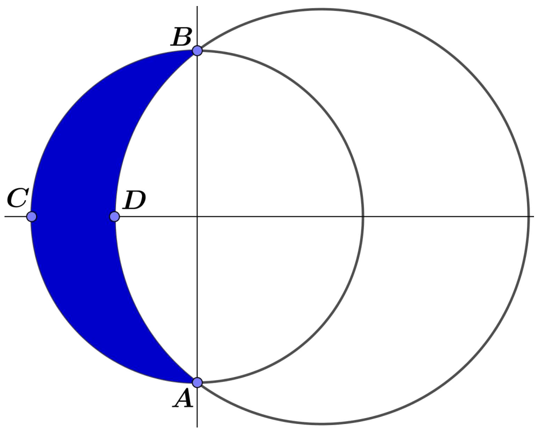
> „Iz $r > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je $x^2 = r^2\pi$ [18]."

Prvi poznati matematičar koji se bavio problemom kvadrature kruga bio je **Anaksagora iz Klazomene**[7]. Dospjevši u zatvor jer je tvrdio da Sunce nije bog i da Mjesec reflektira

[7] Anaksagora iz Klazomene (500.–428. pr. Kr.) bio je grčki fizičar, matematičar i filozof, prvi koji je točno objasnio pomračinu Sunca, optužen za bezboštvo jer je tvrdio da je Sunce užarena masa i da Mjesec odražava Sunčevu svjetlost

Sunčeve zrake, tijekom boravka u zatvoru počeo je rješavati problem kvadrature kruga. Problem je ubrzo postao popularan. **Antifont**[8] za rješenje predlaže upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta, redom uz udvostručavanje broja stranica. Ideja je da će ostatak, tj. razlika do stvarne površine kruga iscrpsti kad dođemo do dovoljno velikog broja stranica. No, tu se pojavljuje greška. Iz toga što se svaki član niza može konstruirati ravnalom i šestarom ne slijedi da se i limes može konstruirati [18].

Hipokrat s Hiosa prvi je koji je točno odredio površinu nekog lika obrubljenog krivuljama. Tražeći kvadraturu kruga otkrio je da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom, odnosno našao je površine tzv. **Hipokratovih mjeseca**. Pri tom je koristio teorem da se površine krugova odnose kao kvadrati njihovih promjera. Hipokrat je otkrio, do na sličnost, tri tipa mjeseca. Danas je poznato da ih ima pet. Preostala dva su otkrivena u 18. st., a u 20. st. je dokazano da nema drugih [18].



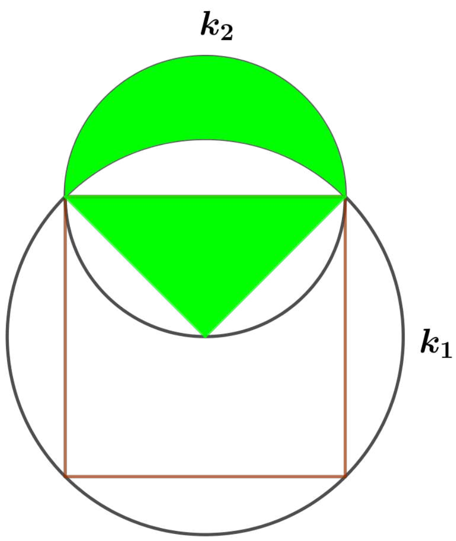
Slika 4.3: Mjesec je geometrijski lik omeđen lukovima dviju kružnica različitih rědišta i polumjera.

Pod mjesecom podrazumijevamo geometrijski lik omeđen lukovima dviju kružnica različitih središta i polumjera (slika 4.3). Hipokratova tri mjeseca su:

1. **Prvi Hipokratov mjesec** (slika 4.4). Mjesec je omeđen kružnicom k_1 opisanom jednakokračnom pravokutnom trokutu i kružnicom k_2 čiji je promjer hipotenuza tog tro-

[8]Antifont (5. st. pr. Kr.) bio je grčki matematičar i filozof, najstariji poznati Atenjanin koji se profesionalo bavio govorništvom.

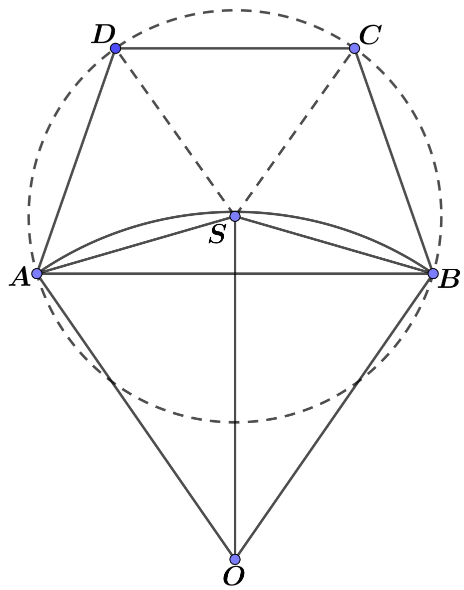
kuta. Kvadrat nad hipotenuzom (tj. promjerom od k_2) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad polumjerom od k_1, dakle kvadrat nad promjerom od k_1 dvostruki je kvadrat nad promjerom od k_2. Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, polukrug nad hipotenuzom ima površinu kao $1/4$ kruga opisanog trokutu. Površina mjeseca je zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjen za četvrtinu površine trokutu opisanog kruga, dakle prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen [18].



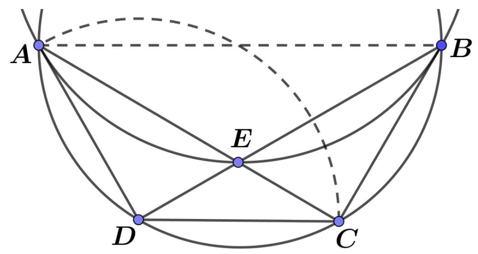
Slika 4.4: Prvi Hipokratov mjesec.

2. **Drugi Hipokratov mjesec** (slika 4.5). Mjesec kojem jedan rub nastaje tako da se jednakokračnom trapezu $ABCD$, kojemu su krakovi i jedna baza duljine 1, a druga baza AB duljine $\sqrt{3}$, opiše kružnica sa središtem S, a drugi je rub luk kružnice koja prolazi kroz A i B i ima središte O na simetrali trapeza tako da su trokuti AOB i ASD slični. Sa slike je vidljivo da je površia tog mjeseca jednaka površini trapeza ako je zbroj površina triju malih odsječaka jednak površini velikog odsječka (nad stranicom $\overline{AB}$), a to je istina zbog pretpostavke o sličnosti trokuta AOB i ASD i o duljinama stranica trapeza [18].

3. **Treći Hipokratov mjesec** (slika 4.6). Promatra se pet tetiva od kojih su dvije dulje jednake, a tako i tri kraće (i pritom je dvostruki kvadrat duljine dulje tetive jednak trostrukom kraće). Hipokrat je pokazao da je površina mjeseca $ADCBE$ jednaka zbroju površina triju trokuta (ADE, DCE, BEC) [18].



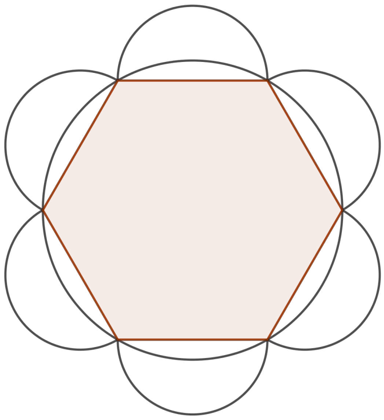
Slika 4.5: Drugi Hipokratov mjesec.



Slika 4.6: Treći Hipokratov mjesec.

Hipokrat nije pokazao (što je i nemoguće) da se svaki mjesec može kvadrirati. Vjerojatno je bio svijestan da njegove metode ne rješavaju problem kvadrature kruga iako mu neki autori pripisuju sljedeću kvadarturu kruga: pogledamo li sliku 4.7.

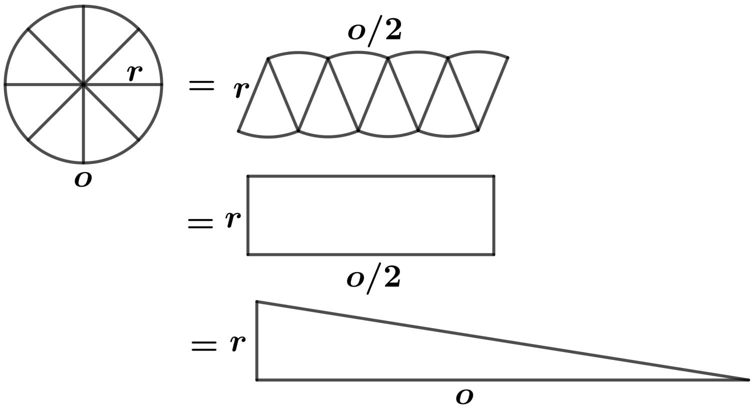
Vidimo da je površina pravilnog šesterokuta, uvećana za šest površina polukrugova (tj. tri površine krugova) nad njegovim stranicama, jednaka površini kruga opisanog šesterokutu uvećanoj za šest sukladnih mjesecâ. Kako je polumjer kruga opisanog šesterokutu jednak njegovoj stranici, slijedi da je omjer površina kruga opisanog šesterokuta i kruga kojem je promjer stranica tog šesterokuta $4 : 1$. Slijedi da je površina kruga kojem je promjer stranica tog šesterokuta jednaka razlici površina šesterokuta i šest mjesecâ. Ostaje pitanje je li Hipokrat bio svjestan da se ti mjeseci, za razliku od spomenuta tri, ne mogu kvadrirati [18].



Slika 4.7: Navodna Hipokratova kvadratura kruga.

Najveći napredak u rješavanju problema kvadrature kruga, dokaz da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta kojem je jedna kateta jednaka polumjeru, a druga opsegu kruga (slika 4.8), dao je Arhimed.

Teorem 4.1.1. ***Arhimediv teorem o krugu***: *Svaki krug K ima istu površinu kao pravokutni trokut T, čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, druga kao opseg.*



Slika 4.8: Arhimedov teorem o krugu.

Arhimed je teorem dokazao tako da je prvo pokazao da površina $P(K)$ nije veća od $P(T)$, zatim da $P(T)$ nije veća od $P(K)$, pa po principu isključenja trećeg onda slijedi da je $P(T) = P(K)$.

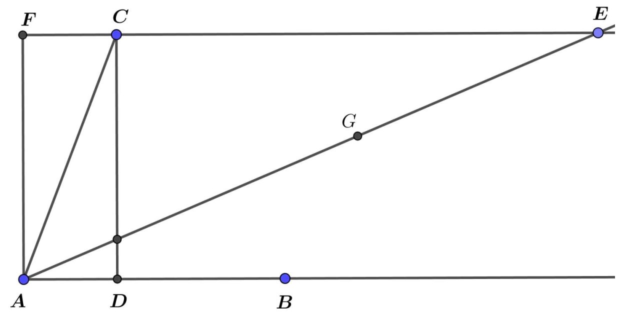
Obje tvrdnje (da $P(K)$ nije veća od $P(T)$ i obrnuto) dokazao je pretpostavivši suprotno te uspoređujući površinu krugu upisanog, odnosno opisanog, pravilnog 2^n-terokuta s površinom trokuta $P(T)$. Više detalja dokaza mogu se naći npr. u [18, 9].

Problem trisekcije kuta

Problem trisekcije kuta drugačiji je od prethodnih dvaju klasičnih problema jer je u nekim slučajevima rješiv konstrukcijom ravnalom i šestarom. Budući da se svaki tupi kut može rastaviti na jedan ili više pravih kutova i jedan šiljasti, problem se svodi na problem trisekcije šiljastog kuta. Primjeri kutova koji se mogu ravnalom i šestarom podijeliti na tri jednaka dijela su pravi kut i kut od 27°. Općenito, danas znamo da se kut može konstruirati ako mu se može konstruirati kosinus (jer je to onda jedna kateta u pravokutnom trokutu hipotenuze 1, pa se taj trokut i stoga kut mogu konstruirati). Stoga, ako je zadan α, iz $\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ uz $3\phi = \alpha$ i $x = \cos\phi$ vidimo da je iz moderne perspektive ovaj problem ekvivalentan konstrukciji rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos\alpha.$$

Hipokratu je bila poznata sljedeća mehanička trisekcija: Ako je zadan kut $\angle CAB$, nacrta se okomica CD na AB i dopuni do pravokutnika $ADCF$ (slika 4.9). Stranica se FC dovoljno produlji te se na njoj nalazi točka E tako da sjecište H od AE s CD bude takvo da je $|HE| = 2|AC|$ (to je u praksi lako izvedivo, iako nije izvedivo kao konstrukcija ravnalom i šestarom). Tada je kut EAB trećina kuta CAB. G je polovište dužine $|HE|$, lako se dokaže da je lut EAB trećina kuta CAB [18].

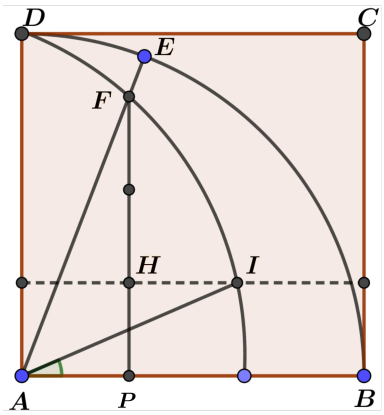


Slika 4.9: Trisekcija kuta Hipokratovom metodom.

Hipiji iz Elide[9] pripisuje otkriće krivulje **kvadratise** oko 420. pr. Kr. Ta se krivulja može iskoristiti za kvadraturu kruga i trisekciju kuta. Kvadratisa spada u tzv. mehaničke

[9]Hipija iz Elide (443.–399. pr. Kr.) bio je grčki matematičar, filozof i sofist. Poznat po otkriću kvadratise.

krivulje čije točke nije moguće konstruirati ravnalom i šestarom te tako, i to rješenje ne zadovoljava uvijet konstrukcije. Kvadratisa se definira kao geometrijsko mjesto točaka F koje su sjecišta stranice $\overline{CD}$ kvadrata, koja se jednolikom brzinom spušta na stranicu $\overline{AD}$ s drugom stranicom $\overline{AB}$ istog kvadrata, a koja jednoliko rotira do položaja $\overline{AD}$ i to tako da stranica $\overline{BC}$ padne na $\overline{AD}$ točno kad i $\overline{AB}$. Za trisekciju kuta kvadratisa se može iskoristiti ovako: Ako je dan kut $\angle EAB$ određen jednim položajem rotirajuće stranice $\overline{AD}$ i pripadna točka F kvadratise, odredi se točka H na okomici FP na AB takva da je $|FH| : |HP| = 2 : 1$. Paralela kroz H sa stranicom AB siječe kvadratisu u točki I. Tada je kut $\angle IAB$ tražena trećina kuta EAB (slika 4.10) [18].



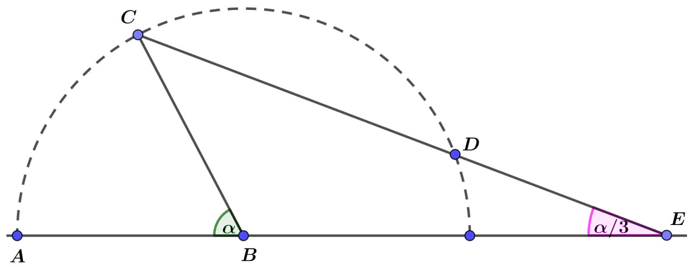
Slika 4.10: Trisekcija kuta pomoću kvadratise.

Arhimedova trisekcija jedna je od najpoznatijih mehaničkih metoda trisekcije kuta. Zadan je kut $\alpha = \angle ABC$. Produlji AB i nacrtaj polukružnicu oko B. Na ravnalu označimo njen polumjer kao $\overline{DE}$ i nađemo poziciju ravnala u kome da tužina jednim krajem leži na AB, drugim na polukružnici, a pritom pravac DE prolazi kroz C. Tada je $\angle AED = \frac{\alpha}{3}$ [18, 9, 33].

4.2 Problem minimalne udaljenosti

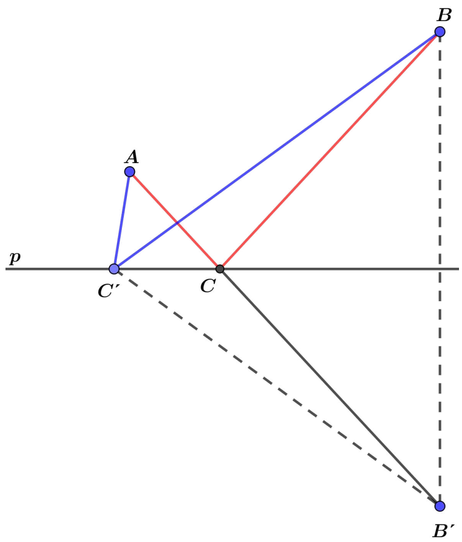
Heron iz Aleksandrije[10] je promatrao sljedeći, vrlo poznati problem:

[10]Heron iz Aleksandrije (vjerojatno 1. st.) bio je starogrčki matematičar i izumitelj. Bavio se geometrijom, poznat je po svojoj formuli za površinu trokuta.



Slika 4.11: Arhimedova trisekcija kuta.

„Neka su A i B točke s iste strane pravca p. Treba pronaći točku C na pravcu p tako da je $|AC| + |CB|$ minimalna [33]."



Slika 4.12: Heronov problem.

Heron je zadatak riješio kako slijedi. Točku B preslikamo osnom simetrijom u točku B' te spojimo točke A i B' dužinom. Sjecište dužine $\overline{AB'}$ i pravca p označimo sa C. Točka C je tražena točka te za nju vrijedi da je $|AC| + |BC|$ minimalno. Naime, promotrimo neku drugu proizvoljnu točku C' na pravcu p (slika 4.12). Trokut $\triangle C'B'B$ je jednakokračan, stoga vrijedi da je $|AC'| + |C'B| = |AC'| + |C'B'|$. Zatim vrijedi:

$$|AC'| + |C'B| = |AC'| + |C'B'| \geq |AB'| = |AC| + |CB|,$$

pri čemu vrijedi jednakost ako se C i C' poklope. Dakle, točka C je rješenje problema [33].

4.3 Podjela prostora ravninama

Rješenje ovog problema dao je **Jakob Steiner**[11] 1826. godine. Problem je sljedeći:

„Na koliko maksimalno područja možemo podijeliti prostor s n ravnina [33]?”

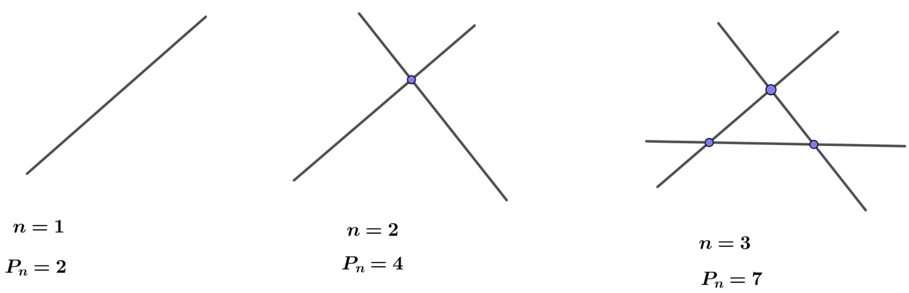
Ovaj problem je više kombinatornog karaktera, ali smo ga odlučili smjestiti u poglavlje o geometriji prvenstveno radi Steinerovog doprinosa geometriji. Pri rješavanju ovog problema koristit ćemo poznate formule:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Promotrimo prvo planimetrijski analogon ovog problema: „Koliki je maksimalni broj područja na koje n pravaca u općem položaju dijeli ravninu [33]?”

Ovaj problem rješavamo matematičkom indukcijom. S P_n označimo broj područja na koje n pravaca dijeli ravninu. Promotrimo sliku 4.13. Očigledno je $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ i $P_3 = 7$.



Slika 4.13: Podijela ravnine pravcima u općem položaju.

Naslućujemo da vrijedi sljedeća rekurzivna relacija:

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + n, \ n \geq 2 \\ P_1 = 2 \end{cases}$$

[11] Jakob Steiner (1796.–1863.) bio je švicarski matematičar koji je poznat po svome radu na području geometrije.

Dokaz. Bazu indukcije predstavlja činjenica da je $P_2 = 4 = P_1 + 2$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Provedimo korak indukcije. Povucimo $(n+1)$-vi pravac u općem položaju (dakle, neparalelan svim prethodnima). On prethodnih n pravaca siječe u n točaka, recimo da su to točke T_1, T_2, ..., T_n. No, tada je sa T_1, ..., T_n taj $(n+1)$-vi pravac podijeljen na $(n+1)$ intervala i svaki od tih intervala dijeli već jedno postojeće područje na dva dijela. Dakle, za svaki interval se broj područja poveća za 1, pa kako ih ima $(n+1)$ slijedi

$$P_{n+1} = P_n + 1 \cdot (n+1) = P_n + (n+1).$$

Stoga prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Možemo li P_n eksplicitno izraziti preko n? Pogledajmo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + 2 \\ P_3 &= P_2 + 3 \\ P_4 &= P_3 + 4 \\ &\vdots \\ P_{n-1} &= P_{n-2} + (n-1) \\ P_n &= P_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Sumiranjem ovih jednakosti neki se članovi dokidaju te ostaje:

$$P_n = P_1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 2 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 1 + 1 + 2 + 3 + ... + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zaključujemo:

$$P_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ova jednakost također se formalno dokazuje matematičkom indukcijom. □

Vratimo se sada prvobitnom problemu. Za postizanje maksimalnog broja područja na koje n ravnina dijeli prostor, pretpostavljamo da nikoje četiri ne prolaze jednom točkom niti ima paralelnih niti ima paralelnih njihovih presječnica [33].

Sa S_n označimo maksimalan broj područja na koje n ravnina dijele prostor uz zadane uvijete. Nova dodana ravnina tj. $(n + 1)$-va siječe prvih n ravnina u n pravaca koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Stoga je nova $(n + 1)$-va ravnina podijeljena sa n pravaca na P_n područja. Za toliko se povećava broj dijelova prostora dodavanjem $(n + 1)$-ve ravnine. Dakle, vrijedi rekurzivna relacija:

$$S_{n+1} = S_n + P_n.$$

Sumiramo sljedeće:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = S_n - S_1 = P_1 + P_2 + ... + P_{n-1}.$$

Budući da je $S_1 = S_0 + P_0 = 1 + 1 = 2$, slijedi:

$$S_n = 2 + P_1 + P_2 + ... + P_{n-1},$$

tj.

$$S_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k.$$

Raspisivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} P_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + k + 2) \\
&= n - 1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k\right] \\
&= n - 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}\right] \\
&= \frac{n^3 + 5n - 6}{6}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo:

$$S_n = \frac{n^3 + 5n - 6}{6} \text{ [33].}$$

Poglavlje 5

Kombinatorika

Kombinatorika je grana matematike koja proučava prebrojavanje konačnih skupova. Mnogi kombinatorni zadaci spadaju u tzv. zabavnu matematiku, te ćemo ovdje predstaviti neke od njih koji su se istakli tijekom povijesti.

5.1 Kombinacije s okusima

Prva zabilježena kombinatorna pravila, ali bez dokaza, pojavila su se u Indiji. U devetom stoljeću indijski matematičar **Mahāvīra** dao je (bez dokaza) eksplicitni algoritam za izračunavanje broja kombinacija. Njegovo pravilo, zapisano u modernom obliku jest sljedeće:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

gdje je $\binom{n}{k}$ broj različitih odabira k objekata od danih n. Sljedeći zadatak je iz Mahāvīrine knjige *Ganita Sara Samgraha*:

„Koliko postoji različitih kombinacija sljedećih okusa: gorko, kiselo, ljuto, slano, trpko i slatko [33]?"

Odabir k okusa od $n = 6$ okusa koji će biti u kombinaciji jednak je odabiru $n - k$ okusa od danih n koji neće biti u kombinaciji. To zapisujemo na sljedeći način:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Stoga postoji:

1. $\binom{6}{0} = 1$ način za odabir niti jednog okusa,
2. $\binom{6}{1} = 6$ načina za odabir jednog okusa,
3. $\binom{6}{2} = 15$ načina za odabir dva okusa,
4. $\binom{6}{3} = 20$ načina za odabir tri okusa,
5. $\binom{6}{4} = 15$ načina za odabir četiri okusa,
6. $\binom{6}{5} = 6$ načina za odabir pet okusa,
7. $\binom{6}{6} = 1$ način za odabir šest okusa.

Sumiramo dobivene vrijednosti i zaključujemo da je ukupan broj svih različitih kombinacija upravo 64. To je naravno specijalni slučaj (za $n = 6$) danas dobro poznate kombinatorne formule

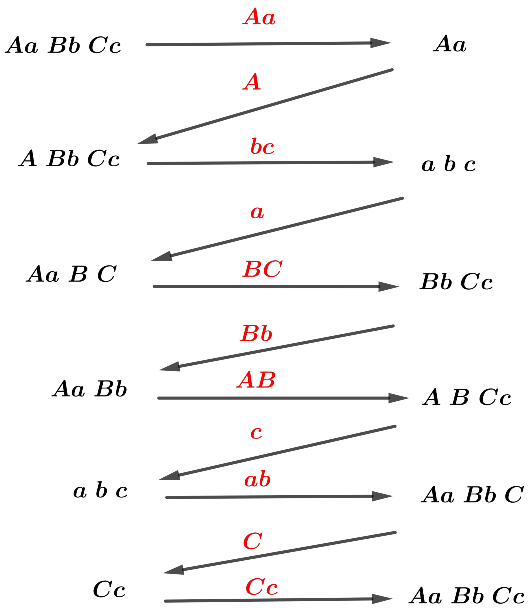
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Zadatak smo mogli riješiti i na nešto drugačiji način. Naime, označimo sa $\overline{f_1 f_2 ... f_6}$ šesteroznamenkasti broj takav da je $f_k = 0$ ako okus k nije odabran, za $k \in \{1, ..., 6\}$, a sa $f_k = 1$ ako je okus k odabran. Pitanje je, koliko takvih šesteroznamenkastih brojeva postoji? Odgovor se krije u varijacijama s ponavljanjem šestog razreda od dva elementa, odnosno broj varijacija s ponavljanjem šestog razreda od dva elementa jednak je $2^6 = 64$ [33].

5.2 Zadaci s prijelazima rijeke

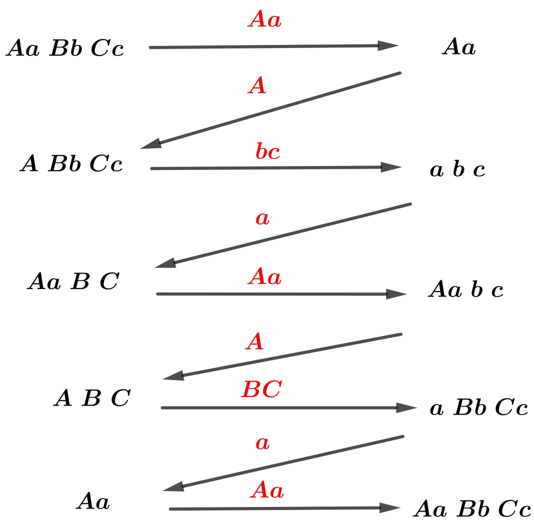
Problem je sljedeći: „Tri žene i njihovi muževi dolaze do obale rijeke tijekom putovanja. Rijeku moraju prijeći čamcem koji istovremeno ne može prevesti više od dvije osobe. Muževi su jako ljubomorni i svaki od njih postavio je uvjet da njegova žena ne smije biti u društvu s nekim drugim mužem ako nije i sam prisutan. Mogu li ova tri para prijeći rijeku uz dane uvjete [33]?”

Alcuin je dao rješenje koje se sastoji od jedanaest prelazaka rijeke. Neka velika slova A, B i C označavaju muževe, a mala slova a, b i c njihove žene. Ista slova odgovaraju svakom bračnom paru. Alcuinovo rješenje je dano na slici 5.1.



Slika 5.1: Alcuinovo rješenje problema.

Postoji i nešto kraće rješenje za koje je potrebno devet prelazaka rijeke. Ipak, ovo rješenje možemo prihvatiti samo pod posebnim uvjetima o kojima se u tekstu zadatka ne spominje. Rješenje sa devet prelazaka rijeke dano je na slici 5.2.



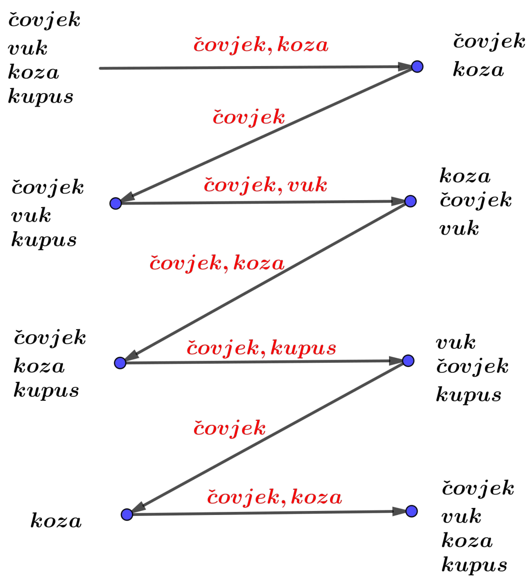
Slika 5.2: Rješenje sa devet prelazaka rijeke.

U čemu je problem sa drugim rješenjem? Naime, u sedmom prelasku rijeke, muževi B i C dolaze do obale rijeke na kojoj se nalaze žene a, b i c. Oni prepuštaju čamac ženi a i time se narušava uvjet zadatka koji zabranjuje susret svake žene sa drugim muškarcima ako njezin muškarac nije sam prisutan. Ako se taj susret zanemari, rješenje od devet prelazaka može biti prihvaćeno. Ako je u zadatku strogo više od tri vjenčana para, zadatak se može riješiti samo uz pomoć otoka usred rijeke [33].

Sljedeći poznati zadatak matematički je jako sličan prethodnom. Seže u osmo stoljeće kada se prvi puta pojavio u Alcuinovoj knjižici. Zadatci s prelaskom rijeke pojavljuju se u školi kao zadatci zabavnog karaktera. Jedan od poznatijih problema je onaj koji uključuje čovjeka, vuka, kozu i kupus. Problem je sljedeći:

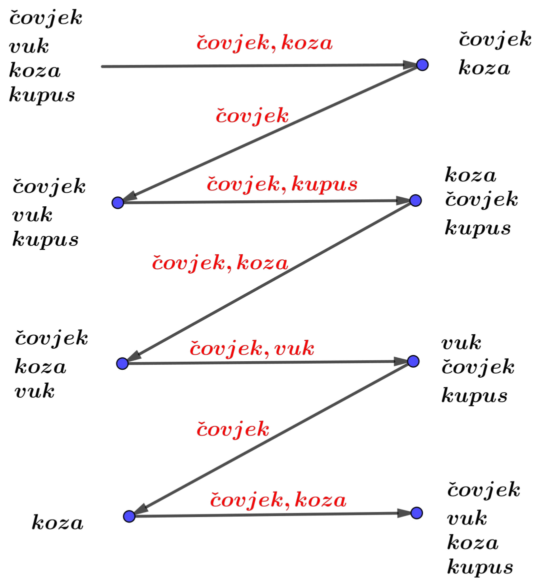
„Čovjek želi prevesti preko rijeke vuka, kozu i kupus u čamcu u koji istovremeno stane, uz čovijeka, samo vuk ili koza ili samo zelje. Ne može ostaviti kozu samu s vukom jer će je pojesti, niti može ostaviti kozu samu s kupusom. Kako da preveze svo troje bez da itko išta pojede s najmanjim brojem prijelaza [33]?"

Postoje dva rješenja koja zadovoljavaju uvjet minimalnosti: (slika 5.3 i slika 5.4).



Slika 5.3: Prvo prebacivanje koje zadovoljava uvjet minimalnosti.

Uočimo da je za oba rješenja koja zadovoljavaju uvijet minimalnosti potrebno sedam prijelaza rijeke [33].



Slika 5.4: Drugo prebacivanje koje zadovoljava uvjet minimalnosti.

5.3 Josipov problem

Jedan od najpoznatijih kombinatornih problema u povijesti pripisuje se židovskom povjesničaru **Josipu Flaviju**[1] iz 1. stoljeća. Problem je sljedeći:

„Pobunjenik Josip Flavije zarobljen je zajedno sa svojih 40 suboraca u jednoj špilji, pokraj grada Jotapata od strane rimskih vojnika. Umjesto da se predaju, odlučili su se međusobno ubiti. Josip i njegov prijatelj nisu bili za takvo rješenje pa je on dao sljedeći prijedlog. Njih 41 postavit će se u krug i svaka treća osoba bit će ubijena (nekoliko puta uokrug sa sve manjim brojem ljudi) dok ne preostanu na životu dvije osobe. Zahvaljujući svom matematičkom talentu Josip je ubrzo shvatio da će on i njegov prijatelj preživjeti ako stanu na 16. i 31. mjesto. Tako se i dogodilo [33].”

Zanimljivo je, da je ovaj problem potaknuo pažnju mnogih matematičara, tako da postoje razne varijante Josipovog problema, najčešće s parnim brojem osoba od kojih su pola po nekom kriteriju loše i trebaju biti eliminirane analognim postupkom kao u izvornom Josipovom zadatku. Navest ćemo jednu od varijanti Josipovog problema. **Bachetova**[2] varijanta je sljedeća:

[1] Josip Flavije (37.–100.) bio je židovski povjesničar i vojskovođa.

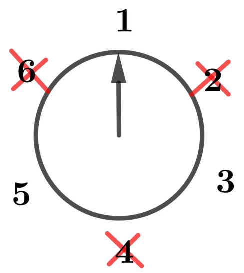
[2] Claude Gaspar Bachet de Meziriac (1581.–1638.) bio je francuski matematičar poznat po doprinosu teoriji brojeva i metodi konstrukcije magičnih kvadrata.

„Petnaest mornara i petnaest krijumčara plovilo je brodom koji je naišao na oluju. Kapetan bi mogao spasiti brod ako polovica putnika napusti brod. Složio je trideset muškaraca u krug, a svaki je deveti, računajući iz određene točke na krugu, spušten u čamac za spašavanje. Kako kapetan treba rasporediti muškarce tako da svih petnaest mornara bude spašeno [33]?"

Opća varijanta Josipovog problema je sljedeća: „ n ljudi označeni brojevima od 1 no n smješteni su u krug. Krenimo od osobe s brojem 1 i eliminiramo svaku k-tu osobu ($k \geq 2$), sve dok ne preostane samo jedna osoba. Odredimo polaznu poziciju preživjele osobe [33]."

Rješenje za slučaj $k = 2$: Dobiveni broj očito ovisi o broju n. Radi jednostavnosti definirat ćemo funkciju $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdje je $J(n)$ broj koji preostane od brojeva $\{1, ..., n\}$, koristeći navedeni postupak. Razlikujemo parni i neparni slučaj za n.

Ako je $n = 2m$, tj. imamo paran broj ljudi, nakon prve eliminacije preostaju samo neparni brojevi. Primjera radi, pogledajmo slučaj za $n = 6$.

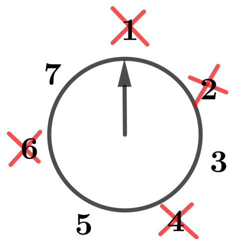


Slika 5.5: Primjer prvog kruga eliminacije za $n = 6$.

Nakon prvog kruga eliminacije, postupak opet ponavljamo, tako da je sljedeći broj za eliminaciju broj 3. Novi krug sastoji se bez m prethodno eliminiranih osoba i svaka osoba koja je ostala je s pozicije oblika $2l - 1$. Stoga, $J(2m) = 2J(m) - 1$, za $n \geq 1$.

Ako je $n = 2m + 1$, u prvom krugu eliminacije osobe označene sa brojevima $2, 4, 6, ...$ i 1 su eliminirane. Ostale su osobe sa neparnim brojevima, izuzev broja 1. Primjera radi, pogledajmo slučaj kada je $n = 7$.

U ovom slučaju ostaju osobe čije pozicije su oblika $2m+1$. Stoga, $J(2m+1) = 2J(m)+1$.



Slika 5.6: Primjer prvog kruga eliminacije za $n = 7$.

Za funkciju $J(n)$ stoga imamo sljedeće rekurzivne relacije, drugim riječima za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$J(1) = 1$$
$$J(2n) = 2J(n) + 1$$
$$J(2n+1) = 2J(n) + 1$$

Prvih nekoliko vrijednosti za $J(n)$ prikazano je u sljedećoj tablici.

n	1	2 3	4 5 6 7	8 9 10 11 12 13 14 15	16
J(n)	1	1 3	1 3 5 7	1 3 5 7 9 11 13 15	1

Tablica 5.1: Prvih nekoliko vrijednosti za $J(n)$.

Gornja toblica sugerira da funkcija $J(n)$ „prebrojava" sve neparne brojeve tako da svaki put kada joj je argument potencija broja 2 krene ispočetka. $J(n)$ je uvijek 1 na početku grupe za $n = 2m$ i povećava se za 2 unutar grupe.

Ako stavimo $n = 2^m + l$, gdje je 2^m najveća potencija broja 2 koja nije veća od n, tada imamo:

$$J(2^m + l) = 2l + 1, \ \ 0 \leq l < 2^m.$$

Dokaz se provodi indukcijom [33].

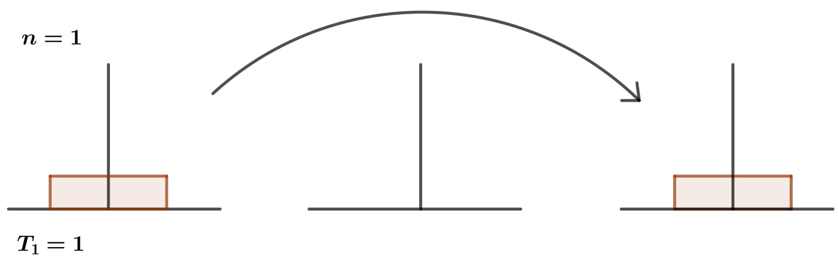
Primjer 5.3.1. *Kako je* $100 = 2^6 + 36$ *slijedi* $J(100) = J(2^6 + 36) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$ [*33*].

5.4 Hanojski tornjevi

Zagonetku Hanojskih tornjeva izmislio je francuski matematičar **Edouard Lucas** 1883. godine. Prema legendi, vrhovni hinduistički bog dao je svojim svećenicima sljedeći zadatak: Dana su tri dijamantna štapa, na prvom štapu naslagana su 64 zlatna diska različitih veličina, od najvećeg na dnu do najmanjeg na vrhu. Sva 64 diska treba premjestiti sa prvog na treći štap, tako da svi diskovi budu u istom položaju i niti u jednom trenutku veći disk ne smije biti stavljen na manji. Kada i zadnji disk bude premješten, svijet će doći svom kraju. Ostaje nejasno je li Lucas izmislio ovu legendu, ili je bio inspiriran njome. Inače, za izvršenje ovog zadatka svećenicima bi trebalo 18 446 744 073 709 551 615 poteza da izvrše zadatak [3].

Pretpostavimo da imamo n diskova. Tražimo najmanji broj premještanja za prebacivanje n diskova po zadanim pravilima. Označimo taj broj sa T_n.

Slučaj kada je $n = 1$ prikazan je na slici 5.7.



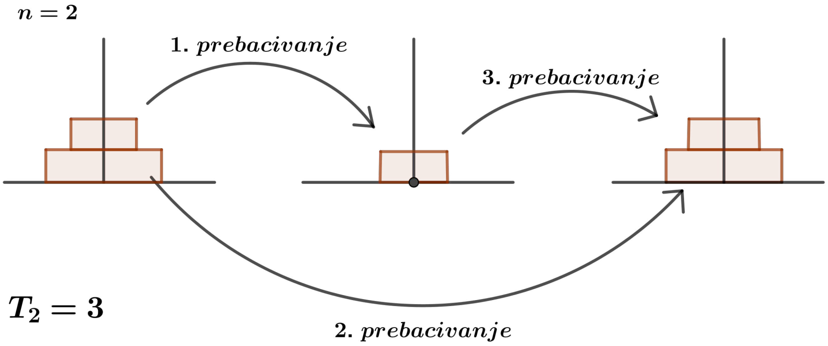
Slika 5.7: Prebacivanje jednog diska.

Slučaj za $n = 2$ prikazan je na slici 5.8.

Ako trebamo premjestiti n diskova, prvo premjestimo $(n-1)$ manjih diskova na pomoćni štap, a za to nam je potrebno T_{n-1} premještaja koristeći 3. štap kao pomoćni. Onda prebacimo najveći disk na treći štap. To je još jedno premještanje. Konačno $(n-1)$ sa pomoćnog štapa prebacimo na treći štap koristeći 1. štap sada kao pomoćni. Za to je potrebno T_{n-1} premještanja. Zaključujemo da T_n zadovoljava

$$T_n \leq 2 \cdot T_{n-1} + 1.$$

S druge strane, u nekom trenutku moramo prebaciti najveći disk, a kada to radimo ovih $n-1$ manjih diskova moraju biti na jednom štapu i treba nam barem T_{n-1} premještanja da to napravimo. Sada najveći disk možemo koliko god puta premještati, ali ga barem jednom



Slika 5.8: Prebacivanje dva diska.

moramo smjestiti na zadnji štap. Da bi na njemu dobili onih $n - 1$ manjih diskova treba nam T_{n-1} premještanja, tj.

$$T_n \geq 2 \cdot T_{n-1} + 1.$$

Zaključujemo da T_n zadovoljava sljedeću rekurzivnu relaciju:

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1.$$

Tražimo eksplicitni izraz za T_n:

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot T_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 \cdot T_{n-2} + 2 + 1$$

$$= 2^2 \cdot (2 \cdot T_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 \cdot T_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = ...$$

$$= 2^n \cdot T_0 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 1 = 2^n - 1 \text{ [3]}.$$

5.5 Eulerov zadatak s grčko-latinskim kvadratima

Latinski kvadrat je $n \times n$ tablica s n različitih simbola tako da se svaki simbol pojavljuje točno jednom u svakom retku i svakom stupcu. Prvi se njima sustavno bavio Euler. On ih je smatrao novom vrstom „magičnih kvadrata" popularnih u to vrijeme. Kao simbole koristio je latinična slova pa odatle i potječe njihov naziv [28]. Ako umjesto slova koristimo boje ili uzorke, dobit ćemo vizualno atraktivnije latinske kvadrate [5]. Zamijene li se dva retka, stupca ili simbola dobije se novi, izotopni latinski kvadrat. Izotopija je relacija ekvivalencije i dijeli latinske kvadrate na klase ekvivalencije. Od uobičajenih latinskih kvadrata, zanimljivi su, a i korisniji, oni koji se nazivaju grčko-latinskim kvadratima [28]. **Eulerov kvadrat ili grčko-latinski kvadrat** je kvadrat u kome se svako latinično slovo kombinira jednom i samo jednom sa svakim grčkim slovom. Dakle, u grčko-latinskim kvadratima kao da imamo preklopljena dva latinska kvadrata. Naziv grčko-latinski kvadrat također potječe od Eulera jer je on koristio kombinacije od po jednog latinskog i jednog grčkog slova (slika 5.9) [5].

b	a	d	c
d	c	b	a
c	d	a	b
a	b	c	d

γ	δ	α	β
β	α	δ	γ
δ	γ	β	α
α	β	γ	δ

$b\gamma$	$a\delta$	$d\alpha$	$c\beta$
$d\beta$	$c\alpha$	$b\delta$	$a\gamma$
$c\delta$	$d\gamma$	$a\beta$	$b\alpha$
$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$	$d\delta$

Slika 5.9: Lijevo: latinski kvadrat četvrtog stupnja s latiničnim slovima (a, b, c i d). U sredini: latinski kvadrat s grčkim slovima α, β, γ i δ. Desno: grčko-latinski kvadrat.

Dok latinski kvadrati postoje u svim veličinama, grčko-latinski ne postoje u veličinama 2×2 i 6×6. U Eulerovo vrijeme bili su opće poznati grčko-latinski kvadrati reda 3, 4 i 5, no Euler se pitao što je s grčko-latinskim kvadratom reda 6? Godine 1782. Euler je formulirao problem poznat kao *Eulerov problem časnika* [33]:

„Može li se rasporediti 36 časnika, od kojih svaki ima 6 različitih činova, koji pripadaju 6 zasebnim pukovnijama, kako bi se formirao kvadrat 6×6 tako da svaki redak i stupac sadrži točno jednog časnika svakog čina i iz svake pukovnije [33]?"

Euler je pokazao da se problem n^2 časnika, koji se kao i problem konstrukcije grčko-latinskog kvadrata reda n, uvijek može riješiti ako je n neparan ili ako je n djeljiv s 4. Nadalje, izjavio je da se grčko-latinski kvadrati reda 6, 10 i 14 te općenito svi kvadrati reda $n = 4k + 2$ ne mogu konstruirati. Ta tvrdnja postala je poznata kao Eulerova pretpostavka [33]. Eulerova pretpostavka opovrgnuta je 1959. godine kada je konstruiran grčko-latinski kvadrat reda 22 i reda 10. Eulerova pretpostavka pogrešna je za sve vrijednosti $n = 4k + 2$, gdje je $n > 6$ [33].

Grčko-latinski kvadrati koriste se u planiranju nekih eksperimenata ili rasporeda [5]. Primjerice, želimo li da dvije skupine ljudi (skupina 1: Tin, Iva, Fran; skupina 2: Ana, Jan, Eva) u tri dana (petak, subota i nedjelja) odlaze na kavu tako da se svatko iz jedne skupine sastane sa svakim iz druge po jedan put i da nitko nema dva dogovora za kavu u istom danu, te da pritom raspravljaju o trima matematičkim disciplinama (geometriji, kombinatorici, vjerojatnosti) opet prema istom principu (svatko po jednom raspravlja o svakoj matematičkoj disciplini i nitko ne raspravlja o istoj dvaput), možemo raspored dobiti iz grčko- latinskog kvadrata veličine 3×3. Promotrimo sljedeći grčko-latinski kvadrat sastavljen iz kombinacija latinskih slova P, S, N i grčkih slova α, β i γ (slika 5.10) [5].

P α	S β	N γ
N β	P γ	S α
S γ	N α	P β

Slika 5.10: Grčko-latinski kvadrat.

Gledamo li samo slova P, S, N, ona čine latinski kvadrat, a isto vrijedi i ako gledamo samo slova α, β i γ. Uz to, svaka kombinacija latinskog i grčkog slova pojavljuje se točno po jednom u tablici - uočimo da imamo grčko-latinski kvadrat. Ako sada uzmemo da slova P, S, N znače „petak, subota, nedjelja", a slova α, β i γ znače „geometrija, kombinatorika, vjerojatnost" te dodatno zamislimo da retci predstavljaju osobe prvog tima (prvi red Tin, drugi Iva, treći Fran), a stupci osobe drugog tima (prvi Ana, drugi Jan, treći Eva), lako očitamo raspored. Primjerice, u nedjelju (N) će o kombinatorici (β) raspravljati Iva (drugi red) i Ana (prvi stupac) [5, 28, 33].

Poglavlje 6

Vjerojatnost

Pierre-Simon de Laplace[1] jednom davno rekao je: „Najvažnija životna pitanja su, u većini slučajeva, vezana uz vjerojatnosne probleme [33].” Također je napisao: „Znakovito je važno, da znanost koja je započela razmatranjem igara na sreću, postane važan dio ljudskog znanja [33].” Vjerojatnost je puna iznenađujućih rezultata i paradoksa, više nego bilo koja druga grana matematike. Zanimljiva je i sljedeća izjava: „Vjerojatnost je jedina grana matematike u kojoj dobri matematičari često dobivaju rezultate koji su u potpunosti pogrešni [33].” Rezultati plodonosnih rasprava dvaju poznatih francuskih matematičara, Blaise Pascala i Pierre de Fermata, doveli su do temelja teorije vjerojatnosti. U ovom poglavlju bavit ćemo se poznatim vjerojatnosnim problemima, ali bit će i onih manje poznatih.

6.1 Problem bodova

Godine 1654. **Antonie Gombaud** (1607.–1684.), zvan **Chevalier de Méré**, ujedno i profesionalni kockar, zamolio je **Pascala**[2] da riješi kockarski problem koji se tiče podjele uloga. Pascal i Fermat intenzivno su (kroz pisma) raspravljali o ovom problemu, koji se često naziva problemom bodova. Kroz svoja dopisivanja došli su do temelja teorije vjerojatnosti. Problem bodova ponekad zvan i kao problem podjele, glasi:

„Dva jednako uspješna kockara igraju pravednu igru u krugovima. Pobjednik je onaj koji prvi ostvari unaprijed fiksirani broj bodova. Međutim, igra se prekida radi nekog razloga. Pitanje je kako podijeliti uloge znajući bodove kockara u trenutku prekida igre i broj

[1] Pierre-Simon de Laplace (1749.–1827.) bio je poznati francuski matematičar i astronom čiji su radovi znatno doprinijeli razvoju matematike, astronomije, vjerojatnosti i statistike.

[2] Blaise Pascal (1623.–1662.) bio je francuski matematičar i fizičar koji je zasnovao teoriju vjerojatnosti proučavajući igre na sreću.

bodova potrebnih za pobijedu [33]?”

Fermat je proučavao slučaj u kojem kockaru A trebaju 2, a kockaru B 3 boda do pobjede. Očito je da ne treba više od $2 + 3 - 1 = 4$ ispitivanja za utvrđivanje rezultata. S a označimo krug kada igrač A pobjeđuje, a s b kada to čini igrač B. U tih $2 + 3 - 1$ krugova može nastupiti $2^{2+3-1} = 16$ jednako vjerojatnih nizova pobjeda (slika 6.1).

1	a	a	a	a
2	a	a	a	b
3	a	a	b	a
4	a	b	a	a
5	b	a	a	a
6	a	a	b	b
7	a	b	a	b
8	b	a	a	b
9	a	b	b	a
10	b	a	b	a
11	b	b	a	a
12	b	b	b	a
13	b	b	a	b
14	b	a	b	b
15	a	b	b	b
16	b	b	b	b

Slika 6.1: Mogući nizovi pobjeda.

Među 16 mogućih slučajeva, 11 je povoljnih za A (to su prvih 11 gdje se a pojavljuje 2 ili više puta), a 5 ih je povoljno za B (preostali slučajevi gdje se b pojavljuje tri ili više puta). Stoga je vjerojatnost pobjede $\frac{11}{16}$ za kockara A i $\frac{5}{16}$ za kockara B. Fermat je zaključio da ulog treba podijeliti proporcionalno vjerojatnostima pobjede, dakle, u omjeru $11 : 5$. Pascal je do istog zaključka došao koristeći tablicu binomnih koeficijenata, koju danas nazivamo Pascalovim trokutom. S n označimo unaprijed fiksirani broj bodova koji igrači moraju postići u igri kako bi pobijedili. Zatim, s $e(k, m)$ označimo udio kockara A u ukupnom ulogu, tj. očekivanje igrača A ako je igra prekinuta kada igraču A nedostaje k, a igraču B m krugova do pobjede. Tada će igra biti gotova u najviše $k + m - 1$ sljedećih krugova. Pascalov postupak možemo zapisati na sljedeći način [18]:

$$e(0, n) = 1, \qquad e(n, n) = \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$e(k, m) = \frac{1}{2}[e(k-1, m) + e(k, m-1)], \quad k, m = 1, 2, ...$$

Da bi izračunao $e(k, m)$, Pascal je koristio svoje rezultate iz aritmetičkog trokuta (Pascalovog trokuta). Ova rekurzivna metoda postala je vrlo popularna kasnije u 18. stoljeću. Općeniti izraz za $e(k, m)$ koji je izveo jest

$$e(k, m) = \frac{1}{2^{k+m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k+m-1}{i}.$$

Fermatov pristup rješavanju problema bodova bio je nešto drugačiji. Iako nije izračunao općeniti izraz za $e(k, m)$, njegovi zaključci izneseni na nekim posebnim slučajevima dovodi do izraza

$$e(k, m) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k-1+i}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+i}.$$

Bitno je napomenuti da prethodna dva izraza daju isti rezultat. Za slučaj kojeg je Fermat proučavao imamo $k = 2$ i $m = 3$. Uvrštavanje u Pascalov izraz (koji je, kako je rečeno, ekvivalentan Fermatovom) daje

$$e(2, 3) = \frac{1}{2^4}\left(\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2}\right) = \frac{11}{16},$$

što predstavlja vjerojatnost pobjede igrača A [18, 33].

6.2 Problem kockareve propasti

Problem kockareve propasti privukao je pozornost začetnika teorije vjerojatnosti: Pascala, Fermata i Huygensa. Problem glasi:

„Dva igrača, igrač A i igrač B, bacaju novčić. Vjerojatnost pobjede za oba igrača je u svakom krugu $\frac{1}{2}$. Svaki od njih ima konačan iznos novaca, označimo ih m i n. Nakon svakog bacanja, gubitnik daje jedan novčić pobjedniku. Igra je gotova kada jedan od igrača posjeduje sve novce koji su bili u igri (ukupno: $m + n$). Koja je vjerojatnost da će to biti igrač A, odnosno B [33]?

Problem kockarove propasti i dan danas privlači pozornost mnogih matematičara. Nizozemski matematičar **Nicolaas Struyck** (1686.–1769.) prvi je dao potpuno rješenje problema 1716. godine, koristeći rekurzivnu formulu Jacoba Bernoullija. Struyckovo rješenje može se opisati na sljedeći način: Neka $e(x)$ označava očekivanje igrača A kada posjeduje x žetona, $x = 1, 2, ..., m+n-1$, $e(0) = 0$, $e(m+n) = 1$. S p označimo vjerojatnost pobjede igrača A u pojedinom krugu; tada je $q = 1 - p$ vjerojatnost pobjede igrača B u pojedinom krugu. Rekurzivna relacija Jacoba Bernoullija jest sljedeća:

$$e(x) = pe(x+1) + qe(x-1), \quad x = 1, 2, ..., m+n-1, \tag{6.1}$$

koja se može zapisati kao

$$pe(x+1) = (p+q)e(x) - qe(x-1), \tag{6.2}$$

odakle slijedi da je

$$e(x+1) - e(x) = \frac{q}{p}\Big[e(x) - e(x-1)\Big]. \tag{6.3}$$

Uzastopnom primjenom posljednje relacije jednakost (6.3) svodimo na oblik

$$e(x+1) - e(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x e(1). \tag{6.4}$$

Primjenom sume $\sum_{x=0}^{m-1}$ na jednakost (6.4) dobivamo:

$$e(m) = \sum_{x=0}^{m-1}[e(x+1) - e(x)] = \frac{[1 - (q/p)^m]e(1)}{1 - (q/p)}. \tag{6.5}$$

Na analogan način dobivamo da je

$$e(m+n) = \sum_{x=0}^{m+n-1}[e(x+1) - e(x)] = \frac{[1 - (q/p)^{m+n}]e(1)}{1 - (q/p)}. \tag{6.6}$$

Uvrstimo li $e(m+n) = 1$ u jednakost (6.6), dobivamo da je

$$e(1) = \frac{1 - (q/p)}{1 - (q/p)^{m+n}}. \tag{6.7}$$

Uvrštavanjem $e(1)$ u (6.5), Struyck je dobio sljedeću vjerojatnost pobjede igrača A (propasti igrača B)

$$P_A = e(m) = \frac{1-(q/p)^m}{1-(q/p)^{m+n}}.$$

Istom argumentacijom dobiva se sličan izraz za P_B

$$P_B = e(n) = \frac{1-(p/q)^n}{1-(p/q)^{m+n}}.$$

Omjer dobivenih vjerojatnosti je

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^n q^m - p^{m+n}}{q^{m+n} - p^n q^m},\ m \neq n.$$

U posebnom slučaju, kada je $m = n$, supstitucijom $t = q/p$ i dobivamo

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^m}{q^m} \cdot \frac{(q/p)^m - 1}{(q/p)^n - 1} = \frac{1}{t^m} \cdot \frac{(t-1)(t^{m-1} + ... + t + 1)}{(t-1)(t^{n-1} + ... + t + 1)} =$$

$$\frac{1}{t^m} = \left(\frac{p}{q}\right)^m.$$

Primjerice, Huygens je razmatrao varijantu zadatka kad igrači započinju sa $m = n = 12$ žetona, a prema navedenim pravilima igre, broj šansi za osvajanje pojedinog kruga je 15 za igrača A i 27 za igrača B od 42 moguća ishoda, dakle $p = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$ i $q = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$. Stoga za taj slučaj imamo

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{(5/14)^{12}}{(9/14)^{12}} = \left(\frac{5}{9}\right)^{12} = \frac{244\,140\,625}{282\,429\,536\,481}.$$

Definirajući nominalne vrijednosti svakog igrača, de Moivre je 1711. godine na vrlo jednostavan način riješio opći problem kockareve propasiti. Pretpostavio je da igrači imaju novce složene u tornjeve pri čemu jedan novčić predstavlja jedan ulog. Dokaz je sljedeći: Igrač A posjeduje m, a igrač B n novčića složenih u tornjeve. Nominalne vrijednosti raspoređene su na sljedeći način:

najdonji (tj. zadnji) novčić igrača A nominalne je vrijednosti $\dfrac{q}{p}$,

predzadnji novčić igrača A nominalne je vrijednosti $\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$,

$\vdots$

$$\text{najgornji (tj. „najviši") novčić nominalne je vrijednosti } \left(\frac{q}{p}\right)^m,$$

$$\text{najgornji (tj. najviši) novčić igrača } B \text{ nominalne je vrijednosti } \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1},$$

$$\text{novčić ispod najvišljeg novčića igrača } B \text{ nominalne je vrijednosti } \left(\frac{q}{p}\right)^{m+2},$$

$$\vdots$$

$$\text{najdonji novčić igrača } B \text{ nominalne je vrijednosti } \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} \text{ [33].}$$

Nakon svake odigrane igre gubitnik daje najgornji novčić pobjedniku koji ga stavlja na vrh svoje hrpe, tj. tornja. Nominalni ulog igrača B je stoga u svakom krugu $\frac{q}{p}$ veći nego onaj od igrača A, pa je očekivana vrijednost svakog kruga igre jednaka 0. Dakle, $p\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^{x} = 0$, za sve x od 0 do $m + n$. Budući da je nominalno očekivanje u svakom krugu 0, nominalno očekivanje igrača A u cijeloj igri jednako je nominalnom očekivanju igrača B, dakle vjerojatnost pobjede igrača A u svakom krugu igre pomnožena sa nominalnim dobitkom igrača A mora biti jednaka vjerojatnosti pobjede igrača B u svakom krugu igre pomnožena sa nominalnim dobitkom igrača B [33]:

$$P_A \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{m+j} = P_B \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{q}{p}\right)^{i}.$$

Uzevši u obzir da je $P_A + P_B = 1$, slijedi da je vjerojatnost pobjede igrača A (propasti igrača B) u cijeloj igri:

$$P_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} \text{ [33].}$$

6.3 Buffonov problem

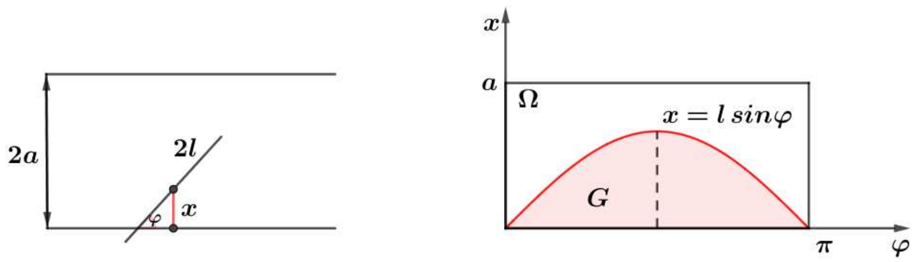
Georges Buffon[3] poznat je po sljedećem problemu:

[3] Georges Buffon (1707.–1788.) bio je francuski matematičar koji se bavio vjerojatnošću, binomnom formulom, geometrijom, teorijom brojeva i mehanikom.

„Ravnina je podijeljena paralelnim pravcima koji su udaljeni jedan od drugoga $2a$. Na tu se ravninu nasumice baca igla duljine $2l$, ($l \leq a$). Izračunajte vjerojatnost da igla presijeca neki od pravaca [29]?"

Buffon je taj zadatak, s greškom, riješio 1777., a prvi ga je točno riješio Laplace 1812. Standardno rješenje ovog zadatka koristi geometrijsku vjerojatnost. Stoga trebamo odrediti: mjeru skupa događaja s pozitivnim ishodom (igla je pala na pravac) i mjeru skupa svih mogućih događaja (igla je pala). Povoljan događaj možemo interpretirati i ovako: odredimo polovište igle i njenu udaljenost od najbližeg pravca označimo sa x (slika 6.2 lijevo). Projekcija polovine igle na dobivenu okimicu bit će duljine $l \cdot \sin\varphi$, gdje je φ kut između bližeg paralelnog pravca i pravca kojeg određuje položaj igle (uvijek uzimamo manji kut). Ako je x udaljenost polovišta igle do pravca manja od ove vrijednosti, dakle $x < l \cdot \sin\varphi$, igla siječe, tj. pala je na taj pravac. Stoga je $0 \leq x \leq a$ i $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Skup svih događaja s povoljnim ishodom označimo s G i to je skup $G = \{(\varphi, x) : x < l\sin\varphi\}$, a skup mogućih događaja s Ω, $\Omega = \{(\varphi, x) : 0 \leq \varphi \leq \pi \wedge 0 \leq x \leq a\}$.



Slika 6.2: Buffonov problem

Skup G predstavlja prvi „brijeg" sinusoide (slika 6.2 desno), a skup Ω je pravokutnik sa stranicama a i π [29].

Površinu skupa G označimo $P(G)$ i to je površina jednog vala sinusoide:

$$P(G) = \int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = l \cdot [-\cos\varphi|_0^{\pi}] = -l \cdot (\cos\pi - \cos 0) = -l \cdot (-1 - 1) = 2l.$$

Površinu skupa Ω označimo $P(\Omega)$, a to je pravokutnik sa stranicama a i π:

$$P(\Omega) = a \cdot \pi.$$

Stoga je tražena vjerojatnost kvocijent izračunatih površina:

$$p = \frac{P(G)}{P(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Promotrimo gornju jednakost s drugog gledišta. Pretpostavimo da ne znamo vrijednost broja π, ali da možemo pokusom utvrtidi vjerojatnost p. Vjerojatnost p možemo procijeniti pomoću relativne frekvencije događaja s povoljnim ishodom m u odnosu na ukupan broj svih događaja, tj. bacanja n, ako je n dovoljno velik [29]:

$$p \approx \frac{m}{n}.$$

Sređivanjem izraza izrazimo π:

$$\pi \approx \frac{2ln}{am}.$$

Kako smo na početku pretpostavili da je $l \leq a$, uzmimo da je $l = a$. Tada je prethodni izraz jednostavniji za računanje, ali i pokus za izvođenje:

$$\pi \approx \frac{2n}{m}.$$

Izraz $\pi \approx \frac{2n}{m}$ je traženi obrazac za stohastičku aproksimaciju broja π. Među takvim pokusima posebno se ističe onaj iz 1850. godine, prilikom čega je **Rudolf Wolf** (1816.–1893.), švicarski astronom i matematičar bacio iglu 5 000 puta i dobio $\pi \approx 3{,}1596$ te **Lazzarini**, talijanski matematičar koji je iz 3408 bacanja 1901. godine dobio rezultat $\pi \approx 3{,}1415929$ [29].

6.4 St. Petersburški paradoks

Mnogi su matematičari 18. i 19. stoljeća bili fascinirani problemom koji poznatim pod nazivom St. Petersburški paradoks. Problem je sljedeći:

„Dva igrača, igrač A i igrač B, igraju igru u kojoj bacaju novčić sve dok prvi put ne padne glava. Ako se to dogodi u prvom bacanju, igrač A daje igraču B 1 krunu, u protivnom igrač A opet baca. Ako glava prvi puta padne u drugom bacanju, igrač A daje igraču B 2 krune. Padne li glava u trećem bacanju, daje četiri krune i tako dalje udvostručujući vrijednost svakog puta. Dakle, ako se do n-tog bacanja ne pojavi glava, igrač B tada dobiva 2^{n-1} krunu. Koliko bi trebao igrač B platiti igraču A za privilegiju igranja ove igre [33]?"

Vjerojatnost da će igrač B dobiti jednu krunu jest $\frac{1}{2}$, da će dobiti dvije je $\frac{1}{4}$, da će dobiti četiri je $\frac{1}{8}$ itd. Ukupan broj kruna koje može očekivati da će dobiti je:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}2^{n-1}+...=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...=\infty!$$

Ovaj neočekivani rezultat (djeluje kao da bi igrač B trebao uplatiti beskonačno mnogo novaca) privukao je pažnju mnogih matematičara uključujući i braću **Daniela**[4] i **Nicolausa III. Bernoullija**[5]. Francuski matematičari **Nicolas Condorcet**[6] i **Siméon Poisson**[7] smatrali su da je igrač A stupio u angažman kojeg nije mogao održati te da je igra kontradiktorna. Još jedan francuski matematičar, **Joseph Bertrand**[8], tvrdio je da su teorija i navedeni rezultat bili sasvim ispravni te da su uvjeti igre pogodovali igraču B što je i dovelo do neočekivanog rezultata. Prema njegovim riječima, ako je broj bacanja ograničen, onda su šanse različite. Na primjer, na stoninu igara ulog igrača B je oko 15 kruna i on sada riskira veći gubitak. Uvjeti igre i dalje mu idu u korist zbog mogućnosti velikog profita, iako su vjerojatnosti male. Ulog igrača B ovisi o broju igara koje je igrač A dužan odigrati. Ako je taj broj n, Bertrand je izračunao da je tada ulog igrača B jednak

$$\frac{\log n}{2\log 2}\ [33].$$

Neki su matematičari ponudili rješenje temeljeno na praktičnom zaključku, budući da je igračevo bogatstvo nužno konačno, zbroj prema tome ne može biti beskonačan. Daniel Bernoulli nastojao je riješiti problem pomoću njegovog načela *moralnog očekivanja*, u skladu s kojim je zamijenio iznose:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ ...\ \text{sa}\ 1^{1/2},\ 2^{1/4},\ 4^{1/8},\ 8^{1/16},\ ...$$

Zapravo je smatrao da vrijednost bogatstva ne ovisi samo o broju kruna koje igrač prikuplja, već i o zadovoljstvu koje ono može dati. Prema njegovom pristupu, dobitak 100 kruna puno više znači onome koji ih trenutno ima malo, nego onome tko ih već ima mnogo. Primjenjujući vlastiti princip moralnog očekivanja, Daniel Bernoulli je iznio sljedeći izračun: Ako se dano bogatstvo x poveća za iznos dx, vrijednost povećanja je

[4]Daniel Bernoulli (1700.–1782.), bio je švicarski matematičar, fizičar, botaničar, oceanograf i anatom. Sin Johanna II. Bernoullija. Izveo osnovnu jednadžbu za gibanje fluida (Bernoullijeva jednadžba).

[5]Nicolaus III. Bernoulli (1695.–1726.), bio je švicarski matematičar i sin Johanna II. Bernoullija. Njegov rad temelji se na promatranju krivulja, diferencijalnih jednadžbi, mehanike i vjerojatnosti.

[6]Nicolas Condorcet (1743.–1794.) bio je francuski matematičar poznat po sastavljanju matematičkih metoda vezanih uz životne i društvene pojave.

[7]Siméon Poisson(1781.–1840.) bio je francuski matematičar i fizičar, autor mnogih znanstvenih radova s područja matematičke fizike i racionalne mehanike. Bavio se Fourierovim integralima, računom varijacija i vjerojatnosti, problemima iz elektrostatike i magnetizma.

[8]Joseph Bertand (1822.–1900.) bio je francuski matematičar koji je radio u područjima teorije brojeva, diferencijalne geometrije, teorije vjerojatnosti, ekonomije i termodinamike.

$\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Dakle, ako se moje bogatstvo poveća s iznosa a na iznos b, stekao sam prednost koja se može mjeriti s

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \text{ [33].}$$

Označimo funkciju koristi s $U(b) = \ln \frac{b}{a}$. Njena varijabla je trenutni kapital b igrača. Početna korist neka je $U_0 = 0$, te neka je s a označen početni kapital. Očekivana korist je, prema Daniellu Bernoulliju jednaka

$$\overline{U} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n U(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \frac{b_n}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{a - u + 2^{n-1}}{a},$$

budući da kapital u slučaju uloga u i dobitka u n-tom bacanju raste s $a-u$ na $b_n = a-u+2^{n-1}$. Stoga Daniel Bernoulli predlaže rješenje problema rješavanjem jednadžbe

$$\overline{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(a - u + 2^{n-1})}{2^n} = \ln a,$$

s obzirom na u [14].

Među raznim modifikacijama St. Petersburškog paradoksa, kako bi se dobilo konačano rješenje, ističe se ona švicarskog matematičara **Gabriela Cramera**[9] iz 1730. godine. Cramer je pretpostavio da je bogatstvo igrača A ograničeno na $2^{24} = 16777216$ kruna. Koliko treba igrač B platiti igraču A za privilegiju igranja već opisane igre?

Cramer predlaže sljedeće rješenje. Vjerojatnost je $\frac{1}{2^n}$ da će igrač B dobiti 2^{n-1} kruna na n-tom bacanju sve dok je $n < 25$; nakon toga dobit će 2^{24} krune. Budući da je

$$\sum_{n=1}^{24} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^{n-1} + \sum_{n=25}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^{24} = 12 + 1 = 13,$$

očekivanje igrača, odnosno pravedni ulog, je 13 kruna [14, 33].

6.5 Problem pogrešnog pisma

Problem je sljedeći: „Djevojka piše k pisama za k prijatelja i raspolaže sa k različitno adresiranih kuverti. Sa zatvorenim očima nasumično stavlja po jedno pismo u svaku kuvertu.

[9]Gabriel Cramer (1704.–1752.) bio je švicarski matematičar poznat po svom doprinosu determinantama i njihovoj upotrebi u rješavanju susatava linearnih jednadžbi.

Kolika je vjerojatnost da samo jedna kuverta sadrži točno, tj. odgovarajuće pismo, a ostale $k-1$ kuverte sadrže kriva pisma [33]?" Rješenje ovog problema slično je rješenju problema kojeg su proučavali **Nicolaus II. Bernoulli**[10] i Euler: „Pretpostavimo da je k različitih predmeta raspoređeno na k različita mjesta. Na koliko različitih načina ti predmeti mogu biti preraspoređeni tako da niti jedan predmet ne zauzme svoje prvobitno mjesto [33]?"

Promotrimo rješenje Nicolausa II. Bernoullijevog i Eulerovog problema koje će nam poslužiti prilikom rješavanja prvobitnog problema. Neka $a_1, ..., a_k$ označuju predmete, a $P_1, \dots, P_k$ njihove odgovarajuće pozicije. Ako se predmet a_i nalazi na poziciji P_j pisat ćemo $a_i \parallel P_j$, u protivnom pisat ćemo $a_i \nparallel P_j$. Sa $M(k)$ označimo broj svih mogučih razmještaja predmeta tako da je svaki predmet stavljen na krivu poziciju. Razlikujemo dva slučaja: (1) $a_1 \parallel P_2$ i $a_2 \parallel P_1$, dok su predmeti $a_3, \dots, a_k$ raspoređeni na mjesta tj. pozicije $P_3, \dots, P_k$ tako da $a_i \nparallel P_i$ $(i = 3, \dots, k)$ i (2) $a_1 \parallel P_2$, ali $a_2 \nparallel P_1$.

U slučaju (1), predmeti $a_3, a_4, \dots, a_k$ su raspoređeni na pozicije $P_4, P_4, \dots, P_k$ tako da $a_i \nparallel P_i$ za svaki $i \in \{3, 4, \dots, k\}$. Broj svih mogućih rasporeda tih predmeta na krive pozicije je $M(k-2)$.

Slučaj (2) odgovara sljedećoj situaciji: Želimo rasporediti $a_2, a_3, \dots, , a_k$ na pozicije $P_1, P_3, P_4, \dots P_k$ tako da $a_2 \nparallel P_1, a_3 \nparallel P_3$ i tako dalje. Dakle, broj svih mogućih rasporeda je $M(k-1)$.

Broj mogućih rasporeda u kojima a_1 završi na P_2 poziciji jednak je $M(k-2)+M(k-1)$. Možemo ponoviti analogno postupak kako bismo utvrdili broj premještanja u kojima $a_1 \parallel P_3$, $a_1 \parallel P_4$, ... , $a_1 \parallel P_k$. Taj broj također će biti jednak: $M(k-2) + M(k-1)$. Dakle, ukupan broj $M(k)$ svih mogućih slučajeva jednak je:

$$M(k) = (k-1)[M(k-2) + M(k-1)], \tag{6.8}$$

što možemo zapisati ovako

$$M(k) - k \cdot M(k-1) = -[M(k-1) - (k-1) \cdot M(k-2)]. \tag{6.9}$$

Označimo li:

$$N_i = M(i) - i \cdot M(i-1), \tag{6.10}$$

dobivamo

[10]Nicolaus II. Bernoulli (1695.–1726.) bio je švicarski matematičar. Jedan je od mnogih uglednih matematičara u oblitelji Bernoulli.

$$N_i = -N_{i-1}. \tag{6.11}$$

Jednakost (6.12) gledamo za $i = 3, 4, ..., k$:

$$N_3 = -N_2,\ N_4 = -N_3,\ N_5 = -N_4,\ \ldots\ , N_k = -N_{k-1}. \tag{6.12}$$

Supstituiramo svaki prethodni član na sljedeći način:

$$N_k = -N_{k-1} = (-1)^2 N_{k-2} = (-1)^3 N_{k-3} = \ldots = (-1)^{k-2} N_2, \tag{6.13}$$

te uvrštavanjem u (6.11) dobivamo:

$$M(k) - k \cdot M(k-1) = (-1)^{k-2}\,[M(2) - 2 \cdot M(1)]. \tag{6.14}$$

Uvrstimo li $M(1) = 0$, $M(2) = 1$ i $(-1)^{k-2} = (-1)^k$ u (6.15), dobivamo:

$$M(k) - k \cdot M(k-1) = (-1)^k. \tag{6.15}$$

Podijelimo (6.16) s $k!$ i skratimo što se da skratiti:

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{6.16}$$

Na (6.17) primijenimo $\sum_{r=2}^{k}$:

$$\sum_{r=2}^{k} \left(\frac{M(r)}{r!} - \frac{M(r-1)}{(r-1)!} \right) = \sum_{r=2}^{k} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{6.17}$$

Raspisivanjem i dokidanjem dobivamo:

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(1)}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!}, \tag{6.18}$$

te primijenimo da je $M(1) = 0$:

$$\frac{M(k)}{k!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{6.19}$$

Konačno, krajnji rezultat je:

$$M(k) = k! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

Vratimo se sad na naše jedno točno umetnuto pismo u kuvertu i $k-1$ krivo umetnutih pisama. Broj načina na koje možemo jedno pismo staviti u odgovarajuću kuvertu i ostala

$k-1$ pisma u krive kuverte je $k \cdot M(k-1)$. Broj svih mogućnosti jednak je broju različitih rasporeda k objekata, tj.

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k.$$

Stoga je tražena vjerojatnost

$$P_k = \frac{k \cdot M(k-1)}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Koristeći **Taylorov**[11] razvoj funkcije e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...,$$

za $x = -1$ dobivamo:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ... = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ...$$

Usporedimo li posljednji izraz sa P_k , zaključujemo da za relativno veliki broj k dobivamo da je $P_k \approx e^{-1} = 0{,}36787944...$ [33].

6.6 Problem sa šibicama

Stefan Banach (1892.–1945.) bio je poljski matematičar kojeg se smatra jednim od najvažnijih svjetskih matematičara 20. stoljeća, ujedno i utemeljitelj moderne funkcionalne analize, postavio je i riješio sljedeći problem:

„Čovjek u džepu nosi dvije kutije šibica. Svakog puta kada želi zapaliti šibicu, on nasumično odabire jednu ili drugu kutiju. Nakon nekog vremena, čovijek uoči da je jedna kutija prazna. Koja je vjerojatnost da će u tom trenutku u drugoj kutiji biti točno k šibica, ako svaka kutija šibica originalno sadrži n šibica ($n \geq k$) [33]? ”

Sa M_k označimo sljedeći događaj: „U trenutku kada je čovjek ustanovio da je jedna od kutija prazna, u drugoj kutiji je točno k šibica”. Problem je ekvivalentan problemu određivanja vjerojatnosti, da u trenutku kada čovijek ukloni $(n+1)$-vu šibicu iz kutije A, točno $n-k$ šibica je uklonjeno iz kutije B. Promatrajući problem u ovome obliku, vidimo da možemo povećati broj šibica u kutijama. Pretpostavit ćemo da svaka kutija

[11]Brook Taylor (1685. - 1731.) bio je engleski matematičar, poznat po Taylorovom teoremu i Taylorovom redu.

sadrži beskonačno mnogo šibica. Sada promatramo odabir $n + (n - k) = 2n - k$ šibica, pri čemu je kutija odabrana nasumično. Postoji 2^{2n-k} jednako vjerojatnih ishoda ovog eksperimenta. Povoljni ishodi su oni u kojima se bira n šibica iz kutije A i $n - k$ šibica iz kutije B. To se može učiniti na $\binom{2n-k}{n}$ načina, stoga je tražena vjerojatnost:

$$p(M_k) = \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n} \text{ [33].}$$

Poglavlje 7

Teorija grafova

Razvoj ove matematičke discipline počinje Eulerovim rješenjem problema Königsberških sedam mostova[1] iz 1736. godine. Pojam „graf" uveo je **Sylvester**[2] 1878. godine, puno godina nakon Eulerovog rada. Taj pojam ne treba miješati sa pojmom grafa funkcije. Graf je skup točaka (vrhovi grafa) i linija (bridovi grafa) koji opisuju veze između vrhova. Danas je teorija grafova izuzetno korisna, ne samo u području matematike, već i u drugim znanstvenim disciplinama. Grafovi mogu biti korisni za modeliranje i rješavanje mnogih zabavnih matematičkih zadataka, poput problema prijelaza rijeke, zagonetki za mjerenje tekućine i slično.

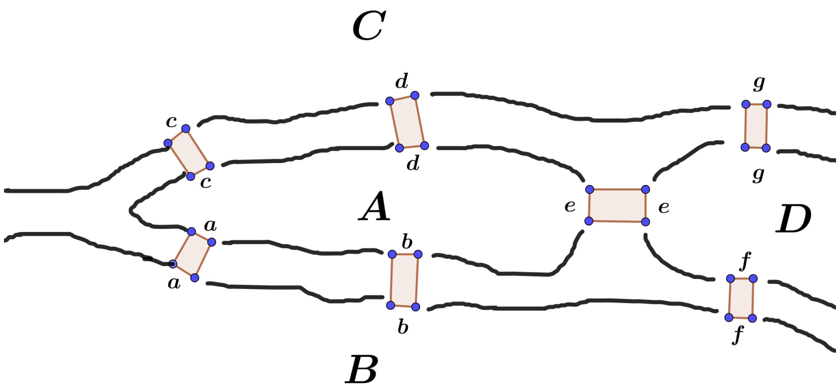
7.1 Problem Königsberških mostova

Pruski grad Königsberg, današnji ruski grad Kalinjingrad, smješten je na objema obalama rijeke Pregel. U rijeci su u Eulerovo doba postojala dva otoka i sedam mostova koji spajaju otoke i obale rijeke, kao što je prikazano sa slici 7.1. Stanovnici Königsberga su se zabavljali ovim pitanjem: „Može li se prošetati gradom tako da se svaki most prijeđe točno jedan put i na kraju šetnje se vratimo na početak [33]?"

Euler je prva osoba koja je riješila ovaj problem 1736. godine, dokazavši nemogućnost tražene šetnje. Njegov se dokaz smatra početkom nove matematičke discipline, teorije grafova. Problem Köningsberških mostova sličan je sljedećem problemu: „Treba nacrtati određeni linijski crtež (graf). Može li se to učiniti ne podižući olovku s papira prolazeći svakom linijom (bridom) točno jedanput?" Eulerovo rješenje ovog problema temelji se na sljedećem teoremu:

[1] Godine 1930. broj mostova povećao se sa sedam na deset te su razmatranja tada pokazala da postoji traženo rješenje problema.

[2] James Joseph Sylvester (1814.–1897.) bio je engleski matematičar, dao je temeljne doprinose teoriji matrica, teoriji invarijanta, teoriji brojeva, teoriji particija i kombinatorici.

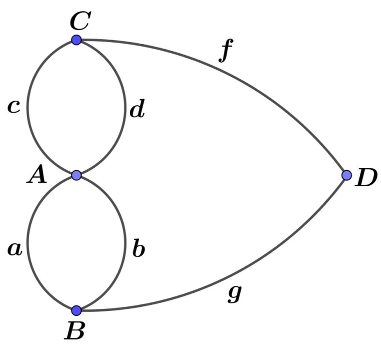


Slika 7.1: Königsberški mostovi.

Teorem 7.1.1. *Povezani grad se može nacrtati bez podizanja olovke s papira tako da se svakim bridom prođe točno jedanput ako i samo ako ima najviše* 0 *ili* 2 *vrha neparnog stupnja (stupanj vrha je broj s njime incidentnih bridova).*

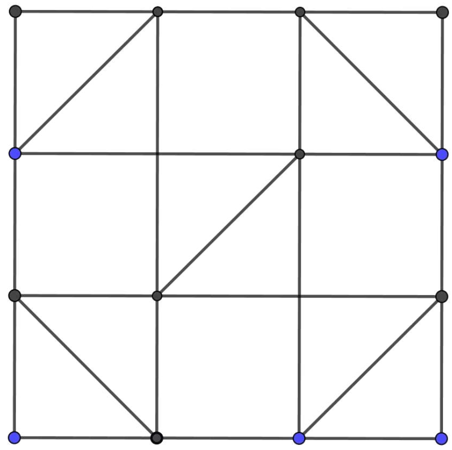
Ako u grafu nema vrhova neparnog stupnja, zadatak je rješiv tako da je konačni vrh jednak polaznom (kao u izvornoj formulaciji problema Königsberških mostova), a ako u grafu imamo točno dva vrha neparnog stupnja, zadatak je rješiv tako da krenemo od jednog, a završimo u drugom. Pojednostavljeno rečeno, teorem vrijedi jer u traženim uvjetima u svaki vrh u koji uđemo moramo i izaći iz njega, i to po drugom bridu negoli smo ušli.

Problem Königsberških mostova može se prikazati grafom (slika 7.2.). Pritom vrhovi grafa predstavljaju kopnene dijelove grada, a bridovi predstavljaju mostove. Euler je uočio istinitost gornjeg teorema (iako ga nije u potpunosti dokazao). Budući da u ovom grafu svi vrhovi imaju neparan stupanj, izvorni problem nije rješiv [19].

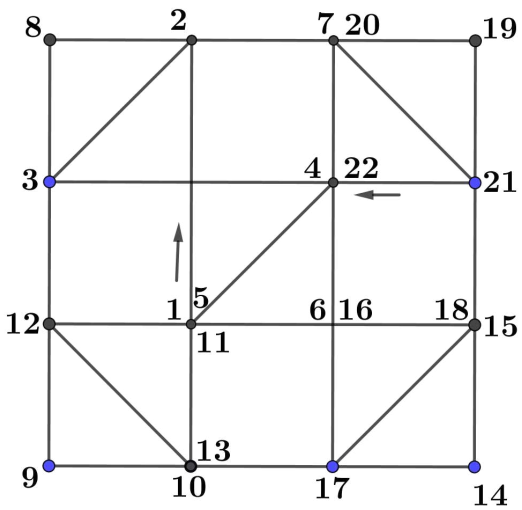


Slika 7.2: Eulerovo rješenje problema Koenigsbergških mostova.

Taitov[3] članak iz 1884. godine, sadrži zadatak u opisanoj drugoj formulaciji: „Je li moguće proći svakim bridom figure sa slike 7.3 točno jedan put bez dizanja olovke s papira [33]?" U ovom slučaju zadatak je rješiv, a rješenje je dano slikom 7.4 (oznake čvorova su redni brojevi u redoslijedu obilaska) [33, 19].



Slika 7.3: Taitova mreža.

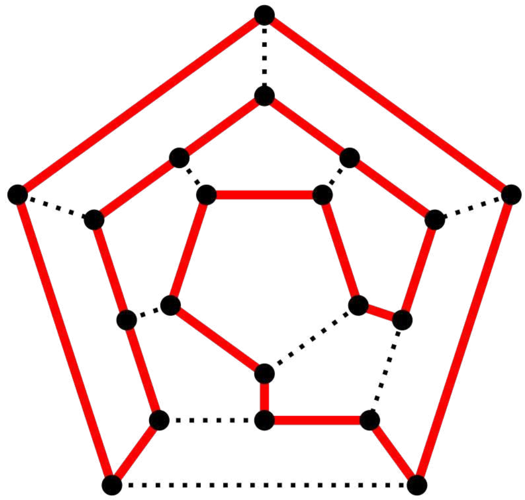


Slika 7.4: Eulerova staza Taitove mreže.

[3]Peter Tait (1831. - 1901.) bio je poznati škotski fizičar 19. stoljeća. Najpoznatiji je po udžbeniku matematičke fizike *Traktat o prirodnoj filozofiji*.

7.2 Hamiltonov dodekaedar

Godine 1856. irski matematičar, fizičar i astronom koji je dao značajan doprinos razvoju optike, dinamike i algebre, **William Rowan Hamilton** (1805.–1865) postavio je problem trgovačkog putnika zvanom *Icosian game* na dodekaedru. Naime, trgovački putnik treba obići neke gradove te se vratiti na polazno mjesto, a da tijekom putovanja prođe samo jednom kroz svaki grad, odnosno svakom cestom najviše jednom. Pretpostavio je da su gradovi vrhovi dodekaedra, a bridovi dodekaedra ceste između gradova. U rješavanju Hamiltonovog problema, radi jasnoće i praktičnosti, promatrat ćemo njegovu projekciju na ravninu kao što je i prikazano na slici 7.5, na kojoj je istaknuto jedno od dva rješenja [33].



Slika 7.5: Hamiltonov ciklus. (slika: licenca CC BY-SA 3.0, autor Christoph Sommer, izvornik preuzet sa stranice `ChristophSommer`)

Dok se šetnje kakve se traže u problemu Köningsberških mostova nazivaju Eulerovim turama (svaki brid se prijeđe točno jednom), ove koje ovdje tražimo (svaki vrh se posjeti točno jednom) nazivaju se Hamiltonovim ciklusima. Za razliku od jednostavnog kriterija za odluku postoji li u grafu Eulerova tura (teorem 7.1.1), ne postoji jednostavan kritierij za utvrđivanje postoji li Hamiltonov ciklus u grafu [33, 40].

7.3 Zadatak s prelijevanjem

Kada je veliki francuski matematičar Poisson bio dječak, naišao je na sljedeći problem: „Mljekar ima spremink sa mlijekom kapaciteta od 12 litara. Treba isporučiti 6 litara mlijeka kupcu koji posjeduje spreminke od 8 i 5 litara. Mlijeko treba razdijeliti na dva jednaka dijela i to tako da 6 litara mlijeka prelije u kupćev veći spremnik, a 6 litara zadrži u svome. Kako to može učiniti? Dok vrši prelijevanje može koristiti sva tri spremnika [33]."

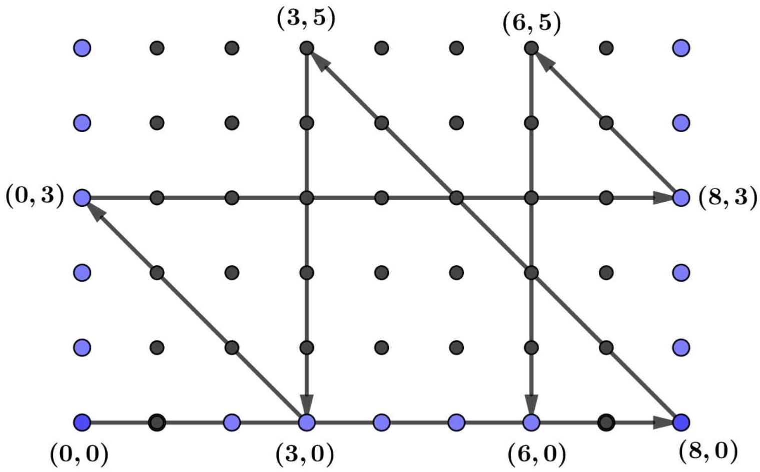
Ovaj se problem prvi puta pojavio još u *Triparty en la science des nomvres*, djelu **Nicolasa Chuqueta**[4]. Priča kaže da je mladi Poisson bio toliko oduševljen ovim zagonetkom da je odlučio matematiku učiniti svojim životnim zvanjem. U tablici 7.1 dano je rješenje problema uzimajući u obzir uvijet minimalnog broja prelijevanja.

12l	8l	5l
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Tablica 7.1: Minimalan broj prelijevanja.

Ovaj zadatak riješen je tablično, no mogao se riješiti i grafički. Sa a označimo količinu mlijeka sadržanu u posudi od 8 litara, a sa b količinu mlijeka sadržanu u posudi od 5 litara. Na ovaj način možemo svakom prelijevanju mlijeka pridružiti jedan uređeni par cijelih brojeva (a, b), pri čemu je $a \in \{0, 1, ..., 8\}$, $b \in \{0, 1, ..., 5\}$. Na početku imamo $a = b = 0$ što znači da su posude prazne. Krajnje stanje je uređeni par $(6, 0)$, što znači da je 6 litara mlijeka u većoj posudi, a manja posuda od 5 litara je prazna, a to se u zadatku i traži. Uočimo da postoji $9 \cdot 6 = 54$ pozicije koje mogu predstavljati vrhove grafa. Grafičko rješenje je dano na slici 7.6 [33].

[4]Nicolas Chuquet (1445.–1487.) bio je veliki francuski matematičar onoga doba. Izmislio je vlastitu notaciju za algebarse pojmove i eksponente. Bio je prvi matematičar koji je dozvolio nulu i negativne brojeve kao ekspoennte.



Slika 7.6: Grafički prikaz rješenja.

Zaključak

Ovaj diplomski rad pruža uvid u raznolike i zanimljive matematičke zadatke koji su bili predmet, a neki su i dan danas, mnogih istraživanja poznatih matematičara. Zadaci su birani tako da veći dio rada opiše probleme povezane sa standardnim školskim matematičkim sadržajima. Poznati matematički problemi kao što su Veliki i Mali Fermatov teorem, Riemannova hipoteza, Cantorov paradoks, metode rješavanja sudokua, Mersenovi prosti brojevi izostavljeni su jer su oni opširne teme za sebe, a kako bi opseg rada ostao ograničen morali smo izostaviti i mnoge zabavne zadatke. Sve one koje više zanima ova tema upućujemo na literaturu, posebice [33].

Bibliografija

[1] *A bird cornucopia*, https://pavlopoulos.wordpress.com/2016/09/11/masterpiece-conquest-the-100-birds-problem-and-arno-schmidt/, Pristupljeno: 21.7.2020.

[2] *Goldbachova hipoteza*, ttp://www.mathos.unios.hr/~middlemath/odgovori/odgovor12.htm, Pristupljeno: 11.4.2020.

[3] *Hanojski tornjevi*, http://www.matematika-fizika.com/nizirazredi/hanojskitornjevi.html, Pristupljeno: 15.4.2020.

[4] *Magic Squares - Abu'-Wafa al-Buzjani*, https://www.magic-squares.info/methods/bordered.html, Pristupljeno: 20.8.2020.

[5] F. M. Brückler, *Latinski kvadrati*, Matka: časopis za mlade (2017.), br. 99, 178.–179.

[6] F. M. Brückler, *Pramatematika, staroegipatska i mezopotamska matematika*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat01-2020.pdf, Pristupljeno: 1.4.2020.

[7] F. M. Brückler, *Matematika jonskog razdoblja grčke matematike*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat01b-2020.pdf, Pristupljeno: 1.4.2020.

[8] F. M. Brückler, *Matematika atenskog razdoblja grčke matematike*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat02-2020.pdf, Pristupljeno: 1.4.2020.

[9] F. M. Brückler, *Eratosten, Apolonije i Arhimed*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat03b-2020.pdf, Pristupljeno: 2.4.2020.

[10] F. M. Brückler, *Matematika u Kini i Indiji*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat05-2020.pdf, Pristupljeno: 2.4.2020.

[11] F. M. Brückler, *Arapska matematika*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat06-2020.pdf, Pristupljeno: 2.4.2020.

[12] F. M. Brückler, *Europska srednjevjekovna matematika*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat06b-2020.pdf, Pristupljeno: 2.4.2020.

[13] F. M. Brückler, *Matematika u doba renesanse*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat07-2020.pdf, Pristupljeno: 3.4.2020.

[14] F. M. Brückler, *Kombinatorika i vjerojatnost*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat08-2020.pdf, Pristupljeno: 3.4.2020.

[15] F. M. Brückler, *Teorija brojeva i algebra u novom vijeku*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat10-2020.pdf, Pristupljeno: 3.4.2020.

[16] F. M. Brückler, *Geometrija u novom vijeku; prethodnici infinitezimalnog računa*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat11-2020.pdf, Pristupljeno: 3.4.2020.

[17] F. M. Brückler, *Infinitezimalni račun od Newtona i Leibniza do Lagrangea*, http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat12-2020.pdf, Pristupljeno: 3.4.2020.

[18] F. M. Brückler, *Povijest matematike I. (izmjenjeno i dopunjeno izdanje)*, Sveučilište J. J. Strossmayera. Odjel za matematiku., 2014.

[19] I. Djurasek, *Hamiltonovi ciklusi*, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2011.

[20] M. Duvnjak, *Magični kvadrat*, Završnii rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2013.

[21] N. Duvnjak, *Pitagorine trojke*, Sveučilište J. J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2015.

[22] S. Elvidge, *The History of the Law of Quadratic Reciprocity*, The University of Birmingham, School of Mathematics.

[23] I. Ilišević, *Wilsonov teorem*, Osječki matematički list (2004.), br. 4, 1.–9.

[24] V. Kuljanec i S. Varošanec, *Dokazi bez riječi, 64 = 65 i zlatni rez.*, http://e.math.hr/old/64je65/index.html, Pristupljeno: 4.4.2020.

[25] MacTutor, *MacTutor History of Mathematics Archive*, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/, Pristupljeno: 30.8.2020.

[26] Next Level Math, *Pythagorean Triple in the Fibonacci Sequence*, http://nextlevelmaths.com/resources/wow/pythag_fibonacci/, Pristupljeno: 25.7.2020.

[27] D. Crnjak Milić, *Pitagorini brojevi i Pitagorina jednadžba*, Osječki matematički list (2009.), br. 9, 69.–73.

[28] Miš, *Što su latinski kvadrati?*, https://mis.element.hr/fajli/454/37-08.pdf, Pristupljeno: 2.9.2020.

[29] P. Novaković, *Prošireni Buffonov pokus*, Osječki matematički list (2009.), br. 10, 29.–38.

[30] J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *Pell equation*, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell/, Pristupljeno: 15.7.2020.

[31] Mathematical Association of America, *Kepler: The Volume of a Wine Barrel*, https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/kepler-the-volume-of-a-wine-barrel-introduction, Pristupljeno: 18.8.2020.

[32] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika*, Školska knjiga, 2004.

[33] M. Petković, *Famous puzzles of Great Mathematicians*, Providence, Rhode Island: AMS, 2009.

[34] C. A. Pickover, *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars: An Exhibition of Surprising*, Princeton University Press, 2002.

[35] V. Plantak, *Fermatov doprinos u teoriji brojeva*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2000.

[36] M. Rasonja, *Povijesni razvoj diferencijalnog i integralnog računa*, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2012.

[37] C. J. Sangwin, *An infinite series of surprises*, https://plus.maths.org/content/infinite-series-surprises, Pristupljeno: 1.9.2020.

[38] M. Skender, *Pellove i Pellovske jednadžbe*, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2012.

[39] S. Slijepčević, *Veliki Fermatov teorem*, MIŠ, Element, 2000.

[40] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[41] Wikipedia, *Zenonovi paradoksi*, https://bs.wikipedia.org/wiki/Zenonovi_paradoksi, Pristupljeno: 15.4.2020.

[42] Wikipedia, *Pythagorean triple*, https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean$_t$*riple*, 2020.

[43] Wikipedia, *Wilsons theorem*, https://en.wikipedia.org/wiki/Wilson%27s_theorem, Pristupljeno: 20.8.2020.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavani su razni matematički zadatci koji su utjecali na razvoj matematike. Raspoređeni su prema granama matematike: aritmeitka i algebra, teorija brojeva, analiza, geometrija, kombinatorika, vjerojatnost i teorija grafova. U svakom je poglavlju opisano više poznatih matematičkih zadataka, uz odgovarajuće povijesne bilješke.

Summary

In this thesis, we describe various mathematical problems that influenced the development of mathematics. The problems are organised according to the corresponding branch of mathematics: arithmetic and algebra, number theory, analysis, geometry, combinatorics, probability and graph theory. In each chapter several corresponding problems are described, alongside historical notes on each.

Životopis

Rođena sam 28. listopada 1993. godine u Sisku. Nakon završetka Osnovne škole Vladimira Vidrića 2008. godine u Kutini upisujem Srednju školu Tina Ujevića u Kutini, ekonomski smjer, koju završavam 2012. godine. Iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Na istom fakultetu 2016. godine upisujem diplomski studij Matematika: smjer nastavnički.