**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Antonija Matić

# ANALITIČKA GEOMETRIJA U KOMPLEKSNOJ RAVNINI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Mario Krnić

Suvoditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Obitelji, prijateljima i svim profesorima koji su me inspirirali*

# Sadržaj

**Sadržaj** **iv**

**Uvod** **1**

**1 O kompleksnim brojevima** **2**
1.1 Osnovno o kompleksnim brojevima . . . . . 2
1.2 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja . . . . . 5

**2 Osnovni elementi euklidske geometrije u kompleksnim koordinatama** **10**
2.1 Udaljenost dviju točaka . . . . . 10
2.2 Segmenti, polupravci i pravci . . . . . 11
2.3 Kut i mjera kuta . . . . . 15
2.4 Rotacija točke . . . . . 18

**3 Pravac u kompleksnoj ravnini** **21**
3.1 Kolinearnost, ortogonalnost i koncikličnost . . . . . 21
3.2 Jednadžba pravca . . . . . 23
3.3 Jednadžba pravca određenog s dvije točke . . . . . 25
3.4 Jednadžba pravca određenog točkom i smjerom . . . . . 28
3.5 Nožište okomice . . . . . 29
3.6 Udaljenost točke od pravca . . . . . 31

**4 Trokut** **33**
4.1 Slični trokuti . . . . . 33
4.2 Jednakostranični trokuti . . . . . 37

**5 Kružnica** **41**
5.1 Jednadžba kružnice . . . . . 41

**Bibliografija** **44**

# Uvod

Kompleksni brojevi su se pojavili još u doba renesanse, no tek u 18. stoljeću oznaku $i$ za broj $\sqrt{-1}$ (imaginarnu jedinicu) prvi je uveo Leonard Euler. U 19. stoljeću je uslijedilo proširenje teorije o kompleksnim brojevima. Robert Argand uveo je kompleksnu ravninu i interpretaciju množenja s $i$ kao rotacije za pravi kut. Također, uveo je pojam modula kompleksnog broja, iako se ta ideja ponekad pripisuje i Cauchyju. U spomenutim su pojmovima temelji ovog rada. U pet poglavlja napisan je kratki pregled analitičke geometrije u kompleksnoj ravnini. Mnogi rezultati dobiveni u ovom radu olakšavaju rješavanje inače čisto geometrijskih zadataka. U prvom poglavlju prisjetit ćemo se preciznih matematičkih definicija, operacija i svojstva kompleksnih brojeva te geometrijske interpretacije kompleksnog broja. U drugom poglavlju uvest ćemo osnovne elemente euklidske geometrije u kompleksnu ravninu, poput segmenta i polupravca, te prikazati rješenje zadataka vezanih uz spomenute elemente. Treće poglavlje je u potpunosti posvećeno pravcu u kompleksnoj ravnini. U četvrtom poglavlju ćemo prikazati rezultate o sličnim i jednakostraničnim trokutima u kompleksnoj ravnini. U petom poglavlju ćemo završiti pregled analitičke geometrije u kompleksnoj ravnini s jednadžbom kružnice u kompleksnoj ravnini.

# Poglavlje 1

# O kompleksnim brojevima

Učenici srednjih škola se prvi put susreću s kompleksnim brojevima u drugom razredu srednje škole. Nastavni sadržaj o kompleksnim brojevima najčešće prethodi cjelini s fokusom na rješavanju kvadratne jednadžbe, stoga učenik treba biti u stanju razlikovati drugi korijen pozitivnog od drugog korijena negativnog broja u svrhu rješavanja kvadratne jednadžbe te definirati kompleksan broj. Stoga, u ovom poglavlju, prisjetit ćemo se osnovnih definicija i svojstava kompleksnih brojeva, te geometrijske interpretacije istih.

## 1.1 Osnovno o kompleksnim brojevima

**Definicija 1.1.1.** *Svaki broj $z$ oblika $z = x + yi$, pri čemu su $x,y \in \mathbb{R}$, naziva se* ***kompleksan broj****. Broj $x$ nazivamo* ***realni****, a $y$* ***imaginarni dio*** *kompleksnog broja $z$. Pišemo:*

$$x = \mathrm{Re}(z),\ \ y = \mathrm{Im}(z).$$

*Broj $i$ nazivamo* ***imaginarna jedinica****, te vrijedi:*

$$i^2 = -1.$$

*Skup kompleksnih brojeva označavamo s:*

$$\mathbb{C} = \{x + yi :\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

*Svaki kompleksni broj $z = x + yi$ se može zapisati u obliku uređenog para brojeva $(x, y)$.*

**Definicija 1.1.2.** *Dva kompleksna broja $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ su jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi:*

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

**Definicija 1.1.3.** *Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva nad* $\mathbb{R}^2$ *definirane su jednakostima:*

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Operacija zbrajanja u $\mathbb{R}^2$ ima svojstva komutativnosti i asocijativnosti. Također, u skupu $\mathbb{R}^2$ postoji neutralan element s obzirom na zbrajanje, te za svaki element iz $\mathbb{R}^2$ postoji njemu suprotan element. Svojstva su preciznije iskazana sljedećom propozicijom:

**Propozicija 1.1.4.** *Za sve kompleksne brojeve* $z$, $z_1$, $z_2$ *i* $z_3$ *vrijedi:*
*1)* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(**komutativnost zbrajanja**),*
*2)* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(**asocijativnost zbrajanja**),*
*3) Postoji jedinstveni kompleksni broj* $0 = (0, 0)$ *takav da vrijedi* $z + 0 = 0 + z$ *(**neutralni element za zbrajanje**),*
*4) Za svaki kompleksni broj* $z = (x, y)$ *postoji jedinstveni kompleksni broj* $-z = (-x, -y)$ *takav da je* $z + (-z) = (-z) + z = 0$ *(**suprotni element**).*

Operacija množenja u $\mathbb{R}^2$ ima svojstva komutativnosti i asocijativnosti. Također, u skupu $\mathbb{R}^2$ postoji neutralan element s obzirom na množenje, te za svaki element iz $\mathbb{R}^2$ postoji njemu inverzan element. Operacije zbrajanja i množenja povezana su svojstvom distributivnosti množenja prema zbrajaju. Svojstva su preciznije iskazana sljedećom propozicijom:

**Propozicija 1.1.5.** *Za sve kompleksne brojeve* $z$, $z_1$, $z_2$ *i* $z_3$ *vrijedi:*
*1)* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ *(**komutativnost množenja**),*
*2)* $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ *(**asocijativnost množenja**),*
*3) Postoji jedinstveni kompleksni broj* $1 = (1, 0)$ *takav da vrijedi* $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ *(**neutralni element za množenje**),*
*4) Za svaki kompleksni broj* $z = (x, y) \neq 0$ *postoji jedinstveni broj* $z^{-1} = (x', y')$ *takav da vrijedi* $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ *(**inverzni element**),*
*5)* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ *(**distributivnost množenja prema zbrajanju**).*

Tvrdnje iz prethodnih propozicija se mogu lako dokazati koristeći poznata svojstva realnih brojeva.

**Napomena 1.1.6.** *Prema Propoziciji 1.1.5., za svaki* $z$ *postoji jedinstveni* $z^{-1}$ *kojeg nazivamo elementom inverznim elementu* $z$*. Broj* $z^{-1}$ *se određuje iz jednakosti:*

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

*Zapišemo li $z$ i $z^{-1}$ u obliku uređenog para brojeva, dobivamo:*

$$(x, y) \cdot (x', y') = (1, 0),$$

*što je ekvivalentno sustavu jednadžbi:*

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0 \end{cases}.$$

*Rješavanjem sustava jednadžbi po $x'$ i $y'$, dobiva se izraz za inverz $z^{-1} = (x', y')$, pri čemu su $x'$ i $y'$:*

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**Definicija 1.1.7.** *Ako je $z = x + yi$ kompleksan broj, broj $\overline{z} = x - yi$ je **konjugirano kompleksan** broj broju $z$.*

**Propozicija 1.1.8.** *Za sve kompleksne brojeve $z$, $\overline{z}$, $z_1$ i $z_2$ vrijedi:*
*1) $z = \overline{z}$ ako i samo ako je $z \in \mathbb{R}$,*
*2) $z = -\overline{z}$ ako i samo ako je $z \in i\mathbb{R}$,*
*3) $z = \overline{\overline{z}}$,*
*4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,*
*5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,*
*6) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, z \neq 0$,*
*7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$,*
*8) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.*

Tvrdnje iz prethodne propozicije lako se mogu dokazati koristeći definicije konjugirano kompleksnog broja, kompleksnog broja i svojstva operacija s kompleksnim brojevima.

**Definicija 1.1.9.** *Broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zove se **modul** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja $z$.*

**Propozicija 1.1.10.** *Za sve kompleksne brojeve $z$, $\overline{z}$, $z_1$ i $z_2$ vrijedi:*
*1) $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$, $-|z| \leq \mathrm{Im} \leq |z|$,*
*2) $|z| \geq 0$. Vrijedi $|z| = 0$ ako i samo ako je $z = 0$,*
*3) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$,*
*4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,*
*5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,*
*6) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,*
*7) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,*

*8)* $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}, z \neq 0,$

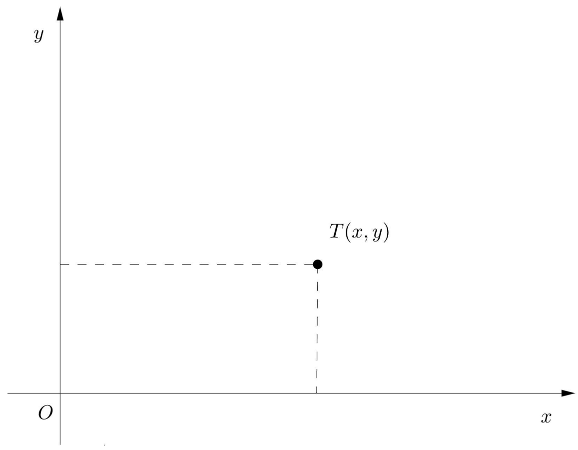
*9)* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0.$

Tvrdnje iz prethodne propozicije lako se mogu dokazati koristeći definicije konjugirano kompleksnog broja, kompleksnog broja, modula kompleksnog broja te svojstva operacija s kompleksnim brojevima.

## 1.2 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

S obzirom da se svaki kompleksni broj $z = x + yi$ može zapisati kao uređen par realnih brojeva $(x, y)$, svakom kompleksnom broju se može pridružiti točka $T(x, y)$ u ravnini $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

**Definicija 1.2.1.** *Točka $T(x, y)$ naziva se **geometrijska slika** kompleksnog broja $z = x + yi$. Kompleksan broj $z$ naziva se kompleksna koordinata točke $T$, što označavamo s $T(z)$.*

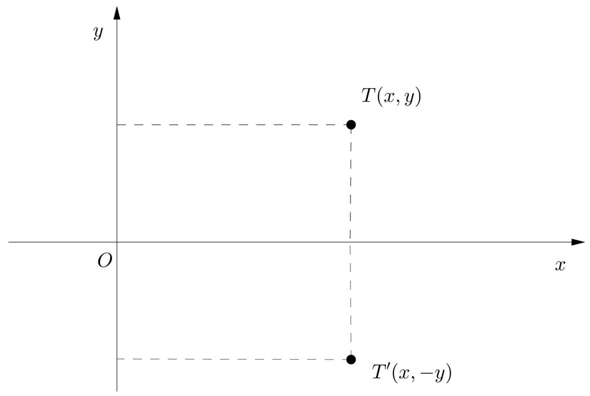



Slika 1.1: Geometrijska slika $T(x, y)$ kompleksnog broja $z = x + yi$

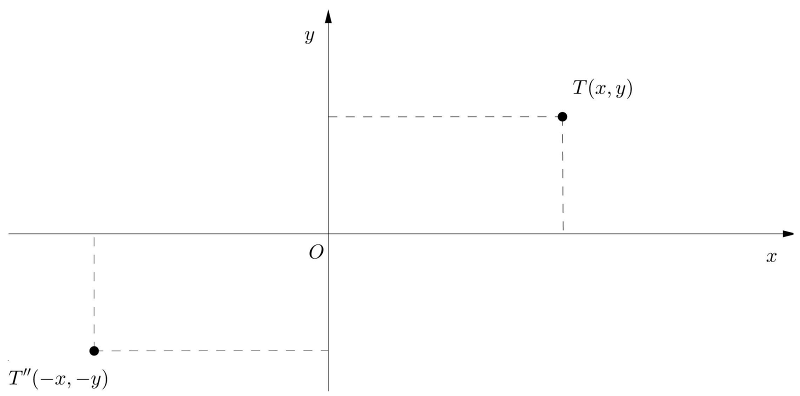
**Definicija 1.2.2.** *Koordinatna ravnina u kojoj su smještene točke čije su koordinate kompleksni brojevi naziva se **kompleksna ravnina**. Os x naziva se **realna os**, a os y **imaginarna os**.*

**Napomena 1.2.3.** *Geometrijska slika broja $\overline{z}$, kompleksnog konjugata broja $z = x + yi$, osnosimetrična je točki $T(x, y)$ s obzirom na os x.*

**Napomena 1.2.4.** *Geometrijska slika $T''(-x, -y)$ inverza za zbrajanje $-z$, centralnosimetrična je točki $T(x, y)$, geometrijskoj slici broja z.*




Slika 1.2: Geometrijska slika $T(x, y)$ kompleksnog broja $z = x + yi$ i geometrijska slika $T'(x, -y)$ kompleksnog konjugata $\overline{z} = x - yi$



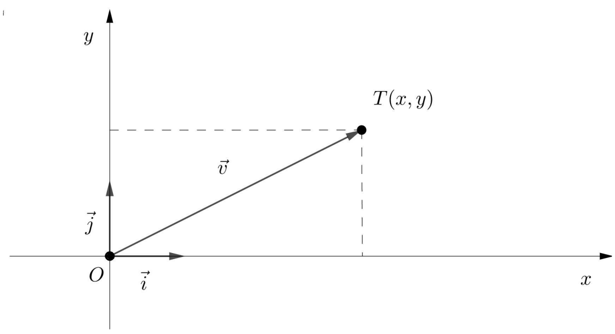

Slika 1.3: Geometrijska slika $T(x, y)$ kompleksnog broja $z = x + yi$ i geometrijska slika $T''(-x, -y)$ pripadnog inverza za zbrajanje $-z = -x - yi$

Osim točke, kompleksnom broju $z = x + yi$ se može pridružiti i vektor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$, pri čemu je $T$ geometrijska slika kompleksnog broja $z$. Vektor $\overrightarrow{v}$ zapisujemo u obliku $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, pri čemu su $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$ redom jedinični vektori na $x$-osi i $y$-osi.

**Definicija 1.2.5.** *Neka je $z = x + yi$ kompleksan broj i neka je $T(x, y)$ njegova geometrijska slika.* ***Euklidska udaljenost*** *$|OT|$ dana je formulom:*

$$|OT| = \sqrt{(x_T - x_O)^2 + (y_T - y_O)^2},$$

*iz čega zaključujemo da je $|OT| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\overrightarrow{v}|$. Drugim riječima, apsolutna vrijednost broja $z$ je duljina dužine $\overline{OT}$, odnosno duljina vektora $\overrightarrow{v}$*




Slika 1.4: Geometrijska slika $T(x, y)$ kompleksnog broja $z = x+yi$ i njemu pridružen vektor $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

**Napomena 1.2.6.** *1) Za pozitivan realan broj r, skup kompleksnih brojeva kojima je modul r predstavljaju kružnicu K sa središtem u ishodištu i radijusom r.*
*2) Kompleksni brojevi z, čiji je modul $|z| < r$, su točke unutar kružnice K sa središtem u ishodištu i radijusom r.*
*3) Kompleksni brojevi z, čiji je modul $|z| > r$, su točke izvan kružnice K sa središtem u ishodištu i radijusom r.*

U Poglavlju 5 ovog rada su dostupne dodatne informacije o kružnici u kompleksnoj ravnini.

**Definicija 1.2.7.** *Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ kompleksni brojevi te neka su im pridruženi vektori $\overrightarrow{v_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{v_2} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$. Tada je suma kompleksnih brojeva dana s:*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i.$$

*Suma njima pridruženih vektora je dana s:*

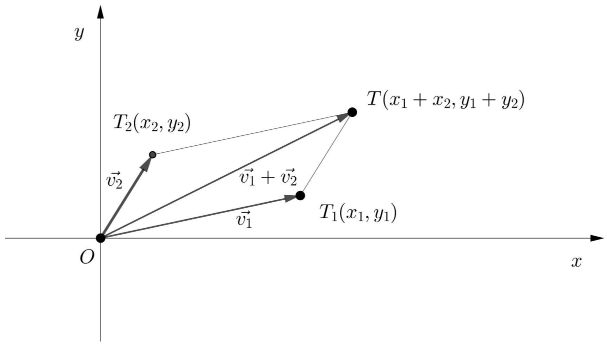
$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (x_1 + x_2)\overrightarrow{i} + (y_1 + y_2)\overrightarrow{j}.$$

*Iz toga možemo zaključiti da je geometrijska slika sume $z_1 + z_2$ određena vektorom $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.*

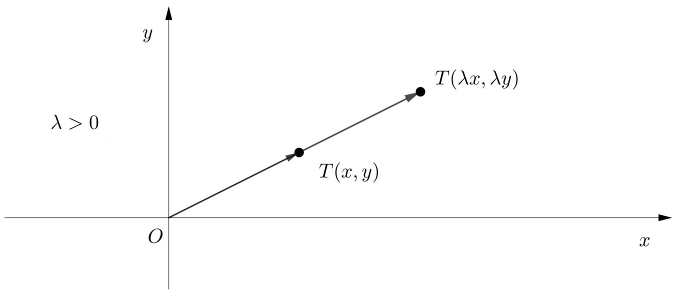
**Definicija 1.2.8.** *Neka je $z = x + yi$ kompleksan broj te neka mu je pridružen vektor $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Neka je $\lambda$ realan broj. Tada je umnošku $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ pridružen vektor definiran s:*

$$\lambda\overrightarrow{v} = \lambda x\overrightarrow{i} + \lambda y\overrightarrow{j}.$$

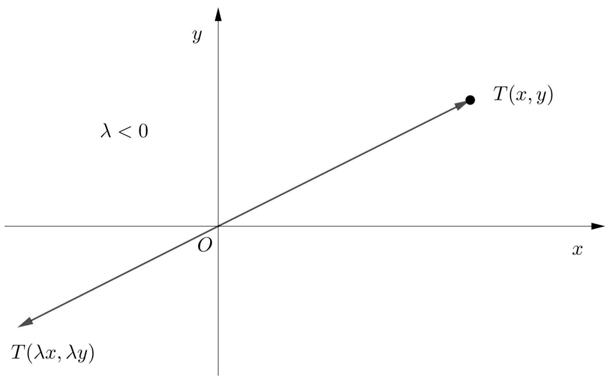
*Nadalje, ako je $\lambda > 0$, vektori $\lambda\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{v}$ imaju istu orijentaciju i vrijedi $|\lambda\overrightarrow{v}| = \lambda|\overrightarrow{v}|$. Ako je $\lambda < 0$, vektori $\lambda\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{v}$ imaju suprotnu orijentaciju i vrijedi $|\lambda\overrightarrow{v}| = -\lambda|\overrightarrow{v}|$. Ako je $\lambda = 0$, onda je $\lambda = \overrightarrow{0}$.*




Slika 1.5: Geometrijska slika $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sume kompleksnih brojeva $z_1$ i $z_2$




Slika 1.6: Vektor $\overrightarrow{v}$ pridružen kompleksnom broj $z = x + yi$ i vektor $\lambda\overrightarrow{v}$, pri čemu je $\lambda > 0$




Slika 1.7: Vektor $\overrightarrow{v}$ pridružen kompleksnom broj $z = x + yi$ i vektor $\lambda\overrightarrow{v}$, pri čemu je $\lambda < 0$

**Definicija 1.2.9.** ***Argument*** *kompleksnog broja* $z \neq 0$ *definiramo kao realni broj* $\varphi \in \langle -\pi, \pi]$ *koji predstavlja mjeru kuta između pozitivnog dijela osi x i polupravca iz ishodišta* *koji prolazi kroz z. Pišemo:*

$$\varphi = \arg z.$$

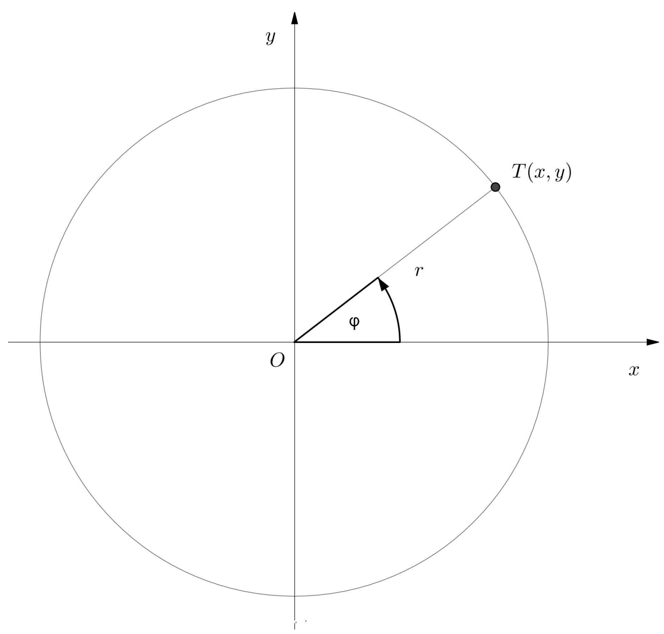
**Napomena 1.2.10.** *Uz danu definiciju argumenta kompleksnog broja $z$ te koristeći Napomenu 1.2.6, lako se može pokazati da se za svaki kompleksni broj $z \neq 0$ realni i imaginarni dio mogu zapisati u obliku:*

$$x = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi, \quad y = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi.$$

*Sređivanjem izraza, dobivamo **trigonometrijski zapis** kompleksnog broja $z = x + yi$:*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

*pri čemu je $\varphi$ argument, a $r$ modul kompleksnog broja $z$.*




Slika 1.8: Parametri $r$ i $\varphi$ određuju trigonometrijski zapis kompleksnog broja $z$ kojemu je geometrijska slika $T(x, y)$

# Poglavlje 2

# Osnovni elementi euklidske geometrije u kompleksnim koordinatama

Neki od osnovnih pojmova u euklidskoj geometriji su udaljenost dviju točaka, segment (dužina), pravac i kut. U ovom poglavlju ćemo spomenute pojmove definirati pomoću kompleksnih koordinata.

## 2.1 Udaljenost dviju točaka

**Definicija 2.1.1.** *Neka su geometrijske slike kompleksnih brojeva $z_1$ i $z_2$ točke $T_1$ i $T_2$, redom. Tada je **udaljenost dvije točke** $T_1$ i $T_2$ dana s:*

$$T_1T_2 = |z_1 - z_2|,$$

*tj. vrijedi:*

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

**Propozicija 2.1.2.** *Za sve kompleksne brojeve $z_1$, $z_2$, $z_3$ vrijede svojstva:*
*1) $d(z_1, z_2) \geq 0$ (**pozitivnost**),*
*2) $d(z_1, z_2) = 0$ ako i samo ako $z_1 = z_2$,*
*3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ (**simetričnost**),*
*4) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ (**nejednakost trokuta**).*

Propoziciju lako možemo dokazati, koristeći definiciju udaljenosti dviju točaka te jednostavne algebarske manipulacije.

## 2.2 Segmenti, polupravci i pravci

**Definicija 2.2.1.** *Neka su A i B dvije različite točke s kompleksnim koordinatama a i b. Kažemo da se točka T s kompleksnom koordinatom z nalazi* ***između točaka*** *A i B ako je $z \neq a$, $z \neq b$, te vrijedi:*

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|$$

*Za takav skup točaka T između A i B koristimo oznaku $A - T - B$.*

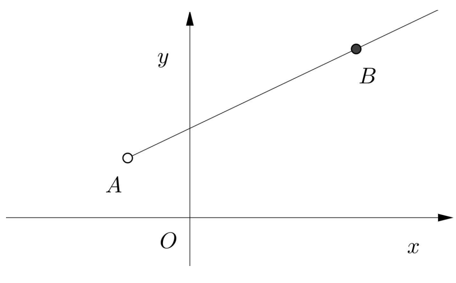
**Definicija 2.2.2.** *Skup točaka $(AB) = \{T : A - T - B\}$ nazivamo* ***otvoreni segment*** *određen točkama A i B.*

**Definicija 2.2.3.** *Skup točaka $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ nazivamo* ***zatvoreni segment*** *određen točkama A i B.*

**Teorem 2.2.4.** *Neka su A i B dvije različite točke s kompleksnim koordinatama a i b. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*1) $T \in (AB)$,*
*2) postoji realan broj $k > 0$ takav da je $z - a = k(b - z)$,*
*3) postoji realan broj $t \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $z = (1 - t)a + tb$, pri čemu je z kompleksna koordinata točke T.*

*Dokaz.* Dokažimo prvo da su tvrdnje 1) i 2) ekvivalentne. Znamo da je $T \in (AB)$ ako i samo ako je $|a - z| + |z - b| = |a - b|$. To se može zapisati kao $d(a, z) + d(z, b) = d(a, b)$, tj. postoji realan broj $k > 0$ takav da je $z - a = k(b - z)$. Da bismo dokazali ekvivalentnost tvrdnji 2) i 3) uzmimo $t$ takav da je $t = \frac{k}{k+1} \in \langle 0, 1\rangle$, tj. $k = \frac{t}{1-t} > 0$. Sada imamo $z - a = k(b - z)$ ako i samo ako je $z = \frac{1}{k+1}a + \frac{k}{k+1}b$, tj. $z = (1 - ta) + tb$. □

**Definicija 2.2.5.** *Skup točaka $(AB = \{T : A - T - B$ ili $A - B - T\}$ nazivamo* ***otvoreni polupravac*** *s početnom točkom A koji sadrži točku B.*




Slika 2.1: Otvoreni polupravac $(AB$

**Teorem 2.2.6.** *Neka su $A$ i $B$ dvije različite točke s kompleksnim koordinatama $a$ i $b$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*1) $T \in (AB$,*
*2) postoji realan broj $t > 0$ takav da je $z = (1-t)a + tb$, pri čemu je $z$ kompleksna koordinata točke $T$,*
*3) $\arg(z - a) = \arg(b - a)$,*
*4) $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$.*

*Dokaz.* Dovoljno je pokazati da 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 1). Pokažimo 1) ⇒ 2). S obzirom da je $T \in (AB$ imamo $A - T - B$ ili $A - B - T$. Postoje brojevi $t, l \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da:

$$z = (1 - t)a + tb \text{ ili } b = (1 - l)a + lz$$

U prvom slučaju smo dobili tvrdnju 2). Za drugi slučaj uzmimo da je $t = \frac{1}{l}$, iz čega slijedi

$$z = tb - (t - 1)a = (1 - t)a + bt,$$

što je i trebalo pokazati. Nadalje, pokažimo 2) ⇒ 3). Iz $z = (1 - t)a + tb, t > 0$ imamo:

$$z - a = t(b - a), t > 0.$$

Iz toga slijedi:

$$\arg(z - a) = \arg(b - a).$$

Pokažimo 3) ⇒ 4). Iz relacije:

$$\arg \frac{z - a}{b - a} = \arg(z - a) - \arg(b - a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

slijedi da je $\arg \frac{z-a}{b-a} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. S obzirom da vrijedi $\arg \frac{z-a}{b-a} \in [0, 2\pi\rangle$, slijedi da je $k = 0$ i $\arg \frac{z-a}{b-a} = 0$. Dakle, $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$, što je i trebalo pokazati. Nadalje, pokažimo 4) ⇒ 1). Neka je $t = \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Slijedi da je:

$$z = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb, t > 0.$$

Ako je $t \in \langle 0, 1\rangle$, tada je $T \in (AB) \subset (AB$. Ako je $t = 1$, tada je $z = b$ i $T = B \in (AB$. Ako je $t > 1$, tada uzmimo $l = \frac{1}{t} \in \langle 0, 1\rangle$. Imamo:

$$b = lz + (1 - t)a.$$

Slijedi da je $A - B - T$ i $T \in (AB$, čime je dokaz gotov. □

**Teorem 2.2.7.** *Neka su $A$ i $B$ dvije različite točke s kompleksnim koordinatama $a$ i $b$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*1) $T(z)$ pripada pravcu $AB$,*
*2) $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$,*
*3) Postoji realan broj $t$ takav da je $z = (1-t)a + tb$.*
*4)* $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0,$
*5)* $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$

*Dokaz.* Kako bismo pokazali ekvivalencije 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3), promatrajmo točku $C$ takvu da je $C - A - B$. Uz tako definiranu točku $C$ vrijedi da je pravac $AB$ unija $(AB \cup \{A\} \cup (AC$. Tada primjenimo Teorem 2.2.6. Nadalje, pokažemo ekvivalencije 2) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5). Sada imamo da je $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ ako i samo ako vrijedi $\frac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)}$. Koristeći svojstva konjugiranja kompleksnih imamo $\frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$, što je ekvivalentno $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0.$
Nadalje, imamo da je $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$ ako i samo ako $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} & 0 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} & 0 \end{vmatrix} = 0.$
Prethodna relacija ekvivalentna je $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$, čime smo dobili da je 4) ekvivalentno 5), a time je dokaz gotov. □

Slijedi primjer zadatka s matematičkog natjecanja u kojem možemo primjeniti dobivene rezultate.

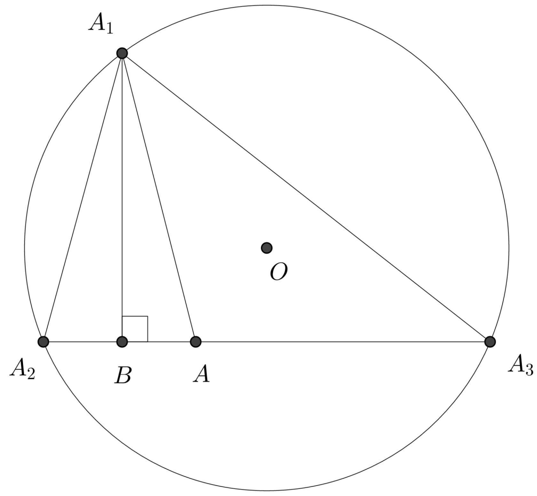
**Problem 2.2.8** (Rumunjska matematička olimpijada 1984.). *Neka su $z_1$, $z_2$ i $z_3$ kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$ i $z_2 \neq z_3$. Dokažimo da vrijedi:*

$$\min_{a \in \mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2R} |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$$

*Dokaz.* Neka je $z = az_2 + (1-a)z_3, a \in \mathbb{R}$. Promotrimo točke $A, A_1, A_2$ i $A_3$ s kompleksnim koordinatama $z, z_1, z_2$ i $z_3$ redom. Iz pretpostavke slijedi da je ishodište kompleksne ravnine $O$ središte trokutu $\triangle A_1A_2A_3$ opisane kružnice. Primjetimo da točka $A$ pripada pravcu $A_2A_3$, stoga je $|A_1A| = |z - z_1|$ veće ili jednake duljine od visine $A_1B$ trokuta $\triangle A_1A_2A_3$.

Dovoljno je pokazati da vrijedi:

$$|A_1B| = \frac{1}{2R} |z_1 - z_2||z_1 - z_3| = \frac{1}{2R} |A_1A_2| \cdot |A_1A_3|$$




Slika 2.2: Trokut $\triangle A_1A_2A_3$ s pripadnim elementima

Neka je $P_{\triangle A_1A_2A_3}$ površina trokuta $\triangle A_1A_2A_3$. S obzirom da je $R$ radijus trokutu $\triangle A_1A_2A_3$ opisane kružnice, imamo:

$$|A_1B| = \frac{2P_{\triangle A_1A_2A_3}}{|A_2A_3|} = \frac{2\frac{|A_1A_2|\cdot|A_2A_3|\cdot|A_3A_1|}{4R}}{|A_2A_3|} = \frac{|A_1A_2|\cdot|A_3A_1|}{2R}$$

što je i trebalo pokazati. □

Promotrimo dvije međusobno različite točke $A(a)$ i $B(b)$. Točka $T(z)$ koja pripada pravcu $AB$ dijeli segment $AB$ u omjeru $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ako vrijedi relacija:

$$\overrightarrow{TA} = k \cdot \overrightarrow{TB}$$

što možemo zapisati:

$$a - z = k(b - z) \text{ ili } (1 - k)z = a - kb.$$

Nadalje dobivamo:

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}.$$

Primijetimo da za $k < 0$ točka $T$ pripada segmentu koji spaja točke $A$ i $B$. Za $k \in \langle 0, 1\rangle$, vrijedi da je $T \in (AB\backslash[AB]$. Nadalje, za $k > 1$ vrijedi da je $T \in (BA\backslash[AB]$. Kao posljedicu, za $k = -1$ dobivamo da je polovište $P$ segmenta $[AB]$ zadano kompleksnom koordinatom $z_P$ za koju vrijedi:

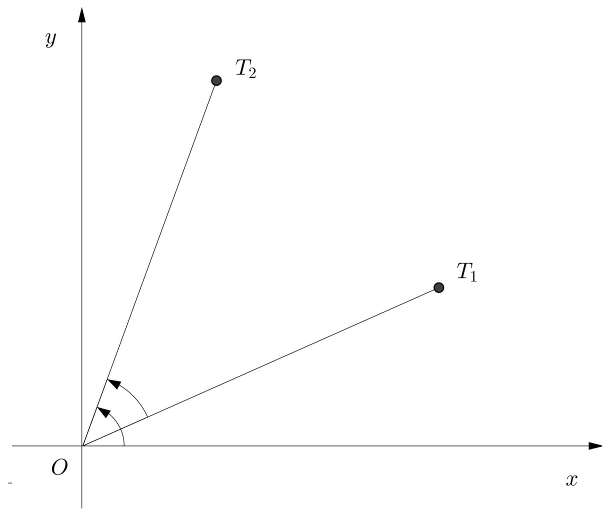
$$z_P = \frac{a + b}{2}.$$

**Primjer 2.2.9.** *Neka su $A(a)$, $B(b)$ i $C(c)$ nekolinearne točke u kompleksnoj ravnini. Tada polovište $P$ segmenta $[AB]$ ima kompleksnu koordinatu $z_P = \frac{a+b}{2}$. Težište $O$ trokuta $\triangle ABC$ dijeli težišnicu $[CP]$ u omjeru $2:1$ s unutarnje strane, stoga je koordinata točke $O$ zadana $k = -2$, stoga vrijedi:*

$$z_O = \frac{c + 2z_P}{1+2} = \frac{a+b+c}{3}$$

## 2.3 Kut i mjera kuta

Prisjetimo se da je trokut **orijentiran** ukoliko je poznat točan poredak njegovih vrhova. Kažemo da je **pozitivno orijentiran** ako je orijentacija njegovih vrhova u smjeru suprotnom od kazaljki na satu. Inače, kažemo da je **negativno orijentiran**. Promotrimo dvije međusobno različite točke $T_1(z_1)$, $T_2(z_2)$ te ishodište kompleksne ravnine $O$.
Kut $\widehat{T_1OT_2}$ je orijentiran ako su točke $T_1$ i $T_2$ poredane u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.




Slika 2.3: Negativno orijentiran kut $\widehat{T_1OT_2}$

**Propozicija 2.3.1.** *Mjera orijentiranog kuta $\widehat{T_1OT_2}$ je* $\arg \frac{z_2}{z_1}$.

*Dokaz.* Promatramo sljedeća dva slučaja:
1) Ako je trokut $\triangle T_1OT_2$ negativno orijentiran, tada vrijedi:

$$\widehat{T_1OT_2} = \widehat{xOT_2} - \widehat{xOT_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

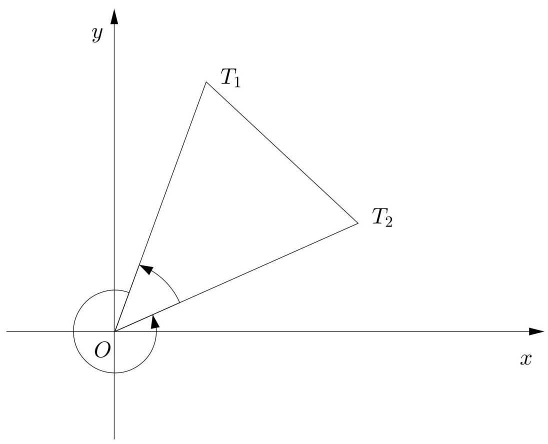
2) Ako je trokut $\triangle T_1OT_2$ pozitivno orijentiran (Slika 2.4.), tada vrijedi:

$$\widehat{T_1OT_2} = 2\pi - \widehat{T_2OT_1} = 2\pi - \arg\frac{z_2}{z_1}.$$

To znači da je trokut $\triangle T_2OT_1$ negativno orijentiran, pa slijedi:

$$\widehat{T_1OT_2} = 2\pi - \arg\frac{z_1}{z_2} = 2\pi - \left(2\pi - \arg\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg\frac{z_2}{z_1},$$

kao što smo i tvrdili. □




Slika 2.4: Pozitivno orijentiran trokut $\triangle T_1OT_2$

**Napomena 2.3.2.** *Prethodna tvrdnja vrijedi također ako su točke O, $T_1$ i $T_2$ kolinearne.*

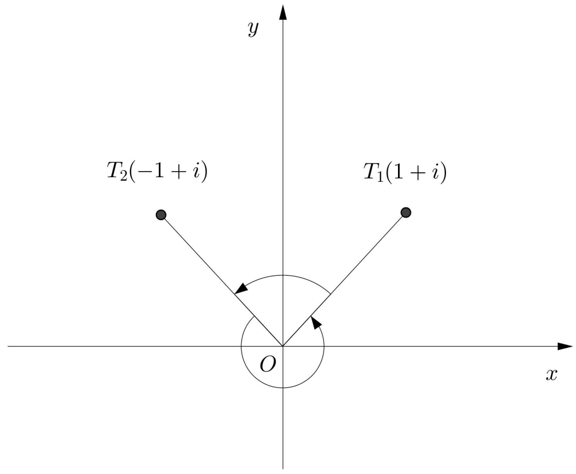
**Primjer 2.3.3.** *Neka je $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -1 + i$ (vidi Sliku 2.5). Tada vrijedi:*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = i.$$

*Iz toga slijedi:*

$$\widehat{T_1OT_2} = \arg i = \frac{\pi}{2} \quad i \quad \widehat{T_2OT_1} = \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}.$$

**Teorem 2.3.4.** *Neka su $T_1(z_1)$, $T_2(z_2)$ i $T_3(z_3)$ međusobno različite točke. Mjera orijentiranog kuta $\widehat{T_2T_1T_3}$ je $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.*




Slika 2.5: Kutovi $\widehat{T_1OT_2}$ i $\widehat{T_2OT_1}$

*Dokaz.* Translacija za vektor $-z_1$ preslikava točke $T_1$, $T_2$ i $T_3$ u točke $O$, $T_2'$ i $T_3'$ s kompleksnim koordinatama $O$, $z_2 - z_1$ i $z_3 - z_1$ redom. Nadalje, vrijedi $\widehat{T_2T_1T_3} = \widehat{T_2'OT_3'}$. Prema prethodno dokazanom, imamo:

$$\widehat{T_2'OT_3'} = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

što je i trebalo pokazati. □

**Primjer 2.3.5.** *Neka su zadani kompleksni brojevi $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 4 + 7i$ i $z_3 = 8 + 7i$. Tada vrijedi:*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{4i}{4 + 4i} = \frac{i(1 - i)}{2} = \frac{1 + i}{2},$$

*iz čega slijedi:*

$$\widehat{T_3T_1T_2} = \arg\frac{1 + i}{2} = \frac{\pi}{4} \quad i \quad \widehat{T_2T_1T_3} = \arg\frac{2}{1 + i} = \arg(1 - i) = \frac{7\pi}{4}.$$

**Napomena 2.3.6.** *Koristeći trigonometrijski zapis kompleksnog broja, prethodno navedeni izraz jednak je:*

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|\left(\cos\left(\arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) + i\sin\left(\arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)\right)\\ &= \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|\left(\cos\widehat{T_2T_1T_3} + i\sin\widehat{T_2T_1T_3}\right).\end{aligned}$$

**Napomena 2.3.7.** *Promotrimo četiri međusobno različite točke $T_i\,(z_i)\,, i \in \{1,2,3,4\}$.* ***Mjera kuta između pravaca*** *$T_1T_3$ i $T_2T_4$ jednaka je $\arg \frac{z_3-z_1}{z_4-z_2}$ ili $\arg \frac{z_4-z_2}{z_3-z_1}$. Tvrdnju možemo pokazati koristeći istu ideju kao u prethodno dokazanom teoremu.*

## 2.4 Rotacija točke

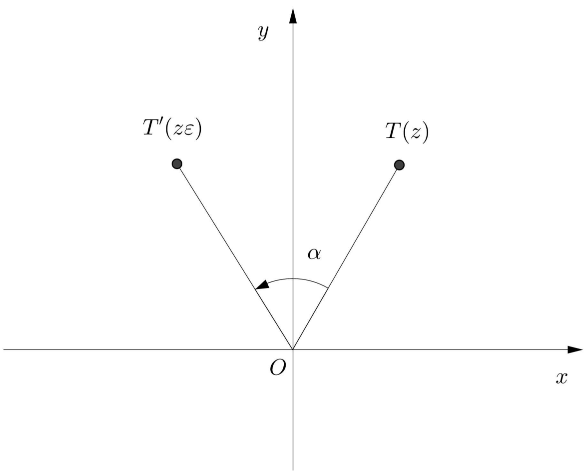
Promotrimo kut $\alpha$ i kompleksni broj zadan s:

$$\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Neka je $z = r(\cos t + i\sin t)$ kompleksni broj i $T$ njegova geometrijska slika. Umnožak kompleksnih brojeva $\varepsilon$ i $z$ je

$$z\varepsilon = r(\cos(t+\alpha) + i\sin(t+\alpha)).$$

Promotrimo modul umnoška $|z\varepsilon| = r$ i argument umnoška $\arg(z\varepsilon) = \arg z + \alpha$. Slijedi da je geometrijska slika $T'$ kompleksnog broja $z\varepsilon$ rotacija točke $T$ za kut $\alpha$ s obzirom na ishodište.




Slika 2.6: Geometrijska slika $T(z)$ kompleksnog broja $z$ i njena rotacija za kut $\alpha$

**Propozicija 2.4.1.** *Pretpostavimo da je točka C rotacija točke B za kut α. Ako su a,b i c redom koordinate točaka A, B i C, tada vrijedi:*

$$c = a + (b-a)\varepsilon,\ \text{za } \varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

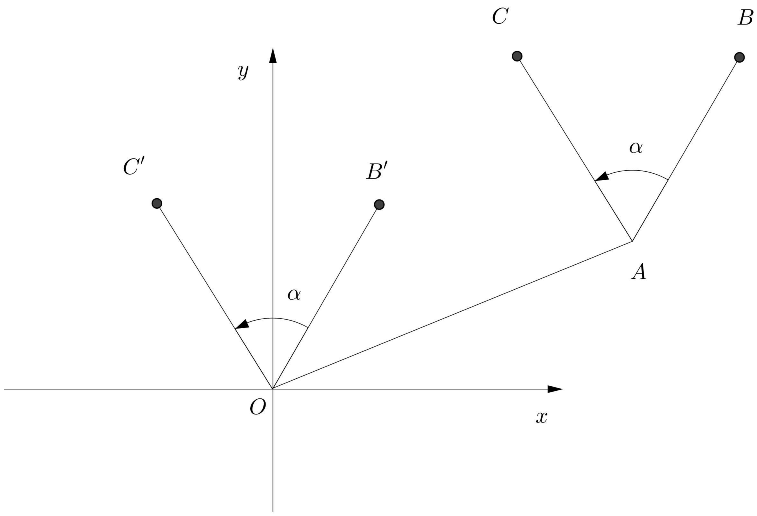
*Dokaz.* Translacija za vektor $-a$ preslikava točke $A$, $B$ i $C$ u točke $O$, $B'$ i $C'$ (vidi Sliku 2.7), s kompleksnim koordinatama $O$, $b-a$ i $c-a$, redom. Primjetimo da je točka $C'$ slika točke $B'$ prilikom rotacije za kut $\alpha$ s obzirom na ishodište, stoga slijedi:

$$c - a = (b - a)\varepsilon,$$

tj.

$$c = a + (b - a)\varepsilon.$$

što smo i htjeli pokazati. □




Slika 2.7: Translacija točaka $A$, $B$ i $C$ za vektor $-a$ u $O$, $B'$, $C'$

Koristeći prethodne rezultate vezane uz rotaciju, možemo lako riješiti neke geometrijske probleme.

**Problem 2.4.2.** *Neka su $ABCD$ i $BNMK$ dva kvadrata koja se ne preklapaju i neka je $E$ polovište dužine $AN$. Ako je točka $F$ nožište okomice iz $B$ na pravac $CK$, dokažimo da su točke $E$, $F$ i $B$ kolinearne.*

*Rješenje.* Smjestimo zadane objekte u kompleksnu ravninu tako da točka $F$ bude ishodište, a $FB$ imaginarna os. Neka su $c$, $k$ i $bi$ kompleksne koordinate točaka $C$, $K$ i $B$, pri čemu su $c, k, b \in \mathbb{R}$. Rotacija za kut $\theta = \frac{\pi}{2}$ oko točke $B$ preslikava točku $C$ u $A$, pa $A$ ima kompleksnu koordinatu $a = b(1-i)+ci$. Analogno, točka $N$ je slika točke $K$ prilikom rotacije za $\theta = -\frac{\pi}{2}$

oko točke $B$, pa je njena kompleksna koordinata $n = b(1 + i) - ki$. Polovište $E$ segmenta $AN$ ima kompleksnu koordinatu:

$$e = \frac{a + n}{2} = b + \frac{c - k}{2} i,$$

pa možemo zaključiti da $E$ pripada pravcu $FB$, što smo i htjeli pokazati. □

# Poglavlje 3

# Pravac u kompleksnoj ravnini

Pravac kao osnovni geometrijski pojam ne definiramo, a intuitivno ga zamišljamo kao beskonačno dugačku napetu nit, ili zraku svjetlosti. Uz njega su usko vezani pojmovi kolinearnosti i ortogonalnosti.

## 3.1 Kolinearnost, ortogonalnost i koncikličnost

Promotrimo četiri međusobno različite točke $T_1(z_1)$, $T_2(z_2)$, $T_3(z_3)$ i $T_4(z_4)$.

**Propozicija 3.1.1.** *Točke $T_1$, $T_2$ i $T_3$ su **kolinearne** ako i samo ako:*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Dokaz.* Kolinearnost točaka $T_1$, $T_2$ i $T_3$ je ekvivalentna tvrdnji da je $\widehat{T_2T_1T_3} \in \{0, \pi\}$. Slijedi da je $\arg \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \{0, \pi\}$ ekvivalentno $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, što smo i trebali pokazati. □

**Propozicija 3.1.2.** *Pravci $T_1T_2$ i $T_3T_4$ su **ortogonalni** ako i samo ako:*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Dokaz.* Vrijedi $T_1T_2 \perp T_3T_4$ ako i samo ako je kut između pravaca $\frac{\pi}{2}$ ili $\frac{3\pi}{2}$. Tj. prema Napomeni 2.3.7., slijedi:

$$\arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

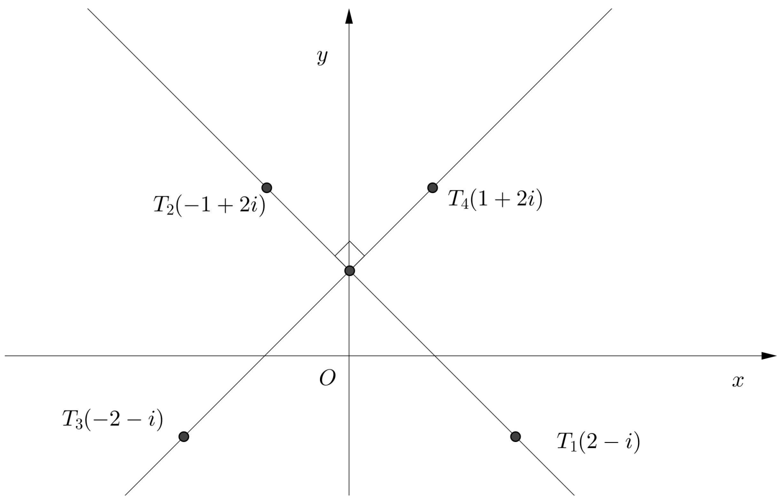
Dobivamo da je $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. □

**Napomena 3.1.3.** *Pretpostavimo da je $T_2 = T_4$. Onda je $T_1T_2 \perp T_3T_4$ ako i samo ako $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

**Primjer 3.1.4.** *Promotrimo točke $T_1(2-i)$, $T_2(-1+2i)$, $T_3(-2-i)$ i $T_4(1+2i)$. Izračunajmo vrijednost izraza:*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{2 - i - (-1 + 2i)}{-2 - i - (1 + 2i)} = i.$$

*S obzirom na to da je $i \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}$, vrijedi da je $T_1T_2 \perp T_3T_4$.*




Slika 3.1: Pravci $T_1T_2$ i $T_3T_4$

**Propozicija 3.1.5.** *Međusobno različite točke $T_1(z_1), T_2(z_2), T_3(z_3), T_4(z_4)$ su konciklične ili kolinearne ako i samo ako:*

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da su točke kolinearne. Možemo ih rasporediti na $(4-1)! = 3! = 6$ različitih načina. Uzmimo u obzir slučaj kad su točke dane u poretku $T_1, T_2, T_3, T_4$. Tada su $T_1, T_2, T_3, T_4$ konciklične ako i samo ako:

$$T_1\widehat{T_2T_3} + \widehat{T_1T_4}T_3 \in \{3\pi, \pi\},$$

što je jednako izrazu:

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \{3\pi, \pi\}.$$

Nadalje, dobivamo:

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} - \arg\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \{3\pi, \pi\},$$

odnosno, $k < 0$. Za bilo koji drugi raspored točaka, dokaz je analogan. Primjetimo da je u tri slučaja $k > 0$, a u tri slučaja $k < 0$. □

**Napomena 3.1.6.** *1) Točke $T_1, T_2, T_3, T_4$ su kolinearne ako i samo ako:*

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad i \quad \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

*2) Točke $T_1, T_2, T_3, T_4$ su konciklične ako i samo ako:*

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R}, \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \notin \mathbb{R}.$$

**Primjer 3.1.7.** *1) Geometrijske slike kompleksnih brojeva $1, i, -1, -i$ su konciklične. Zaista, imamo:*

$$k = \frac{-1-i}{1-i} : \frac{-1+i}{1+i} = -1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Očito vrijedi:*

$$\frac{-1-i}{1-i} \notin \mathbb{R} \quad i \quad \frac{-1+i}{1+i} \notin \mathbb{R}.$$

*2) Točke $T_1(2-i), T_2(3-2i), T_3(-1+2i)$ i $T_4(-2+3i)$ su kolinearne. Zaista, imamo:*

$$k = \frac{-4+4i}{-1+i} : \frac{1-i}{4-4i} = 1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad i \quad \frac{-4+4i}{-1+i} = 4 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

## 3.2 Jednadžba pravca

**Propozicija 3.2.1.** *Jednadžba pravca u kompleksnoj ravnini je:*

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \alpha z + \beta = 0,$$

*pri čemu je $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \beta \in \mathbb{R}$ i $z = x + iy \in \mathbb{C}$.*

*Dokaz.* Jednadžba pravca u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini je:

$$Ax + By + C = 0,$$

pri čemu su $A, B, C \in \mathbb{R}$, a $A^2 + B^2 \neq 0$. Za kompleksan broj $z = x + iy$ vrijedi $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ i $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Stoga:

$$A\frac{z+\overline{z}}{2} - Bi\frac{z-\overline{z}}{2} + C = 0,$$

što je ekvivalentno:

$$\overline{z}\left(\frac{A+Bi}{2}\right) + z\frac{A-Bi}{2} + C = 0.$$

Neka su $\alpha = \frac{A-Bi}{2} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ i $\beta = C \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \alpha z + \beta = 0,$$

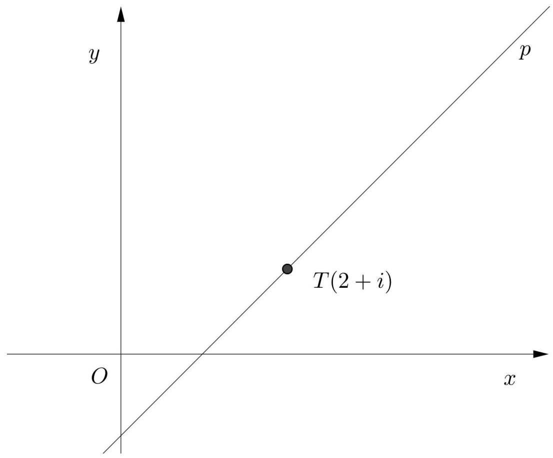
što smo i trebali pokazati. □

Ako $\alpha = \overline{\alpha}$, tada $B = 0$ i imamo vertikalni pravac. Ako je $\alpha \neq \overline{\alpha}$, tada koeficijent smjera pravca definiramo:

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\frac{\alpha - \overline{\alpha}}{i}} = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}} i.$$

**Primjer 3.2.2.** *Provjerimo pripada li točka s koordinatom* $2 + i$ *pravcu* $p$ *s jednadžbom* $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 = 0$*:*

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(\overline{2 + i}) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + i) + 1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 - i) - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \\ &= 0\end{aligned}$$




Slika 3.2: Pravac $p$ i točka $T(2 + i)$

**Propozicija 3.2.3.** *Neka su zadana dva pravca* $d_1$ *i* $d_2$ *jednadžbama:*

$$\overline{\alpha}_1 \cdot \overline{z} + \alpha_1 \cdot z + \beta_1 = 0$$

$$\overline{\alpha}_2 \cdot \overline{z} + \alpha_2 \cdot z + \beta_2 = 0.$$

*Pravci* $d_1$ *i* $d_2$ *su:*
*1) paralelni ako i samo ako* $\frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_2}$,
*2) okomiti ako i samo ako* $\frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_2} + \frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$,
*3) podudarni ako i samo ako* $\frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_2}$.

*Dokaz.* 1) Imamo $d_1 \parallel d_2$ ako i samo ako $m_1 = m_2$. Slijedi:

$$\frac{\alpha_1 + \overline{\alpha}_1}{\alpha_1 - \overline{\alpha}_1} i = \frac{\alpha_2 + \overline{\alpha}_2}{\alpha_2 - \overline{\alpha}_2} i,$$

pa je:

$$\alpha_2 \overline{\alpha}_1 = \alpha_1 \overline{\alpha}_2.$$

Dobivamo da je:

$$\frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_2}.$$

2) Imamo $d_1 \perp d_2$ ako i samo ako $m_1 m_2 = -1$. Slijedi:

$$\alpha_2 \overline{\alpha}_1 + \alpha_2 \overline{\alpha}_2 = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha} + \frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0.$$

3) Pravci $d_1$ i $d_2$ se podudaraju ako i samo ako $m_1 \neq m_2$. Iz ovog uvjeta slijedi:

$$\frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_2}.$$

Koeficijent smjera pravca odgovara nagibu pravca.

□

Omjer $m_d = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}$ zovemo **kompleksni koeficijent smjera pravca** $d$:

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0.$$

## 3.3 Jednadžba pravca određenog s dvije točke

**Propozicija 3.3.1.** *Jednadžba pravca određenog točkama $T_1(z_1)$ i $T_2(z_2)$ je:*

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Dokaz.* Jednadžba praca određenog točkama $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini je:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Koristimo li kompleksne brojeve, dobivamo:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{z_1+\overline{z_1}}{2} & \frac{z_1-\overline{z_1}}{2i} & 1 \\ \frac{z_2+\overline{z_2}}{2} & \frac{z_2-\overline{z_2}}{2i} & 1 \\ \frac{z_1+\overline{z}}{2} & \frac{z-\overline{z}}{2i} & 1 \end{array}\right| = 0,$$

ako i samo ako:

$$\frac{1}{4i}\left|\begin{array}{ccc} z_1+\overline{z_1} & z_1-\overline{z_1} & 1 \\ z_2+\overline{z_2} & z_2-\overline{z_2} & 1 \\ z+\overline{z} & z-\overline{z} & 1 \end{array}\right| = 0.$$

Stoga slijedi:

$$\left|\begin{array}{ccc} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{array}\right| = 0,$$

što smo i htjeli pokazati.

$\square$

**Napomena 3.3.2.** *1) Točke $T_1(z_1), T_2(z_2), T_3(z_3)$ su kolinearne ako i samo ako:*

$$\left|\begin{array}{ccc} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{array}\right| = 0.$$

*2) Kompleksni koeficijent smjera pravca određen točkama s kooridnatam $z_1$ i $z_2$ je:*

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}.$$

*Zaista, jednadžba je:*

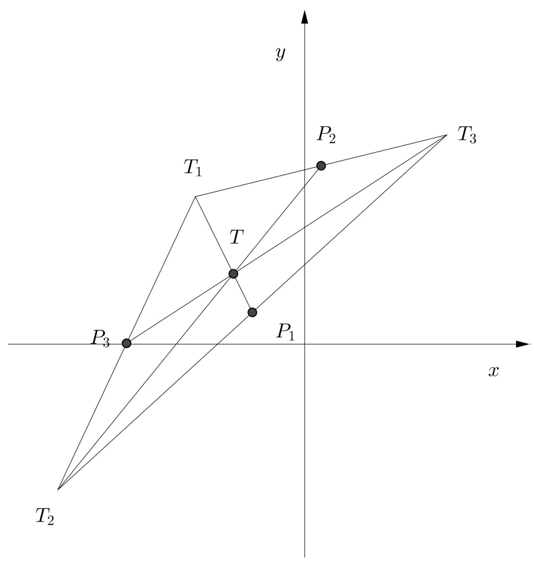
$$\left|\begin{array}{ccc} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2 z + z\overline{z_1} - z\overline{z_2} - z_1\overline{z} - z_2\overline{z_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}(z_2 - z_1) - z(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} = 0$$

*Koristeći definiciju kompleksnog koeficijenta smjera pravca, dobivamo:*

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$$

**Zadatak 3.3.3.** *Dokažite da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki (težištu) te da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta.*




Slika 3.3: Elementi iz Zadatka 3.3.3.

*Dokaz.* Neka su $T_1, T_2, T_3$ vrhovi trokuta s pripadnim kompleksnim koordinatama $z_1, z_2, z_3$, redom. Tada su polovišta stranica $T_2T_3$, $T_3T_1$ i $T_1T_2$ dana koordinatama:

$$P_1\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{z_1+z_3}{2}\right), \quad P_3\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Odredimo jednadžbe težišnica $T_1P_1$ i $T_2P_2$:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ \frac{z_2+z_3}{2} & \frac{\overline{z_2+z_3}}{2} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\overline{z_1} - \frac{\overline{z_2+z_3}}{2}\right)z - \left(z_1 - \frac{z_2+z_3}{2}\right)\overline{z} + \left(z_1\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)} - \overline{z_1}\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ \frac{z_1+z_3}{2} & \frac{\overline{z_1+z_3}}{2} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\overline{z_2} - \frac{\overline{z_1+z_3}}{2}\right)z - \left(z_2 - \frac{z_1+z_3}{2}\right)\overline{z} + \left(z_2\overline{\left(\frac{z_1+z_3}{2}\right)} - \overline{z_2}\left(\frac{z_1+z_3}{2}\right)\right) = 0$$

Rješavanjem sustava jednadžbi, dobivamo koordinatu težišta $T$ trokuta $\triangle T_1T_2T_3$:

$$z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

Prema Propoziciji 3.1.1, točke $T_3, T$ i $P_3$ su kolinearne zato što vrijedi:

$$\frac{\frac{z_1+z_2}{2} - z_3}{\frac{z_1+z_2+z_3}{3} - z_3} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Pokažimo da težište $T$ dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, odnosno da vrijedi $2|TP_1| = 2|T_1T|$:

$$2|TP_1| = 2\left|\frac{z_1+z_2+z_3}{3} - \frac{z_2+z_3}{2}\right| = \left|z_1 - \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right| = |T_1T|.$$

□

## 3.4 Jednadžba pravca određenog točkom i smjerom

**Propozicija 3.4.1.** *Neka je $d : \overline{\alpha z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ zadani pravac i $T_0(z_0)$ zadana točka. Jednadžba pravca paralelnog pravcu $d$ koji prolazi točkom $T_0$ je:*

$$z - z_0 = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right).$$

*Dokaz.* Koristimo li Kartezijeve koordinate, pravac paralelan pravcu $d$ koji prolazi točkom $T_0(x_0, y_0)$ ima jednadžbu:

$$y - y_0 = i\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}}(x - x_0).$$

Koristimo li kompleksne brojeve, jednadžba poprima oblik:

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} - \frac{z_0 - \overline{z_0}}{2i} = i\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}}\left(\frac{z + \overline{z}}{2} - \frac{z_0 + \overline{z_0}}{2}\right),$$

što je ekvivalentno:

$$(\alpha - \overline{\alpha})(z - z_0 - \overline{z} + \overline{z_0}) = (\alpha + \overline{\alpha})(z + \overline{z} - z_0 - \overline{z_0}),$$

odnosno:

$$\alpha(z - z_0) = -\overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z_0}).$$

Nadalje dobivamo:

$$z - z_0 = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right).$$

□

**Propozicija 3.4.2.** *Neka je $d : \overline{\alpha z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ zadani pravac i $T_0(z_0)$ zadana točka. Pravac koji prolazi točkom $T_0$ i okomit je na $d$ ima jednadžbu:*

$$z - z_0 = \frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right).$$

*Dokaz.* Koristimo li Kartezijeve koordinate, pravac koji prolazi točkom $T_0$ i okomit je na pravac $d$ ima jednadžbu:

$$y - y_0 = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{\alpha + \overline{\alpha}} (x - x_0) .$$

Nadalje, dobivamo:

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} - \frac{z_0 - \overline{z_0}}{2i} = i \cdot \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{\alpha + \overline{\alpha}} \left( \frac{z + \overline{z}}{2} - \frac{z_0 + \overline{z_0}}{2} \right).$$

Slijedi:

$$(\alpha + \overline{\alpha}) (z - z_0 - \overline{z} + \overline{z_0}) = -(\alpha - \overline{\alpha}) (z - z_0 + \overline{z} - \overline{z_0}) ,$$

odnosno:

$$(z - z_0) (\alpha + \overline{\alpha} + \alpha - \overline{\alpha}) = (\overline{z} - \overline{z_0}) (-\alpha + \overline{\alpha} + \alpha + \overline{\alpha}).$$

Nadalje, dobivamo:

$$\alpha (z - z_0) = \overline{\alpha} (\overline{z} - \overline{z_0}) ,$$

te konačno:

$$z - z_0 = \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} (\overline{z} - \overline{z_0}) .$$

□

## 3.5 Nožište okomice

**Propozicija 3.5.1.** *Neka je $T_0\,(z_0)$ zadana točka i neka je $d : \overline{\alpha z} + \alpha z + \beta = 0$ zadani pravac. Nožište okomice iz $T_0$ na pravac $d$ ima koordinatu:*

$$z = \frac{\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0} - \beta}{2\alpha}.$$

*Dokaz.* Točka $z$ je rješenje sustava jednadžbi zadanog pravca i njemu okomitog pravca kroz $T_0$:

$$\begin{cases} \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0 \\ \alpha (z - z_0) = \overline{\alpha} (\overline{z} - \overline{z_0}) \end{cases}$$

Prva jednadžba daje:

$$\overline{z} = \frac{-\alpha z - \beta}{\overline{\alpha}}$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu, dobivamo:

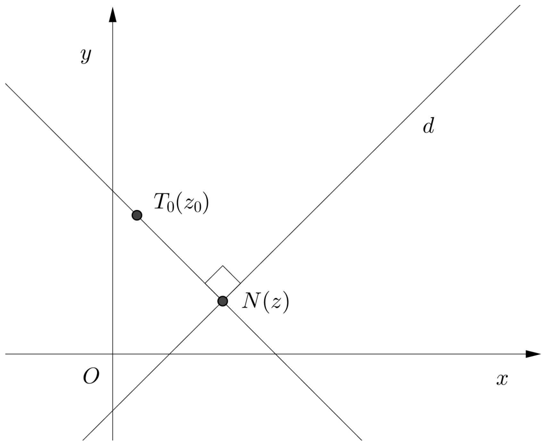
$$\alpha z - \alpha z_0 = -\alpha z - \beta - \overline{\alpha} \cdot \overline{z_0}$$

a iz toga slijedi:

$$z = \frac{\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0} - \beta}{2\alpha}$$

što je i trebalo dokazati.

□




Slika 3.4: Pravac $d$, okomica na $d$ kroz točku $T_0$ i nožište okomice $N$

**Zadatak 3.5.2.** *Dokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki.*

*Dokaz.* Neka su $A, B, C$ vrhovi trokuta s pripadnim kompleksnim koordinatama $a, b, c$, redom. Jednadžbe pravaca $BC$, $AC$ i $AB$ kojima pripadaju stranice trokuta su:

$$z(\overline{b} - \overline{c}) - (b - c)\overline{z} + b\overline{c} - \overline{b}c = 0,$$
$$z(\overline{a} - \overline{c}) - (a - c)\overline{z} + a\overline{c} - \overline{a}c = 0,$$
$$z(\overline{a} - \overline{b}) - (a - b)\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b = 0,$$

pa su visine na stranice $BC$ i $AB$, prema Propoziciji 3.4.2., dane jednadžbama:

$$z - a = \frac{-(b - c)}{\overline{b - c}}(\overline{z} - \overline{a})$$
$$z - b = \frac{-(a - c)}{\overline{a - c}}(\overline{z} - \overline{b}).$$

Rješavanjem sustava dobivamo koordinatu točke $H$ koja je sjecište visina trokuta:

$$z_H = \frac{(\bar{a} - \bar{b})(a - c)(b - c) + a(a - c)(\bar{b} - \bar{c}) - b(\bar{a} - \bar{c})(b - c)}{(\bar{b} - \bar{c})(a - c) - (\bar{a} - \bar{c})(b - c)}$$

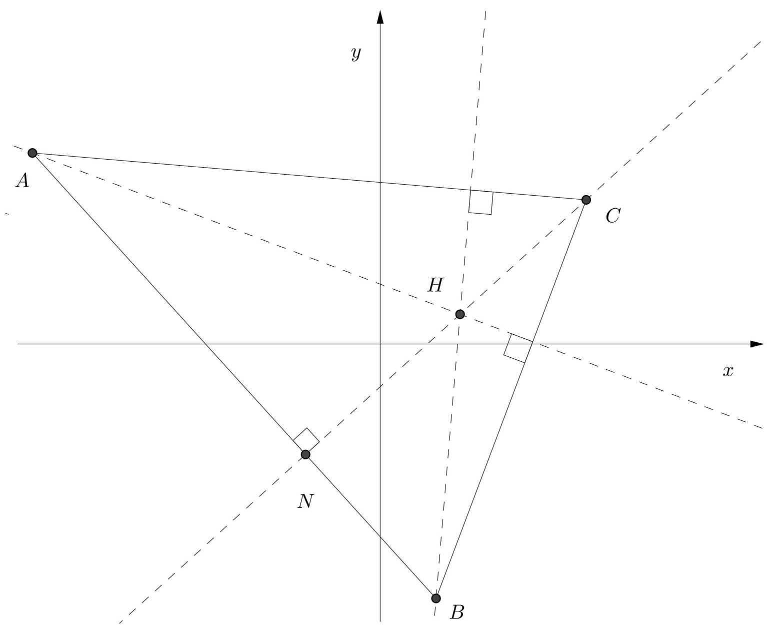
Odredimo koordinatu nožišta $N$ na stranicu $AB$:

$$z_N = \frac{(\overline{a} - \overline{b})c - (a - b)\overline{c} + a\overline{b} - \overline{a}b}{2(\overline{a} - \overline{b})}$$

Provjerimo jesu li točke $C, H$ i $N$ kolinearne:

$$\frac{z_H - c}{z_N - c} = \frac{\frac{(\bar{a}-\bar{b})(a-c)(b-c)+a(a-c)(\bar{b}-\bar{c})-b(\bar{a}-\bar{c})(b-c)}{(\bar{b}-\bar{c})(a-c)-(\bar{a}-\bar{c})(b-c)} - c}{\frac{(\overline{a}-\overline{b})c-(a-b)\overline{c}+a\overline{b}-\overline{a}b}{2(\overline{a}-\overline{b})} - c}.$$

Algebarskim operacijama i svojstvima konjugacije kompleksnih brojeva dobivamo $\frac{z_H - c}{z_N - c} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, stoga možemo zaključiti da su $C, H$ i $N$ kolinearne točke. Dakle, visine trokuta sijeku se u jednoj točki - ortocentru trokuta. $\square$




Slika 3.5: Elementi iz Zadatka 3.5.2.

## 3.6 Udaljenost točke od pravca

**Propozicija 3.6.1.** *Udaljenost točke $T_0(z_0)$ od pravca $d : \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0, \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, jednaka je:*

$$D = \frac{|\alpha z_0 + \overline{\alpha} \cdot \overline{z_0} + \beta|}{2\sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha}}}$$

*Dokaz.* Udaljenost točke $T_0$ od pravca svodi se na traženje udaljenosti točke $T_0$ od nožišta $N$ okomice kroz $T_0$ na pravac $d$:

$$\begin{aligned} D &= \left| \frac{\alpha z_0 - \overline{\alpha} \cdot \overline{z_0} - \beta}{2\alpha} - z_0 \right| \\ &= \left| \frac{-\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0} - \beta}{2\alpha} \right| \\ &= \frac{|\alpha \cdot z_0 + \overline{\alpha z_0} + \beta|}{2|\alpha|} \\ &= \frac{|\alpha z_0 + \overline{\alpha z_0} + \beta|}{2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}} \end{aligned}$$

□

**Primjer 3.6.2.** *Provjerimo pripada li $T_0$ s kompleksnom koordinatom $2 + i$ pravcu čija je jednadžba $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 = 0$ tako da pokažemo da je udaljenost točke $T_0$ od pravca jednaka 0:*

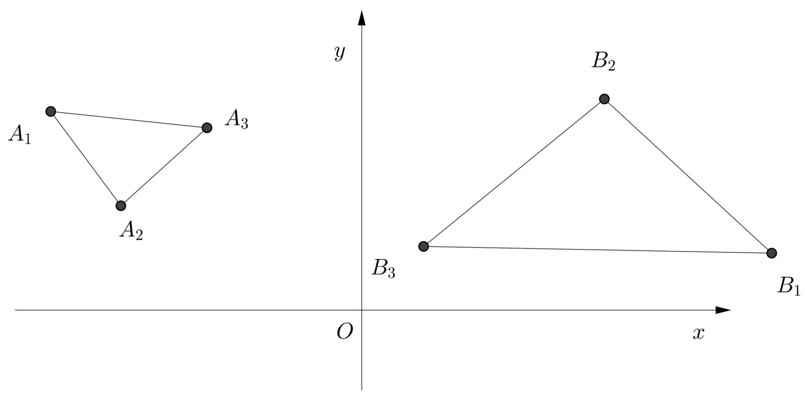
$$D = \frac{\left|\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2+i) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2-i) + 1\right|}{2\sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}} = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) + 1\right|}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0$$

# Poglavlje 4

# Trokut

## 4.1 Slični trokuti

Promotrimo šest točaka $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$ u kompleksnoj ravnini. Kažemo da su trokuti $\triangle A_1A_2A_3$ i $\triangle B_1B_2B_3$ slični ako kut pri vrhu $A_k$ ima istu mjeru kao kut pri vrhu $B_k, k \in \{1, 2, 3\}$.




Slika 4.1: Slični trokuti $\triangle A_1A_2A_3$ i $\triangle B_1B_2B_3$

**Propozicija 4.1.1.** *Trokuti $\triangle A_1A_2A_3$ i $\triangle B_1B_2B_3$ su slični s istom orijentacijom ako i samo ako:*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

*Dokaz.* Imamo $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ ako i samo ako $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3}$ i $\widehat{A_3A_1A_2} \equiv \widehat{B_3B_1B_2}$. To je ekvivalentno $\frac{|a_2-a_1|}{|a_3-a_1|} = \frac{|b_2-b_1|}{|b_3-b_1|}$ i $\arg\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \arg\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$ . Konačno, dobivamo:

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}.$$

□

**Napomena 4.1.2.** *1) Uvjet iz prethodne propozicije* $\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$ *je ekvivalentan:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*2) Trokuti* $\triangle A_1A_2A_3$ *i* $\triangle B_1B_2B_3$*, pri čemu su vrhovi dani sa svojim komleksnim koordinatama* $A_1(0), A_2(1), A_3(2i), B_1(0), B_2(-i), B_3(-2)$ *su slični, no suprotne orijentacije. U ovom slučaju prethodni uvjet nije zadovoljen:*

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{1-0}{2i-0} = \frac{1}{2i} \neq \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1} = \frac{-i-0}{-2-0} = \frac{i}{2}.$$

**Propozicija 4.1.3.** *Trokuti* $\triangle A_1A_2A_3$ *i* $\triangle B_1B_2B_3$ *su slični, no suprotne orijentacije, ako i samo ako:*

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{\overline{b}_2-\overline{b}_1}{\overline{b}_3-\overline{b}_1}.$$

*Dokaz.* Zrcaljenje preko $x$-osi preslikava točke $B_1, B_2, B_3$ u točke $T_1\left(\overline{b}_1\right), T_2\left(\overline{b}_2\right), T_3\left(\overline{b}_3\right)$. Trokuti $\triangle B_1B_2B_3$ i $\triangle T_1T_2T_3$ su slični i imaju suprotnu orijentaciju, stoga su trokuti $\triangle A_1A_2A_3$ i $\triangle T_1T_2T_3$ slični s istom orijentacijom. Konačni zaključak slijedi iz prethodne propozicije.

□

Slijedi nekoliko zadataka u kojima je do rješenja puno lakše doći uvođenjem kompleksnih koordinata.

**Problem 4.1.4.** *Nad stranicama* $AB, BC, CA$ *trokuta* $\triangle ABC$ *nacrtani su slični trokuti* $\triangle ADB$, $\triangle BEC, \triangle CFA$*, iste orijentacije. Dokažite da trokuti* $\triangle ABC$ *i* $\triangle DEF$ *imaju isto težište.*

*Rješenje.* Označimo malim slovom koordinatu točke označenu velikim slovom. Trokuti $\triangle ADB, \triangle BEC, \triangle CFA$ su slični trokuti iste orijentacije, stoga slijedi:

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = z,$$

iz čega slijedi:

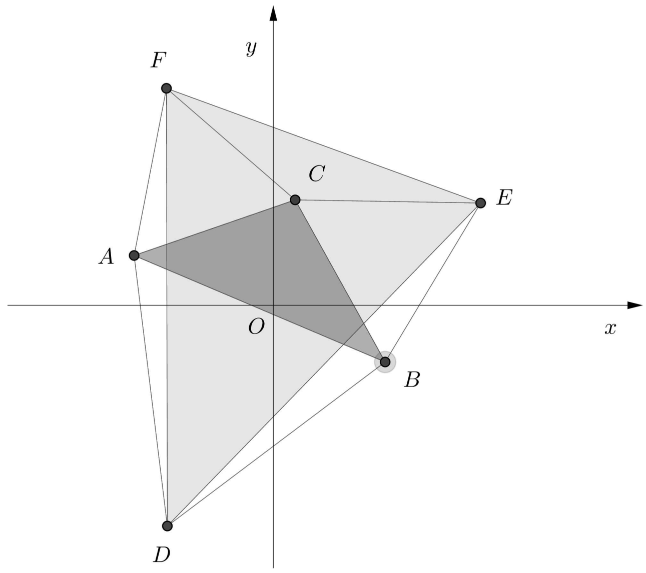
$$d = a + (b-a)z, \quad e = b + (c-b)z, \quad f = c + (a-c)z.$$

Dobivamo:

$$\frac{d+c+f}{3} = \frac{a+b+c}{3},$$

pa trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ imaju isto težište.

□




Slika 4.2: Zadani elementi iz Problema 4.1.4

**Problem 4.1.5.** *Neka su $M, N, P$ polovišta stranica $AB, BC, CA$ trokuta $ABC$. Na simetrali segmenata $[AB], [BC], [CA]$ istaknute su točke $C', A', B'$ unutar trokuta tako da vrijedi:*

$$\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{CA}.$$

*Dokažite da trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imaju isto težište.*

*Rješenje.* Iz jednakosti:

$$\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{CA}$$

slijedi da je $\tan\left(\widehat{C'AB}\right) = \tan\left(\widehat{A'BC}\right) = \tan\left(\widehat{B'CA}\right)$. Stoga su trokuti $\triangle AC'B, \triangle BA'C, \triangle CB'A$ slični te analogno kao u prethodnom problemu dolazimo do rješenja.

□

**Problem 4.1.6** (30. Međunarodna matematička olimpijada)**.** *Zadani su trokut $\triangle ABO$, jednakostraničan trokut sa središtem $S$, i trokut $\triangle A'B'O$, jednakostraničan trokut iste orijentacije i vrijedi $S \neq A', S \neq B'$. Promotrite točke $M$ i $N$, polovišta segmenata $A'B$ i $AB'$. Dokažite da su trokuti $\triangle SB'M$ i $\triangle SA'N$ slični.*

*Rješenje.* Neka je $R$ polumjer trokutu $\triangle ABO$ opisane kružnice i neka je:

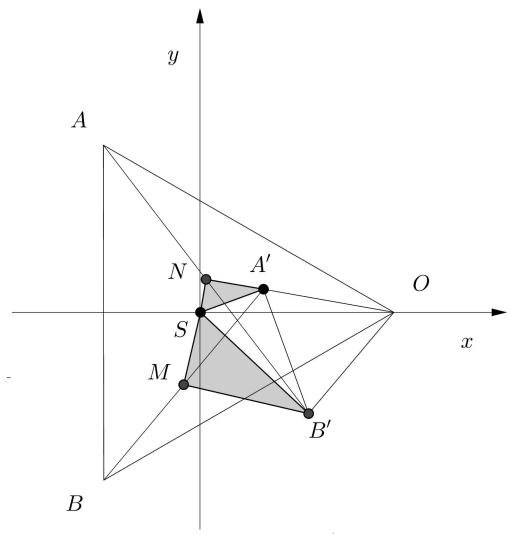
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Promotrimo kompleksnu ravninu s ishodištem u točki $S$ takvu da točka $O$ pripada pozitivnom dijelu realne osi. Tada su koordinate točaka $O, A, B$ redom $R, R\varepsilon, R\varepsilon^2$.

Neka su $R + z$ koordinate točke $B'$, pa je $R - z\varepsilon$ koordinate točke $A'$. Slijedi da polovišta $M, N$ imaju koordinate:

$$z_M = \frac{z_B + z_{A'}}{2} = \frac{R\varepsilon^2 + R - z\varepsilon}{2} = \frac{R\left(\varepsilon^2 + 1\right) - z\varepsilon}{2} = \frac{-R\varepsilon - z\varepsilon}{2} = \frac{-\varepsilon(R + z)}{2},$$

$$z_N = \frac{z_A + z_{B'}}{2} = \frac{R\varepsilon + R + z}{2} = \frac{R(\varepsilon + 1) + z}{2} = \frac{-R\varepsilon^2 + z}{2} = \frac{z - \frac{R}{\varepsilon}}{2} = \frac{R - z\varepsilon}{-2\varepsilon}.$$




Slika 4.3: Zadani elementi iz Problema 4.1.6

□

## 4.2 Jednakostranični trokuti

**Propozicija 4.2.1.** *Neka su $z_1, z_2, z_3$ koordinate vrhova trokuta $\triangle A_1A_2A_3$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*a)* $\triangle A_1A_2A_3$ *je jednakostraničan trokut,*
*b)* $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$,
*c)* $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$,
*d)* $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2} = \frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$,
*e)* $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} = 0$, *pri čemu je* $z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$,
*f)* $\left(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3\right)\left(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3\right) = 0$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$,
*g)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$

*Dokaz.* Trokut $\triangle A_1A_2A_3$ je jednakostraničan ako i samo ako je trokut $\triangle A_1A_2A_3$ sličan trokutu $\triangle A_2A_3A_1$ te ima istu orijentaciju, tj. ako vrijedi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

pa su tvrdnje *a*) i *g*) ekvivalentne.Računanjem determinante, dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} &= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - \left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right) \\ &= -\left(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3\right)\left(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3\right) \end{aligned}$$

stoga *g*) ⇔ *c*) ⇔ *f*) . Algebarskim operacijama pokaže se da *d*) ⇔ *c*). S obzirom da to da *a*) ⇔ *b*) očito vrijedi, trebamo još pokazati *a*) ⇔ *e*).

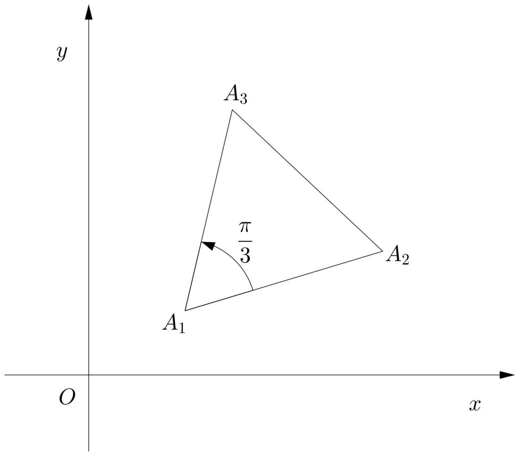
□

**Propozicija 4.2.2.** *Neka su $z_1, z_2, z_3$ koordinate vrhova $A_1, A_2, A_3$ pozitivno orijentiranog trokuta. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*a)* $\triangle A_1A_2A_3$ *je jednakostraničan trokut,*
*b)* $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$,
*c)* $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$,
*d)* $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$,

*Dokaz.* Trokut $\triangle A_1A_2A_3$ je jednakostraničan i pozitivno orijentiran trokut ako i samo ako je vrh $A_3$ dobiven rotacijom $A_2$ oko vrha $A_1$ za kut $\frac{\pi}{3}$. Dakle:

$$z_3 = z_1 + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2 - z_1),$$

pa slijedi $a) \Leftrightarrow b)$.




Slika 4.4: Jednakostraničan trokut $\triangle A_1A_2A_3$

Rotacija oko točke $A_1$ za kut $\frac{5\pi}{3}$ preslikava točku $A_3$ u $A_2$. Slično, pokazujemo $a) \Leftrightarrow c)$. Kako bismo pokazali $b) \Leftrightarrow d)$, primjetimo da je $b)$ ekvivalentno:

$$z_3 = z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_2 - z_1) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2.$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}
z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_3 \\
&= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2\right] \\
&= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 - z_1 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Time smo pokazali $b) \Leftrightarrow d)$.

$\square$

**Propozicija 4.2.3.** *Neka su* $z_1, z_2, z_3$ *koordinate vrhova* $A_1, A_2, A_3$ *negativno orijentiranog trokuta. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*a)* $\triangle A_1A_2A_3$ *je jednakostraničan trokut,*
*b)* $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$,
*c)* $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$,
*d)* $z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3 = 0$, *pri čemu je* $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

*Dokaz.* Jednakostraničan trokut $\triangle A_1A_2A_3$ je negativno orijentiran ako i samo ako je $\triangle A_1A_3A_2$ pozitivno orijentiran jednakostraničan trokut. Ostali zaključci proizlaze is prethodno dokazane propozicije.

□

**Propozicija 4.2.4.** *Neka su* $z_1, z_2, z_3$ *koordinate vrhova jednakostraničnog trokuta* $\triangle A_1A_2A_3$. *Promotrimo sljedeće tvrdnje.*
*1)* $\triangle A_1A_2A_3$ *je jednakostraničan trokut,*
*2)* $z_1 \cdot \overline{z}_2 = z_2 \cdot \overline{z}_3 = z_3 \cdot \overline{z}_1$,
*3)* $z_1^2 = z_2 \cdot z_3$ *i* $z_2^2 = z_1 \cdot z_3$,
*Vrijedi* 2) $\Rightarrow$ 1), 3) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Leftrightarrow$ 3).

*Dokaz.* Pokažimo 2) $\Rightarrow$ 1). Izračunajmo module kompleksnih brojeva u relaciji:

$$|z_1| \cdot |\overline{z}_2| = |z_2| \cdot |\overline{z}_3| = |z_3| \cdot |\overline{z}_1|,$$

što je ekvivalentno:

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_2| \cdot |z_3| = |z_3| \cdot |z_1|.$$

Iz toga slijedi:

$$r = |z_1| = |z_2| = |z_3|,$$

te

$$\overline{z}_1 = \frac{r^2}{z_1}, \quad \overline{z}_2 = \frac{r^2}{z_2}, \quad \overline{z}_3 = \frac{r^2}{z_3}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti u zadanu relaciju, dobivamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_3}{z_1},$$

što je ekvivalentno:

$$z_1^2 = z_2 z_3, \quad z_2^2 = z_3 z_1, \quad z_3^2 = z_1 z_2.$$

Zbrajanjem jednakosti dobivamo:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

Stoga zaključujemo da je trokut $\triangle A_1A_2A_3$ jednakostraničan.

Primjetimo da smo također dokazali 2) $\Rightarrow$ 3). S obzirom da obrnutim postupkom možemo doći do tvrdnje 2), očito vrijedi ekvivalencija 2) $\Leftrightarrow$ 3). Također očito vrijedi 3) $\Rightarrow$ 1).

□

**Problem 4.2.5.** *Neka su $z_1, z_2, z_3$ nenul kompleksne koordinate vrhova trokuta $\triangle A_1A_2A_3$. Ako vrijedi $z_1^2 = z_2z_3$ i $z_2^2 = z_1z_3$, pokažite da je trokut$\triangle A_1A_2A_3$ jednakostraničan.*

*Rješenje.* Množenjem jednakosti $z_1^2 = z_2z_3$ i $z_2^2 = z_1z_3$ dobivamo:

$$z_1^2z_2^2 = z_1z_2z_3^2.$$

Dijeljenjem jednakosti s $z_1z_2$ dobivamo:

$$z_1z_2 = z_3^2.$$

Stoga slijedi:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1,$$

pa je, prema Propoziciji 4.2.1., trokut $\triangle A_1A_2A_3$ jednakostraničan.

□

**Problem 4.2.6.** *Neka su $z_1, z_2, z_3$ koordinate vrkova trokuta $\triangle A_1A_2A_3$. Ako vrijedi $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, dokažite da je trokut $\triangle A_1A_2A_3$ jednakostraničan.*

*Rješenje.* Prisjetimo se identiteta koji vrijedi za sve kompleksne brojeve $z_1$ i $z_2$:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Iz $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ dobivamo $z_1 + z_2 = -z_3$, pa je $|z_1 + z_2| = |z_3|$. Koristeći relaciju $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ i prethodno spomenuti identitet, dobivamo: $|z_1 - z_2|^2 = 3\,|z_1|^2$. Analogno, dobivamo relacije $|z_2 - z_3|^2 = 3\,|z_1|^2$ i $|z_3 - z_1|^2 = 3\,|z_1|^2$. Stoga slijedi $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, odnosno možemo zaključiti da je trokut $\triangle A_1A_2A_3$ jednakostraničan.

□

# Poglavlje 5

# Kružnica

Kružnica je geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od jedne točke koju nazivamo središte. U Poglavlju 1, spomenuli smo da je skup geometrijskih slika svih kompleksnih brojeva kojima je modul jednak pozitivnom realnom broju $r$ kružnica promjera $r$ oko ishodišta. U ovom poglavlju ćemo izvesti jednadžbu kružnice u kompleksnim koordinatama.

## 5.1 Jednadžba kružnice

**Propozicija 5.1.1.** *Jednadžba kružnice u kompleksnoj ravnini je:*

$$z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot z + \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \beta = 0,$$

*pri čemu je* $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$.

*Dokaz.* Jednadžba kružnice u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini je:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0; m, n, p \in \mathbb{R}, p < \frac{m^2 + n^2}{4}.$$

Uzmimo $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ i $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Tada dobivamo:

$$|z|^2 + m\frac{z + \overline{z}}{2} + n\frac{z - \overline{z}}{2i} + p = 0,$$

ili

$$z \cdot \overline{z} + z\frac{m - ni}{2} + \overline{z}\frac{m + ni}{2} + p = 0.$$

Uvrštavanjem $\alpha = \frac{m-ni}{2} \in \mathbb{C}$ i $\beta = p \in \mathbb{R}$ u gornju jednadžbu, tvrdnja je dokazana.

□

Označimo radijus kružnice s:

$$r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha} - \beta}$$

Tada jednadžba ima oblik:

$$(\overline{z} + \alpha)(z + \overline{\alpha}) = r^2.$$

Uzmimo:

$$\gamma = -\overline{\alpha} = -\frac{m}{2} - \frac{n}{2}i.$$

Tada je jednadžba kružnice sa središtem u $\gamma$ i radijusom $r$:

$$(\overline{z} - \overline{\gamma})(z - \gamma) = r^2.$$

**Problem 5.1.2.** *Neka su $z_1, z_2, z_3$ koordinate vrhova trokuta $\triangle A_1A_2A_3$. Koordinata $z_O$ središta trokutu $\triangle A_1A_2A_3$ opisane kružnice je:*

$$z_O = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ |z_1|^2 & |z_2|^2 & |z_3|^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}}.$$

*Rješenje.* Jednažbu pravca koji prolazi kroz točku $T\,(z_0)$ i koji je okomit na pravac $A_1A_2$ možemo zapisati kao:

$$z\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) + \overline{z}\left(z_1 - z_2\right) = z_0\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) + \overline{z_0}\left(z_1 - z_2\right)$$

Primjenom formula za polovišta stranica $A_2A_3, A_1A_3$ i pomoću jednadžbi pravaca $A_2A_3, A_1A_3$, dobivamo:

$$z\left(\overline{z_2} - \overline{z_3}\right) + \overline{z}\left(z_2 - z_3\right) = |z_2|^2 - |z_3|^2$$
$$z\left(\overline{z_3} - \overline{z_1}\right) + \overline{z}\left(z_3 - z_1\right) = |z_3|^2 - |z_1|^2$$

Eliminacijom $\overline{z}$ iz jednadžbi, slijedi:

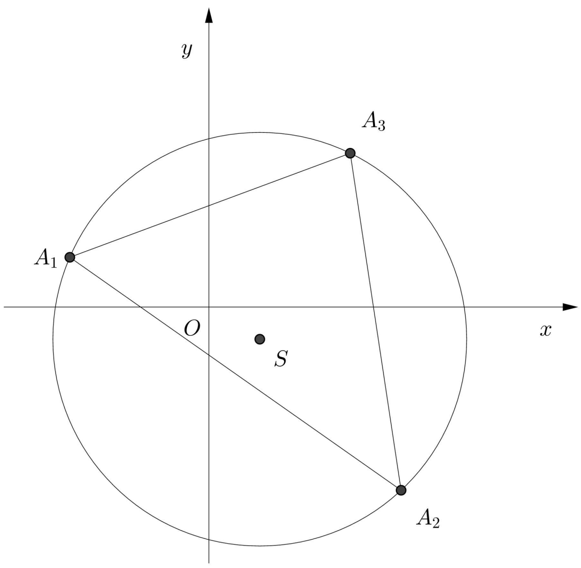
$$z\left[\left(\overline{z_2} - \overline{z_3}\right) + \left(\overline{z_3} - \overline{z_1}\right)\left(z_2 - z_3\right)\right] = \left(z_1 - z_3\right)\left(|z_2|^2 - |z_3|^2\right) + \left(z_2 - z_3\right)\left(|z_3|^2 - |z_1|^2\right).$$

Stoga vrijedi:

$$z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ |z_1|^2 & |z_2|^2 & |z_3|^2 \end{vmatrix}$$

što je i trebalo pokazati.

□




Slika 5.1: Trokut $\triangle A_1A_2A_3$ i njemu opisana kružnica iz Problema 5.1.2.

# Bibliografija


[1] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.

[2] Lj. Arambašić, *Kompleksna analiza*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kompa/files/predavanja/1uvodLjA.pdf` (srpanj 2020.)

[3] F.M. Brückler, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2010.

[4] B. Dakić, N.Elezović, *Matematika 2, 1.dio: udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije* , Element, 2014.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

# Sažetak

U ovom radu dostupan je kratki pregled analitičke geometrije u kompleksnoj ravinini i tvrdnji vezanih uz osnovne elemente geometrije, poput segmenata, pravaca, trokuta i kružnica. Dobivene rezultate najčešće koristimo pri dokazima tvrdnji koje na prvi pogled imaju više povezanosti s elementarnom (euklidskom) geometrijom, no smještanje zadanih objekata u kompleksnu ravninu znatno olakšava dokaz.

# Summary

In this thesis, a brief summary of analytic geometry in complex geometry is provided, along with statements regarding basic figures of geometry, such as segments, lines, triangles and circles. Most often, we use the obtained results in proving statements that we would usually relate to elementary (euclidean) geometry, but placing the given objects in complex plane makes the proof itself a whole lot easier.

# Životopis

Rođena sam 10.3.1994. godine u Zagrebu. Godine 2008. završila sam osnovnu školu Granešina. Iste godine upisala sam zagrebačku II. gimnaziju. Tokom osnovnog i srednjeg školovanja razvijala sam razne interese, no najveći je bio prema matematici i poučavanju, stoga sam 2012. godine upisala sam Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Potom sam upisala Diplomski studij matematike, nastavnički smjer. Na drugoj godini diplomskog studija, metodičku praksu sam odrađivala u osnovnoj školi Dobriše Cesarića pod mentorstvom profesorice M. Vuković, te u XV. gimnaziji pod mentorstvom S. Antoliš. Tijekom studija, u ljeto 2018., zapošljavam se u tvrtki Photomath gdje i danas radim na razvoju aplikacije i kreiranju matematičkog sadržaja za mobilnu aplikaciju.