Dvorazinska optimizacija

Miško, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Miško

DVORAZINSKA OPTIMIZACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na stručnoj pomoći i ustupljenom vremenu pri pisanju ovog rada.
Zahvaljujem obitelji, Viktoru i prijateljima na podršci tijekom svih godina studiranja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Linearna dvorazinska optimizacija **3**
1.1 Uvod u dvorazinsku optimizaciju 3
1.2 Model linearne dvorazinske optimizacije 4
1.3 Geometrijska interpretacija linearne dvorazinske optimizacije 6
1.4 Egzistencija optimalnih rješenja 8
1.5 Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti 12
1.6 Metode za numeričko rješenje 16

2 Dvorazinska optimizacija **23**
2.1 Uvjeti optimalnosti 23
2.2 Algoritmi rješenja 27

3 Primjene dvorazinske optimizacije **33**
3.1 Stackelbergove igre 33
3.2 Optimalne kemijske ravnoteže 35
3.3 Ekonomija okoliša 36
3.4 Optimalne prometne cestarine 37
3.5 Tržište električne energije s prijenosnim gubicima 39

Bibliografija **40**

Uvod

U ovom radu upoznat ćemo se s problemom dvorazinske optimizacije, posebnim oblikom optimizacijskih problema. Prva formulacija problema dvorazinske optimizacije datira iz 1934. godine kada ih je formulirao Stackelberg u monografiji o tržišnoj ekonomiji [7] dok su prvi matematički model razvili Bracken i McGill 1972. godine [2]. Nakon toga bilježi se stalni rast u istraživanju i primjenama dvorazinske optimizacije, u čemu su doprinjeli matematičari, ekonomisti i inžinjeri.

Problemi dvorazinskog programiranja hijerarhijskog su tipa, optimizacijski problemi koji imaju drugi (parametarski) problem optimizacije kao dio ograničenja. U problemu sudjeluju dva donositelja odluka, tzv. *vodeći* (donositelj odluka na gornjoj razini) koji minimizira svoju funkciju cilja pod uvjetima koji se (dijelom) sastoje od optimalnih odluka tzv. *sljedbenika* (donositelj odluka na donjoj razini). Odabir vodećeg utječe na dopustivi skup i funkciju cilja problema sljedbenika, čija reakcija ima snažan utjecaj na "isplatu" vodećeg (i dopustivost početnog odabira vodećeg). Nijedan igrač (donositelj odluke) ne može u potpunosti dominirati nad drugim. *Problem dvorazinske optimizacije* je problem vodećeg, matematički formuliran pomoću grafa skupa rješenja problema sljedbenika.

Na početku prvog poglavlja opisujemo model dvorazinske optimizacije, zatim pretpostavkom da su funkcije cilja na obje razine afine, dobivamo model linearne dvorazinske optimizacije kojom se bavimo u prvom poglavlju. Geometrijskom interpretacijom problema linearne dvorazinske optimizacije dobivamo svojstva i optimalna rješenja problema. Izučavamo egzistenciju optimalnih rješenja te primjenom Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta optimalnosti problema donje razine, dobivamo Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete optimalnosti za optimizacijski problem. Na kraju dajemo nekoliko algoritama za rješavanje danog problema.

Drugo poglavlje posvećujemo općenitijem modelu dvorazinske optimizacije, odnosno modelu bez pretpostavke afinosti funkcija cilja na obje razine. Dajemo nužne i optimalne uvjete problema, te predstavljamo algoritam za izračunavanje Clarkeove stacionarne točke kao optimalnog rješenja problema.

U trećem poglavlju dajemo primjene dvorazinske optimizacije u raznim područjima znanosti odnosno u stvarnom svijetu. Velik broj primjena, velikim je dijelom motivirao istraživanje dvorazinske optimizacije.

Poglavlje 1

Linearna dvorazinska optimizacija

1.1 Uvod u dvorazinsku optimizaciju

Problem dvorazinske optimizacije je matematički problem optimizacije gdje je skup svih varijabli podijeljen na dva vektora x i y, gdje je x optimalno rješenje drugog matematičkog problema optimizacije koji je parametriziran s y. Dakle, problem dvorazinske optimizacije je hijerarhijski u smislu da su ograničenja problema dijelom definirana drugim optimizacijskim problemom, koji je dan sa:

$$\begin{cases} f(x,y) \to \min\limits_{x} \\ g(x,y) \leq 0 \\ h(x,y) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

gdje je $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, $g(x,y) = (g_1(x,y), ..., g_p(x,y))^\intercal$, $h(x,y) = (h_1(x,y), ..., h_q(x,y))^\intercal$. Ovaj problem zvat ćemo *problem donje razine* ili tzv. *problem sljedbenika*. Neka $\Psi(y)$ označava skup rješenja problema (1.1) za fiksni $y \in \mathbb{R}^m$, odnosno $\Psi : \mathbb{R}^m \to 2^{\mathbb{R}^n}$.

Označimo elemente skupa $\Psi(y)$ s $x(y)$ i pretpostavimo za početak da je taj odabir jedinstven za svaki y. Cilj dvorazinske optimizacije je odabrati parametar, vektor y, koji zadaje dopustivi skup za donje razine problema i optimalan je u određenom smislu. Preciznije, biramo y^* među svim y za koje su zadovoljena ograničenja

$$G(x(y), y) \leq 0, \ H(x(y), y) = 0 \tag{1.2}$$

i ciljna funkcija $F(x(y), y)$ poprima minimum za $y = y^*$, gdje je $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. U ovom radu, pretpostavit ćemo da su sve funkcije F, G, H, f, g, h dovoljno glatke, tj postoje njihovi diferencijali prvog i drugog reda te su neprekidni. Problem određivanja najboljeg rješenja y^* možemo opisati kao nalaženje vektora

y^* parametriziranog problema (1.1) i koji zajedno sa odazivom $x(y) \in \Psi(y)$ zadovoljavaju ograničenja (1.2) i daju najbolju vrijednost funkcije $F(x(y), y)$:

$$\begin{cases} F(x(y), y) \to \min\limits_{y} \\ G(x(y), y) \leq 0 \\ H(x(y), y) = 0 \\ x(y) \in \Psi(y) \end{cases} \tag{1.3}$$

Taj problem nazivamo *problemom dvorazinske optimizacij*e ili tzv. *problem vodećeg*. Funkciju F zovemo ciljnom funkcijom gornje razine, a funkcije G i H funkcijama ograničenja gornje razine.

1.2 Model linearne dvorazinske optimizacije

U potpoglavlju 1.1 uveli smo model dvorazinske optimizacije, a sada ćemo pretpostaviti da su sve funkcije na obje razine (1.1) i (1.3) afine, kako bismo dobili model linearne dvorazinske optimizacije.

Neka je problem donje razine dan sa:

$$\begin{cases} c^\top x \to \min\limits_{x} \\ Ax + By \leq a \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

gdje su $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^p$, $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,m}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Neka

$$\Psi_L(y) = \arg\min_{x} \{c^\top x : Ax + By \leq a, x \geq 0\}$$

označava skup optimalnih rješenja problema (1.4). Tada se problem dvorazinskog programiranja zapisuje kao

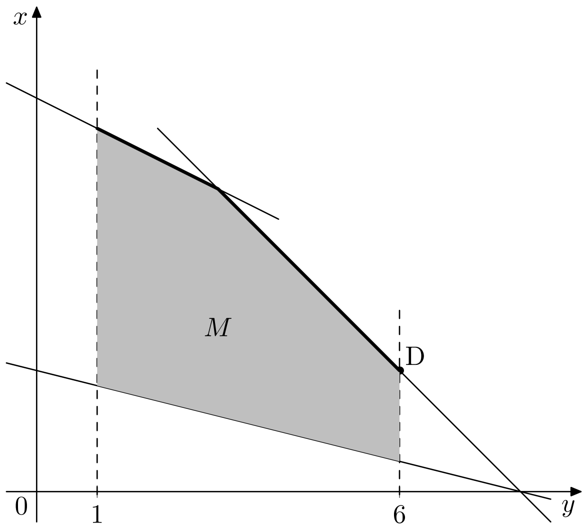
$$\begin{cases} d_1^\top x + d_2^\top y \to \min\limits_{y} \\ Cy = b \\ y \geq 0 \\ x \in \Psi_L(y) \end{cases} \tag{1.5}$$

Primjer 1.2.1. *Neka je funkcija cilja gornje razine dana sa*

$$3x + y \to \min$$

gdje je $1 \leq y \leq 6$*, a* x *je rješenje problema donje razine*

$$\begin{cases} -x \to \min\limits_{x} \\ x + y \leq 8 \\ 4x + y \geq 8 \\ 2x + y \leq 13 \end{cases}$$



Slika 1.1: Linearna dvorazinska optimizacija

Neka M označava skup svih točaka (x, y) koje zadovoljavaju ograničenja obiju razina. Dopustivi skup problema donje razine za fiksnu vrijednost y je presjek skupa M sa skupom svih točaka čija je ordinata jednaka y. Ako je funkcija $f(x, y) = -x$ minimizirana na tom skupu, dolazimo do točke na podebljanom dijelu pravaca što je optimalno rješenje problema donje razine:

$$\Psi_L(y) = \begin{cases} \{6.5 - 0.5y \ : \ 1 \leq y \leq 3\} \\ \{8 - y \ : \ 3 \leq y \leq 6\} \end{cases}$$

Dakle, skup Ψ_L je jednočlan za svaki dopustivi y, pa ćemo prema uvedenoj notaciji označavati s $x(y)$ jedinstveno rješenje problema donje razine za dani y. Dakle, podebljane linije daju dopustivi skup rješenja problema gornje razine. Na tom skupu, funkcija cilja gornje razine mora biti minimizirana:

$$F(x(y), y) = \begin{cases} 19.5 - 0.5y \, , \, 1 \leq y \leq 3 \\ 24 - 2y \quad \, , \, 3 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Globalno optimalno rješenje je točka $D\,(y, x) = (6, 2)$ sa optimalnom funkcijskom vrijednošću jednakom 12.

Iz slike 1.1 vidimo da čak i u najjednostavnijim oblicima linearnih funkcija, problem linearne dvorazinske optimizacije je nekonveksan, odnosno problem gornje razine može biti negladak (u terminima varijable y, ako je skup Ψ_L jednočlan). Stoga, moguća je pojava lokalnih točaka minimuma te nužni uvjeti optimalnosti ne moraju biti i dovoljni, i/ili stacionarnih rješenja.

1.3 Geometrijska interpretacija linearne dvorazinske optimizacije

Definicija 1.3.1. *Preslikavanje $\Gamma\colon \mathbb{R}^p \to 2^{\mathbb{R}^n}$ je poliedarsko ako je njegov graf*

$$\boldsymbol{gph}\Gamma : = \{(x, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p : x \in \Gamma(y)\} \tag{1.6}$$

jednak uniji konačnog broja konveksnih poliedarskih skupova.

Teorem 1.3.2. *Preslikavanje Ψ_L je poliedarsko.*

Dokaz. Iz dualnosti linearnog programiranja, $x \in \Psi_L(y)$ ako i samo postoji $\lambda \in \mathbb{R}^p$ takav da

$$\begin{gathered} Ax + By \leq a,\ x \geq 0 \\ \lambda \geq 0,\ A^\top \lambda + c \geq 0 \\ \lambda^\top (Ax + By - a) = 0 \\ x^\top (A^\top \lambda + c) = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Za bilo koje skupove $I \subseteq \{1, ..., n\}$, $J \subseteq \{1, ..., p\}$ promatramo skup rješenja $M(I, J)$ sustava ne(jednadžbi).

$$\begin{gathered} (Ax + By - a)_i = 0,\ i \in J,\ (Ax + By - a)_i \leq 0,\ i \notin J, \\ x_j = 0,\ j \notin I,\ x_j \geq 0,\ j \in I, \\ \lambda_i = 0,\ i \notin J,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in J, \\ (A^\top \lambda + c)_j = 0,\ j \in I,\ (A^\top \lambda + c) \geq 0,\ j \notin I. \end{gathered}$$

Tada su uvjeti (1.7) zadovoljeni. Skup $M(I, J)$ je poliedar, kao i njegova projekcija na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Budući da je graf preslikavanja Ψ_L jednak uniji skupova $M(I, J)$, slijedi tvrdnja. □

Korištenjem Teorema 1.3.2 možemo riješiti linearno dvorazinsko programiranje minimizirajući funkciju cilja na svakom poliedarskom skupu koji čine $\mathbf{gph}\Psi_L(\cdot)$ u skladu sa ograničenjima problema gornje razine (1.5). Svaki od tih "podproblema" je problem linearne optimizacije. Stoga, kao posljedicu Teorema 1.3.2 dobivamo

Korolar 1.3.3. *Ako je optimalno rješenje problema donje razine* (1.4) *jedinstveno određeno za svaki y, tada postoji optimalno rješenje problema* (1.5) *koje je vrh skupa* $\{(x, y) : Ax + By \leq a, Cy = b, x \geq 0, y \geq 0\}$.

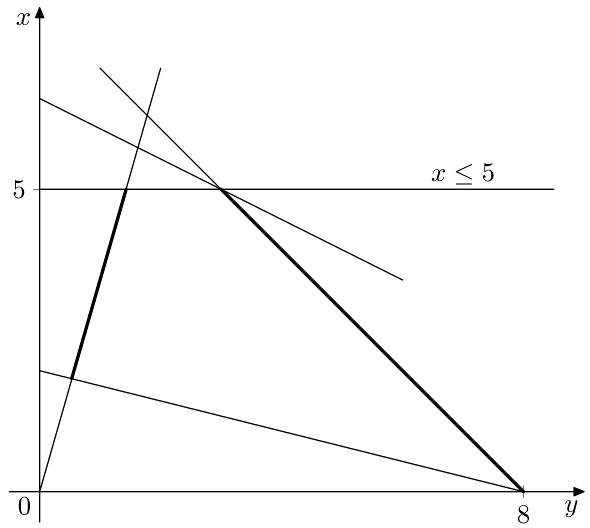
Koristeći dokaz teorema (1.3.2) lako vidimo da je graf preslikavanja Ψ_L povezan. To implicira da je dopustivi skup problema gornje razine iz Primjera 1.2.1 također povezan. Sljedeći primjer pokazuje da to više ne vrijedi ukoliko se gornjoj razini dodaju ograničenja koja ovise o optimalnom rješenju donje razine.

Primjer 1.3.4. *Neka je funkcija cilja gornje razine dana sa*

$$3x + y \to \min$$

gdje je $0 \leq y \leq 8, x \leq 5$ *i* x *je rješenje problema donje razine*

$$\begin{cases} -x \to \min\limits_{x} \\ x + y \leq 8 \\ 4x + y \geq 8 \\ 2x + y \leq 13 \\ 2x - 7y \leq 0 \end{cases}$$



Slika 1.2: Linearno dvorazinsko programiranje s nepovezanim dopustivim skupom

Optimalno rješenje problema donje razine je jedinistveno, za svaki y:

$$x(y) = \begin{cases} 3.5y & , \frac{8}{15} \leq y \leq \frac{13}{8} \\ 6.5 - 0.5y & , \frac{13}{8} \leq y \leq 3 \\ 8 - y & , 3 \leq y \leq 8 \end{cases},$$

no $x \leq 5$ vrijedi samo za $y \in \left[\frac{8}{15}, \frac{10}{7}\right] \bigcup [3, 8]$.

Ukoliko ograničenje $x \leq 5$ iz gornje razine maknemo i stavimo u donju razinu, tada će dopustivi skup gornje razine biti povezan i jednak skupu točaka $(x(y), y)$, gdje je

$$x(y) = \begin{cases} 3.5y & , \frac{8}{15} \leq y \leq \frac{10}{7} \\ 5 & , \frac{10}{7} \leq y \leq 3 \\ 8 - y & , 3 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

Trebamo imati na umu da položaj ograničenja nije proizvoljan s praktičnog stajališta. Ograničenje u donjoj razini problema ograničava dopustive odluke *sljedbenika*, dok isto ograničenje u gornjoj razini ograničava odluke *vodećeg* u smislu da se dopustivost njegovih odabira istražuje nakon odluke *sljedbenika*, tj. to je implicitno ograničenje zadatka *vodećeg*.

Ovaj problem je još teži ako odabir sljedbenika nije jedinstveno određen za neke vrijednosti parametra, jer u ovom slučaju neki odabiri sljedbenika $x \in \Psi(\widetilde{y})$ mogu značiti da je odabir vodećeg $\widetilde{y}$ dopustiv, ali drugi mogu odbiti istu vrijednost $\widetilde{y}$. U [6] pokazano je da se ograničenje gornje razine koje uključuje sljedbenikov odgovor može premjestiti u problem donje razine pod uvjetom da postoji barem jedno optimalno rješenje problema donje razine na koje ovaj potez ne utječe za svaku vrijednost parametra.

1.4 Egzistencija optimalnih rješenja

Razmotrimo sada linearno dvorazinsko programiranje u nešto općenitijem okruženju gdje je problem programiranja na donjoj razini zamijenjen sa

$$\Psi_L(y) = \arg\min_x \{y_1^\top x : Ax + By_2 \leq a, x \geq 0\} \tag{1.8}$$

za $y = (y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}^{n+m}$. Tada je opet Ψ_L poliedarsko. Ako je optimalno rješenje donje razine jedinstveno određeno, za sve vrijednosti parametra, možemo iskoristiti Weierstrasseov teorem kako bismo dokazali postojanje optimalnih rješenja za problem dvorazinske optimizacije.

Korištenjem parametarskog linearnog programiranja [5] lako se vidi da ako problem 1.8 ima jedinstveno optimalno rješenje za sve vrijednosti parametra, tada ta rješenja definiraju neprekidnu funkciju $x \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ tako da $x(y) = \Psi_L(y)$ za svaki y za koji problem (1.8) ima optimalno rješenje. Zatim, ako ovo rješenje stavimo u problem dvorazinskog programiranja (1.5), dobivamo problem

$$\begin{cases} d_1^\top x(y) + d_2^\top y \to \min\limits_y \\ Cy = b \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

gdje je minimum dobro definiran u odnosu na y. Ovo je neprekidni i ne-diferencijabilni optimizacijski problem. Upotrebljavajući Weierstrasseov teorem dobivamo

Teorem 1.4.1. *Ako je skup* $\overline{M} := \{y \geq 0 : Cy = b\}$ *neprazan i kompaktan, problem donje razine* (1.8) *ima barem jedno optimalno rješenje za svaki* $y \in \overline{M}$ *i dopustivi skup problema* (1.5) *je neprazan, tada problem* (1.9) *ima barem jedno optimalno rješenje.*

Takvo (globalno) optimalno rješenje, kao i sva lokalna optimalna rješenja, mogu se naći u vrhovima nekih poliedarskih skupova. Ovi skupovi su projekcija skupa rješenja jednog od sljedećih sustava linearnih (ne)jednadžbi na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Svaki od ovih sustava odgovaraju dva skupa indeksa $I \subseteq \{1, ..., n\}$ i $J \subseteq \{1, ..., p\}$ te su određeni sa

$$\begin{array}{ll} (Ax + By_2 - a)_i = 0,\ \lambda_i \geq 0 & , \text{za } i \in J \\ (Ax + By_2 - a)_i \leq 0,\ \lambda_i = 0 & , \text{za } i \notin J \\ (A^\top \lambda + y_1)_j = 0,\ x_j \geq 0 & , \text{za } j \in I \\ (A^\top \lambda + y_1)_j \geq 0,\ x_j = 0 & , \text{za } j \notin I \\ Cy = b\ y \geq 0 & , \end{array} \tag{1.10}$$

Ako funkcija cilja problema donje razine ne ovisi o izboru vodećeg, onda to implicira da se optimalna rješenja za problem (1.1) i (1.3) mogu pronaći u vrhovima skupa $\{(x, y) \geq 0 : Ax + By \leq a, Cy = b\}$ što je slično rezultatu Korolara 1.3.3.

Pretpostavka jedinstvenosti u Teoremu 1.3.2 ne može biti zadovoljena barem u slučaju linearnih problema s optimizacijom donje razine koji imaju parametar u funkciji cilja, ali nemaju parametrizaciju dopustivog skupa, osim ako je optimalno rješenje konstantno preko skupa $\overline{M}$. Zatim, budući da vodeći (ili donositelj odluka na gornjoj razini) nema kontrolu nad stvarnim izborom sljedbenika, bit će mu teško procijeniti vrijednost njegove funkcije cilja prije nego što bude svjestan stvarnog izbora sljedbenika. U literaturi se može pronaći više primjera ove situacije, a svaka zahtijeva određene pretpostavke o razini suradnje među igračima. Mi ćemo promotriti dva slučaja.

U prvom slučaju vodeći pretpostavlja da može utjecati na sljedbenika da za svaki slučaj odabere rješenje iz skupa $\Psi_L(y)$ koje je najbolje za vodećeg. To rezultira tzv. *optimističnim* ili *slabim problemom dvorazinske optimizacije:*

$$\begin{cases} d_1^\top x + d_2^\top y \to \min\limits_{x,y} \\ \qquad Cy = b \\ \qquad y \geq 0 \\ \quad x \in \Psi_L(y) \end{cases} \tag{1.11}$$

gdje je funkcija cilja minimizirana u odnosu na varijable obje razine. Optimalno rješenje problema (1.11) zovemo *optimističnim optimalnim rješenjem* problema dvorazinske optimizacije (1.5) i (1.8).

Pokazano je da je takav pristup moguć, npr. u slučaju ako sljedbenik može sudjelovati u dobiti koju ostvaruje vodeći. Ako ovaj problem ima optimalno rješenje, ekvivalentno ga možemo postaviti kao:

$$\begin{cases} \varphi_o(y) + d_2^\top y \to \min\limits_y \\ Cy = b \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

gdje je

$$\varphi_o(y) = \min_x \{d_1^\top y \colon x \in \Psi_L(y)\}.$$

Ako takav izlaz nije moguć, vodeći je prisiljen odabrati svoj pristup ograničavanju štete koja je posljedica nepovoljnog odabira sljedbenika. To se očituje u tzv. *pesimističnom* ili *jakom problemu dvorazinske optimizacije*:

$$\begin{cases} \varphi_p(y) + d_2^\top y \to \min\limits_y \\ Cy = b \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

gdje je

$$\varphi_p(y) = \max_x \{d_1^\top y \colon x \in \Psi_L(y)\}.$$

Pesimistično optimalno rješenje problema dvorazinske optimizacije (1.5) i (1.8) definira se kao optimalno rješenje problema (1.13).

Za optimističan problem dvorazinske optimizacije možemo iskoristiti poliedralnost preslikavanja Ψ_L kako bismo istražili postojanje optimalnih rješenja. Podsjetimo se, to povlači da se optimistično dvorazinsko programiranje može razgraditi u konačan broj linearnih problema optimizacije, čije će najbolje optimalno rješenje, riješiti izvorni problem.

Teorem 1.4.2. *Promatramo optimistični problem dvorazinske optimizacije* (1.11)*, te neka je skup* $M := \{(x, y) \geq 0 : Ax + By_2 \leq a, Cy = b\}$ *neprazan i ograničen. Tada je dopustivi skup problema* (1.11) *neprazan i problem ima barem jedno optimalno rješenje.*

Ovdje se opet možemo ograničiti u potrazi za rješenjima u vrhovima konveksnih poliedarskih skupova (1.10).

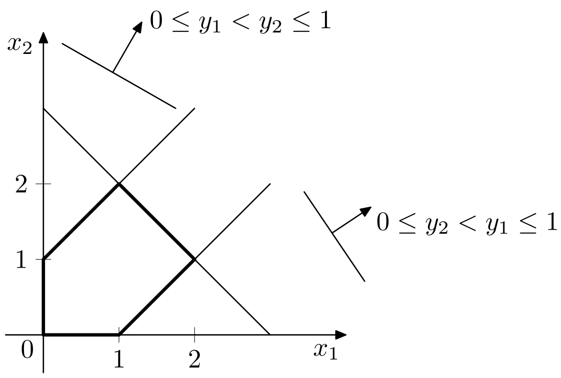
U pesimističnom problemu dvorazinske optimizacije, općenito ne možemo garantirati postojanje optimalnih rješenja što ćemo pokazati u idućem primjeru.

Primjer 1.4.3. *Promotrimo problem*

$$-x_2 - 10y_1 - 10y_2 \to \min_y$$

gdje je $0 \le y_i \le 1, i = 1,2$

$$x \in \Psi_L(y) := \arg\min_x \{-(y^\top x) : x_1 + x_2 \le 3, -x_1 + x_2 \le 1, x_1 - x_2 \le 1, x \ge 0\}.$$



Slika 1.3: Dopustivi skup i smjerovi minimizacije donje razine

$$\Psi_L(y) = \begin{cases} \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} & , 0 \le y_2 < y_1 \le 1 \\ & , \\ \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} & , 0 \le y_1 < y_2 \le 1 \\ & , \\ \operatorname{conv}\left\{\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right\} & , 0 < y_1 = y_2 \le 1 \\ & , \\ M(0,0) & , 0 = y_1 = y_2 \end{cases}$$

gdje $M(0,0)$ označava dopustivi skup gornje razine. Stoga za ${y_2}^k > {y_1}^k$, $\lim_{k\to\infty} {y_1}^k = \lim_{k\to\infty} {y_2}^k = 1$ imamo

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_p({y_1}^k, {y_2}^k) = \lim_{k\to\infty}(-10{y_1}^k - 10{y_2}^k - x_2({y_1}^k, {y_2}^k)) = -22$$

Kako je $x_2 \le 2$, optimalna vrijednost funkcije cilja dvorazinskog problema ne može poprimiti vrijednosti manje od -22. Međutim za $y_1 = y_2 = 1$ imamo $\varphi_p(1,1) = -1$ i vrijednost funkcije cilja gornje razine jednaka je -21. Prema tome, najmanja vrijednost funkcije φ_p je -22 i nije postignuta, odnosno dani primjer nema optimalno rješenje problema.

1.5 Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti

U ovom potpoglavlju navest ćemo nužne i dovoljne uvjete optimalnosti za problem linearne dvorazinske optimizacije koji uzima probleme (1.8), (1.11) kao polaznu točku. Moramo imati na umu da je ovaj pristup valjan samo u optimističnom slučaju.

Neka je donji linearni problem dan sa:

$$\begin{cases} y_1^\top x \to \min\limits_x \\ Ax + By_2 \leq a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

te radi lakšeg razumijevanja označimo funkciju cilja $y_1^\top x$ s $f(x, y)$, $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ te funkcije ograničenja $Ax + By_2 \leq a,\ x \geq 0$ s $g_1(x, y),\ g_2(x, y)$, $g_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p,\ g_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ redom. Podsjetimo se da je u donjem linearnom problemu y parametar. Funkcijama ograničenja pridružujemo Lagrangeove multiplikatore $\lambda = \left(\lambda_1, ..., \lambda_p\right) \in \mathbb{R}^p$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti za donji linearni problem:

1. $\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$
2. $\nabla_x f(x) + \lambda \nabla_x g_1(x) + \mu \nabla_x g_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 + A^\top \lambda - \mu = 0$
3. $\begin{cases} \lambda(g_1(x)) = 0 \\ \mu(g_2(x)) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda^\top (Ax + By_2 - a) = 0 \\ \mu^\top(-x) = 0. \end{cases}$

Uvjete pod točkom 3. zovemo *uvjetima komplementarnosti*. Primjetimo da vrijedi $(y_1 + A^\top \lambda) \in \mathbb{R}^n$ i $\mu \in \mathbb{R}^n$ pa iz 2. slijedi $y_1 + A^\top \lambda = \mu$, stoga uvjeti komplementarnosti glase

$$\begin{aligned} \lambda^\top (Ax + By_2 - a) = 0 \\ (y_1 + A^\top \lambda)^\top x = 0. \end{aligned}$$

Neka su $F(x, y, \lambda), G(x, y, \lambda)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p+n}$ vektorske funkcije dane sa:

$$F(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} a - Ax - By_2 \\ y_1 + A^\top \lambda \end{pmatrix}; \quad G(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix}.$$

Tada prema Karush-Kuhn-Tuckerovim uvjetima vrijedi $F \geq 0,\ G \geq 0,\ F_i G_i = 0,\ \forall i$ gdje treća jednakost, koju ekvivalentno možemo zapisati kao $F^\top G = 0$, vrijedi zbog prve dvije:

$$F_i G_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i \underset{\geq 0}{F_i} \underset{\geq 0}{G_i} = 0.$$

Prema tome Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti donje razine glase

$$\begin{cases} F(x,y,\lambda) \geq 0 \\ G(x,y,\lambda) \geq 0 \\ F(x,y,\lambda)^\top G(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

te ukoliko u problemu (1.11), problem donje razine zamijenimo Karush-Kuhn-Tuckerovim uvjetima dobivamo problem:

$$\begin{cases} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y \to \min\limits_{x,y} \\ Cy = b \\ F(x,y,\lambda)^\top G(x,y,\lambda) = 0 \\ y \geq 0, \ F(x,y,\lambda) \geq 0, \ G(x,y,\lambda) \geq 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Za problem (1.14) raspisujemo F. Johnove uvjete optimalnosti. Označimo funkciju cilja $d_1^\top x + d_2^\top y$ s $f_U(x,y,\lambda)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, funkcije ograničenja tipa jednakosti s $H_U^1(x,y,\lambda) = Cy - b$, $H_U^2(x,y,\lambda) = F(x,y,\lambda)^\top G(x,y,\lambda)$, te funkcije ograničenja tipa nejednakosti s $g_U^1(x,y,\lambda) = -y$, $g_U^2(x,y,\lambda) = -F(x,y,\lambda)$, $g_U^3(x,y,\lambda) = -G(x,y,\lambda)$. Funkcijama ograničenja pridružujemo multiplikatore:

$$\begin{array}{ll} f_U(x,y,\lambda) & \ldots \kappa_0 \in \mathbb{R}, \kappa_0 \geq 0 \\ H_U^1(x,y,\lambda) & \ldots \kappa \in \mathbb{R}^l \\ H_U^2(x,y,\lambda) & \ldots \alpha \in \mathbb{R} \\ g_U^1(x,y,\lambda) & \ldots \xi \in \mathbb{R}^m, \xi_i \geq 0, \forall i \in \{1,...,m\} \\ g_U^2(x,y,\lambda) & \ldots \eta \in \mathbb{R}^{n+p}, \eta_i \geq 0, \forall i \in \{1,...,n+p\} \\ g_U^3(x,y,\lambda) & \ldots \gamma \in \mathbb{R}^{n+p}, \gamma_i \geq 0, \forall i \in \{1,...,n+p\} \end{array}.$$

Dobivamo sljedeći sustav:

1. $\kappa_0 \nabla_x f_U + \kappa \nabla_x H_U^1 + \alpha \nabla_x H_U^2 - \xi \nabla_x g_U^1 - \eta \nabla_x g_U^2 - \gamma \nabla_x g_U^3 \ = 0$
2. $\kappa_0 \nabla_y f_U + \kappa \nabla_y H_U^1 + \alpha \nabla_y HU^2 - \xi \nabla_y g_U^1 - \eta \nabla_y g_U^2 - \gamma \nabla_y g_U^3 \ = 0$
3. $\kappa_0 \nabla_\lambda f_U + \kappa \nabla_\lambda H_U^1 + \alpha \nabla_\lambda HU^2 - \xi \nabla_\lambda g_U^1 - \eta \nabla_\lambda g_U^2 - \gamma \nabla_\lambda g_U^3 \ = 0$
4. $\xi \left(g_U^1(x,y,\lambda)\right) = 0$
5. $\eta \left(g_U^2(x,y,\lambda)\right) = 0$
6. $\gamma \left(g_U^3(x,y,\lambda)\right) = 0$

Ovdje i u nastavku simbol $\nabla z(x)$ označava Jacobijevu matricu (vektor redak) funkcije z. Uvjeti pod točkama 4, 5 i 6 zovu se uvjeti komplentarnosti, a njih ne zapisujemo za funkcije ograničenja tipa jednakosti jer imamo jači uvjet da su H_U^1, H_U^2 jednake nuli. Uvjete komplementarnosti možemo ekvivalentno zapisati:

$$\xi\left(g_U^1(x,y,\lambda)\right) = \xi_i(-y_i) = 0 \Rightarrow \xi_i(y_i) = 0, \quad \forall i \in \{1,...,m\}$$
$$\eta\left(g_U^2(x,y,\lambda)\right) = -\eta_i F_i(x,y,\lambda) = 0 \Rightarrow \eta_i F_(x,y,\lambda) = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n+p\}$$
$$\gamma\left(g_U^3(x,y,\lambda)\right) = -\gamma_i G_i(x,y,\lambda) = 0 \Rightarrow \gamma_i G_(x,y,\lambda) = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n+p\}$$

Neka su $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$.

$$\eta_i F_i(x,y,\lambda) = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n+p\} \Rightarrow \begin{cases} (a - Ax - By_2)_i\, \eta_i^1 = 0\,, \forall i \in \{1,...,p\} \\ (y_1 + A^\top \lambda)_i\, \eta_i^2 = 0 \quad\;\; , \forall i \in \{1,...,n\} \end{cases}$$

$$\gamma_i G_i(x,y,\lambda) = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n+p\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i \gamma^1 = 0\,, \forall i \in \{1,...,p\} \\ x_i \gamma_i^2 = 0\,, \forall i \in \{1,...,n\} \end{cases}$$

Prije nego li počnemo raspisivati točke 1, 2 i 3 iz gornjeg sustava primjetimo da ograničenje tipa jednakosti $F^\top G = 0$ možemo zapisati kao $\{F^\top G \geq 0, \; -F^\top G \leq 0\}$. No kako su vektorske funkcije F i G veće ili jednako nula, dovoljno je promatrati samo funkciju ograničenja $F^\top G \leq 0$. Ako zapišemo uvjete komplementarnosti za dano ograničenje i multiplikator α, dobivamo $\alpha(F^\top G) = 0$. Ako je $\alpha = 0$, taj izraz izostaje iz uvjeta pod točkama 1, 2 i 3. Ako je $F^\top G = 0$ tada su i parcijalne derivacije $\nabla(F^\top G)$ po varijablama x, y i λ jednake nuli pa opet isti izraz izostaje iz uvjeta pod točakama 1, 2 i 3, odnosno možemo ga u potpunosti ukloniti iz uvjeta.

Deriviranjem funkcija pa varijablama x, y i λ dobivamo sustav

1. $\kappa_0 d_1 + A^\top \eta_1 - \gamma_2 = 0$
2. $\kappa_0 d_2 + C^\top \kappa - \xi + \begin{pmatrix} B^\top \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$
3. $A^\top \eta_2 + \gamma_1 = 0$

Spremni smo za idući teorem koji daje F. Johnove nužne uvjete optimalnosti.

Teorem 1.5.1. *Ako je* (x_0, y_0) *lokalni minimum problema* (1.11) *tada postoji* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ *i netrivijalan vektor* $(\kappa_0, \kappa, \eta_1, \eta_2, \gamma_1, \gamma_2, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *koji zadovoljava*

$$\kappa_0 d_1 + A^\top \eta_1 - \gamma_2 = 0$$

$$\kappa_0 d_2 + C^\top \kappa - \xi - \begin{pmatrix} -B^\top \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$A^\top \eta_2 + \gamma_1 = 0$$

$$(a - Ax^0 - By_2^0)_i \eta_i^1 = 0,\ \lambda_i^0 \gamma_i^1 = 0,\ \forall i = 1, ..., p,$$

$$(A^\top \lambda^0 + y_1^0)_i \eta_i^2 = 0,\ x_i^0 \gamma_i^2 = 0,\ \forall i = 1, ..., n$$

$$\eta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \kappa \geq 0$$

$$\forall i\ :\ (a - Ax^0 - By_2^0)_i \lambda_i^0 = 0$$

$$\forall i\ :\ (A^\top \lambda^0 + y_1^0)_i x_i^0 = 0$$

$$\xi \geq 0,\ y_i^0 \xi_i = 0\ \forall i = 1, ..., m,\ \lambda \geq 0,\ \kappa_0 \geq 0.$$

Uvjeti tipa

$$\begin{cases} \forall i : (a - Ax^0 - By_2^0)_i \lambda_i^0 = 0 \\ \forall i : (A^\top \lambda^0 + y_1^0)_i x_i^0 = 0 \end{cases}$$

slijede iz uvjeta komplementarnosti donje razine problema. Teorem 1.5.1 daje Fritz John nužne uvjete optimalnosti, da bi dobili Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete, potrebna je regularnost koja je dana u nastavku. Neka je (x_0, y_0, λ_0) dopustiva točka za (1.14).

$$\begin{aligned} d_1^\top x + d_2^\top y &\to \min_{x,y} \\ Cy = b,\ y &\geq 0, \\ F_i(x, y, \lambda) &= 0, && \text{ako je } F_i(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ F_i(x, y, \lambda) &\geq 0, && \text{ako je } F_i(x_0, y_0, \lambda_0) > 0, \\ G_i(x, y, \lambda) &= 0, && \text{ako je } G_i(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ G_i(x, y, \lambda) &\geq 0, && \text{ako je } G_i(x_0, y_0, \lambda_0) > 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Za dani problem, potrebni su nam generalizirani Slaterovi uvjeti:

Definicija 1.5.2. *Generalizirani Slaterovi uvjeti su zadovoljeni za problem* (1.15) *ako su gradijenti, svih jednakosti ograničenja obzirom na* (x, y, λ)*, linearno nezavisni i ako postoji dopustiva točka* $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\lambda})$ *koja zadovoljava sve nejednakosti ograničenja.*

Bilo koje dopustivo rješenje problema (1.15) također je dopustivo i za problem (1.14). Stoga, lokalno optimalno rješenje problema (1.15) također je lokalno optimalno rješenje problema (1.14). Obrnuta tvrdnja općenito ne vrijedi. Možemo pretpostaviti da je generalizirani Slaterov uvjet zadovoljen za problem (1.14), ali ne za problem (1.15) sve dok strogi uvjeti komplementarnosti nisu zadovoljeni. Za vrijednost $\kappa_0 = 1 \geq 0$ dobivamo Karuch-Kuhn-Tuckerove uvjete optimalnosti.

Teorem 1.5.3. *Ako je* (x_0, y_0) *lokalni minimum problema* (1.11) *i generalizirani Slaterov uvjet je zadovoljen za problem* (1.15) *tada postoji* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ *i vektor* $(\kappa, \eta_1, \eta_2, \gamma_1, \gamma_2, \xi) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *koji zadovoljava*

$$d_1 + A^\top \eta_1 - \gamma_2 = 0$$

$$d_2 + C^\top \kappa - \xi - \begin{pmatrix} -B^\top \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$A^\top \eta_2 + \gamma_1 = 0$$

$$(a - Ax^0 - By_2^0)_i \eta_i^1 = 0, \ \lambda_i^0 \gamma_i^1 = 0, \ \forall i = 1, ..., p,$$

$$(A^\top \lambda^0 + y_1^0)_i \eta_i^2 = 0, \ x_i^0 \gamma_i^2 = 0, \ \forall i = 1, ..., n$$

$$\eta \geq 0, \ \gamma \geq 0, \ \kappa \geq 0$$

$$\forall i \ : \ (a - Ax^0 - By_2^0)_i = \lambda_i^0 = 0$$

$$\forall i \ : \ (A^\top \lambda^0 + y_1^0)_i = x_i^0 = 0$$

$$\xi \geq 0, \ y_i^0 \xi_i = 0 \ \forall i = 1, ..., m, \ \lambda \geq 0.$$

1.6 Metode za numeričko rješenje

U ovom potpoglavlju dat ćemo različite algoritme za rješavanje linearne dvorazinske optimizacije. Problemi dvorazinske optimizacije su nekonveksni i nediferencijabilni optimizacijski problemi. To postavlja pitanje traženja globalnog optimalnog rješenja, što ćemo raspraviti u zadnjem odjeljku ovog potpoglavlja. Globalna optimizacija je često povezana sa algoritmima nabrajanja koje navodimo odmah na početku, dok ostale klase algoritama nemaju intenciju računanja globalnog optimalnog rješenja već lokalnog kao što je metoda kaznene funkcije koju također navodimo. Nećemo ići u detalje algoritama već ćemo iznijeti osnovne ideje.

Algoritmi prebrojavanja

Prvi algoritam koji ćemo razmotriti je algoritam koji traži rješenje u vrhovima dopustivog skupa. Promatramo optimističan oblik problema linearnog dvorazinskog programiranja (1.8) i (1.11). Kao rezultat teorema 1.3.2, traženje (globalnog) optimalnog rješenja možemo ograničiti na vrhove konveksnih poliedarskih komponenata grafa Ψ_L. Kao što smo opisali u Potpoglavlju 1.4, svaki takav vrh je određen sa dva skupa indeksa I, J aktivnih ograničenja:

$$\begin{aligned} (Ax + By_2 - a)_i = 0,\ \lambda_i \geq 0, &\quad \text{za } i \in J \\ (Ax + By_2 - a)_i \leq 0,\ \lambda_i = 0, &\quad \text{za } i \notin J \\ (A^\top \lambda + y_1)_j = 0,\ x_j \geq 0, &\quad \text{za } j \in I \\ (A^\top \lambda + y_1)_j \geq 0,\ x_j = 0, &\quad \text{za } j \notin I \\ Cy = b,\ y \geq 0. & \end{aligned}$$

Stoga, možemo preformulirati problem linearnog dvorazinskog programiranja kao problem pronalaženja takva dva skupa indeksa I i J za koje sljedeći optimizacijski problem ima najmanju optimalnu vrijednost funkcije:

$$\begin{aligned} d_1^\top x\ +\ d_2^\top y\ \to \min_{x,y} & \\ (Ax + By_2 - a)_i = 0,\ \lambda_i \geq 0, &\quad \text{za } i \in J \\ (Ax + By_2 - a)_i \leq 0,\ \lambda_i = 0, &\quad \text{za } i \notin J \\ (A^\top \lambda + y_1)_j = 0,\ x_j \geq 0, &\quad \text{za } j \in I \\ (A^\top \lambda + y_1)_j \geq 0,\ x_j = 0, &\quad \text{za } j \notin I \\ Cy = b,\ y \geq 0. & \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ova potraga se može ostvariti nabrajanjem svih mogućih skupova I, J što može rezultirati velikom količinom nepotrebnog računanja. U literaturi je pokazano da ovaj pristup može dovesti do polinomijalnog algoritma za problem linearnog dvorazinskog programiranja ako sljedbenik kontrolira samo fiksan broj varijabli. Razlog tome je taj, što tada postoji samo polinomijalni broj različitih bazičnih matrica za donju razinu problema i problemi (1.16) se mogu riješiti u polinomijalnom vremenu. Rješavajući problem (1.4), (1.11) sa K-tim najboljim algoritmom iz [1], nabrajanje vrhova je realizirano na idući način.

Započinjemo s optimalnim rješenjem problema:

$$\begin{cases} d_1^\top x\ +\ d_2^\top y\ \to \min\limits_{x,y} \\ Ax + By \leq a \\ Cy = b \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Skup M je konstruiran tako da sadrži sve susjedne vrhove skupa

$$\{(x, y) : Ax + By \leq a, Cy = b, x, y \geq 0\}$$

već istraženih vrhova. U svakom koraku provjerava se da li je najbolja točka, obzirom na gornju razinu funkcije cilja skupa M, dopustiva točka za problem dvorazinskog programiranja. Ako je dopustiva onda je ta točka globalno optimalno rješenje od (1.4) i (1.11). U suprotnom, točku isključujemo iz skupa M, a sve njezine susjedne vrhove uključujemo u skup M.

Metoda kaznene funkcije

Promatramo optimističan problem dvorazinske optimizacije (1.4), (1.11). Dopustivo rješenje $x(y^*)$ problema (1.4) je optimalno za $y = y^*$ ako i samo ako postoji vektor λ^* tako da (x^*, y^*, λ^*) zadovoljava

$$\begin{array}{c} Ax + By \leq a,\ x \geq 0, \\ A^\top \lambda + c \geq 0,\ \lambda \geq 0, \\ c^\top x = (a - By)^\top \lambda. \end{array} \tag{1.17}$$

Dani sustav možemo iskoristiti kako bismo formulirali metodu kaznene funkcije za rješavanje problema (1.4), (1.11):

$$\begin{array}{c} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y \ + \ K\left[c^\top x \ - \ (a - By)^\top \lambda\right] \ \to \ \min\limits_{x,y,\lambda} \\ Ax + By \leq a, \\ A^\top \lambda + c \geq 0, \\ Cy = a, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{array} \tag{1.18}$$

gdje je K dovoljno velik. Za fiksni K rješavamo problem:

$$\begin{array}{c} \Phi_K(\lambda) \ \to \ \min\limits_{\lambda} \\ A^\top \lambda + c \geq 0,\ \lambda \geq 0, \end{array} \tag{1.19}$$

gdje je $\Phi_K(\lambda)$ optimalno rješenje sljedećeg parametriziranog problema

$$\begin{aligned} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y \ + \ K\,[c^\top x \ - \ (a - By)^\top \lambda] \ &\rightarrow \ \min_{x,y,\lambda} \\ Ax + By \leq a&, \\ Cy = a&, \\ x \geq 0, \ y \geq 0& \end{aligned} \tag{1.20}$$

za fiksni λ. Tada je funkcija Φ_K konkavna i minimum iz (1.19) se poprima u vrhovima dopustivog skupa

$$\{\lambda \geq 0 \ : \ A^\top \lambda + c \geq 0\}$$

problema (1.19) pod uvjetom da problem (1.18) ima rješenje.

Teorem 1.6.1. *Neka je skup*

$$\{(x, y, \lambda) \ : \ Ax + By \leq a, \ A^\top \lambda + c \geq 0, \ Cy = a, \ x, y, \lambda \geq 0\}$$

neprazan i ograničen. Tada, postoji konačan K^* takav da za svaki $K \geq K^*$ globalno optimalno rješenje λ^* problema (1.19) *zajedno sa optimalnim rješenjem* (x^*, y^*) *problema* (1.20)*, daju globalno optimalno rješenje problema* (1.4)*,* (1.11).

Mana ovog pristupa je u tome što se za svaku vrijednost parametara kazne, vanjski nekonveksni problem (1.19) mora se riješiti globalno. Ali teorem 1.6.1 proširujemo i na slučaj kada se problem gornje razine (1.19) rješava lokalno, ali linearni problem donje razine (1.20) globalno:

Teorem 1.6.2. *Neka je skup*

$$\{(x, y, \lambda) \ : \ Ax + By \leq a, \ A^\top \lambda + c \geq 0, \ Cy = a, \ x, y, \lambda \geq 0\}$$

neprazan i ograničen. Tada, postoji konačan K^* takav da za svaki $K \geq K^*$ lokalno optimalno rješenje λ^* problema (1.19) *zajedno sa optimalnim rješenjem* (x^*, y^*) *problema* (1.20)*, daju lokalno optimalno rješenje problema* (1.4)*,* (1.11).

Globalna optimizacija

Neka je dan optimističan problem linearnog dvorazinskog programiranja:

$$\left\{ \begin{aligned} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y &\rightarrow \min_{x,y} \\ Cy &\leq b \\ y &\geq 0 \\ x &\in \Psi_L(y) \end{aligned} \right. \tag{1.21}$$

gdje je $\Psi_L(y)$ skup optimalnih rješenja donje razine problema (1.4) te neka je

$$\varphi_L(y) = \min_x \{c^\top x \ : \ Ax + By \leq a, \ x \geq 0\}$$

optimalna funkcija cilja istog problema.

Teorem 1.6.3. *Optimalna vrijednost funkcije φ_L je konveksna i afina na skupu $\varphi_L = \{y \ : \ \varphi_L \leq \infty\}$. Štoviše, i na skupu gdje je $\varphi_L \equiv -\infty$ ili $\varphi_L > -\infty$ za svaki y.*

Funkciju φ_L možemo iskoristiti za formulaciju problema ekvivalentnom problemu (1.21):

$$\begin{aligned} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y \to \ \min_{x,y} \\ Ax + By \leq a, \ x \geq 0, \\ Cy \leq b, \ y \geq 0, \\ c^\top x \leq \varphi_L(y) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ovo je problem optimizacije s obrnuto konveksnim ograničenjem. Prvo se problem transformira u kvazikonkavno optimizacijski problem na sljedeći način.

Neka je $(\overline{x}, \overline{y})$ optimalno rješenje linearnog problema

$$\begin{aligned} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y \to \ \min_{x,y} \\ Ax + By \leq a, \ x \geq 0, \\ Cy \leq b, \ y \geq 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ako je dano rješenje dopustivo za (1.22) tada je optimalno i za problem (1.21). Stoga, sljedeće pretpostavimo $c^\top x > \varphi_L(y)$. Neka su

$$D = \{(x, y) \ : \ Ax + By \leq a, \ Cy \leq b, \ x, y \geq 0\} - \{(\overline{x}, \overline{y})\}$$

i

$$C = \{(x, y) \ : \ c^\top x \geq \varphi_L(y)\} - \{(\overline{x}, \overline{y})\}.$$

Općenito, razliku skupova $A - B$ radimo pomoću definicije Minkowskog:

$$A - B = \{z \ : \ \exists a \in A, \ \exists b \in B, \ z = a - b\}.$$

Skupovi C i D konstruirani su tako da $0 \in (intC) \cap D$ i D je konveksi poliedar. Za oba skupa pretpostavljamo da su neprazni inače problem (1.22) nema rješenje. C je koveksan skup imajući polarni skup

$$C^\circ = \{(\lambda, v) \ : \ \lambda^\top x \ + \ v^\top y \leq 0, \ \forall (x,y) \in C\}.$$

Promotrimo točku

$$(\overline{r}, \overline{s}) \in K := \{(r,s) \ : \ Bs \leq 0, \ c^\top r \geq 0\}.$$

Tada, $A\overline{x} + B(\overline{y} + t\overline{s}) \leq a$, $c^\top(\overline{x} + t\overline{s}) \geq c^\top \overline{x}$ za sve $t \geq 0$. Stoga, koveksni konus K je podskup skupa C, $K \subseteq C$. Doista, $\overline{x}$ je dopustivi za problem (1.4), sa $y = \overline{y} + t\overline{s}$ povlači:

$$c^\top(\overline{x} + t\overline{s}) \geq c^\top \overline{x} \geq \varphi_L(\overline{y} + t\overline{s}), \ \forall t \geq 0.$$

Tako,

$$C^\circ \subseteq K^\circ = cone\{a_0, a_1, ..., a_p\}, \tag{1.24}$$

gdje je $a_0 = (-c \ 0)^\top$, $a_k = (0 \ B_k)^\top$, B_k označava k-ti redak matrice B. Upotrebom skupova C, D problem (1.22) možemo ekvivalentno zapisati kao

$$\begin{cases} d_1^\top x \ + \ d_2^\top y \to \min\limits_{x,y} \\ (x,y) \in D \setminus intC \end{cases} \tag{1.25}$$

Neka vrijedi $(x,y) \notin C$. Tada postoji $(\lambda, v) \in C^\circ$ takav da $\lambda^\top x \ + \ v^\top y > 0$. Kako je C° konveksan konus, možemo regularizirati tu nejednakost tako da lijeva strana nije manja od 1 za odgovarajući $(\lambda, v) \in C^\circ$. Tako problem (1.25) stavlja dekompoziciju u hijerarhijski problem

$$\min_{\lambda, v}\{f(\lambda, v) : (\lambda, v) \in C^\circ\}, \tag{1.26}$$

gdje je

$$f(\lambda, v) = \inf_{x,y}\{c^\top x \ : \ (x,y) \in D, \ \lambda^\top x \ + \ v^\top y \geq 1\}.$$

Teorem 1.6.4. *Funkcija f je kvazikonkavna i poluneprekidna odozdo. Problemi* (1.21) *i* (1.26) *su ekvivalentni u sljedećem smislu: Globalna optimalna rješenja oba problema su jednaka i ako je* $(\overline{\lambda}, \overline{v})$ *rješenje od* (1.26)*, tada bilo koji*

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \arg\min_{x,y}\{c^\top x \ : \ (x,y) \in D, \ \lambda^\top x \ + \ v^\top y \geq 1\}$$

rješava (1.21).

Stoga, za rješavanje problema (1.21) dovoljno je riješiti problem (1.26) što se može učiniti primjenom pristupa grananja i ograničavanja koje započinje minimiziranjem funkcije $f(\lambda, v)$ na nekom simpleksu T s $C^\circ \subset T$. Rješenje od (1.26) dobit ćemo podjelom skupa T na sve manje i manje, jednostavnije simplekse. Početni simpleks sastavljen je od vektora a^j, $j = 0, ..., p$ i grananje se u osnovi vrši particioniranjem konusa K°. Za ograničavanje, riješen je linearni program čija se optimalna vrijednost funkcije može upotrijebiti za rješavanje donjih ograničenja za $f(\lambda, v)$. Detaljan opis algoritma može se naći u [9], dok je slična ideja za globalno rješenje linearnog dvorazinskog problema dana u [8].

Poglavlje 2

Dvorazinska optimizacija

U ovom poglavlju istražit ćemo dvorazinsku optimizaciju u nešto općenitijem smislu, odnosno bez pretpostavke linearnosti funkcija na obje razine. U prvom potpoglavlju iznijet ćemo nužne i dovoljne uvjete optimalnosti dok u drugom jedan od mnogih algoritama za rješavanje problema dvorazinskog programiranja.

2.1 Uvjeti optimalnosti

Neka je

$$\Psi(y) = \arg\min_x \{f(x,y) : g(x,y) \le 0,\ h(x,y) = 0\}$$

skup rješenja *donje razine* problema dvorazinske optimizacije:

$$\begin{cases} f(x,y) \to \min\limits_x \\ g(x,y) \le 0 \\ h(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Promatramo problem dvorazinske optimizacije

$$\begin{cases} F(x,y) \to \min\limits_y \\ y \in Y \\ x \in \Psi(y) \end{cases} \tag{2.2}$$

gdje je $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ zatvoren skup. Ovaj problem zovemo problemom *gornje razine*. Skup Y je dan sa eksplicitnim nejednakostima ograničenja, $Y := \{y : G(y) \leq 0\}$, gdje je $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$.

Pretpostavimo da je optimalno rješenje donje razine problema jedinstveno određeno za svaki $y \in Y$.

Definicija 2.1.1. *Točka* $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *je lokalno optimalno rješenje za problem* (2.2) *ako je* $y^* \in Y$, $x^* \in \Psi(y^*)$ *i ako postoji otvorena okolina* $U_\delta(y^*), \delta > 0$ *tako da* $F(x, y) \geq F(x^*, y^*)$ *za sve* (x, y) *koji zadovoljavaju* $y \in Y \cap U_\delta(y^*)$, $x \in \Psi(y)$. *Ako je* $\delta = \infty$, *točka* (x^*, y^*) *je globalno optimalno rješenje.*

Definicija (2.1.1) opisuje slučaj kada donositelj odluka na gornjoj razini (tzv. *vodeći*) može predvidjeti optimalno rješenje $x(y)$ donositelja odluka na donjoj razini problema (tzv. *sljedbenik*). Stoga, on mora riješiti problem

$$\min_y \{F(x(y), y) : y \in Y\},$$

što je neprekidni problem optimizacije pod uvjetom da je funkcija optimalnog rješenja donje razine neprekidna za svaki $y \in Y$.

Označimo s $M : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ preslikavanje

$$M(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x, y) \leq 0, h(x, y) = 0\}.$$

Za lakše razumijevanje i sagledavanje sljedećeg rezulata, dat ćemo dvije definicije, odnosno pretpostavke.

Definicija 2.1.2. *(**C** - pretpostavka kompaktnosti)*
Kažemo da vrijedi pretpostavka (C) ako je skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g(x, y) \leq 0,\ h(x, y) = 0\}$$

neprazan i kompaktan.

Definicija 2.1.3. *(**MFCQ** - Mangasarian-Fromowitzov uvjet)*
Kažemo da vrijedi pretpostavka (MFCQ) za (x^0, y^0) *ako postoji smjer* $d \in \mathbb{R}^n$ *tako da vrijedi*

$$\begin{cases} \nabla_x g_i(x^0, y^0) d < 0 \,, \forall i \in I(x^0, y^0) := \{j : g_j(x^0, y^0) = 0\} \\ \nabla_x h_j(x^0, y^0) d = 0 \,, \forall j = 1, ..., q \end{cases}$$

gdje su $\{\nabla_x h_j(x^0, y^0) : \ j = 1, ..., q\}$ *linearno nezavisni.*

Teorem 2.1.4. *Promotrimo problem dvorazinske optimizacije* (2.1), (2.2) *i neka vrijede pretpostavke (C) i (MCFQ) za sve točke* $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times Y$ *te neka vrijedi* $x \in M(y)$. *Nadalje, neka problem* (2.1) *ima jedinstveno optimalno rješenje za svaki* $y \in Y$. *Tada, problem dvorazinske optimizacije ima globalno optimalno rješenje uz uvjet da ima dopustivo rješenje.*

Za dokaz teorema 2.1.4 bit će nam potrebni sljedeća definicija i teorem, koje navodimo redom bez dokaza teorema.

Definicija 2.1.5. *Preslikavanje $\Gamma : \mathbb{R}^k \to 2^{\mathbb{R}^l}$ je poluneprekidno odozgo u točki $z \in \mathbb{R}^k$ ako za svaki otvoreni skup Z tako da $\Gamma(z) \subset Z$, postoji otvorena okolina $U_\delta(z)$ točke z tako da $\Gamma(z') \subset Z$, za svaki $z' \in U_\delta(z)$. Γ je poluneprekidno odozdo u točki $z \in \mathbb{R}^k$ ako za svaki otvoreni skup Z tako da $\Gamma(z) \cap Z \neq \emptyset$, postoji otvorena okolina $U_\delta(z)$ tako da $\Gamma(z') \cap Z \neq \emptyset$, za svaki $z' \in U_\delta(z)$.*

Teorem 2.1.6. *Ako za problem* (2.1) *vrijede pretpostavke (C) i (MFCQ), preslikavanje globalnog rješenja Ψ je poluneprekidna odozgo u y^0.*

Dokaz. (Teorem 2.1.4)
Iz jedinstvenosti optimalnog rješenja problema (2.1), problem (2.1), (2.2) je ekivivalentan problemu

$$\min\{F(x(y), y) : y \in Y\}.$$

Zbog pretpostavki (C), (MFCQ) u vezi teorema 2.1.6, funkcija cilja ovog problema je neprekidna. Stoga, tvrdnja teorema slijedi iz Weierstrassovog teorema. □

Pretpostavimo sada da optimalno rješenje donje razine problema nije jedinstveno određeno.
Ako je vodeći u mogućnosti uvjeriti sljedbenika da odabere globalno optimalno rješenje koje je najbolje za vodećeg, tada on mora riješiti problem

$$\min_y\{\varphi_o(y) : y \in Y\}, \tag{2.3}$$

gdje je

$$\varphi_o(y) = \min_x\{F(x, y) : x \in \Psi(y)\}. \tag{2.4}$$

Definicija 2.1.7. *Točka $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ je lokalno optimistično rješenje problema* (2.2) *ako za $y^* \in Y$, $x^* \in \Psi(y^*)$ vrijedi*

$$F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*)\ \forall x \in \Psi(y^*)$$

i postoji otvorena okolina $U_\delta(y^*)$, $\delta > 0$ tako da

$$\varphi_o(y^*) \leq \varphi_o(y), \quad \forall y \in Y \cap U_\delta(y^*).$$

Točka (x^*, y^*) je globalno optimistično rješenje ako je $\delta = \infty$.

Problem (2.1), (2.3), (2.4) zovemo *optimističnim dvorazinskim problemom*.

Ako su pretpostavke teorema 2.1.6 zadovoljene, tada je skup

$$\{(x, y) : x \in \Psi(y)\}$$

zatvoren i presjek sa skupom $\mathbb{R}^n \times Y$ je kompaktan ako je Y zatvoren prema pretpostavci (C). To povlači da se postiže točka minimuma sljedećeg problema

$$\min_{x,y}\{F(x, y) : x \in \Psi(y),\ y \in Y\}. \tag{2.5}$$

Tako se globalne optimalne vrijednosti problema (2.3) i (2.5) podudaraju. Općenito, ovo ne vrijedi za lokalna optimalna rješenja.

Teorem 2.1.8. *Neka vrijede pretpostavke (C) i (MFCQ) za sve točke* $(x, y) \in \mathbb{R} \times Y$ *za koje vrijedi* $x \in M(y)$*. Tada globalno optimistično rješenje problema dvorazinskog programiranja* (2.1)*,* (2.3)*,* (2.4) *postoji uz uvjet da postoji dopustivo rješenje.*

Kada vodeći nije u mogućnosti utjecati na odabir sljedbenika, tada je izlaz iz neugodne situacije ograničavanje štete koju je uzrokovao neželjeni odabir sljedbenika. Ovo vodi problemu

$$\min_{y}\{\varphi_p(y) : y \in Y\}, \tag{2.6}$$

gdje je

$$\varphi_p(y) = \max_{x}\{F(x, y) : x \in \Psi(y)\}. \tag{2.7}$$

Definicija 2.1.9. *Točka* $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *je lokalno pesimistično rješenje problema* (2.2) *ako za* $y^* \in Y,\ x^* \in \Psi(y^*)$ *vrijedi*

$$F(x^*, y^*) \geq F(x, y^*)\ \forall x \in \Psi(y^*)$$

i postoji otvorena okolina $U_\delta(y^*),\ \delta > 0$ *tako da*

$$\varphi_p(y^*)\ \leq \varphi_p(y), \quad \forall y \in Y \cap U_\delta(y^*).$$

Točka (x^*, y^*) *je globalno pesimistično rješenje ako je* $\delta = \infty$*.*

Problem (2.1), (2.6), (2.7) zovemo *pesimističnim dvorazinskim problemom*.

Teorem 2.1.10. *Razmotrimo problem* (2.1)*,* (2.6)*,* (2.7)*. Neka je preslikavanje* Ψ *poluneprekidno odozdo u svakoj točki* $y \in Y$ *i pretpostavimo da vrijedi pretpostavka (C). Tada globalno pesimistično rješenje postoji uz uvjet da problem* (2.6) *ima dopustivo rješenje.*

Dokaz. Budući da je preslikavanje Ψ poluneprekidno odozdo, optimalna vrijednost funkcije φ_p je poluneprekidna odozdo. Stoga, funkcija poprima minimum na kompaktnom skupu Y uz uvjet da taj skup nije prazan. □

2.2 Algoritmi rješenja

Promatramo problem dvorazinskog programiranja sa eksplicitnom funkcijom ograničenja na gornjoj razini:

$$\begin{cases} F(x,y) \to \min\limits_{y} \\ \quad G(y) \leq 0 \\ \quad x \in \Psi(y) \end{cases} \tag{2.8}$$

gdje je $\Psi(y)$ definiran sa (2.1) i pretpostavljamo da je optimalno rješenje jedinstveno za sve vrijednosti parametra y. Tada, problem se reducira u problem jedne razine

$$\begin{cases} \mathcal{F}(y) = F(x(y),y) \to \min\limits_{y} \\ \qquad G(y) \leq 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Prije algoritma, definirat ćemo nekoliko pretpostavaka te iskaze teorema koji su nam potrebni.

Definicija 2.2.1. *(**CRCQ** - klasifikacija stalnog ranga ograničenja)*
Kažemo da vrijedi pretpostavka (CRCQ) za problem (2.1) *u točki* $(x,y) = (x^0,y^0)$ *ako postoji otvorena okolina* $W_\varepsilon(x^0,y^0)$, $\varepsilon > 0$ *tako da za svaki podskup*

$$I \subseteq I(x^0,y^0) := \{i : g_i(x^0,y^0)\},\ J \subseteq \{1,...,q\},$$

familija vektora gradijenata $\{\nabla_x g_i(x,y) : i \in I\} \cup \{\nabla_x h_j(x,y) : j \in J\}$ *ima isti rang za sve* $(x,y) \in W_\varepsilon(x^0,y^0)$

Definicija 2.2.2. *(SSOC - strogo dovoljan optimalan uvjet drugog reda)*
Kažemo da vrijedi pretpostavka (SSOC) u točki (x^0, y^0) *ako za svaki* $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^0, y^0)$ *i za svaki* $d \neq 0$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} &\nabla_x g_i(x^0, y^0)d = 0\,,\ \textit{za svaki}\ i \in J(\lambda) := \{j : \lambda_j > 0\}, \\ &\nabla_x h_j(x^0, y^0)d = 0\,,\ \textit{za svaki}\ j = 1, ..., q. \end{aligned} \tag{2.10}$$

imamo

$$d^\top \nabla^2_{xx} L(x^0, y^0, \lambda, \mu)d > 0$$

Funkcija L je Lagrangeova funkcija, a skup Λ je skup Lagrangeovih multiplikatora

$$\Lambda(x, y) := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : \lambda \geq 0,\ \lambda^\top g(x, y) = 0,\ \nabla_x L(x, y, \lambda, \mu) = 0\}.$$

Lokalno optimalno rješenje $x^0 \in \Psi_{loc}(y^0)$ je *snažno stabilno* ako postoje otvorene okoline $U_\delta(y^0)$, $\delta > 0$ točke y^0 te $V_\varepsilon(x^0)$, $\varepsilon > 0$ točke x^0, i jedinstveno određena neprekidna funkcija $x : U_\delta(y^0) \to V_\varepsilon(x^0)$ tako da je $x(y)$ jedinstveno lokalno optimalno rješenje problema (2.1) u $V_\varepsilon(x^0)$ za sve $y \in U_\delta(y^0)$.

Skup $\Psi_{loc}(y)$ je skup svih lokalnih minimuma problem (2.1):

$$\Psi_{loc}(y) := \{x \in M(y) : \exists \varepsilon > 0,\ f(x, y) \leq f(z, y),\ \forall z \in M(y) \cap V_\varepsilon(x)\},$$

gdje je

$$V_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{R}^n :\| x - z \|< \varepsilon\}.$$

Teorem 2.2.3. *Neka je* $y^0 \in \mathbb{R}^m$ *i neka vrijede pretpostavke (MFCQ) i (SSOC) za problem* (2.1) *u točki* $(x, y) = (x^0, y^0)$, $x^0 \in \Psi_{loc}(y^0)$. *Tada je lokalno optimalno rješenje* x^0 *snažno stabilno.*

Teorem 2.2.4. *Promotrimo problem* (2.1) *u točki* $y = y^0$ *i neka vrijede pretpostavke (MFCQ), (SSOC) i (CRCQ) za stacionarnu točku* $x^0 \in SP(y^0)$. *Tada, prema teoremu 2.2.3, jedinstveno određena funkcija* $x(y)$, $\{x(y)\} = \Psi_{loc}(y) \cap V_\varepsilon(x^0)$ *je* PC^1 *funkcija.*

Teorem 2.2.5. PC^1 *funkcije su lokalno Lipschitz neprekidne.*

Definicija 2.2.6. *Funkcija* $z : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *je diferencijabilna u smjeru* r *u točki* x^0 *ako za svaki smjer* $r \in \mathbb{R}^p$ *postoji limes:*

$$z'(x^0; r) := \lim_{t \to 0+} t^{-1}[z(x^0 + tr) - z(x^0)].$$

Vrijednost $z'(x^0; r$ *je derivacija funkcija* z *u točki* $x = x^0$ *u smjeru* r.

Teorem 2.2.7. *Promotrimo problem* (2.1) *u točki* $y = y^0$*, neka je* $x^0 \in \Psi_{loc}(y^0)$ *lokalno optimalno rješenje te neka vrijede pretpostavke (MFCQ), (SSOC) i (CRCQ). Tada je derivacija funkcije* x *u točki* $y = y^0$ *u smjeru* r *istovjetna jedinstvenom optimalnom rješenju problema konveksnog kvadratičnog programiranja* $QP(\lambda^0, \mu^0, r)$

$$
\begin{gathered}
0.5 d^\top \nabla^2_{xx} L(x^0, y^0, \lambda^0, \mu^0) d + d^\top \nabla^2_{yx} L(x^0, y^0, \lambda^0, \mu^0) r \to \min_d \\
\nabla_x g_i(x^0, y^0) d + \nabla_y g_i(x^0, y^0) r \begin{cases} = 0\,, \text{ ako je } i \in J(\lambda^0) \\ \leq 0\,, \text{ ako je } i \in I(x^0, y^0) \setminus J(\lambda^0) \end{cases} \\
\nabla_x h_j(x^0, y^0) d + \nabla_y h_j(x^0, y^0) r = 0, \ \forall j = 1, ..., q
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

za proizvoljne vektore $(\lambda^0, \mu^0) \in \Gamma(x^0, y^0)$ *koji rješavaju problem*

$$
\nabla_y L(x^0, y^0, \lambda, \mu) r \to \max_{(\lambda, \mu) \in \Gamma(x^0, y^0)} \tag{2.12}
$$

Definicija 2.2.8. *(**ULR** - regularnost gornje razine problema)*
Neka je dano dopustivo rješenje (x^0, y^0)*. Kažemo da je zadovoljena pretpostavka (ULR) ako vrijedi*

$$
\{r : \nabla G_j(y^0) r < 0, \ j \in \{i : G_i(y^0) = 0\}\} \neq \emptyset
$$

Teorem 2.2.9. *Neka je* (x^0, y^0) *lokalno optimalno rješenje problema dvorazinskog programiranja* (2.1), (2.2) *i pretpostavimo da je problem donje razine* (2.1) *konveksan parametarski problem koji zadovoljava uvjete (MFCQ), (SSOC) i (CRCQ) u točki* (x^0, y^0)*. Tada sljedeći optimizacijski problem ima nenegativnu optimalnu vrijednost funkcije cilja:*

$$
\begin{gathered}
\alpha \to \min_{\alpha, r} \\
\nabla_x F(x^0, y^0) x'(y^0; r) + \nabla_y F(x^0, y^0) r \ \leq \ \alpha \\
\nabla G_i(y^0) r \ \leq \ \alpha, \ \forall i : G_i(y^0) = 0 \\
\| \, r \, \| \leq \ 1
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

Nadalje, ako je zadovoljena pretpostavka (URL), problem (2.13) *se može zamijeniti sa*

$$\nabla_x F(x^0, y^0)x'(y^0; r) + \nabla_y F(x^0, y^0)r \to \min_r$$

$$\nabla G_i(y^0)r \ \leq \ 0, \ \forall i : G_i(y^0) = 0 \tag{2.14}$$

$$\| \, r \, \| \leq \ 1$$

Pretpostavimo da je donja razina problema (2.1) konveksan parametarski optimizacijski problem i da vrijede pretpostavke (MFCQ), (CRCQ) i (SSOC) za sve točke (x, y) tako da $x \in \Psi(y)$, $G(y) \leq 0$. Tada je jedinstveno optimalno rješenje snažno stabilno prema teoremu 2.2.3, to je PC^1 funkcija prema teoremu 2.2.4 i stoga lokalno Lipschitz neprekidna (teorem 2.2.5). Prema tome, funkcija cilja problema (2.9) je diferencijabilna po smjeru (teorem 2.2.7). Ovo motivira za prototip *silaznog algoritma*:

Ulaz: Problem dvorazinske optimizacije (2.1), (2.8)
Izlaz: Clarkeovo stacionarno rješenje

1. Odaberi y^0 koji zadovoljava $G(y^0) \leq 0$, postavi $k := 0$, odaberi $\varepsilon, \ \delta, \ \in (0, 1)$.
2. Izračunaj smjer r^k, $\| \, r^k \, \| \leq 1$, tako da
   $\mathcal{F}'(y^k; r^k) \leq s^k, \quad \nabla_y G_i(y^k) r^k \leq -G_i(y^k) + s^k, \quad i = 1, ..., l$ i $s^k < 0$.
3. Odaberi korak t^k takav da $\mathcal{F}(y^k + t^k r^k) \leq \mathcal{F}(y^k) + \varepsilon t^k s^k, \quad G(y^k + t^k r^k) \leq 0$.
4. Postavi $y^{k+1} := y^k + t^k r^k$, izračunaj $x^k \in \Psi(y^k)$, postavi $k := k + 1$
5. Ako je kriterij zaustavljanja zadovoljen STOP, inače odi na korak 2.

Za izračunavanje smjera silaska, možemo iskoristiti nužne uvjete optimalnosti iz teorema 2.2.9 i formulu za izračunavanje derivacije smjera funkcije rješenja donje razine problema danu u teoremu 2.2.7. Ovo vodi sljedećem problemu, rješiv za neki skup indeksa $K^k \in \mathcal{I}(\lambda^k)$ i vektor $\nu^k := (\lambda^k, \mu^k) \in E\Lambda(x^k, y^k)$, gdje je $E\Lambda(x^k, y^k)$ vrh skupa $\Lambda(x^k, y^k)$ te $z^k := (x^k, y^k)$:

$$\begin{gathered}
s \to \min_{d,r,\gamma,\eta,s} \\
\mathcal{F}'(y^k; r^k) := \nabla_x F(z^k)d + \nabla_y F(z^k)r \leq s \\
\nabla_y G_i(y^k)r \leq -G_i(y^k) + s, \ i = 1, ..., l \\
\nabla^2_{xx} L(z^k, v^k)d + \nabla^2_{xy} L(z^k, v^k)r + \nabla^\top_x g(z^k)\gamma + \nabla^\top_x h(z^k)\eta = 0 \\
\nabla_x g_i(z^k)d + \nabla_y g_i(z^k)r \begin{cases} = 0 & , i \in K^k \\ \leq -g_i(x^k, y^k) + s & , i \notin K^k \end{cases} \\
\nabla_x h_j(z^k)d + \nabla_y h_j(z^k)r = 0, \ j = 1, ..., q \\
\lambda_i + \gamma_i + s \geq 0, \ i \in K^k, \ \gamma = 0, \ i \notin K^k, \ \| r \| \leq 1.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Definiramo linearni problem $S(r)$ za računanje derivacije u smjeru, optimalne funkcije rješenja s

$$S(r) := \arg\max_{\lambda,\mu}\{\nabla_y L(x^0, y^0, \lambda, \mu)r : (\lambda, \mu) \in \Gamma(x^0, y^0)\}.$$

Neka je $(d^k, r^k, \gamma^k, \eta^k, s^k)$ dopustivo rješenje (2.15), $s^k < 0$. Tada, nije potrebna provjera da li je izračunati smjera r^k takav da $(\lambda^k, \mu^k) \in S(r^k)$ obzirom da problem $QP(\lambda^k, \mu^k, r^k)$ ima dopustivo rješenje ako i samo ako $(\lambda^k, \mu^k) \in S(r^k)$. Nužni i optimalni uvjeti optimalnosti problema $QP(\lambda^k, \mu^k, r^k)$ sadržani su u ograničenjima problema (2.15) za odgovarajući skup indeksa $K^k \in \mathcal{I}(\lambda^k)$. Pomoću teorema (2.2.9) možemo vidjeti da problem (2.15) ima negativno optimalno rješenje za neki skup indeksa $K^k \in \mathcal{I}(\lambda^k)$ i vektor $v^k := (\lambda^k, \mu^k) \in E\Lambda(x^k, y^k)$, tada točka (x^k, y^k) nije lokalno optimalna.

U nastavku bit će nam potrebna još jedna pretpostavka te ju navodimo kao i definiciju Clarkeove stacionarne točke.

Definicija 2.2.10. ***(FRR** - puni rang po retcima)*

Kažemo da vrijedi pretpostavka (FRR) ako za svaki vektor $v^0 \in \Gamma(z^0)$ matrica:

$$M := \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(z^0, v^0) & \nabla^\top_x g_{J(\lambda^0}(z^0) & \nabla^\top_x h(z^0) & \nabla^2_{yx} L(z^0, v^0) \\ \nabla_x g_{I_0}(z^0) & 0 & 0 & \nabla_y g_{I_0}(z^0) \\ \nabla_x h(z^0) & 0 & 0 & \nabla_y h(z^0) \end{pmatrix}.$$

ima rang $n+ \mid I_0 \mid +q$.

Definicija 2.2.11. *(Clarkeova stacionarna točka)*

Neka su $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *i* $\bar{z} \in \mathbb{R}^p$. *Ako je u lokalno Lipschitz neprekidna, uz uvjet* $0 \in \partial u(\bar{z})$, $\bar{z}$ *je Clarkeova stacionarna točka.*

Primjenjujući rezultirajući algoritam na problem dvorazinskog programiranja, dobivamo konvergenciju prema Clarkeovoj stacionarnoj točki:

Teorem 2.2.12. *Promatramo problem* (2.1), (2.8) *s konveksnim parametarskim problemom donje razine, te neka vrijede pretpostavke (C),(ULR), (FRR), (MFCQ),(CRCQ) i (SSOC) za sve* (x, y), $x \in \Psi(y)$, $G(y) \leq 0$. *Tada, niz izračunat algoritmom* $\{x(y^k), y^k, r^k, d^k, \lambda^k, \mu^k, \gamma^k, \eta^k, s^k, K^k\}_{k=1}^{\infty}$, *niz* $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ *ima nulu kao jedino gomilište.*

Korolar 2.2.13. *Promatramo problem* (2.1), (2.8) *te neke vrijede pretpostavke Teorema 2.2.12. Tada, svako gomilište* (x^0, y^0) *niza iteracija je Clarkeova stacionarna točka.*

Poglavlje 3

Primjene dvorazinske optimizacije

Istraživanje problema dvorazinskog programiranja je snažno motivirano primjenama u stvarnom svijetu. U literaturi se mogu naći zanimljivi primjeri, a neke od njih navest ćemo u ovom poglavlju.

3.1 Stackelbergove igre

Ekonomija tržišta

U svojoj knjizi o ekonomiji tržišta, H.V. Stackelberg po prvi puta koristi hijerarhijsku strukturu kako bi opisao stvarnu situaciju na tržištu. Ovaj model se posebno reflektira na slučaj kada različiti donositelji odluka pokušavaju realizirati najbolje odluke na tržištu obzirom na njihove vlastite, općenito različitim ciljevima i često nisu u mogućnosti samostalno realizirati svoje odluke već su prisiljeni djelovati prema određenoj hijerarhiji.

Promotrit ćemo najjednostavniji slučaj gdje postoje samo dva donositelja odluka. Tada prema hijerarhiji, jedan donositelj odluka djeluje samostalno na tržištu tzv. *vođa*, dok drugi ne djeluje samostalno tzv. *sljedbenik*. Vođa može diktirati prodajne cijene ili da preoptereti tržište sa svojim proizvodima ali u svom odabiru mora predvidjeti moguće reakcije sljedbenika budući da njegov profit ovisi i o odgovoru (odazivu) sljedbenika. S druge strane, odabir vođe utječe na skup mogućih odluka kao i na ciljeve sljedbenika koji tako mora reagirati na izbor vodećeg. Očito je da će vodeći, koji djeluje neovisno na tržištu, pokušati iskoristiti prednost i ostvariti veći profit.

Problem koji moramo riješiti zove se tzv. *Stackelbergova igra*, koji ćemo formulirati na sljedeći način.

Neka su X i Y skupovi dopustivih strategija x i y sljedbenika i vođe. Pretpostavimo da su vrijednosti izbora mjerene aritmetičkom sredinom funkcija $f_L(x,y)$ i $f_F(x,y)$, koje označavaju funckije korisnosti vođe odnosno sljedbenika. Znajući izbor y sljedbenik mora odabrati svoju najbolju strategiju $x(y)$ tako da njegova funkcija korisnosti poprima maksimum na skupu X:

$$x(y) \in \Psi(y) \ := \ \arg\max_x \{f_F(x, y) \ : \ x \in X\}.$$

Pazeći na taj izbor, vođa rješava Stackelbergovu igru kako bi dobio svoj najbolji odabir:

$$\max_y \{f_L(x, y) \ : \ y \in Y, \ x \in \Psi(y) \ \}.$$

Problemi dvorazinskog programiranja su općenitiji od Stackelbergovih igra u smislu da oba dopustiva skupa mogu ovisiti o odlukama donositelja odluka.

Cournot-Nashova ravnoteža

Promotrimo primjer gdje n donositelja odluka (poduzeća) proizvode jedan homogen proizvod u količinama $x_i, \ i = 1, ..., n$. Pretpostavimo da su sve troškovne funkcije $f_i(x_i)$ diferencijabilne, konveksne i nenegativne, te poduzeća ostvaruju dobit $x_i p(\sum_{j=1}^n x_j)$ na zajedničkom tržištu prodavajući svoje proizvode. Ovdje je $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. funkcija obrnute potražnje koja opisuje ovisnost tržišne cijene o ponuđenoj količini tog proizvoda. Pretpostavimo da je funkcija p kontinuirano diferencijabilna, strogo konveksna i padajuća na skupu $\mathbb{R}_{++}$, ali funkcija $g(x) = xp(x)$ je tamo konkavna. Neka je $Y_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}_{++}$ ograničen interval gdje poduzeće i vjeruje da ima profitabilnu proizvodnju. Za računanje optimalne količine koja donosi maksimalan profit, poduzeće i mora riješiti problem:

$$\max_{x_i} \left\{ \ x_i p(\sum_{j=1}^n x_j) - f_i(x_i) \ : \ x_i \in Y_i \ \right\} \tag{3.1}$$

čije je optimalno rješenje $x_i(x_{-i})$, gdje je $x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)^\top$.

Promotrimo sada situaciju kada npr poduzeće 1 ima prednost nad ostalim poduzećima u smislu da može popraviti proizvedenu količinu x_1 i da će sva ostala poduzeća reagirati na tu količinu. Tada, poduzeća $2, ..., n$ računaju Nashovu ravnotežu između njih rješavajući $n - 1$ problema (3.1) za $i = 2, ..., n$ istovremeno.

Neka je

$$p(\sum_{i=2}^n b_i) - f_1(0) \ > \ 0.$$

To povlači da poduzeće 1 proizvodi pozitivnu količinu. Pretpostavimo da je Nashova ravnoteža $(x_2(x_1), ..., x_n(x_1))^\top$ između poduzeća $2, ..., n$ jedinstveno određena za svaki fiksni x_1. Tada poduzeće 1 mora riješiti idući problem kako bi realizirala maksimalan profit:

$$\max_{x_1} \left\{ \ x_1 p(\sum_{j=1}^n x_j) - f_1(x_1) \ : \ x_1 \in Y_1, \ x_i = x_i(x_1), \ i = 1, ..., n \ \right\},$$

koji se može zapisati u sljedećoj formi:

$$
\begin{gathered}
x_1 p(\sum_{j=1}^{n} x_j) - f_1(x_1) \to \max_{x_1} \\
x_1 \in Y_1 \\
x_i \in \arg\max_{x_i} \left\{ x_i p \sum_{j=1}^{n} x_j - f_i(x_i) \ : \ x_i \in Y_i \right\}, \ i = 2, ..., n.
\end{gathered}
$$

3.2 Optimalne kemijske ravnoteže

U proizvodnji tvari kemijskim reakcijama često moramo odgovoriti na pitanje kako sastaviti takvu smjesu kemijskih tvari tako da:

• tvar koju želimo proizvoditi stvarno nastaje kao rezultat kemijskih reakcija u reaktoru

• količina ove tvari trebala bi biti što veća ili bi neka druga (otrovna ili nagrizajuća) tvar trebala biti prazna ili barem u maloj količini.

Ovaj problem možemo modelirati kao problem dvorazinske optimizacije tako da je gore naveden prvi cilj problem donje razine dok je drugi motivacija za funkciju cilja gornje razine.

Krenimo sa problemom donje razine. Iako kemičari tehnički nisu u mogućnosti promatrati pojedinačne kemijske reakcije na visokim temperaturama, konačnu točku sustava modeliraju problemom konveksnog programiranja. U tom problemu, $f(x, p, T)$ je minimizirana pod uvjetom da je zadovoljen princip očuvanja mase i mase su nenegativne. Dakle, dobiveno ravnotežno stanje ovisi o tlaku p, temperaturi T i o masama y, tvari koje su stavljene u reaktor:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{N} c_i(p, T) x_i + \sum_{i=1}^{G} x_i \ln \frac{x_i}{z} \to \min_{x} \\
z = \sum_{j=1}^{G} x_j \\
Ax = \overline{A} y, \ x \geq 0,
\end{gathered}
$$

gdje $G \leq N$ označava broj plinovitih tvari, a N ukupan broj tvari koje reagiraju. Svaki redak matrice A odgovara kemijskom elementu, svaki stupac tvari. Dakle, stupac daje količinu različitih elemenata u tvarima, x je vektor masa tvari u rezultirajućoj kemijskoj ravnoteži, dok y označava početne mase tvari stavljene u reaktor. $\overline{A}$ je podmatrica matrice A koja se sastoji od stupaca koji odgovaraju početnim tvarima. Vrijednost od $c_i(p, T)$ daje kemijski potencijal tvari koja ovisi o tlaku p i temperaturi T. Neka $x(p, T, y)$ označava jedinstveno optimalno rješenje ovog problema. Varijable p, T, y mogu smatrati parametrima kemijske reakcije. U kemijskim reakcijama želimo postignuti što bolji rezultat, npr. cilj nam je da masa jedne tvari bude što veća ili što manja u rezultirajućoj ravnoteži. Da bi se postigao taj cilj, parametri p, T, y trebaju se odabrati tako da rezultirajuća kemijska ravnoteža što bolje zadovoljava ukupan cilj:

$$\langle c, x\rangle \to \min_{p,T,y}$$
$$(p, T, y) \in Y,\ x = x(p, T, y).$$

3.3 Ekonomija okoliša

Proizvodnja biogoriva

Vođena visokim subvencijama za poljoprivredni sektor i potrebom za smanjenjem zagađenja okoliša povezanog s automobilskim emisijama, francuska vlada odlučila je istražiti mogućnosti poticanja petrokemijske industrije da koristi poljoprivredne usjeve za proizvodnju biogoriva. U tu svrhu mogu se koristiti različiti neprehrambeni usjevi poput pšenice, kukuruza, repice i sunokreta. Nažalost, industrijski troškvi za proizvodnju biogoriva iz neprehrambenih usjeva znantno su veći nego kad se sirovine na bazi ugljikovodika koriste za proizvodnju goriva. Da bi se industrija potaknula da koristi poljoprivrednu proizvodnju, neophodni su vladini poticaji u obliku poreznih olakšica.

Za razvoj jednog mogućeg modela pretpostavlja se da je industrija neutralna i proizvodi bilo koje isplativo biogorivo. Poljoprivredni sektor predstavljen je podskupom gospodarstava u nekoj regiji Francuske. Opisat ćemo model samo za jedno gospodarstvo, koji se lako može povećati dodavanjem dodatnih gospodarstava. Svako gospodarstvo može ostaviti neki dio svog zemljišta neiskorištenog ili ga koristiti za neprehrambene usjeve. U svakom slučaju imat će određeni prihod bilo u obliku državnih izdvojenih plaćanja za ostavljanje dijela zemlje neobrađenim ili u obliku subvencija Europske unije plus prihodi od prodaje neprehrambenih usjeva industriji.

Maksimizirajući ukupnu dobit, gospodarstvo samostalno odlučuje koliko će se zemljišta koristiti za proizvodnju neprehrambenih usjeva, a koliko će ostati neobrađeno. Neka $x_f \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}^p$, $x_c \in \mathbb{R}^q$ označavaju redom količinu neobrađenog zemljišta, zemljište koje se koristi za različite neprehrambene usjeve i zemljište koje se koristi za razne vrste prehrambenih usjeva. Neka je e_p vektor dan sa $e_p = (1, ..., 1)^\top \in \mathbb{R}^p$.

Problem gospodarstva sastoji se od maksimiziranje dohotka gospodarstva

$$\langle p_c, x_c\rangle + \langle p_n + s - c_n, x_n\rangle + \gamma x_f \to \max_{x_f, x_c, x_n} \tag{3.2}$$

$$\langle e^p, x_n\rangle + \langle e^q, x_c\rangle + x_f \le t \tag{3.3}$$

$$\langle e^q, x_c\rangle + x_f = \sigma_1 t \tag{3.4}$$

$$\langle e^p, x_n\rangle \; + \; \langle e^q, x_c\rangle \; + \; \leq \sigma_2 t \tag{3.5}$$

$$x_c \leq t\prime^0, \; x_n \geq 0, \; x_c \geq 0, \; x_f \geq 0 \tag{3.6}$$

ovisno o ograničenjima koja opisuju ukupnu količinu obradive zemlje gospodarstva (3.3), ograničenjima postavljenim od Europske unije (3.4) na postotak zemljišta koji je ostao neobrađen ili se koristi za neprehrambene usjeve, a koja odražavaju agronomska razmatranja (3.5).

Prva nejednakost u (3.6) posebna je veza za proizvodnju šećerne repe. $p_c, \; p_n$ označavaju dohodak i vektor cijena za prehrambene odnosno neprehrambene usjeve, s je vektor subvencija za neprehrambene usjeve koje plaća Europska unija, c_n je trošak gospodarstva za proizvodnju neprehrambenih usjeva i γ je jedinična izdvojena naknada za neiskorišteno zemljište.

Vlada ima ulogu vodećeg u ovom problemu. Cilj je minimizirati ukupan iznos danih poreznih kredita petrokemijskim industrijama umanjene za uštede od naknada za neiskorišteno zemljište. Neka k_r označava vektor jediničnih količina biogoriva r, $r = 1, ..., \omega$, proizvedeno od jedne jedinice različitih neprehrambenih usjeva, te neka je τ_r vladin kredit odobren industriji za biogorivo r. Vlada mora riješiti sljedeći problem

$$\sum_{r=1}^{\omega} \tau_r \langle k_r, x_n\rangle \; - \; \gamma \langle e^p, x_n\rangle \; \to \; \min_{\tau} \tag{3.7}$$

$$\langle e^p, x_n\rangle \; \geq \; t'' \tag{3.8}$$

$$\sum_{r=1}^{\omega} \langle k_r, x_n\rangle \; \leq \; H \tag{3.9}$$

$$p_n = p_n(\tau) \; \leq \; 0, \; \tau \; \leq \; 0 \tag{3.10}$$

$$x_n, \; x_c, \; x_f \text{ rješavaju (3.2) – (3.6)}$$

ovisno o ograničenjima na raspoloživoj zemlji (3.8), količini proizvodenog biogoriva (3.9) i cijena koju plaća industrija za neprehrambene usjeve (3.10).

3.4 Optimalne cestarine

U sve više regija svijeta promet na ulicama ovisi o cestarinama. Kako bismo modelirali takav problem, koristit ćemo usmjereni graf $G = (V, E)$ gdje čvorovi $v \in V := \{1, 2, ..., n\}$ predstavljaju raskrižja u nekoj regiji, a usmjereni rubovi (lukovi) $(i, j) \in E \subset V \times V$ ulice koje vode od raskrižja i do raskrižja j. Zatim, graf se koristi za modeliranje karte ulica u određenoj regiji. Ulice su modelirane kao jednosmjerne, no ako se ulicom može proći u oba smjera, na grafu su to suprotno usmjereni lukovi.

Pretpostavimo da ulice imaju određene kapacitete koji su modelirani kao funkcija $u : E \to \mathbb{R}$ i trošak (ili vrijeme) da vozač prođe jednom ulicom zadana je funkcijom $c : E \to \mathbb{R}$. Ovdje zbog jednostavnosti pretpostavljamo da su troškovi neovisni o protoku prometa. Dalje pretpostavimo da postoji skup T parova čvorova $(q, s) \in V \times V$ za koje postoji određena potražnja d_{qs} prometa koji se odvija od ishodišta q do odredišnih čvorova $s, (q, s) \in T$. Zatim, ako sa x_{qs} označimo dio prometa obzirom na par ishodište-odredište (O-D par) $(q, s) \in T$ koristeći ulicu $e = (i, j) \in E$, problem računanja optimalne vrijednosti sustava prometa može se modelirati kao problem protoka više sredstava:

$$\sum_{(q,s)\in T} \sum_{e\in E} c_e x_e^{qs} \;\to\; \min \tag{3.11}$$

$$x_e \;+\; \sum_{(q,s)\in T} x_e^{qs} \;= u_e,\; \forall e \in E \tag{3.12}$$

$$\sum_{e\in O(j)} x_e^{qs} \;-\; \sum_{e\in I(j)} x_e^{qs} \;= \begin{cases} d_{qs} & , j = q \\ 0 & , j \in V \setminus q, s \; \forall (q, s) \in T \\ -d_{q,s} & , j = s \end{cases} \tag{3.13}$$

$$x_e, x_e^{qs} \;\geq 0,\;\; \forall (q, s) \in T,\; \forall e \in E. \tag{3.14}$$

Ovdje $O(j)$ i $I(j)$ označavaju skupove lukova e koji imaju čvor j kao rep, odnosno glavu, i x_e ja slaba varijabla za luk e, x koristimo kako bismo skratili sve varijable donje razine (uključujući i slabe varijable).

Pretpostavimo sada da trošak prolaska ulicom ovisi i o troškovima cestarine koji se dodaju troškovima prolaska ulicom. Tada je funkcija cilja (3.11) dana sa:

$$\sum_{(q,s)\in T} \sum_{e\in E} (c_e + c_e^t) x_e^{qs} \;\to \min . \tag{3.15}$$

Neka $\Psi(c^t)$ označava skup optimalnih rješenja problema (3.15) obzirom na (3.12) – (3.14), tada je problem računanja najboljeg troška cestarina dan sa:

$$\begin{aligned} f(c^t, x) \;&\to\; \min \\ x &\in \Psi(c^t) \\ c^t &\in C. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Skup C je skup prihvatljivih troškova cestarine, a ciljna funkcija $f(c^t, x)$ može se koristiti za izražavanje različitih ciljeva, npr:

- Maksimiziranje prihoda. U tom slučaju ima smisla pretpostaviti da za svaki par ishodište-odredište $(q, s) \in T$ postoji barem jedan (usmjereni) put od q do s na grafu bez cestarine.
- Smanjivanje prometa u ekološki izloženim područjima.
- Prisiljavanje vozača kamiona da koriste vlakove od jedne do druge utovarne stanice.

3.5 Tržište električne energije s prijenosnim gubicima

U literaturi možemo naći istraživanje o dereguliranim mjestima tržišta električne energije. Ovaj se problem modelira kao generalizirani Nashov problem ravnoteže, gdje svaki igrač rješava problem dvorazinske optimizacije.

Za formuliranje problema pretpostavimo da je dan graf $G = G(V, E)$ gdje se svaki agent (ili igrač) nalazi u jednom od čvorova $i \in V$. Lukovi E su vodovi električne energije. Potražnja D_i na svakom čvoru trebala bi biti poznata kao i da je stvarni trošak za proizvodnju q_i jedinica električne energije na čvoru i jednak $A_i q_i + B_i q_i^2$.

Pretpostavimo sada da u elektroeenergetskoj mreži postoji neovisan operater sustava (*engl.* ISO) koji je odgovoran za trgovinu električnom energijom. Štoviše, svaki agent nadoknađuje svoj trošak $b_i q_i^2 + a_i q_i$ proizvodnje q_i jedinica električne energije i svoj zahtjev ISO-u, koji distribuira električnu energiju između agenata. Cilj ISO-a je minimizirati ukupne troškove ponude pod uvjetom da zadovolje potražnju agenata. Pretpostavimo da su $L_{ij} t_{ij}^2$ toplinski gubici duž $(i, j) \in E$ koji su podjednako pokriveni između sredstava na čvorovima i i j, ako je t_{ij} količina isporučene električne energije duž $(i, j) \in E$. Tada problem ISO-a glasi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|V|} (b_i q_i^2 + a_i q_i) \;&\to\; \min_{q,t} \\
q_i \geq 0, \quad & i \in V \\
q_i - \sum_{k:(i,k)\in E} (t_{ik} + 0.5 L_{ik} t_{ik}^2) + \sum_{k:(i,k)\in E} (t_{ik} - 0.5 L_{ik} t_{ik}^2) \;&\geq\; D_i, \quad i \in V \\
t_{ij} \geq 0, \quad & (i, j) \in E.
\end{aligned}
$$

Neka $Q(a, b)$ označava skup optimalnih rješenja ovog problema ovisno o vektorima ponuda koje su najavili proizvođači. Tada agenti namjeravaju maksimizirati svoju dobit koja je jednaka razlici između stvarne i ponuđene funkcije za proizvodnju ovise o odluci ISO-a. To dovodi do sljedećeg problema:

$$
\begin{aligned}
(b_i q_i^2 + a_i q_i) - (B_i q_i^2 + A_i q_i) \;&\to\; \max_{a_i, b_i, q, t} \\
\underline{A_i} \leq a_i &\leq \overline{A_i} \\
\underline{B_i} \leq b_i &\leq \overline{B_i} \\
(q, t) &\in Q(a, b).
\end{aligned}
$$

Ovo je problem dvorazinske optimizacije sa više vođa gdje vođe djeluju prema Nashovoj ravnoteži.

Bibliografija

[1] W. Bialas i M. Karwan, *On two-level optimization*, IEEE transactions on automatic control **27** (1982), br. 1, 211–214.

[2] J. Bracken i J.T McGill, *Mathematical programs with optimization problems in the constraints*, Operations Research **21** (1973), br. 1, 37–44.

[3] S. Dempe, *Foundations of bilevel programming*, Springer Science & Business Media, 2002.

[4] S. Dempe, V. Kalashnikov, G.A Pérez-Valdés i N. Kalashnykova, *Bilevel programming problems*, Energy Systems. Springer, Berlin (2015).

[5] F. Nozicka, J. Guddat, H. Hollatz i B. Bank, *Theorie der linearen parametrischen Optimierung*, Akademic-Verlag, Berlin (1974).

[6] H. Schmidt, *Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben mit mehrelementiger Lösung der unteren Ebene*, Technische Universität Chemnitz, 1996.

[7] H.v. Stackelberg, *Marktform und Gleichgewicht*, Springer, Berlin, 1934.

[8] H. Tuy, *Bilevel linear programming, multiobjective programming, and monotonic reverse convex programming*, Multilevel Optimization: Algorithms and Applications, Springer, 1998, str. 295–314.

[9] H. Tuy, A. Migdalas i P. Värbrand, *A quasiconcave minimization method for solving linear two-level programs*, Journal of Global Optimization **4** (1994), br. 3, 243–263.

Sažetak

U ovom radu opisuje se problem dvorazinske optimizacije, s posebnim naglaskom na problem linearne dvorazinske optimizacije gdje pretpostavljamo da su funkcije na obje razine afine. Problemi dvorazinske optimizacije imaju drugi (parametarski) problem optimizacije kao dio ograničenja.

Za problem linearne dvorazinske optimizacije navode se svojstva i optimalna rješenja na temelju geometrijske interpretacije. Izučava se egzistencija optimalnih rješenja, te pomoću Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta optimalnosti za donju razinu problema dobivaju se Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti za problem linearne dvorazinske optimizacije. Navode se algoritmi za rješavanje danog problema te se postavlja pitanje traženja globalnog optimalnog rješenja.

Bez pretpostavki afinosti funkcija na obje razine, dolazi se do općenitijeg modela dvorazinske optimizacije. Navode se nužni i dovoljni uvjeti optimalnosti kao i algoritam za izračunavanje Clarkeove stacionarne točke kao optimalnog rješenja problema. Na kraju ovog rada, navode se razne primjene dvorazinske optimizacije u stvarnom svijetu, koje su imale snažan utjecaj na porast istraživanja ovog optimizacijskog problema.

Summary

In this paper we study the bilevel optimization problem, with special emphasis on the linear bilevel optimization problem where we assume that the functions on both levels are affine. Bilevel optimization problems have another (parametric) optimization problem as part of the constraints.

For the linear bilevel optimization problems, properties and optimal solutions based on geometric interpretation are given. The existence of optimal solutions is studied, and using Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the lower level problem, Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the linear bilevel optimization problem are obtained. Algorithms for solving a given problem are given and the question of searching for a global optimal solution is raised.

Without the assumptions of the affinity of the functions at both levels, a more general model of bilevel optimization is arrived at. Necessary and sufficient optimality conditions are given as well as an algorithm for calculating the Clarke stationary point as the optimal solution to the problem. At the end of this paper, various applications of bilevel optimization in the real world are listed, which have had a strong impact on the growth of research on this optimization problem.

Životopis

Rođena sam 16.7.1993. u Karlovcu. Osnovnu školu pohađala sam u Karlovcu, a nakon toga 2008. godine upisujem Gimnaziju u Karlovcu, matematički smjer. Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, preddiplomski sveučilišni studij, smjer Matematika upisujem 2012. godine. Titulu sveučilišnog prvostupnika matematike stječem 2017. godine te upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.