Entropijska rješenja kvazilinearnih jednadžbi prvog reda

Lončar, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Lončar

ENTROPIJSKA RJEŠENJA KVAZILINEARNIH JEDNADŽBI PRVOG REDA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, rujan 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu definirat ćemo entropijska rješenja kvazilinearnih jednadžbi prvog reda, te pokazati njihovu egzistenciju i jedinstvenost.

Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe su one jednadžbe u kojima se derivacije najvišeg reda pojavljuju linearno, ali s koeficijentima koji mogu ovisiti o samoj funkciji i njenim nižim derivacijama.

Zakoni sačuvanja su najpoznatiji primjeri kvazilinearnih jednadžbi i jedan od glavnih razloga za razvijanje teorije rješavanja te vrste jednadžbi. Zbog nedovoljne glatkoće, promatraju se njihova slaba rješenja. Entropijska rješenja su posebna vrsta slabih rješenja koja zadovoljavaju tzv. entropijski uvjet koji osigurava jedinstvenost rješenja.

U prvom poglavlju samo navodimo tvrdnje vezane za Hamilton-Jacobijevu jednadžbu koje su pomogle u razvoju teorije entropijskih rješenja. Dokazi svih tih tvrdnji mogu se pronaći u ([1, odjeljak 3.3.]). Ovdje navodimo i neke pomoćne tehničke tvrdnje.

Drugo poglavlje se bavi skalarnim zakonima sačuvanja i bazirano je na poglavljima 3.4.1-3.4.4. iz [1]. Ovdje je definiran pojam entropijskog rješenja te je pokazano njegovo postojanje i jedinstvenost pomoću Lax-Oleinik formule. Zatim je ta teorija primijenjena na Riemannov problem.

Treće poglavlje obrađuje entropijsko rješenje kroz teoriju entropije i toka entropije. Ono je bazirano na [2]. Ovaj pristup dominira teorijom hiperboličkih zakona sačuvanja jer uvođenje entropijske nejednakosti omogućava raspoznavanje fizikalno prihvatljivih rješanja od ostalih. Također, u skalarnom slučaju rješava pitanje jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema, čuvajući egzistenciju. Na kraju smo ovu teoriju primijenili na Riemannov problem i ponovno dobili isto entropijsko rješenje.

Poglavlje 1

Hamilton-Jacobijeva jednadžba

Pogledajmo inicijalni problem za Hamiltom-Jacobijevu jednadžbu:

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & u\ \mathbb{R}^n \times \langle 0, \infty \rangle \\ u = g & na\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

gdje je $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ nepoznanica, $u = u(x, t)$, i $Du = D_x u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. Hamiltonijan H i funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su zadane. Pretpostavimo da je H glatka konveksna funkcija te da vrijedi:

$$\lim_{|p| \to \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty\,. \tag{1.2}$$

U ([1, odjeljak 3.3.1]) pokazano je da varijacijski problem sa Lagrangianom L dovodi do Hamiltonovog sustava za pripadni Hamiltonijan $H = L^*$, gdje je sa L^* označena Legendreova transformacija, $L^*(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} (p \cdot q - L(q))$, $p \in \mathbb{R}^n$. Kako je Hamiltonov sustav ekvivalentan jednadžbama karakteristika od (1.1), to nas dovodi do zaključka da postoji neposredna veza između Hamilton-Jacobijeve jednadžbe i varijacijskog računa.

Dakle, uvažavajući početni uvjet u (1.1), za dane $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$, pokušajmo minimizirati funkcional $\int_0^t L(\dot{w}(s))\, ds + g(w(0))$ na prostoru funkcija $w : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ t.d. $w(t) = x$. Pokušajmo sada konstruirati kandidata za rješenje problema (1.1) u terminima varijacijskih principa koristeći taj funkcional. Za funkcije w klase C^1 stavimo:

$$u(x, t) := \inf \left(\int_0^t L(\dot{w}(s))\, ds + g(y) :\ w(0) = y,\ w(t) = x \right). \tag{1.3}$$

Od sada nadalje pretpostavljamo da je funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidna, tj. da vrijedi:

$$\mathrm{Lip}(g) := \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \right) < \infty\,.$$

Teorem 1.0.1. *(Hopf-Lax formula) Ako je* $x \in \mathbb{R}^n$ *i* $t > 0$*, tada je rješenje* $u = u(x,t)$ *miimizacijskog problema (1.3) dano s*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right). \tag{1.4}$$

Definicija 1.0.2. *Izraz s desne strane u (1.4) zovemo* Hopf-Lax formulom.

Teorem 1.0.3. *(Hopf-Lax formula kao rješenje) Funkcija u definirana Hopf-Lax formulom (1.4) je Lipschitz neprekidna, diferencijabilna skoro svuda u* $\mathbb{R}^n \times \langle 0, \infty \rangle$ *i rješava inicijalni problem (1.1).*

Definicija 1.0.4. *Funkcija* $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *klase* C^2 *je* uniformno konveksna *(s konstantom* $\theta > 0$*) ako za sve* $p, \xi \in \mathbb{R}^2$ *vrijedi:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i,p_j}(p)\, \xi_i \xi_j \geqslant \theta\, |\xi|^2 , \tag{1.5}$$

pri čemu smo s H_{p_i,p_j} označili parcijalnu derivaciju funkcije H drugog reda.

Definicija 1.0.5. *Kažemo da je Lipschitz neprekidna funkcija* $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty\rangle$ slabo rješenje *problema (1.1) ako vrijedi:*

(a) $u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

(b) $u_t(x,t) + H(Du(x,t)) = 0$ *za skoro svako* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \langle 0, \infty \rangle$

(c) $u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leqslant C(1 + \frac{1}{t})|z|^2$ *za neku konstantu* $C \geqslant 0$ *i sve* $x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0$.

Za funkciju koja zadovoljava svojstvo (c) iz prethodne definicije kažemo da je *polukonkavna.*

Teorem 1.0.6. *(Jedinstvenost slabog rješenja) Neka je funkcija H konveksna, klase* C^2 *i zadovoljava (1.2) te neka je funkcija g Lipschitz neprekidna. Tada postoji najviše jedno slabo rješenje od (1.1).*

Teorem 1.0.7. *(Hopf-Lax formula kao slabo rješenje) Neka je funkcija H konveksna, klase* C^2 *i zadovoljava (1.2) te neka je funkcija g Lipschitz neprekidna. Ako je g polukonkavna ili H uniformno konveksna, tada je*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right)$$

jedinstveno slabo rješenje inicijalnog problema (1.1).

Navedimo još neke pojmove i tvrdnje koji će nam koristiti u daljnjem:

Definicija 1.0.8. *(i) Definiramo $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ sa:*

$$\eta(x) := \begin{cases} C\, exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & , |x| < 1 \\ 0 \quad , |x| \geqslant 1\,, \end{cases}$$

gdje je konstanta C takva da vrijedi: $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$.

(ii) Za svako $\varepsilon > 0$ stavimo:

$$\eta_{\varepsilon}(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Kažemo da je funkcija η standardni izglađivač. *Funkcije η_{ε} su klase C^{∞}, imaju nosač u kugli radijusa ε oko ishodišta i vrijedi: $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\varepsilon}\, dx = 1$.*

Teorem 1.0.9. *(Osnovna lema varijacijskog računa). Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}$ otvoren i neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da:*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)\, dx = 0\,, \tag{1.6}$$

za sve $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Tada je $u = 0$ skoro svuda u Ω.
Ako je $u \in C(\Omega)$, tada je $u = 0$ u Ω.

Svojstva Lipschitz neprekidne funkcije:

- Diferencijabilna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Lipschitz neprekidna ako i samo ako joj je prva derivacija omeđena. U tom slučaju je Lipschitzova konstanta funkcije g dana s $\text{Lip}(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$. Posebno, svaka neprekidno diferencijabilna funkcija je lokalno Lipschitz neprekidna, jer su neprekidne funkcije lokalno ograničene pa su im i gradijenti lokalno ograničeni.

- Lipschitz neprekidna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je apsolutno neprekidna, pa onda i diferencijabilna skoro svuda. Obratno, ako je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna skoro svuda i vrijedi $|f'(x)| \leqslant C$ za skoro sve $x \in I$, tada je f Lipschitz neprekidna s Lipschitzovom konstantom koja je manja ili jednaka konstanti C.

Poglavlje 2

Dobra postavljenost skalarnih zakona sačuvanja

Pogledajmo najprije inicijalni problem za jednodimenzionalni skalarni zakon sačuvanja:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & u \quad \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \\ u = g & na \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

gdje su $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane, a $u : \mathbb{R} \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija, $u = u(x, t)$. Kao što je objašnjeno u [1, odjeljak 3.2.5.] i što ćemo pokazati u Primjeru 2.1.4., općenito ne postoji glatko rješenje problema (2.1) za sve $t > 0$.

2.1 Entropijski uvjet

Pretpostavimo li da je funkcija u dovoljno glatka, množenjem jednadžbe u (2.1) test funkcijom te parcijalnom integracijom dobivenog umoška, možemo derivaciju prebaciti sa funkcije u na test funkciju.

Preciznije, pretpostavimo da je

$$\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty\rangle \to \mathbb{R} \quad \text{glatka funkcija s kompaktnim nosačem.} \tag{2.2}$$

Takvu funkciju nazivamo *test funkcijom*. Pomnožimo li jednadžbu $u_t + F(u)_x = 0$ s φ te parcijalno integriramo dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + F(u)_x)\varphi \, dxdt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t \, dxdt - \int_{-\infty}^\infty u\varphi \, dx \,\Big|_{t=0} - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)\varphi_x \, dxdt \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Uzmemo li u obzir uvjet $u = g$ na $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$, dobivamo:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\varphi_t + F(u)\varphi_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty g\varphi\, dx \,\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{2.4}$$

Iako smo do ove jednakosti došli uz pretpostavku da je u glatka funkcija, ona ima smisla i ako je u samo ograničena.

Definicija 2.1.1. *Ako jednakost (2.4) vrijedi za sve test funkcije φ koje zadovoljavaju (2.2) kažemo da je $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \langle 0, \infty\rangle)$* integralno ili slabo rješenje *od (2.1).*

Pretpostavimo sada da imamo integralno rješenje od (2.1). Možemo li išta zaključiti iz jednakosti (2.4) o tom rješenju?

Pogledajmo situaciju u kojoj u nije neprekidna funkcija ali ima jednostavnu strukturu, tj. neka je u glatka van neke krivulje C. Tu krivulju nazivamo *krivuljom prekida ili šoka*. Uzmimo neku otvorenu okolinu $V \subset \mathbb{R} \times \langle 0, \infty\rangle$ kroz koju prolazi krivulja C. Neka je V_l dio okoline V s lijeve strane krivulje C, a V_r dio s desne strane. Pretpostavimo da je u integralno rješenje od (2.1) te da su funkcija u i njene prve derivacije uniformno neprekidne na V_l i V_r.

Za početak uzmimo test funkciju φ s kompaktnim nosačem u V_l. Tada (2.4) postaje:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x\, dxdt = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + F(u)_x)\varphi\, dxdt\,, \tag{2.5}$$

jer je u klase C^1 na V_l i φ iščezava na nekoj okolini granice od V_l. Jednakost (2.5) vrijedi za sve test funkcije φ s kompaktnim nosačem u V_l pa prema osnovnoj lemi varijacijskog računa vrijedi:

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad u\ V_l\,. \tag{2.6}$$

Analogno,

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad u\ V_r\,. \tag{2.7}$$

Uzmimo sada test funkciju φ s kompaktnim nosačem u V koja nije nužno 0 na okolini krivulje C. Uzimajući u obzir jednakost (2.4) dobivamo:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x\, dxdt = \iint_{V_l} u\varphi_t + F(u)\varphi_x\, dxdt + \iint_{V_r} u\varphi_t + F(u)\varphi_x\, dxdt\,. \tag{2.8}$$

Označimo s $n = (n^1, n^2)$ jediničnu vanjsku normalu krivulje C, koja ide iz V_l prema V_r. Normala n naravno ovisi o točki na krivulji C, ali radi jednostavnosti argument nećemo pisati. Indeks l će nam označavati limes slijeva (iz V_l) na krivulju C. Kako φ ima kompaktan nosač dobivamo:

$$\begin{aligned}\iint_{V_l} u\varphi_t + F(u)\varphi_x \, dxdt &= -\iint_{V_l} (u_t + F(u)_x)\varphi \, dxdt \; + \int_C (u_l n^2 + F(u_r)n^1)\varphi \, dl \\ &= \int_C (u_l n^2 + F(u_l)n^1)\varphi \, dl \,,\end{aligned} \tag{2.9}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili (2.6), a u preostalom članu se javlja krivuljni integral.

Slično, s time da indeks r označava limes zdesna, (2.7) daje:

$$\iint_{V_r} u\varphi_t + F(u)\varphi_x \, dxdt = -\int_C (u_r n^2 + F(u_r)n^1)\varphi \, dl \,. \tag{2.10}$$

Sada (2.8) postaje:

$$\int_C \Big((F(u_l) - F(u_r))n^1 + (u_l - u_r)n^2 \Big)\varphi \, dl = 0 \,. \tag{2.11}$$

Kako ova jednakost vrijedi za sve test funkcije φ kao gore, slijedi da na C vrijedi:

$$(F(u_l) - F(u_r))n^1 + (u_l - u_r)n^2 = 0 \,. \tag{2.12}$$

Pretpostavimo da se krivulja C može parametrizirati s $\{(x,t) \ : \ x = s(t), \ t \in I\}$, gdje je s neka glatka funkcija $s : I \to \mathbb{R}$. Tada je $n = (n^1, n^2) = ((1 + \dot{s}^2)^{-1/2}, -\dot{s}(1 + \dot{s}^2)^{-1/2})$ i (2.12) povlači:

$$F(u_l(s(t))) - F(u_r(s(t)))) = \dot{s}(t)\big(u_l(s(t))) - u_r(s(t)))\big) \quad za \; t \in I \,. \tag{2.13}$$

Napomena 2.1.2. Uvodimo oznake:

$$\begin{cases} [\![u]\!] = u_l - u_r \ldots \text{skok funkcije } u \text{ duž krivulje } C \\ [\![F(u)]\!] = F(u_l) - F(u_r) \ldots \text{skok od } F(u) \\ \sigma = \dot{s} \ldots \text{brzina(nagib) krivulje } C \end{cases}$$

Uz gornje oznake (2.13) postaje:

$$[\![F(u)]\!] = \sigma [\![u]\!] \tag{2.14}$$

duž krivulje prekida (*šoka*). Ovu jednakost nazivamo *Rankine-Hugoniotov uvjet*.

Dakle, ako integralno rješenje zadaće (2.1) ima prekid duž neke krivulje, tada nužno mora biti zadovoljen uvjet (2.14). Ovo će biti od velike koristi kod konstrukcije neglatkih rješenja. Uočimo da općenito brzina σ i vrijednosti u_l, u_r, $F(u_l)$, $F(u_r)$ variraju duž krivulje C. Međutim, iako se te vrijednosti mijenjaju, izrazi $[\![F(u)]\!] = F(u_l) - F(u_r)$ i $\sigma[\![u]\!] = \dot{s}(u_l - u_r)$ moraju uvijek biti jednaki.

Primjer 2.1.3. *(Šok)* Pogledajmo inicijalni problem za *Burgersovu jednadžbu:*

$$\begin{cases} u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0 \quad u\, \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \\ u = g \quad na\, \mathbb{R} \times \{t = 0\}\,, \end{cases} \tag{2.15}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 1, \quad x \leqslant 0 \\ 1 - x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \quad x \geqslant 1\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

Iz jednadžbi karakteristika (vidjeti [1, poglavlje 3.2] za više o primjeni metode karakteristika) slijedi: svako glatko rješenje u od (2.15), (2.16) je konstanta $z^0 = g(x^0)$ duž karakteristike

$$\mathbf{y}(s) = (g(x^0)s + x^0, s) \quad , s \geqslant 0\,,$$

za svako $x^0 \in \mathbb{R}$. Slijedi da je za $t \in [0, 1]$ rješenje dano s:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, \quad x \leqslant t \\ \frac{1-x}{1-t}, \quad t \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \quad x \geqslant 1\,. \end{cases} \tag{2.17}$$

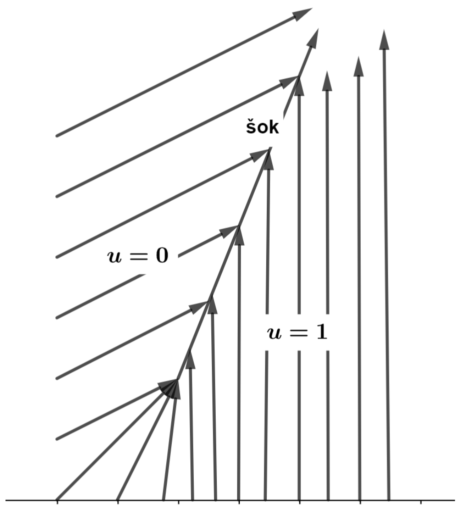
Uočimo da se za $t \geqslant 1$ karakteristike sijeku (v. Sliku 2.1) te da ne znamo kako definirati rješenje u za $t > 1$. Kako ne možemo imati glatko rješenje za sve $t \geqslant 0$ (inače bismo ga mogli konstruirati metodom karakteristika), rješenje će sigurno imati prekid, pa pokušajmo koristeći (2.14) odrediti gdje će se prekid javljati (odnosno, kako će se propagirati po vremenu).

U točki (1, 1) imamo singularitet i vrijedi: $u_l(1) = 1$, $u_r(1) = 0$, $F(u_l(1)) = \frac{1}{2}$, $F(u_r(1)) = 0$ iz čega slijedi da je $[\![u]\!] = 1$ i $[\![F(u)]\!] = \frac{1}{2}$. Stoga vrijedi: $\sigma = \dot{s} = \frac{1}{2}$, odnosno, $s(t) = \frac{t+1}{2}$ i

$$u(x,t) := \begin{cases} 1, \quad x < s(t) \\ 0, \quad s(t) < x\,, \end{cases} \tag{2.18}$$

za $t \geqslant 1$.

□



Slika 2.1: Nastanak šoka

Probajmo sada na isti način riješiti sličan problem.

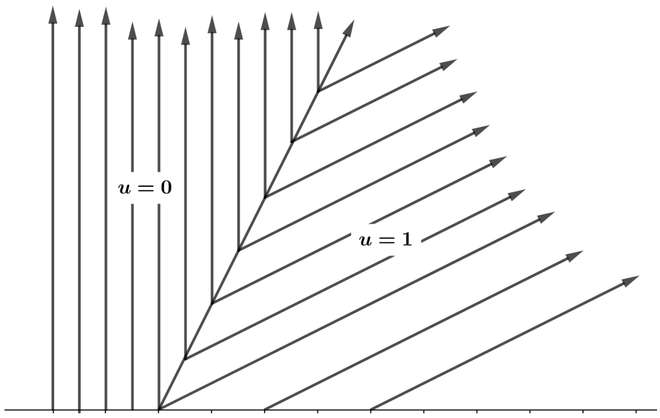
Primjer 2.1.4. *(Refrakcija i nefizikalni šok)* Ponovno pogledajmo inicijalni problem (2.15), ali uzmimo drugačiji početni uvjet:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0\,. \end{cases} \tag{2.19}$$

U ovom slučaju karakteristike se ne sijeku, ali nemamo informacija o ponašanju rješenja na skupu $\{0 < x < t\}$. Pokušajmo proširiti rješenje i na taj skup tako da krivulja prekida zadovoljava Rankine-Hugonoitov nužan uvjet. U tom slučaju očito je: $[\![u]\!] = u_l - u_r = -1$ i $[\![F(u)]\!] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, pa imamo: $\dot{s}(t) = \frac{1}{2}$. Kako želimo da $s(t)$ prolazi kroz ishodište, dobivamo: $s(t) = \frac{t}{2}$. Dakle:

$$u_1(x,t) := \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2} \\ 1, & x > \frac{t}{2}\,, \quad t \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{2.20}$$

Uočimo da funkcija u_1 ima prekide duž pravca $s(t) = \frac{t}{2}$ (v. Sliku 2.2), te nije teško provjeriti da je zaista integralno rješenje promatrane zadaće. Naime, uvrštavanjem u_1 u



Slika 2.2: „Nefizikalni” šok

(2.4) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\frac{t}{2}}^\infty \Big(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x\Big)\, dxdt + \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_{\frac{t}{2}}^\infty \varphi_t \, dxdt + \int_0^\infty \int_{\frac{t}{2}}^\infty \frac{1}{2}\varphi_x \, dxdt + \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx \\
&\qquad = I_1 + I_2 + \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx \\
&\qquad = 0\,,
\end{aligned}$$

jer je:

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^{2x} \varphi_t \, dtdx = \int_0^\infty \varphi(x,2x)\, dx - \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx\,,$$

gdje smo u prvoj jednakosti primijenili Fubinijev teorem.

$$I_2 = \int_0^\infty \Big(0 - \frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{t}{2}, t\Big)\Big)\, dt = -\int_0^\infty \varphi(s,2s)\, ds\,,$$

gdje smo u drugoj jednakosti napravili zamijenu varijabli $s = \frac{t}{2}$.

Međutim, i funkcija:

$$u_2(x,t) := \begin{cases} 1, & x > t \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

je integralno rješenje istog problema jer je:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^t \left(\frac{x}{t}\varphi_t + \frac{x^2}{2t^2}\varphi_x\right) dxdt + \int_0^\infty \int_t^\infty \left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x\right) dxdt + \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx = \\
&\quad = \int_0^\infty \int_0^t \frac{x}{t}\varphi_t\, dxdt + \int_0^\infty \int_0^t \frac{x^2}{2t^2}\varphi_x\, dxdt + \int_0^\infty \int_t^\infty \left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x\right) dxdt \\
&\qquad\qquad + \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx \\
&\quad = I_1 + I_2 + I_3 + \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx \\
&\quad = 0\,.
\end{aligned}$$

Naime, vrijedi:

$$I_1 = \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{x}{t}\varphi_t\, dtdx = -\int_0^\infty \varphi(t,x)dx + \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{x}{t^2}\varphi(x,t)\, dtdx\,,$$

gdje smo u prvoj jednakosti zamijenili poredak integracije, a u drugoj iskoristili formulu parcijalne integracije.

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(t,t)\, dt - \int_0^\infty \int_0^t \frac{x}{t^2}\varphi(x,t)\, dxdt\,,$$

gdje smo prvu jednakosti dobili parcijalnom integracijom.
Te je, slično kao u prethodnom računu za u_1:

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(x,x)\, dx - \int_0^\infty \varphi(x,0)\, dx\,.$$

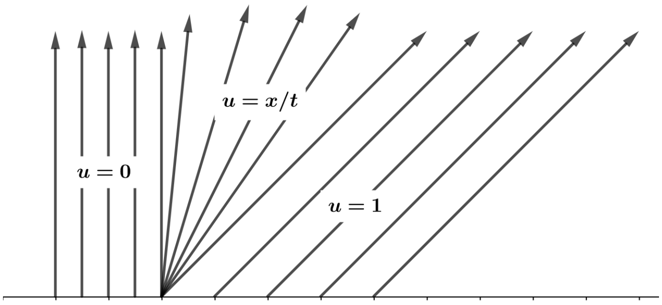
Funkciju u_2 nazivamo *val refrakcije* (v. Sliku 2.3).

□

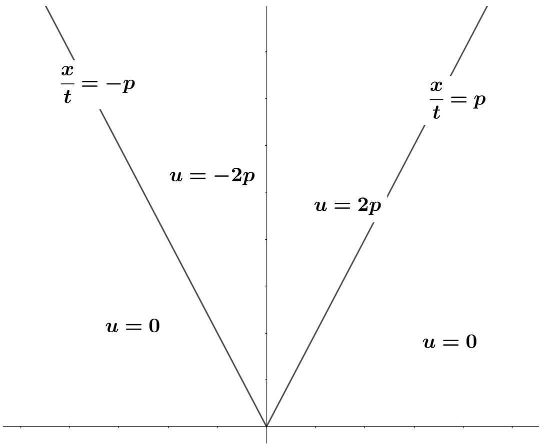
Primjer 2.1.5. *(Nejednistvenost slabog rješenja)* Pogledajmo sada inicijalni problem (2.1) s trivijalnim početnim uvjetom, tj. neka je $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Očito trivijalno klasično rješenje $u \equiv 0$ zadovoljava (2.1) i ono je fizikalno prihvatljivo (kad nema nikakve materije, nema niti gibanja). Međutim, po uzoru na Primjer 2.1.3. možemo za svaki pozitivan parametar $p \in \mathbb{R}$ konstruirati rješenje (v. Sliku 2.4):

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -pt \\ -2p, & -pt < x < 0 \\ 2p, & 0 < x < pt \\ 0, & pt < x\,. \end{cases}$$



Slika 2.3: Val refrakcije



Slika 2.4: Netrivijalna rješenja

Dakle, možemo konstruirati neprebrojivu familiju integralnih rješenja problema (2.1).

Očito je da integralna rješenja općenito nisu jedinstvena i pretpostavljamo da klasa integralnih rješenja sadrži razna „nefizikalna” rješenja koja bismo željeli isključiti. Prisjetimo se da je za skalarni zakon sačuvanja

$$u_t + F(u)_x = 0 \tag{2.22}$$

rješenje u konstanta $z^0 = g(x^0)$ duž kakakteristike

$$\mathbf{y}(s) = (F'(g(x^0))s + x^0, s) \quad (s \geqslant 0)\,. \tag{2.23}$$

Prirodno je očekivati da će se u slučaju postojanja singulariteta karakteristike sijeći i uzrokovati prekide u rješenju ako se krećemo unaprijed kroz vrijeme. Međutim, nadamo se da nećemo doći u kontakt niti s jednom drugom karakteristikom ako počnemo pratiti određenu karakteristiku u nekom trenutku u $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$ i krećemo se unazad kroz vrijeme. Drugim riječima, pogledajmo klasu po dijelovima glatkih integralnih rješenja od (2.1) takvih da ukoliko se krećemo unazad po t duž bilo koje karakteristike nećemo doći ni do jedne točke prekida funkcije u.

Pretpostavimo sada da u nekoj točki krivulje prekida C u ima različit lijevi i desni limes, $u_l \neq u_r$, i da karakteristika s lijeve i ona s desne strane sijeku C u toj točki. Tada (2.23) povlači:

$$F'(u_l) > \sigma > F'(u_r)\,. \tag{2.24}$$

Ove nejednakosti nazivamo *Laxovim entropijskim uvjetom* (zbog analogije s termodinamičkim principom da se fizikalna entropija ne smanjuje kako vrijeme teče).

Uz dodatnu pretpostavku da je

$$F \text{ uniformno konveksna,} \tag{2.25}$$

što znači da za neku konstantu θ vrijedi: $F'' \geqslant \theta > 0$, F' je tada strogo rastuća, pa je Laxov entropijski uvjet (2.24) ekvivalentan s:

$$u_l > u_r \quad \text{duž linije šoka.} \tag{2.26}$$

Primjer 2.1.6. Vratimo se na Primjer 2.1.4 i ispitajmo zadovoljavaju li dobivena rješenja Laxov entropijski uvjet.

U slučaju Burgersove jednadžbe imamo $F(u) = \frac{u^2}{2}$, što je uniformno konveksna funkcija ($F''(u) = 1$), pa je za Laxov entropijski uvjet dovoljno promatrati (2.26).

Funkcija u_1 očito ne zadovoljava uvjet (2.26) jer je u svakoj točki krivulje šoka $u_l = 0 < 1 = u_r$.

S druge strane, funkcija u_2 je neprekidna van ishodišta, pa je uvjet (2.26) trivijalno zadovoljen kako krivulja šoka ne postoji.

□

Primjer 2.1.7. Pogledajmo ponovno Burgersovu jednadžbu (2.15) s početnim uvjetom:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1\,. \end{cases} \tag{2.27}$$

Za $0 \leqslant t \leqslant 2$ kombinacijom rezultata Primjera 2.1.3. i 2.1.4. dobivamo:

$$u(x,t) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & t < x < 1 + \frac{t}{2} \\ 0, & x > 1 + \frac{t}{2}\,. \end{cases} \tag{2.28}$$

Za vrijeme $t \geqslant 2$ očekujemo da se val šoka parametriziran sa $s(\cdot)$ nastavlja i da je $u = x/t$ slijeva od $s(\cdot)$ i $u = 0$ zdesna. To je u skladu s entropijskim uvjetom (2.26). Izračunajmo ponašanje krivulje šoka pomoću Rankine-Hugoniot uvjeta (2.14). Za $t \leqslant 0$ duž krivulje šoka vrijedi:

$$[\![u]\!] = \frac{s(t)}{t}, \quad [\![F(u)]\!] = \frac{1}{2}\left(\frac{s(t)}{t}\right)^2, \quad \sigma = \dot{s}(t)\,.$$

Sada (2.14) povlači:

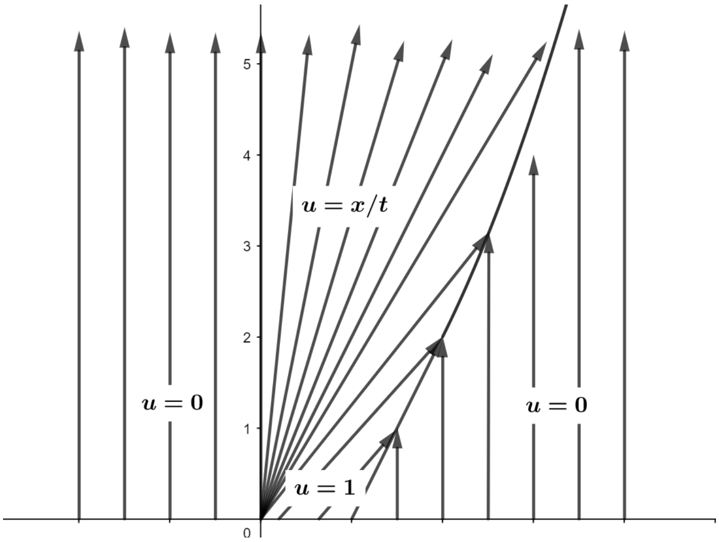
$$\dot{s}(t) = \frac{s(t)}{2t} \quad (t \geqslant 2)\,. \tag{2.29}$$

Dodatno je $s(2) = 2$ pa slijedi: $s(t) = (2t)^{1/2}$ za $t \geqslant 2$. Sada možemo proširiti (2.28):

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < (2t)^{1/2} \\ 0, & x > (2t)^{1/2}\,, \end{cases} \tag{2.30}$$

čime smo dobili integralno rješenje koje zadovoljava Laxov entropijski uvjet (2.24).

□



Slika 2.5: Rješenje u

2.2 Lax-Oleinik formula

Pokušajmo sada dobiti formulu za slabo rješenje inicijalnog problema (2.1) uz pretpostavku da je funkcija F uniformno konveksna, tj. $F'' \geqslant \theta > 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $F(0) = 0$, jer se dodavanjem aditivne konstante funkciji F ne mijenja problem (1.1).

Pretpostavimo da je $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ i stavimo:

$$h(x) := \int_0^x g(y)\, dy \quad , x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.31}$$

Po uzoru na rješenje inicijalne zadaće za Hamilton-Jacobijevu jednadžbu koje je dano Hopf-Lax formulom stavimo:

$$w(x,t) := \min_{y\in\mathbb{R}} \left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right) \quad , x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \tag{2.32}$$

gdje je

$$L = F^*\,. \tag{2.33}$$

Ovdje F^* označava Legendreovu transformaciju funkcije F:

$$F^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \Big(p \cdot q - F(q) \Big) \quad , p \in \mathbb{R}^n\,.$$

Slijedi da je w jedinstveno slabo rješenje inicijalnog problema za Hamilton-Jacobi jednadžbu:

$$\begin{cases} w_t + F(w_x) = 0 & u\ \mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle \\ w = h & na\ \mathbb{R}\times\{t=0\}\,. \end{cases} \tag{2.34}$$

Pretpostavimo da je w glatka funkcija i derivirajmo po varijabli x gornju jednadžbu i pripadni početni uvjet:

$$\begin{cases} w_{xt} + F(w_x)_x = 0 & u\ \mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle \\ w_x = g & na\ \mathbb{R}\times\{t=0\}\,. \end{cases}$$

Dakle, ako stavimo $u = w_x$, u je rješenje problema (2.1).

Gornji račun je samo formalan budući da w definirana s (2.32) općenito nije glatka funkcija. Međutim, prema poglavlju 3.3 iz [1], w je diferencijabilna skoro svuda, pa je:

$$u(x,t) := \frac{\partial}{\partial x}\left[\min_{y\in\mathbb{R}}\left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\right)\right] \tag{2.35}$$

definirana za skoro svaki (x,t) i najizgledniji je kandidat za slabo rješenje problema (2.1).

Kako je F uniformno konveksna i F' strogo rastuća, funkcija F^{-1} ima inverz. Označimo ga s:

$$G := (F')^{-1}\,. \tag{2.36}$$

Uočimo da teorem o inverznom preslikavanju povlači da je G klase C^1 ako je F klase C^2. Nadalje, uočimo da je G Lipschitz neprekidna, jer je klase C^1 i jer je $G' = \frac{1}{F''(G)} < \frac{1}{\theta}$ omeđena.

Teorem 2.2.1. *(Lax-Oleinik formula) Pretpostavimo da je $F : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ glatka, uniformno konveksna funkcija i da je $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

(i) Za svaki trenutak $t > 0$ i za sve osim najviše prebrojivo mnogo vrijednosti $x \in \mathbb{R}$ postoji jedinstvena točka $y(x,t)$ takva da

$$\min_{y\in\mathbb{R}}\left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\right) = tL\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) + h(y(x,t))\,.$$

(ii) Preslikavanje $x \mapsto y(x,t)$ je rastuće.

(iii) Za svaki trenutak $t > 0$ funkcija u definirana s (2.35) je:

$$u(x,t) = G\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right), \tag{2.37}$$

za skoro svaki $x \in \mathbb{R}$. Posebno, formula (2.37) vrijedi za skoro sve $(x,t) \in \mathbb{R}^n\times\langle 0,\infty\rangle$.

Definicija 2.2.2. *Jednadžba (2.37) je* Lax-Oleinik formula *za rješenje problema (2.1), gdje je h definirana sa (2.31), a L sa (2.33).*

Dokaz. 1. Za početak, primijetimo da je:

$$L(q) = \max_{p\in\mathbb{R}} \Big(qp - F(p) \Big) = qp^* - F(p^*)\,,$$

gdje je $F'(p^*) = q$. Ali tada je $p^* = G(q)$ prema (2.36), pa imamo:

$$L(q) = qG(q) - F(G(q)) \quad , q \in \mathbb{R}\,.$$

Posebno, L je klase C^2. Naime, po definiciji funkcije G imamo:

$$L'(q) = G(q) + qG'(q) - F'(G(q))G'(q) = G(q)\,. \tag{2.38}$$

Dakle, kako je G klase C^1, to je L zaista klase C^2. Nadalje,

$$L''(q) = G'(q) > 0\,.$$

Uz raniju pretpostavku da je $F(0) = 0$, ovo povlači da je L strogo konveksna funkcija.

2. Fiksirajmo sada $t > 0$, $x_1 < x_2$. Prema poglavlju 3.3 u [1] postoji barem jedna točka $y_1 \in \mathbb{R}$ takva da

$$tL\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + h(y_1) = \min_{y\in\mathbb{R}} \left(tL\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) + h(y) \right). \tag{2.39}$$

Nadalje tvrdimo da za $y < y_1$ vrijedi:

$$tL\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + h(y_1) < tL\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + h(y)\,. \tag{2.40}$$

Da bismo to pokazali uočimo:

$$x_2 - y_1 = \tau(x_1 - y_1) + (1 - \tau)(x_2 - y)\,,$$

$$x_1 - y = (1 - \tau)(x_1 - y_1) + \tau(x_2 - y)\,,$$

pri čemo je

$$0 < \tau := \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1 + y_1 - y} < 1\,.$$

Budući da je L strogo konveksna, imamo:

$$L\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) < \tau L\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + (1-\tau)L\left(\frac{x_2 - y}{t}\right),$$

$$L\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < (1-\tau)L\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + \tau L\left(\frac{x_2 - y}{t}\right),$$

pa je:

$$L\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + L\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < L\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + L\left(\frac{x_2 - y}{t}\right). \tag{2.41}$$

Uočimo da (2.39) povlači:

$$tL\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + h(y_1) \leqslant tL\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) + h(y).$$

Množenjem (2.41) s t i pribrojavanjem $h(y_1) + h(y)$, uz primjenu prethodne nejednakosti, konačno dobivamo (2.40).

3. Dakle, prilikom računanja minimuma od $tL\left(\frac{x_2-y}{t}\right) + h(y)$ možemo razmatrati samo $y \geqslant y_1$, gdje y_1 zadovoljava (2.39). Sada za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ definirajmo točku $y(x,t)$ jednaku najmanjem od tih y koji daju minimum od $tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)$. Tada je preslikavanje $x \mapsto y(x,t)$ rastuće pa je i neprekidno za sve osim najviše prebrojivo mnogo x. U točki x u kojoj je $y(\cdot,t)$ neprekidna, $y(x,t)$ je jedinstvena vrijednost od y koja daje minimum. Naime, pretpostavimo suprotno i neka je $y(\cdot,t)$ neprekidna u x i pretpostavimo da postoji y_1 različita od $y(x,t)$ u kojoj se također postiže minimum. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $y_1 > y(x,t)$. Tada za sve $z > x$ vrijedi $y(z,t) \geqslant y_1 > y(x,t)$, pa funkcija $z(\cdot,t)$ očito ne može biti neprekidna zdesna u x.

4. Prema Teoremu 1.0.3. za svaki fiksirani $t > 0$ preslikavanje

$$x \mapsto w(x,t) := \min_{y\in\mathbb{R}}\left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\right) = tL\left(\frac{x - y(x,t)}{t}\right) + h(y(x,t))$$

je diferencijabilno skoro svuda. Nadalje, preslikavanje $x \mapsto y(x,t)$ je monotono, pa je diferencijabilno skoro svuda. Stoga, za dani $t > 0$, preslikavanja $x \mapsto L\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)$ i $x \mapsto h(y(x,t))$ su također diferencijabilna za skoro svaki x.

Formula (2.35) sada postaje:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[tL\left(\frac{x - y(x,t)}{t}\right) + h(y(x,t))\right] = L'\left(\frac{x - y(x,t)}{t}\right)(1 - y_x(x,t)) + \frac{d}{dx}h(y(x,t)).$$

Budući da $y \mapsto tL\Big(\frac{x-y}{t}\Big)+h(y)$ ima minimum u $y = y(x,t)$, preslikavanje $z \mapsto \Big(\frac{x-y(z,t)}{t}\Big)+$ $h(y(z,t))$ ima minimum u $z = x$. Slijedi:

$$-L'\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)y_x(x,t) + \frac{d}{dx}h(y(x,t)) = 0\,,$$

pa je, prema (2.38):

$$u(x,t) = L'\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) = G\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right).$$

Istaknimo još da je u omeđena funkcija (što je nužno da bude integalno rješenje po definiciji) jer je derivacija Lipschitzove funkcije (koja postoji skoro svuda) nužno omeđena (to trivijalno slijedi iz definicije Lipschitzovosti jer je kvocijent iz definicije derivacije nužno omeđen).

□

Istražimo sada precizno kada formula (2.37) daje rješenje inicijalnog problema (2.1).

Teorem 2.2.3. *(Lax-Oleinik formula kao integralno rješenje) Uz pretpostavke Teorema 2.2.2., funkcija definirana s (2.37) je integralno rješenje inicijalnog problema (2.1).*

Dokaz. Kao ranije, stavimo:

$$w(x,t) := \min_{y\in\mathbb{R}}\left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\right) \quad , x \in \mathbb{R},\ t > 0\,.$$

Teorem 1.0.3. kaže da je w Lipschitz neprekidna, diferencijabilna za skoro svaki (x,t) i da rješava:

$$\begin{cases} w_t + F(w_x) = 0 & s.s\ u\ \mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle \\ \qquad\quad w = h & na\ \mathbb{R}\times\{t=0\}\,.s \end{cases} \tag{2.42}$$

Uzmimo test funkciju φ koja zadovoljava (2.2) te pomnožimo jednadžbu $w_t+F(w_x) = 0$ s φ_x i integrirajmo po $\mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle$:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (w_t + F(w_x))\varphi_x\, dxdt\,. \tag{2.43}$$

Uočimo:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_t\varphi_x\, dxdt &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w\varphi_{tx}\, dxdt - \int_{-\infty}^\infty w\varphi_x\, dx\,\Bigg|_{t=0} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_x\varphi_t\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty w_x\varphi\, dx\,\Bigg|_{t=0}.\end{aligned}$$

Ovdje smijemo parcijalno integrirati jer je preslikavnje $x \mapsto w(x,t)$ Lipschitz neprekidno, pa i apsolutno neprekidno, za svaki $t > 0$. Nadalje, i preslikavanje $t \mapsto w(x,t)$ je apsolutno neprekidno za svako $x \in \mathbb{R}$. Sada je $w(x,0) = h(x) = \int_0^x g(y)\,dy$, pa je $w_x(x,0) = g(x)$ za skoro svuda x. Dakle:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_t \varphi_x \, dxdt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_x \varphi_t \, dxdt + \int_{-\infty}^\infty g\varphi \, dx \bigg|_{t=0}.$$

Uvrstimo li dobivemo u (2.43) dobivamo integralnu jednadžbu (2.4), jer je $u = w_x$ skoro svuda.

□

2.3 Entropijska rješenja i jedinstvenost

U poglavlju 1.1 vidjeli smo da integralna rješenja od (2.1) općenito nisu jedinstvena. Budući da vjerujemo da Lax-Oleinik formula daje „točno” rješenje inicijalnog problema, želimo vidjeti zadovoljava li to rješenje neki oblik entropijskog uvjeta. To nije jednostavno jer funkcija u definirana Lax-Oleinik formulom uglavnom nije neprekidna, čak nije niti po dijelovma neprekdna.

Pogledajmo sada ocjenu na neku vrstu „jednostrane” derivacije funkcije u definirane Lax-Oleinik formulom (2.37). Pokazat će se da je ta ocjena nužan uvjet za jedinstvenost rješenja.

Lema 2.3.1. *(Jednostrani skok) Uz pretpostavke Teorema 1.2.2. postoji konstanta C takva da funkcija u definirana Lax-Oleinik formulom (2.37) zadovoljava nejednakost:*

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leqslant \frac{C}{t} z, \tag{2.44}$$

za s.s. $t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^+$.

Definicija 2.3.2. *Nejednakost (2.44) zovemo* entropijski uvjet.

Iz (2.44) slijedi da je za $t > 0$ preslikavanje $x \mapsto u(x,t) - \frac{C}{t}x$ padajuće, pa ima lijevi i desni limes u svakoj točki. Stoga i preslikavanje $x \mapsto u(x,t)$ ima lijevi i desni limes u svakoj točki te vrijedi $u_l(x,t) \geqslant u_r(x,t)$. Posebno, za uniformno konveksan F je Laxov entropijski uvjet (2.26) zadovoljen u svakoj točki prekida.

Dokaz. Prema poglavlju 3.3 iz [1] znamo da za računanje minimuma u (2.37) trebamo gledati samo one y takve da je $\left|\frac{x-y}{t}\right| \leqslant C$ za neku konstantu C. Kako je $G = (F')^{-1}$ Lipschitz neprekidna , te su G i $y(\cdot, t)$ rastuće funkcije, za $z > 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= G\left(\frac{x - y(x,t)}{t}\right) \\
&\geqslant G\left(\frac{x - y(x+z,t)}{t}\right) \\
&\geqslant G\left(\frac{x + z - y(x+z,t)}{t}\right) - \frac{\mathrm{Lip}(G)z}{t} \\
&= u(x+z,t) - \frac{\mathrm{Lip}(G)z}{t}\,.
\end{aligned}$$

□

Definicija 2.3.3. *Kažemo da je funkcija $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle)$* entropijsko rješenje *inicijalnog problema*

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & u\ \mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle \\ \qquad\quad u = g & na\ \mathbb{R}\times\{t=0\}\,, \end{cases} \tag{2.45}$$

ako vrijedi:

(i)

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x \, dxdt + \int_{-\infty}^\infty g\varphi \, dx \bigg|_{t=0} = 0\,,$$

za sve test funkcije $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty\rangle)$.

(ii)

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leqslant C\left(1 + \frac{1}{t}\right)z\,,$$

za neku konstantu $C \geqslant 0$ i skoro svake $x, z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t > 0$.

Uočimo da Teorem 2.2.3. i Lema 1.3.1. pokazuju da je formulom (2.37) dano entropijsko rješenje zadaće (2.1), čime je pokazano postojanje rješenja (uz pripadne pretpostavke). U sljedećem teoremu pokazujemo jedinstvenost.

Teorem 2.3.4. *(Jedinstvenost entropijskog rješenja) Pretpostavimo da je funkcija F konveksna i glatka. Tada, do na skup mjere nula, postoji najviše jedno entropijsko rješenje od (2.45).*

Dokaz. 1. Neka su u i $\tilde{u}$ dva entropijska rješenja od (2.45) i stavimo $w := u - \tilde{u}$. Uočimo da za svaku točku (x,t) vrijedi:

$$\begin{aligned} F(u(x,t)) - F(\tilde{u}(x,t)) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\tau} F(\tau u(x,t) + (1-\tau)\tilde{u}(x,t))\,d\tau \\ &= \int_0^1 F'(\tau u(x,t) + (1-\tau)\tilde{u}(x,t))\,d\tau\,(u(x,t) - \tilde{u}(x,t)) \\ &=: b(x,t)w(x,t)\,. \end{aligned}$$

Budući da je F' neprekidna i $[0,1]$ je kompaktan skup, F' je omeđena na $[0,1]$, a kako su i u i $\tilde{u}$ omeđene funkcije, b je također omeđena funkcija.

Dakle, ako je φ test funkcija imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u-\tilde{u})\varphi_t + \big(F(u) - F(\tilde{u})\big)\varphi_x\,dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w\varphi_t + \big(F(u) + b\varphi_x\big)\,dxdt\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

2. Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, $\tilde{u^\varepsilon} = \eta_\varepsilon * \tilde{u}$, gdje je η_ε standardni izglađivač u varijablama x i t. Prema poglavlju 4 iz [1], vrijedi:

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^\infty},\;\; \|\tilde{u^\varepsilon}\|_{L^\infty} \leqslant \|\tilde{u}\|_{L^\infty}\,, \tag{2.47}$$

$$u^\varepsilon \to u,\;\; \tilde{u^\varepsilon} \to \tilde{u} \quad s.s.,\; kad\; \varepsilon \to 0\,. \tag{2.48}$$

Nadalje, entropijska nejednakost (ii) povlači:

$$\begin{aligned} \frac{u^\varepsilon(x+z,t) - u^\varepsilon(x,t)}{z} &= \eta_\varepsilon * \left(\frac{u(x+z,t) - u(x,t)}{z}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(t-\tau)\left(\frac{u(x+z,\tau) - u(x,\tau)}{z}\right) d\tau \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(t-\tau)\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) d\tau \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(\tau)\left(1 + \frac{1}{t-\tau}\right) d\tau \\ &\leqslant C\left(1 + \frac{1}{t}\right), \end{aligned} \tag{2.49}$$

jer je $\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon \, dx = 1$ i jer η_ε isčezava u beskonačnosti. Dakle, vrijedi:

$$u_x^\varepsilon(x,t) \leqslant C\left(1 + \frac{1}{t}\right). \tag{2.50}$$

za konstantu C i sve $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Analogno, za za konstantu C i sve $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ vrijedi:

$$\tilde{u}_x^\varepsilon(x,t) \leqslant C\left(1 + \frac{1}{t}\right). \tag{2.51}$$

3. Neka je:

$$b^\varepsilon(x,t) := \int_0^1 F'(\tau u^\varepsilon(x,t) + (1-\tau)\tilde{u}^\varepsilon(x,t))\, d\tau\,.$$

Tada (2.46) možemo zapisati na sljedeći način:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w(\varphi_t + b^\varepsilon \varphi_x)\, dxdt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w(b - b^\varepsilon)\varphi_x \, dxdt\,. \tag{2.52}$$

4. Izaberimo sada $T > 0$ i glatku funkciju $\psi : \mathbb{R} \times \langle 0, T\rangle \to \mathbb{R}$ s kompaktnim nosačem. Izaberimo funkciju v tako da rješava sljedeći problem za transportnu jednadžbu:

$$\begin{cases} {v_t}^\varepsilon + b^\varepsilon {v_x}^\varepsilon = \psi \quad u\, \mathbb{R} \times \langle 0, T\rangle \\ \qquad v = 0 \quad na\, \mathbb{R} \times \{t = T\}\,. \end{cases} \tag{2.53}$$

Riješimo (2.53) metodom karakteristika. Fiksirajmo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, i s $x_\varepsilon(\cdot)$ označimo rješenje jednadžbe:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon(s) = b^\varepsilon(x_\varepsilon(s), s) \quad , s \geqslant t \\ x_\varepsilon(t) = x\,, \end{cases} \tag{2.54}$$

i stavimo:

$$v^\varepsilon(x,t) := -\int_t^T \psi(x_\varepsilon(s), s)\, ds \quad , x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t \leqslant T\,. \tag{2.55}$$

Tada je v^ε glatka i jedinstveno je rješenje od (2.53). Budući da je $|b^\varepsilon|$ ograničeno i ψ ima kompaktan nosač, v^ε ima kompaktan nosač u $\mathbb{R} \times [0, T\rangle$.

5. Tvrdimo da za svako $s > 0$ postoji konstanta C_s takva da na $\mathbb{R} \times \langle s, T\rangle$:

$$|v_x^\varepsilon| \leqslant C_s\,. \tag{2.56}$$

Najprije uočimo da za $0 < s \leqslant t \leqslant T$, zbog (2.50) i jer je F konveksna, vrijedi:

$$\begin{aligned} b_x^\varepsilon(x,t) &= \int_0^1 F''(\tau u^\varepsilon(x,t) + (1-\tau)\tilde{u^\varepsilon}(x,t))(\tau {u_x}^\varepsilon(x,t) + (1-\tau)\tilde{u_x}^\varepsilon(x,t))\,d\tau \\ &\leqslant \frac{C}{t} \leqslant \frac{C}{s}\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Zatim derivirajmo po x jednadžbu ${v_t}^\varepsilon + b^\varepsilon {v_x}^\varepsilon = \psi$:

$$v_{tx}^\varepsilon + b^\varepsilon v_x x^\varepsilon + b_x^\varepsilon v_x^\varepsilon = \psi_x\,. \tag{2.58}$$

Sada stavimo $a(x,t) := e^{\lambda t} v_x^\varepsilon(x,t)$ za

$$\lambda = \frac{C}{s} + 1\,. \tag{2.59}$$

Tada je

$$\begin{aligned} a_t + b^\varepsilon a_x &= \lambda a + e^{\lambda t}(v_{xt}^\varepsilon + b^\varepsilon v_{xx}) \\ &= \lambda a + e^{\lambda t}(-b_x^\varepsilon v_x^\varepsilon + \psi_x) \\ &= (\lambda - b_x^\varepsilon)a + e^{\lambda t}\psi_x\,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili (2.58).

Kako je v^ε glatka i ima kompaktan nosač, a poprima nenegativan maksimum na $\mathbb{R} \times [s,T]$ u nekoj konačnoj točki (x_0, t_0). Ako je $t_0 = T$, tada je $v_x = 0$. Ako je $0 \leqslant t \leqslant T$, tada vrijedi:

$$a_t(x_o, t_0) \leqslant 0, \quad a_x(x_0, t_0) = 0\,.$$

Stoga (2.60) daje:

$$(\lambda - b_x^\varepsilon(x_0,t_0))a(x_0,t_0) + e^{\lambda t_0}\psi_x(x_0,t_0) \leqslant 0\,. \tag{2.61}$$

Ali kako je $b_x^\varepsilon \leqslant \frac{C}{s}$ i $\lambda = \frac{C}{s} + 1$, (2.61) povlači:

$$a(x_0,t_0) \leqslant -e^{\lambda t_0}\psi_x \leqslant e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty}\,.$$

Slično dobivamo:

$$a(x_1,t_1) \geqslant -e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty}\,,$$

u bilo kojoj točki (x_1,t_1) u kojoj a poprima nepozitivni minimum. Te dvije ograde s definicijom od a povlače (2.56).

6. Još trebamo pokazati da vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{v_x}^{\varepsilon}(x,t)|\, dx \leqslant D \tag{2.62}$$

za sve $0 \leqslant t \leqslant \tau$ i neku konstantu D, za dovoljno mali τ.

Uzmimo $\tau > 0$ dovoljno mali da je $\psi = 0$ na $\mathbb{R} \times \langle 0, \tau \rangle$. Tada (2.55) povlači da je za $0 \leqslant t \leqslant \tau$ v konstantna duž karakteristike $x_\varepsilon(\cdot)$(rješava (2.54)) za $t \leqslant s \leqslant \tau$. Izaberimo particiju $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$. Tada je $y_0 < y_1 < \cdots < y_N$, za $y_i := x_i(s)$ ($i = 1, \ldots, N$) za:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon(s) = b^\varepsilon(x_\varepsilon(s), s) & (t \leqslant s \leqslant \tau) \\ x_\varepsilon(t) = x_i \end{cases}$$

Kako je v^ε konstantna duž svake karakteristike $x_i(\cdot)$, imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} |v^\varepsilon(x_i, t) - v^\varepsilon(x_{i-1}, t)| &= \sum_{i=1}^{N} |v^\varepsilon(y_i, \tau) - v^\varepsilon(y_{i-1}, \tau)| \\ &\leqslant \operatorname{var} v^\varepsilon(\cdot, \tau)\,, \end{aligned}$$

gdje „var” označava varijaciju po x. Uzmemo li supremum svih takvih particija, dobivamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{v_x}^{\varepsilon}(x,t)|\, dx = \operatorname{var}\ v^\varepsilon(\cdot, t) \leqslant \operatorname{var}\ v^\varepsilon(\cdot, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |{v_x}^{\varepsilon}(x,\tau)|\, dx \leqslant C\,,$$

jer v^ε ima kompaktan nosač i (2.50) vrijedi za $s = \tau$.

7. Konačno, ako u (2.52) stavimo $v = v^\varepsilon$ i koristimo (2.53), dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w\psi \, dxdt &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(b^\varepsilon - b) v_x^\varepsilon \, dxdt \\ &= \int_\tau^{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(b^\varepsilon - b) v_x^\varepsilon \, dxdt + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} w(b^\varepsilon - b) v_x^\varepsilon \, dxdt \\ &= I_\tau^\varepsilon + J_\tau^\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Sada zbog (2.48), (2.56) i Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, slijedi da za svaki $\tau > 0$:

$$I_\tau^\varepsilon \to 0 \quad , \varepsilon \to 0\,.$$

S druge strane, ako je $0 < \tau < T$, zbog (2.62) , vrijedi:

$$|J_\tau^\varepsilon| \leqslant \tau C \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \int_{-\infty}^{\infty} |{v_x}^{\varepsilon}|\, dx \leqslant \tau C\,.$$

Dakle,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w\psi \, dxdt = 0\,,$$

za sve glatke funkcije ψ kao gore, pa je $w = u - \tilde{u} = 0$ skoro svuda.

□

2.4 Riemannov problem

Inicijalni problem

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & u \quad \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \\ u = g & na \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}\,, \end{cases} \tag{2.63}$$

gdje je g po dijelovima konstantna funkcija:

$$g(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0\,, \end{cases} \tag{2.64}$$

zovemo *Riemannov problem* za skalarni zakon sačuvanja (2.63). U ovom su slučaju $u_l,\ u_r \in \mathbb{R}$ lijevo i desno *početno stanje*, $u_l \neq u_r$. Ponovno pretpostavimo da je F uniformno konveksna i klase C^2, te označimo $G := (F')^{-1}$.

Teorem 2.4.1. *(Rješenje Riemannovog problem)*

(i) Ako je $u_l > u_r$, tada je jedinstveno entropijsko rješenje Riemannovog problema (2.63), (2.64) funkcija ($x \in \mathbb{R},\ t > 0$):

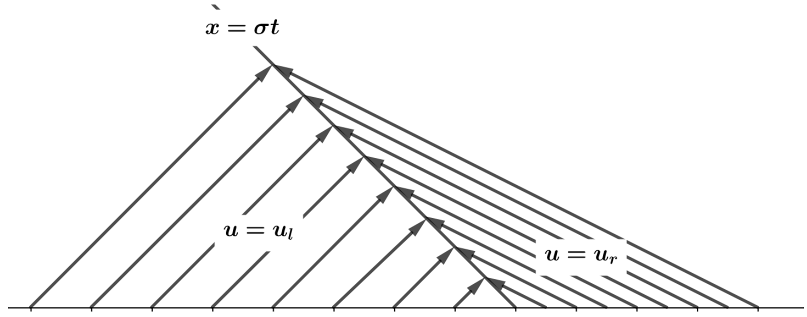
$$u(x,t) := \begin{cases} u_l, & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r, & \frac{x}{t} > \sigma\,, \end{cases} \tag{2.65}$$

gdje je

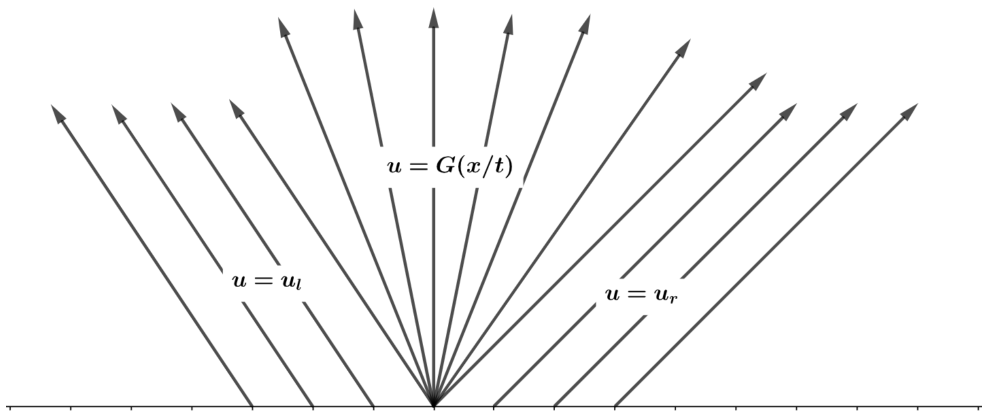
$$\sigma := \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}\,. \tag{2.66}$$

(ii) Ako je $u_l < u_r$, jedinstveno entropijsko rješenje Riemannovog problema (2.63), (2.64) je dano s ($x \in \mathbb{R},\ t > 0$):

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l, & \frac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}), & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r, & \frac{x}{t} > F'(u_r)\,. \end{cases} \tag{2.67}$$



Slika 2.6: Val šoka kao rješenje Riemannovog problema za $u_l > u_r$



Slika 2.7: Val šoka kao rješenje Riemannovog problema za $u_l < u_r$

Napomena 2.4.2. *(a) U prvom slučaju stanja u_l i u_r razdavja* val šoka *konstantne brzine σ, a u drugom su slučaju u_l i u_r razdvojeni* valom refrakcije.

(b) Prema prijašnjim razmatranjima, znamo da Lax-Oleinik formula generira rješenje problema. Međutim, ovdje ćemo samo provjeriti da su (2.65) i (2.67) integralna rješenja te da ona zadovoljavaju Laxov entropijski uvjet. Zbog jedinstvenosti rješenja, slijedi da se tako konstruirana rješenja poklapaju s onima dobivenim Lax-Oleinikovom formulom.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da vrijedi: $u_l > u_r$. Očito je u definiran s (2.65), (2.66) integralno rješenje. Posebno, kako je $\sigma = [\![F(u)]\!]/[\![u]\!]$, zadovoljen je Rankine-

Hugoniotov uvjet. Nadalje uočimo

$$F'(u_r) < \sigma = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} = \int_{u_r}^{u_l} F'(\tau)\, d\tau < F'(u_l)\,,$$

što je u skladu s (2.24). Kako je $u_l > u_r$, zadovoljen je i entropijski uvjet. Jedinstvenost rješenja slijedi iz Teorema 1.3.4.

(ii) Pretpostavimo sada $u_l < u_r$. Najprije moramo provjeriti da u definirana s (2.67) rješava zakon sačuvanja na $\{F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r)\}$. Da bismo to provjerili, pitamo se kada funkcija u oblika:

$$u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$$

rješava (2.63). Računamo:

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= u_t + F'(u)u_x \\ &= -v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{x}{t^2} + F'(v)v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t} \\ &= v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\left(F'(v) - \frac{x}{t}\right). \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da v' ne ide u 0, dobivamo $F'(v(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}$. Dakle,

$$u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right) = G\left(\frac{x}{t}\right)$$

rješava zakon sačuvanja. Sada je $v(\frac{x}{t}) = u_l$ ako je $\frac{x}{t} = F'(u_l)$ i, slično, $v(\frac{x}{t}) = u_r$ ako je $\frac{x}{t} = F'(u_r)$. Posljedica toga je da je val refrakcije u definiran sa (2.67) neprekidan u $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$ i rješenje je jednadžbe $u_t + F(u)_x = 0$ na svim dijelovima domene. Lako je za provjeriti da je u integralno rješenje od (2.63), (2.64). Nadalje, kako je funkcija G Lipschitz neprekidna imamo:

$$u(x+z,t) - u(x,t) = G\left(\frac{x+z}{t}\right) - G\left(\frac{x}{t}\right) \leqslant \frac{\mathrm{Lip}(G)z}{t}$$

ako je $F'(u_l)t < x < x + z < F'(u_r)t$. Ova nejednakost povlači da u zadovoljava i Laxov entropijski uvjet. Jedinstvenost ponovno slijedi iz Teorema 2.3.4.

□

Poglavlje 3

Entropijska rješenja – drugi pristup

U ovom dijelu ćemo alternativnom pristupom istom problemu dobiti drugačiji entropijski uvjet (Kružkovljev) te ćemo na kraju pokazati vezu s prijašnjim entropijskim uvjetima. Ovaj pristup daje postojanje i jedinstvenost rješenja. Zatim pokazuje da se to odabrano entropijsko rješenje upravo dobije metodom iščežujuće viskoznosti. Ova metoda je pogodna za promatranje zadaća za manje regularne F, te također i za sustave zakona sačuvanja. Za kraj dodajmo da se iz ovog pristupa izvodi kinetička formulacija koja je također bitna u razvoju teorije, ali u taj dio u ovom radu nećemo ulaziti.

3.1 Entropijski uvjet

Pogledajmo sada sljedeću jednadžbu:

$$u_t + F(u)_x = \varepsilon u_{xx}\,, \tag{3.1}$$

gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$ koeficijent difuzije.
Uočimo da skalarni zakon sačuvanja formalno dobivamo puštenjam $\varepsilon \to 0$ u gornjoj diferencijalnoj jednadžbi. Standardnom teorijom za paraboličke jednadžbe može se pokazati da inicijalni problem za (3.1) ima jedinstveno klasično rješenje u^ε koje zadovoljava princip maksimuma. Pretpostavimo da niz (u^ε) konvergira funkciji u skoro svuda kada $\varepsilon \to 0$ (ova tvrdnja je dokazana u [2, odjeljak 5.4]).

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & u \quad \mathbb{R} \times \langle 0, \infty\rangle \\ u = g & na \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

Lema 3.1.1. *Pretpostavimo da je $g \in C_b(\mathbb{R})$. Ako $u^\varepsilon(x,t) \to u(x,t)$ skoro svuda u $Q = \mathbb{R} \times \langle 0, T]$, tada je u slabo rješenje problema (2.1)*

Dokaz. Kako je u^ε klasično rješenje, $u^\varepsilon \in C^\infty(Q) \cap C(Q)$ i za svaku test funkciju φ s nosačem u $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty\rangle$ vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_Q \varphi(\varepsilon {u^\varepsilon}_{xx} - {u^\varepsilon}_t - F(u^\varepsilon)_x)\, dxdt \\ &= \iint_Q (u^\varepsilon(\varepsilon\varphi_{xx} + \varphi_t) + F(u^\varepsilon)\varphi_x)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x,0)\, dx\,. \end{aligned}$$

Iz principa maksimuma i jer je $g \in C_b(\mathbb{R})$ slijedi da je familija (u^ε) ograničena konstantom. Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji osigurava da kada $\varepsilon \to 0$ vrijedi:

$$\iint_Q (u^\varepsilon(\varepsilon\varphi_{xx} + \varphi_t)\, dxdt \longrightarrow \iint_Q u\varphi_t\, dxdt$$

i

$$\iint_Q F(u^\varepsilon)\varphi_x\, dxdt \iint_Q \longrightarrow F(u)\varphi_x)\, dxdt\,.$$

Konačno, slijedi:

$$\iint_Q (u\varphi_t + F(u)\varphi_x)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x,0)\, dx = 0\,.$$

□

Koncept entropije i toka entropije odnosi se na par regularnih funkcija $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ definiranih na prostoru stanja u za koja svako klasično rješenje jednadžbe $u_t + F(u)_x = 0$ zadovoljava i jednadžbu $\mathcal{E}(u)_t + \mathcal{F}(u)_x = 0$.

Pretpostavimo sada da je u skalarnom slučaju svaka regularna funkcija $\mathcal{E}$ entropija čiji je tok dan do na konstantu sa $\mathcal{F}' = F'\mathcal{E}'$. Ako je $\mathcal{E}$ konveksna, tj. $\mathcal{E}'' \geqslant 0$, tada u^ε zadovoljava:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^\varepsilon)_t + \mathcal{F}(u^\varepsilon)_x &= \mathcal{E}'(u^\varepsilon)\Big(u^\varepsilon_t + F(u^\varepsilon)_x\Big) = \varepsilon\mathcal{E}'(u^\varepsilon)u^\varepsilon_{xx} \\ &= \varepsilon\mathcal{E}(u^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon\mathcal{E}''(u^\varepsilon)(u^\varepsilon_x)^2 \\ &\leqslant \varepsilon\mathcal{E}(u^\varepsilon)_{xx} \end{aligned}$$

Pomnožimo li ovu nejednakost nenegativnom test funkcijom φ i integriramo li dobiveno po Q, slijedi:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \iint_Q \varphi(\varepsilon\mathcal{E}(u^\varepsilon)_{xx} - \mathcal{E}(u^\varepsilon)_t - \mathcal{F}(u^\varepsilon)_x)\, dxdt \\ &= \iint_Q \Big(\mathcal{E}(u^\varepsilon)(\varepsilon\varphi_{xx} + \varphi_t) + \mathcal{F}(u^\varepsilon)\varphi_x\Big)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(g(x))\varphi(x,0)\, dx \\ &\longrightarrow \iint_Q \Big(\mathcal{E}(u)\varphi_t + \mathcal{F}(u)\varphi_x\Big)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(g(x))\varphi(x,0)\, dx \end{aligned}$$

Propozicija 3.1.2. *Uz pretpostavke Leme 2.1.1., rješenje problema (2.1) zadovoljava nejednakost:*

$$\iint_Q \Big(\mathcal{E}(u)\varphi_t + \mathcal{F}(u)\varphi_x\Big)\,dxdt + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(g(x))\varphi(x,0)\,dx \geqslant 0\,, \tag{3.3}$$

za sve parove entropije i toka entropije $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, gdje je $\mathcal{E}$ neprekidna i konveksna te za sve $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\langle-\infty,T\rangle), \varphi \geqslant 0$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{E}$ konveksna funkcija. tada je $\mathcal{E}$ lokalno uniformni limes neke konveksne funkcije klase C^∞, npr. funkcija $\mathcal{E}_n = \mathcal{E} * \eta_n$, gdje je $\eta_n(s) = n\eta(ns)$ za $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Konveksnost je osigurana s $\eta \geqslant 0$. Neka je $\mathcal{F}_n$ pripadni tok entropije:

$$\mathcal{F}_n(s) = \int_0^s F'(y)\mathcal{E}'{}_n(y)\,dy\,.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\mathcal{F}_n(s) = F'(s)\mathcal{E}_n(s) - F'(0)\mathcal{E}_n(0) - \int_0^s F''(y)\mathcal{E}_n(y)\,dy\,,$$

iz čega slijedi da $\mathcal{F}_n$ konvergira lokalno uniformno prema neprekidnoj funkciji

$$\mathcal{F}(s) = F'(s)\mathcal{E}(s) - F'(0)\mathcal{E}(0) - \int_0^s F''(y)\mathcal{E}(y)\,dy\,.$$

Entropijska nejednakost (3.3) očito vrijedi za parove $(\mathcal{E}_n,\mathcal{F}_n)$. Prelaskom na limes $n\to\infty$ dobivamo da je nejednakost zadovoljena i za $(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

□

Definicija 3.1.3. *Kažemo da je slabo rješenje problema (2.1)* entropijsko rješenje *ukoliko zadovovljava entropijsku nejednakost:*

$$\iint_Q \Big(\mathcal{E}(u)\varphi_t + \mathcal{F}(u)\varphi_x\Big)\,dxdt + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(g(x))\varphi(x,0)\,dx \geqslant 0\,, \tag{3.4}$$

za sve neprekidne konveksne funkcije entropije $\mathcal{E}$ s pripadnim tokom $\mathcal{F}$ te za sve $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\langle-\infty,T\rangle)$.

Iskoristimo li formalizam distribucija i tragove funkcijskih prostora, ova dva uvjeta možemo zapisati kao:

$$\mathrm{tr}_{t=0}\,\mathcal{E}(u) \leqslant \mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(\mathrm{tr}_{t=0}\,u) \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E}(u)_t + \mathcal{F}(u)_x \leqslant 0 \quad u\ \mathbb{R}\times\langle 0,T\rangle \tag{3.6}$$

U Definiciji 3.1.3. je problematično što uvjet (3.4) moramo provjeriti za sve konveksne funkcije $\mathcal{E}$. U sljedećoj tvrdnji pokazujemo da je dovoljno provjeriti taj uvjet samo za familiju konveksnih funkcija $u \mapsto |u-k|$, pri čemu je $k\in\mathbb{R}$ parametar.

Propozicija 3.1.4. *Ograničena izmjeriva funkcija u na $\mathbb{R} \times \langle 0, T\rangle$ je entropijsko rješenje problema (2.1) ako i samo ako zadovoljava:*

$$\iint_Q \Big(\varphi_t |u-k| + \varphi_x \operatorname{sgn}(u-k)(F(u)-F(k))\Big)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} |g(x)-k|\varphi(x,0)\, dx \geqslant 0\,, \quad (3.7)$$

za sve $k \in \mathbb{R}$ i za sve $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, T\rangle)$.

Dokaz. Neka je u entropijsko rješenje problema (3.2) te neka je $k \in \mathbb{R}$. Funkcija $u \mapsto |u-k|$ je konveksna i neprekidna i njen tok je, do na konstantu, dan s $\operatorname{sgn}(u-k)(F(u)-F(k))$, gdje je $\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < 0\,. \end{cases}$
Entropijsko rješenje tada po definiciji zadovoljava nejednakost (3.7).

Obrnuto, neka $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ zadovoljava (3.7) i neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \langle -\infty, T\rangle)$. Pretpostavimo da u i g poprimaju vrijednosti na ograničenom intervalu $\langle a, b\rangle$ (takav interval sigurno postoji jer su u i g omeđene).
Za $k = a$, imamo $|u-k| = u-a$ i $|g-k| = g-a$ i vrijedi:

$$\begin{aligned} &\iint_Q (\varphi_t u + \varphi_x F(u))\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x,0)dx \\ &\qquad \geqslant a\Big(\iint_Q \varphi_t\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0)dx\Big) + F(a)\iint_Q \varphi_x\, dxdt = 0\,. \end{aligned}$$

Slično, za $k = b$, $|u-k| = b-u$ i $|g-k| = b-g$, dobivamo suprotnu nejednakost.

Dakle, za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \langle -\infty, T\rangle)$ vrijedi:

$$\iint_Q (\varphi_t u + \varphi_x F(u))\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x,0)dx = 0\,.$$

Zbog linearnosti i bez uvjeta na predznak od φ vrijedi: u je slabo rješenje od (3.2).

Pokažimo sada da je u entropijsko rješenje. Neka je dana neprekidna entropija $\mathcal{E}$ i njen tok $\mathcal{F}$. Tada za svako $\alpha > 0$ postoji entropija $\mathcal{E}_\alpha$ s tokom $\mathcal{F}_\alpha$ takva da:

- $\mathcal{E}(s) \leqslant \mathcal{E}_\alpha(s) \leqslant \mathcal{E} + \alpha, \quad s \in [a, b]\,,$
- $\mathcal{E}_\alpha(s)$ konveksna, po dijelovima afina: $\mathcal{E}_\alpha(s) = b_0 + b_1 s + \sum_j a_j |s - k_j|,$ za $a_j > 0\,.$

Sada je dovoljno linearno interpolirati $\mathcal{E}$ na dovoljno sitnoj mreži. Sigurno, $\mathcal{F}_\alpha(s) = b_1 F(s) + \sum_j a_j \operatorname{sgn}(s-k_j)(F(s) - F(k_j))$. Iskoristimo li (3.7) i (3.2), vidimo da je (3.4) zadovoljeno za $\mathcal{E}_\alpha$. Kako $\mathcal{E}_\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha$ uniformno konvergiraju prema $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ na $[a, b]$, možemo limes prebaciti u integrale čime dobivamo da je (3.4) zadovoljeno za $\mathcal{E}$.

□

Radi potpunosti samo navodimo teorem o jedinstvenosti entropijskog rješenja (dokaz se može naći u [2, odjeljak 2.3]).

Teorem 3.1.5. *(Kružkov) Za svaku ograničenu izmjerivu funkciju g na $\mathbb{R}$ postoji jedinstveno entropijsko rješenje od (3.2) na $L^\infty(Q)([0,T\rangle; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$. Ono zadovoljava princip maksimuma*

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,. \tag{3.8}$$

Ranije smo vidjeli da se krivulja šoka C može parametrizirati s $t \mapsto s(t)$. Neka je Ω_l dio prostora Ω za koji vrijedi $x < s(t)$ te neka je Ω_r dio prostora gdje je $x > s(t)$. Ako je $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i $\mathcal{E}$ konveksna entropija klase C^1 s tokom $\mathcal{F}$, (3.4) povlači:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \iint_\Omega (\mathcal{E}(u)\varphi_t + \mathcal{F}(u)\varphi_x)\, dxdt \\
&= \Big(\iint_{\Omega_l} + \iint_{\Omega_r}\Big)(\mathcal{E}(u)\varphi_t + \mathcal{F}(u)\varphi_x)\, dxdt \\
&= -\Big(\iint_{\Omega_l} + \iint_{\Omega_r}\Big)(\mathcal{E}(u)_t + \mathcal{F}(u)_x)\varphi\, dxdt + \int_C ([\![\mathcal{E}(u)]\!]n^2 + [\![\mathcal{F}(u)]\!]n^1)\varphi\, dr \\
&= \int_C ([\![\mathcal{E}(u)]\!]n^2 + [\![\mathcal{F}(u)]\!]n^1)\varphi\, dr\,,
\end{aligned}$$

gdje je $n = (n^1, n^2)$ jedinična vanjska normala krivulje C, koja ide iz Ω_l prema Ω_r. Kako je φ proizvoljna pozitivna funkcija, duž C vrijedi:

$$[\![\mathcal{E}(u)]\!]n^2 + [\![\mathcal{F}(u)]\!]n_1 \geqslant 0\,,$$

tj.

$$[\![\mathcal{F}(u)]\!] \leqslant \frac{ds}{dt}[\![\mathcal{E}(u)]\!]\,. \tag{3.9}$$

Odabirom entropijskog para iz Propozicije 3.1.4. i uvrštavanjem u (3.9) dobivamo:

$$[\![(F(u) - F(k))\,\mathrm{sgn}(u-k)]\!] \leqslant \frac{ds}{st}[\![|u-k|]\!], \quad k \in \mathbb{R}\,. \tag{3.10}$$

Fiksirajmo sada točku krivulje C takvu da je $u_l \neq u_r$. Neka je I interval sa ekstremima u_l i u_r. Odabirom parametra k izvan intervala I i njegovim uvrštavanjem u (3.10), dobivamo dvije nejednakosti koje zajedno daju Rankine-Hugoniotov uvjet. Dakle, imamo:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{[\![F(u)]\!]}{[\![u]\!]}\,.$$

Konačno, uzmimo $k \in I$, tj. $k = \tau u_l + (1-\tau)u_r$, $\tau \in [0,1]$. Tada je:

$$\left(F(u_r) + F(u_l) - 2F(k) - \frac{[\![F(u)]\!]}{[\![u]\!]}(u_r + u_l - 2k)\right)\operatorname{sgn}(u_r - u_l) \leqslant 0\,.$$

Ali, $u_r + u_l - 2k = (2\tau - 1)(u_r - u_l)$, pa za $\tau \in [0,1]$ imamo:

$$\Big(\tau F(u_l) + (1-\tau)F(u_r) - F(\tau u_l + (1-\tau)u_r)\Big)\operatorname{sgn}(u_r - u_l) \leqslant 0\,. \tag{3.11}$$

Važna posljedica ove nejednakosti je Laxov entropijski uvjet. Naime, dijeljenjem (3.11) s $\tau|u_r - u_l|$ te puštanjem $\tau \to 0$, odnosno dijeljenjem (3.11) s $(1-\tau)|u_r - u_l|$ i puštanjem $\tau \to 1$, dobivamo:

$$F'(u_r) \leqslant \frac{ds}{dt} \leqslant F'(u_l)\,. \tag{3.12}$$

Za kraj napomenimo (bez dokaza) da su svi spomenuti entropijski uvjeti (Laxov, Def. 2.3.2 i Kružkovljev) ekvivalentni ako je funkcija F uniformno konveksna.

3.2 Riemannov problem

Vratimo se na Riemannov problem i riješimo ga prethodnim pristupom.

Ponovno tražimo rješenje oblika $u(x,t) = v(\frac{x}{t})$, gdje je $v \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sustav (2.63) se tada, u smislu distribucija, svodi na:

$$\begin{cases} F(v)_\xi = \xi v_\xi \\ v(-\infty) = u_l \\ v(+\infty) = u_r\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Budući da tražimo entropijsko rješenje, imamo i:

$$\Big(\operatorname{sgn}(v-k)\big(F(v) - F(k)\big)\Big)_\xi \leqslant -\xi|v-k|_\xi\,.$$

Početni uvjet je monoton, pa je i rješenje u monotono u prostornoj varijabli. Isto vrijedi i za funkciju $\xi \mapsto v(\xi) = u(\xi, 1)$, koja stoga ima najviše prebrojivo točaka prekida (šoka). Ako je $u_l = u_r$, rješenje je konstanta. U suprotnom, označimo sa χ funkciju karakteristika na intervalu $I(u_l, u_r)$ s vrijednostima 0 i ∞.

Pretpostavimo najprije $u_l < u_r$. Neka je $\tilde{h} = \sup\{h \textit{ konveksna} : h \leqslant F + \chi\}$. Tada je $d := \tilde{h}'$, definirana na $[u_l, u_r]$, rastuća i stavimo:

$$d(v(\xi)) = \xi, \quad \xi \in [d(u_l), d(u_r)]\,.$$

Ova formula jedinstveno definira v osim na skupu kritičnih točaka od d koji je prebrojiv. Za $\xi < d(u_l)$ stavimo $v = u_l$, dok za $\xi > d(u_r)$ stavimo $v = u_r$.

Analogno, ako je $u_l > u_r$ stavimo $\tilde{h} = \inf\{h \textit{ konkavna} : F - \chi \leqslant h\}$. Tada je $d := \tilde{h}'$, definirana na $[u_r, u_l]$, padajuća i možemo definirati v na $[d(u_r), d(u_l)]$ sa $d(v(\xi)) = \xi$.

Pokažimo da ovako konstruirana funkcija rješava (3.13) i da zadovoljava entropijsku nejednakost. Zbog simetrije, dovoljno je razmotriti slučaj $u_l < u_r$. Za $\xi = \frac{x}{t} \in [d(u_l), d(u_r)]$ imamo $F(v) = g(v)$ skoro svuda jer se F i g poklapaju svugdje osim u kritičnim točkama od d. Stoga, za svako $s \in [u_l, u_r]$ imamo

$$F(s) \geqslant g(s) \geqslant g(v) + \xi(s - v) = F(v) + \xi(s - v)\,, \tag{3.14}$$

gdje druga nejednakost vrijedi jer je g konveksna funkcija. Odabirom $s = v(\xi - a)$, $a \neq 0$ u (3.14), dijeljenjem s $|a|$ i puštanjem limesa u 0 (kroz pozitivne i negativne vrijednosti), dobivamo (3.13). Dakle, entropijska nejednakost je zadovoljena za $k \leqslant u_l$ i za $k \geqslant u_r$, kada je $u_l \leqslant v \leqslant u_r$. Ako je $u_l < k < u_r$, monotonost funkcije v osigurava postojanje realnog broja ξ_0 takvog da je $v(\xi) \leqslant k$ za $\xi < \xi_0$ i $v(\xi) \geqslant k$ za $\xi > \xi_0$. Neka je $w := \mathrm{sgn}(v - k)(F(v) - F(k)) - \xi|v - k|$. Zbog (3.13) imamo $w_\xi = -|v - k|$ u otvorenom skupu $\mathbb{R} - \{\xi_0\}$. Da dobijemo entropijsku nejednakost $w_\xi + |v - k| \leqslant 0$, dovoljno je pokazati da vrijedi Oleinikova nejednakost $[w] = w_+ - w_- \leqslant 0$ u točki ξ_0. To slijedi iz (3.14) kada uzmemo $\xi = \xi_0 + a,\ s = k$ za $a > 0$ i pustimo da a ide u 0.

□

Bibliografija

[1] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[2] D. Serre, *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge University Press, 1999.

Sažetak

Ovaj rad obrađuje pojam entropijskih rješenja kvazilinearnih jednadžbi prvog reda, te pokazuje njihovo postojanje i jedinstvenost. Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda često se javljaju u matematičkim modelima jer zakoni sačuvanja pripadaju u tu skupinu jednadžbi. Kako općenito takve jednadžbe nisu dovoljno glatke, promatraju se slaba rješenja, odnosno pripadna potklasa entropijskih rješenja.

Prvo poglavlje daje pregled teorije za rješavanje Hamilton-Jacobijeve jednadžbe i pripadnog inicijalnog problema te navodi neke tehničke tvrdnje koje koristimo kasnije.

Drugo poglavlje se bavi skalarnim zakonima sačuvanja kao najjednostavnijem slučaju kvazilinearne jednadžbe. Ovdje je uveden Laxov entropijski uvjet pomoću kojeg je definiran pojam entropijskog rješenja. Zatim je korištenjem Lax-Oleinik formule pokazano postojanje i jedinstvenost takvog rješenja. Konačno, razvijena teorija je primijenjena na Riemannov problem.

Treće poglavlje ilustrira ekvivalentnu formulaciju entropijskog rješenja. Pojam entropijskog rješenja obrađen je kroz koncept entropije i toka entropije. Uvodi se entropijska nejednakost kao način prepoznavanja fizikalnih rješenja među svim slabim rješenjima. Na kraju smo Riemannov problem ponovno riješili koristeći ovaj pristup te očekivano dobili isto entropijsko rješenje.

Summary

In this thesis we have studied the notion of entropy solutions of first-order quasilinear partial differential equations (PDEs), and have shown their existence and uniqueness. First-order quasilinear PDEs often occur in mathematical models because the conservation laws belong to this group of equations. As in general such equations are not smooth enough, weak solutions, ie. the corresponding subclass of entropy solutions are observed.

The first chapter provides an overview of the theory for solving the Hamilton-Jacobi equation and the corresponding initial problem, and lists some technical statements that we use later.

The second chapter deals with scalar conservation laws as the simplest case of a quasilinear equation. An entropy condition is introduced here by which the notion of an entropy solution is defined. Then, the existence and uniqueness of such a solution was demonstrated using the Lax-Oleinik formula. Finally, the developed theory was applied to the Riemann problem.

The third chapter illustrates the equivalent formulation of the entropy solution. The notion of entropy solution is studied through the concept of entropy and entropy flux. Entropy inequality is introduced as a way of recognizing physical solutions among all weak solutions. In the end, we solved the Riemann problem again using this approach and, as expected, obtained the same entropy solution.

Životopis

Rođena sam 17. ožujka 1994. godine u Zagrebu gdje sam završila osnovnu i srednju školu (XV. gimnaziju). Školske godine 2012./2013. upisala sam Preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu koji sam završila 2018. godine. Iste godine sam upisala Diplomski studij Primijenjena matematika.