SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Oremović

SLUČAJNA ŠETNJA UVJETOVANA DA OSTANE POZITIVNOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru, prof. dr. sc. Bojanu Basraku, na pomoći, izdvojenom vremenu i korisnim savjetima tijekom izrade ovog diplomskog rada.
Hvala prijateljima koji su studentske dane učinili nezaboravnima.
Također, hvala obitelji na razumijevanju i podršci.
Mojim roditeljima, neizmjerno hvala što su uvijek bili uz mene i što su mi sve ovo omogućili.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Markovljevi lanci **2**
1.1 Markovljevi lanci na diskretnom skupu stanja 2
1.2 Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja 10

2 Obrnuta slučajna šetnja **21**
2.1 Osnovne pretpostavke i iskaz teorema 21
2.2 Dokaz teorema u diskretnom slučaju 29
2.3 Interpretacija teorema 36

Bibliografija **38**

Uvod

Slučajna šetnja je jedan od najvažnijih i najjednostavnijih primjera slučajnih procesa. Ona opisuje put koji se sastoji od uzastopnog ponavljanja slučajnih koraka. Pojam "slučajna šetnja" prvi je uveo engleski matematičar Karl Pearson, osnivač matematičke statistike, 1905. godine, no kao model i ideja pojavila se i mnogo ranije prilikom rješavanja kockarskih problema u vjerojatnosti. Budući da se razne prirodne i društvene pojave odvijaju na slučajan način, možemo ih modelirati kao slučajnu šetnju. Neke od njih su na primjer cijena fluktuirajućih dionica, financijsko stanje kockara, put molekule u plinu ili tekućini... Slučajne šetnje je proučavao i japanski matematičar Hiroshi Tanaka koji je dokazao vrlo zanimljivu konstrukciju slučajne šetnje uz uvjet da ona stalno ostaje na pozitivnoj poluosi.

Tanakina motivacija za taj rad je bila studija o vjerojatnosti propasti koja se pojavila prilikom istraživanja graničnog ponašanja slučajnih šetnji. U kasnijim radovima (Bertoin [1] i Biggins [2]), razdioba Tanakine slučajne šetnje (odnosno odgovarajući Markovljev lanac) je prepoznata kao razdioba slučajne šetnje koja je uvjetovana da ostane pozitivnom. Glavni rezultat njegovog rada je konstrukcija procesa kojega dobijemo vršeći transformacije na putanjama slučajne šetnje koje se nalaze između njezinih uzastopnih minimuma, odnosno to su putanje koje se nalaze između dvije negativne vrijednosti slučajne šetnje. On pokazuje da Markovljev lanac može biti konstruiran tako da svaku putanju između minimuma gledamo u obrnutom vremenu i s promijenjenim predznakom te svaku tako transformiranu putanju lijepimo na kraj prethodne, s time da lanac kreće iz nule. Tako dobiveni Markovljev lanac ćemo nazivati obrnuta slučajna šetnja. Prema tome, obrnuta slučajna šetnja je ekvivalentna slučajnoj šetnji uvjetovanoj da ostane pozitivnom.

Budući da je slučajna šetnja koju ćemo promatrati Markovljev lanac, prvo poglavlje opisuje teoriju Markovljevih lanaca koji predstavljaju jedan od najvažnijih modela slučajnih procesa i podijeljeno je na dva dijela. Drugo i najvažnije poglavlje rješava postavljeni cilj ovoga diplomskog rada. Pokazujemo kako iz slučajne šetnje konstruiramo obrnutu slučajnu šetnju Tanakinom metodom. Glavni cilj je dokazati da je proces koji smo dobili Tanakinom metodom Markovljev lanac, a dokaz ćemo provesti u diskretnom slučaju.

Poglavlje 1

Markovljevi lanci

U ovom poglavlju ćemo se prisjetiti definicija i pojmova vezanih uz Markovljeve lance na diskretnom skupu stanja te poopćiti te definicije i rezultate na općenite skupove stanja.

1.1 Markovljevi lanci na diskretnom skupu stanja

Pretpostavimo da je S prebrojiv skup kojeg nazivamo skup stanja. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces na skupu stanja S, odnosno svaki X_n je slučajna varijabla (ili slučajni element) koja poprima vrijednosti u skupu S.

Markovljevo svojstvo definirano je relacijom

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) \tag{1.1}$$

i ono nam govori da je ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na sadašnjost i prošlost, jednako ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno samo na sadašnjost. Također, Markovljevo svojstvo možemo iskazati na još jedan način: neposredna budućnost i prošlost uvjetno su nezavisne uz danu sadašnjost.

Prisjetimo se sada definicije stohastičke matrice. Dakle, matrica $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ zove se *stohastička matrica* ukoliko je $p_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in S$, suma svakog retka je jednaka 1 i skup stanja S je konačan. U slučaju da je skup stanja beskonačan, P će biti beskonačna matrica. Matrica P je *matrica prijelaza* Markovljevog lanca X. Vjerojatnost iz relacije (1.1) ćemo označavati s p_{ij} te ju nazivati prijelazna vjerojatnost iz stanja i u stanje j. Uglavnom ćemo promatrati *vremenski homogene* Markovljeve lance, tj. to su oni lanci kojima vjerojatnost u (1.1) ne ovisi o vremenskom trenutku n. U skladu s time imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.1.1. *Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S, te neka je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je* homogen Markovljev lanac *s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P ako vrijedi*

(i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ *za sve $i \in S$, te*

(ii)

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij} \tag{1.2}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$. Zbog jednostavnosti, takve lance ćemo nazivati (λ, P)-Markovljevim lancima.

U sljedećem teoremu definirane su konačnodimenzionalne distribucije slučajnog procesa i taj teorem nam je od velike značajnosti ukoliko želimo znati vjerojatnosti s kojima se slučajni proces u određenim vremenskim trenucima nalazi u određenim stanjima. Teorem navodimo bez dokaza koji se može naći u Vondraček [6].

Teorem 1.1.2. *Neka je X (λ, P)-Markovljev lanac. Tada za sve $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.3}$$

Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces s konačnodimenzionalnim distribucijama danim formulom (1.3)*, gdje je λ neka vjerojatnosna distribucija na S, a P neka stohastička matrica na S. Tada je X (λ, P)-Markovljev lanac.*

Možda iz gornjih definicija nije odmah jasna činjenica da svaki (λ, P)-Markovljev lanac zadovoljava Markovljevo svojstvo pa ćemo pomoću formule (1.3) najprije izračunati uvjetnu distribuciju od X_{n+1} uz dano X_n kako bismo mogli pokazati spomenutu činjenicu. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} \in S, \ldots, X_0 \in S)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in S, \ldots, X_0 \in S)} \\
&= \frac{\sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} \\
&= p_{ij}.
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i),$$

odnosno (λ, P)-Markovljev lanac zadovoljava Markovljevo svojstvo.

Neka su sada $P = (p_{ij} \;:\; i, j \in S)$ i $Q = (q_{ij} \;:\; i, j \in S)$ (konačne ili beskonačne) matrice. Množenje beskonačnih stohastičkih matrica definira se po analogiji s množenjem konačnih matrica. Dakle, neka je matrica $PQ = (r_{ij} \;:\; i, j \in S)$ definirana s

$$r_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} q_{kj}.$$

Prema tome, n-ta potencija matrice P dana je s $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)} \;:\; i, j \in S)$, gdje je

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} j}.$$

Nultu potenciju matrice P definiramo kao $P^0 = I = (\delta_{ij})$ gdje je $\delta_{ii} = 1$, a $\delta_{ij} = 0$ za $j \neq i$.

Iz formule za konačnodimenzionalne distribucije jednostavno možemo izračunati jednodimenzionalne distribucije. Koristeći gornju formulu imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} j} \\ &= \sum_{i_0 \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 j}^{(n)} = (\lambda P^n)_j.\end{aligned}$$

Uočimo da λP^n označava produkt vektor-retka λ i matrice P, dok $(\lambda P^n)_j$ označava j-ti element dobivenog vektor-retka. Iz gornje formule odmah slijedi da je za sve $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}.$$

Ta formula nam govori da ako Markovljev lanac kreće iz stanja i, tada je vjerojatnost da nakon n koraka bude u stanju j jednaka ij-tom elementu n-te potencije prijelazne matrice P. Vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)}$ zovu se n-koračne prijelazne vjerojatnosti.

Podsjetimo se rezultata poznatog pod nazivom *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti*: za sve $m, n \geq 0$ i za sva stanja $i, j \in S$ vrijedi

$$\mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

Interpretacija te formule je: lanac koji kreće iz stanja i te se u trenutku $n+m$ nalazi u stanju j mora u trenutku n biti u nekom stanju $k \in S$, te iz tog stanja k u preostalih m koraka treba doći u stanje j.

U sljedećem primjeru ćemo pokazati da je slučajna šetnja uistinu Markovljev lanac.

Primjer 1.1.3. *(Slučajna šetnja) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz jednakodistribuiranih, nezavisnih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}$ te distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = k) = p_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Slučajnu šetnju $S = (S_n : n \geq 0)$ definiramo sa*

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i,\ n \geq 1.$$

Možemo primjetiti da za $n \geq 0$ vrijedi $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = i_{n+1} \,|\, S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = 0) \\
&= \mathbb{P}(Y_{n+1} + i_n = i_{n+1} \,|\, S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = 0) \\
&= \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = p_{i_{n+1}-i_n} \\
&= \mathbb{P}(S_{n+1} = i_{n+1} \,|\, S_n = i_n),
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog nezavisnosti slučajne varijable Y_{n+1} sa $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Prema tome, možemo zaključiti da je slučajna šetnja S Markovljev lanac.

Jedan od najzanimljivijih primjera slučajne šetnje je jednostavna slučajna šetnja kod koje su slučajne varijable Y_k Bernoullijeve na $\{-1, 1\}$, odnosno $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Ako je $p = q = \frac{1}{2}$, tada kažemo da je jednostavna slučajna šetnja simetrična. Pripadajući Markovljev lanac S pomiče se samo za jedno mjesto ulijevo ili udesno. Prijelazne vjerojatnosti su $p_{ii-1} = q$, $p_{ii+1} = p$, $p_{ij} = 0$, $j \neq i-1, i+1$.

Slučajne šetnje možemo promatrati i na d-dimenzionalnoj rešetci $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Sa e_i označimo vektor $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ s jedinicom na i-tom mjestu. Pretpostavimo da je $(Y_n : n \geq 1)$ niz jednakodistribuiranih, nezavisnih slučajnih vektora s vrijednostima u skupu $\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_d\}$ s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = e_i) = \mathbb{P}(Y_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$. Tada je $S = (S_n : n \geq 0)$ jednostavna, simetrična d-dimenzionalna slučajna šetnja definirana s $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, za $n \geq 1$. U svakom trenutku se S može pomaknuti na jedno od $2d$ susjednih mjesta na rešetci.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na prostoru stanja S i matricom prijelaza P. *Prvo vrijeme pogađanja* skupa B ($B \subset S$ je proizvoljan podskup stanja) definiramo kao

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

uz kovenciju da je $\min \emptyset = 0$. Ako je $B = \{j\}$, pri čemu je $j \in S$, zbog jednostavnosti pišemo $T_j = T_{\{j\}}$.

Definicija 1.1.4. *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j dostižno iz i, u oznaci $i \longrightarrow j$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0.$$

Riječima, stanje j je dostižno iz stanja i ako će lanac, polazeći iz stanja i, s pozitivnom vjerojatnošću u nekom trenutku doći u stanje j. Prema tome, kažemo da stanja $i, j \in S$ komuniciraju ako vrijedi $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$, te koristimo oznaku $i \longleftrightarrow j$. Dakle, stanja i i j komuniciraju ako lanac, polazeći iz stanja i, s pozitivnom vjerojatnošću u nekom trenutku dolazi u stanje j i potom se vraća u stanje i.

Budući da je relacija komuniciranja relacija ekvivalencije, prostor stanja možemo rastaviti na pripadne klase ekvivalencije. Označimo te klase sa $C_1, C_2, C_3, \ldots$ Sva stanja iz jedne klase međusobno komuniciraju. Prema tome, imamo $C_i \cap C_j = \emptyset$ i $\cup_i C_i = S$. Skupove $C_1, C_2, C_3, \ldots$ nazivamo klase komuniciranja.

Ako se prostor stanja S sastoji od samo jedne klase komuniciranja, tj. ako sva stanja međusobno komuniciraju, tada kažemo da je Markovljev lanac X *ireducibilan*. Ukoliko je podskup $C \subset S$ skupa stanja S *zatvoren* za svako stanje $i \in S$, tada vrijedi $\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1$, tj. skup C je zatvoren ako lanac ne može izaći iz C. Prema tome, stanje $j \in S$ je *apsorbirajuće* ako je $\{j\}$ zatvoren skup, odnosno ako lanac dođe u apsorbirajuće stanje iz njega ne može izaći i tamo ostaje zauvijek.

Definicija 1.1.5. *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ zove se* vrijeme zaustavljanja *ako je za sve $n \geq 0$*

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

odnosno, događaj $\{T \leq n\}$ ovisi samo o $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Prema tome, možemo reći da je slučajno vrijeme T vrijeme zaustavljanja ako i samo ako za sve $n \geq 0$ vrijedi $\{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Primjer 1.1.6. *Neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ slučajna šetnja. Pretpostavimo da su slučajne varijable niza $(Y_n : n \geq 1)$ koraci slučajne šetnje. Pokažimo da je $\tau = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}$ vrijeme zaustavljanja. Budući da za sve $n \geq 1$ vrijedi*

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n < 0\} \\ &= \{Y_1 > 0, \ldots, Y_1 + \ldots + Y_{n-1} > 0, Y_1 + \ldots + Y_n < 0\} \in \sigma(Y_1, \ldots, Y_n),\end{aligned}$$

slijedi da je τ vrijeme zaustavljanja.

Fiksirajmo stanje $i \in S$ te se podsjetimo definicije vremena u kojima se Markovljev lanac vraća u stanje i. Definiramo vrijeme prvog povratka u stanje i s

$$T_i = T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\},$$

te indukcijom za $m \geq 1$,

$$T_i^{(m+1)} = \begin{cases} \min\{n > T_i^{(m)} \ : \ X_n = i\}, & T_i^{(m)} < \infty, \\ \infty, & T_i^{(m)} = \infty. \end{cases}$$

Vrijeme $T_i^{(m)}$ zove se *vrijeme m-tog povratka* u stanje i.

Nadalje, za stanje $i \in S$ kažemo da je *povratno* ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, a *prolazno* ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$. Ako je $i \in S$ povratno stanje i $i \longleftrightarrow j$, tada je i $j \in S$ povratno stanje. Iz toga možemo zaključiti da su povratnost i prolaznost svojstva klase komuniciranja, tj. ako je jedno stanje u nekoj klasi komunikacije povratno (odnosno prolazno), tada su sva stanja u toj klasi povratna (odnosno prolazna). Prema tome, ukoliko je Markovljev lanac ireducibilan i povratan, tada su sva stanja povratna. Svaka povratna klasa je zatvorena, tj. suprotno, svaka klasa koja nije zatvorena je prolazna. Ako pretpostavimo da je S konačan prostor stanja, tada S sadrži barem jedno povratno stanje.

Za stanje $i \in S$ kažemo da je *pozitivno povratno* ako vrijedi $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$. Vidimo da iz $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ slijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, što znači da je pozitivno povratno stanje uvijek povratno. *Nul-povratno* stanje je povratno stanje koje nije pozitivno povratno.

Broj posjeta stanju $i \in S$ označavamo sa $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$.

Podsjetimo se da je slučajni proces $X = (X_n \ : \ n \geq 0)$ stacionaran ako za sve $k \geq 0$ i sve $n \geq 0$, slučajni vektori $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$ i $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ imaju jednaku distribuciju u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}$, odnosno stacionarnost znači da se vjerojatnosna svojstva procesa ne mijenjaju kroz vrijeme. Prema tome, u sljedećoj definiciji ćemo definirati stacionarnu distribuciju Markovljevog lanca.

Definicija 1.1.7. *Pretpostavimo da je $X = (X_n \ : \ n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P i prebrojivim skupom stanja S. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i \ : \ i \in S)$ na skupu stanja S je* stacionarna distribucija *(ili invarijantna distribucija) Markovljevog lanca X, odnosno prijelazne matrice P, ako vrijedi*

$$\pi = \pi P.$$

Ako je Markovljev lanac ireducibilan i pozitivno povratan, tada stacionarna distribucija postoji i jedinstvena je. Ukoliko Markovljev lanac nema stacionarnu distribuciju, a za netrivijalnu mjeru $\lambda = (\lambda_i \ : \ i \in S)$ na skupu stanja S vrijedi $\lambda = \lambda P$, tada je λ *invarijantna mjera* Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P).

Definicija 1.1.8. *Neka je $X = (X_n \ : \ n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P i prebrojivim skupom stanja S. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i \ : \ i \in S)$ zove se* granična distribucija *Markovljevog lanca X ako za sve $i, j \in S$, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Ako je X Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja te ako je π granična distribucija tog lanca, tada je π i stacionarna distribucija.

Neka je $d(i)$ najveći zajednički djelitelj skupa skupa $\{n \geq 1 \ : \ p_{ii}^{(n)} > 0\}$, gdje je $d(i) = 1$ ukoliko je taj skup prazan. Za stanje $i \in S$ kažemo da je *aperiodično* ako je $d(i) = 1$. U suprotnom, $d(i)$ je period stanja i te kažemo da je stanje *i periodičko*. Dakle, stanja koja međusobno komuniciraju imaju jednake periode. Prema tome, lanac X je aperiodičan ako je ireducibilan i $d(i)$ svakoga stanja je jednak 1. Iskaz sljedećeg teorema daje nam rezultat o postojanju granične distribucije.

Teorem 1.1.9. *Neka je λ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja S. Pretpostavimo da je $X = (X_n \ : \ n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan, te ima stacionarnu distribuciju π. Tada je*

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, \qquad za\ sve\ j \in S.$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \qquad za\ sve\ i, j \in S,$$

tj., stacionarna distribucija ujedno je i granična.

Podsjetimo se još jednog teorema koji nam govori o graničnom ponašanju srednjih vrijednosti kroz vrijeme i jedan je od najvažnijih rezultata u teoriji Markovljevih lanaca. Dokaz ovoga teorema, kao i prethodno navedenoga, se može naći u Vondraček [6].

Teorem 1.1.10. *(Ergodski teorem) Pretpostavimo da je Markovljev lanac $X = (X_n \ : \ n \geq 0)$ ireducibilan i pozitivno povratan, te neka je π njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je f nenegativna ili ograničena realna fukncija definirana na S. Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j, \quad \mathbb{P}\text{-}g.s.$$

Za $j \in S$ i $n \in \mathbb{N}$ označimo s $N_j(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}$ vrijeme koje lanac provede u stanju j prije trenutka n. Ako gornji teorem primjenimo na fuknciju $f = \mathbb{1}_{\{j\}}$, dobivamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Dakle, prosječno asimptotsko vrijeme provedeno u stanju j je π_j, za sve $j \in S$.

Pretpostavimo sada da je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac s prostorom stanja S, prijelaznom matricom P i stacionarnom distribucijom π takvom da je $\pi_i > 0$ za sve $i \in S$. Definirajmo matricu $\hat{P} = (\hat{p}_{ij} : i, j \in S)$ formulom

$$\pi_i \hat{p}_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Zbog $\sum_{j\in S} \hat{p}_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \sum_{j\in S} \pi_j p_{ji} = 1, \forall i \in S$, slijedi da je $\hat{P}$ stohastička matrica. Primjetimo da vrijedi $\sum_{j\in S} \pi_j \hat{p}_{ji} = \sum_{j\in S} \pi_i p_{ij} = \pi_i \sum_{j\in S} p_{ij} = \pi_i$, što znači da je π stacionarna distribucija i za stohastičku matricu $\hat{P}$. Ako pretpostavimo da je π i početna distribucija lanca X, tada je $\mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i, \forall n \geq 0$ i $\forall i \in S$, te slijedi da je

$$\mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_{n+1} = i) = \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_{n+1} = i)}{\mathbb{P}(X_{n+1} = i)} = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j)\mathbb{P}(X_n = j)}{\mathbb{P}(X_{n+1} = i)} = \frac{p_{ji}\pi_j}{\pi_i} = \hat{p}_{ij},$$

odnosno $\hat{P}$ je matrica prijelaza. Za $N \in \mathbb{N}$ i $0 \leq n \leq N$, definirajmo proces $Y = (Y_n : 0 \leq n \leq N)$ s $Y_n = X_{N-n}$. Tada je Y ireducibilan Markovljev lanac kojem je π također stacionarna distribucija te $\hat{P}$ matrica prijelaza.
Kažemo da su stohastička matrica P i mjera λ u *detaljnoj ravnoteži* ako vrijedi $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$, za $\forall i, j \in S$. Ako su λ i P u detaljnoj ravnoteži, tada je λ invarijantna mjera za P. Pretpostavimo sada da je λ neka vjerojatnosna distribucija na S. Za ireducibilan (λ, P)-Markovljev lanac X kažemo da je *reverzibilan*, ako je za sve $N \geq 1$, $(X_{N-n} : 0 \leq n \leq N)$ ponovo (λ, P)-Markovljev lanac. Zapravo, X je reverzibilan ako i samo ako su P i λ u detaljnoj ravnoteži. Intuitivno, lanac se uglavnom kreće u smjeru kazaljke na satu pa se okretanjem vremena uglavnom kreće u suprotnom smjeru.

Slučajne šetnje na grafovima su jedan od najpoznatijih primjera reverzibilnih Markovljevih lanaca.

Primjer 1.1.11. *Neka je G konačan i povezan graf. Graf je uređen par $G = (V, E)$ vrhova iz skupa V i bridova iz skupa E. Na skup bridova gledamo kao na podskup Kartezijevog produkta $V \times V$ sa svojstvom $(i, j) \in E$ ako i samo ako je $(j, i) \in E$ (ako brid povezuje vrhove i i j, onda povezuje i vrhove j i i). Povezanost grafa znači da za svaka dva vrha $i, j \in V$ postoji konačan niz bridova $(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_n, j)$ koji povezuju ta dva vrha.*

Pretpostavimo da je svakom bridu $e \in E$ pridružen strogo pozitivan broj c_e kojeg zovemo provodljivost brida. Dakle, $c : E \to (0, \infty)$. Za $e = (i, j) = (j, i)$ pišemo $c_e = c_{ij} = c_{ji}$. U slučaju da $(i, j) \notin E$, stavimo $c_{ij} = 0$. Kapacitet vrha $i \in V$ definiramo kao $c_i = \sum_{k\in V} c_{ik}$. Slučajna šetnja na G je Markovljev lanac $S = (S_n : n \geq 0)$ sa skupom stanja V i prijelaznom matricom $P = (p_{ij} : i, j \in V)$ gdje je

$$p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}.$$

Riječima, šetnja iz vrha i prelazi u jedan od susjednih vrhova s vjerojatnošću proporcionalnom provodljivosti odgovarajućeg brida. Zbog pretpostavke o povezanosti grafa slijedi da je šetnja S ireducibilna. Stavimo $c = \sum_{i \in V} c_i$, te definiramo $\pi = (\pi_i \ : \ i \in V)$ sa

$$\pi_i = \frac{c_i}{c}.$$

Uočimo da je tada

$$\pi_i p_{ij} = \frac{c_i}{c}\frac{c_{ij}}{c_i} = \frac{c_{ij}}{c} = \frac{c_{ji}}{c} = \frac{c_j}{c}\frac{c_{ji}}{c_j} = \pi_j p_{ji},$$

odnosno π i P su u detaljnoj ravnoteži. To pokazuje da je π stacionarna distribucija od S, te da je S reverzibilan lanac.

1.2 Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja

Neka je S skup stanja, a s $\mathcal{B}(S)$ označimo σ-algebru na S. Markovljevi lanci na općenitom skupu stanju imaju prijelaznu jezgru koja opisuje kretanje tog lanca. U skladu s time imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.2.1. *Ako je $P = (P(x, A),\ x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S))$ takva da vrijedi:*

(i) za svaki $A \in \mathcal{B}(S)$, $P(\cdot, A)$ je nenegativna izmjeriva funkcija na S

(ii) za svaki $x \in S$, $P(x, \cdot)$ je vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(S)$

tada P nazivamo Markovljevom funkcijom prijelaza, jezgrom prijelaznih vjerojatnosti *ili* prijelaznom jezgrom.

Važnu ulogu pri konstruiranju Markovljevog lanca osim prijelazne jezgre ima i početna distribucija (početna vjerojatnost). Neka je μ vjerojatnosna mjera definirana na $(S, \mathcal{B}(S))$. Ukoliko je zakon razdiobe od X_0 jedank μ, odnosno, ako je $X_0 \sim \mu$, tada je μ početna distribucija lanca i tu vjerojatnost ćemo označavati s $\mathbb{P}_\mu$. Ako lanac kreće iz stanja $x_0 \in S$, uočimo da to odgovara mjeri δ_{x_0} koncentriranoj u x_0, tada ćemo koristiti oznaku $\mathbb{P}_{x_0}$. Sljedeći teorem nam govori kako računamo konačnodimenzionalne distibucije stohastičkog procesa.

Teorem 1.2.2. *Za svaku početnu vjerojatnost μ na $\mathcal{B}(S)$ i prijelaznu jezgru $P = (P(x, A),\ x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S))$ postoji stohastički proces $X = (X_n \ : \ n \geq 0)$ na $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} S_i$, izmjeriv obzirom na $\mathcal{F} = \bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}(S_i)$ te vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_\mu$ na $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}_\mu(B)$ vjerojatnost* *događaja* $\{X \in B\}$ *za* $B \in \mathcal{F}$. *Za izmjerive* $A_i \subseteq S_i$, $i = 0, \dots, n$ *i za bilo koji prirodan broj* n *vrijedi*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\mu(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) \\ &\quad = \int_{y_0 \in A_0} \cdots \int_{y_{n-1} \in A_{n-1}} \mu(dy_0) P(y_0, dy_1) \dots P(y_{n-1}, A_n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Teorem nećemo dokazivati, a dokaz se može naći u Meyn i Tweedie [3]. Sada možemo definirati Markovljev lanac na općenitom skupu stanja.

Definicija 1.2.3. *Stohastički proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definiran na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *zove se* vremenski homogen Markovljev lanac *sa jezgrom prijelaznih vjerojatnosti* $P(x, A)$ *i početnom distribucijom* μ *ako sve konačnodimenzionalne distribucije od* X *zadovoljavaju* (1.4) *za svaki* n.

Kao i na prebrojivom skupu stanja, n-koračna jezgra prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca na općenitim skupovima stanja se definira iterativno. Stavimo $P^0(x, A) = \delta_x(A)$, pri čemu je Diracova mjera definirana s

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

te, za $n \geq 1$, definiramo induktivno

$$P^n(x, A) = \int_S P(x, dy)\, P^{n-1}(y, A), \qquad x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S). \tag{1.5}$$

Prema tome, P^n će biti oznaka za n-koračnu jezgru prijelaznih vjerojatnosti $\{P^n(x, A),\ x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S)\}$ te možemo primjetiti da je P^n definirana analogno kao i n-koračna matrica prijelaza u diskretnom slučaju.

Primjer 1.2.4. *Markovljev lanac na diskretnom skupu stanja je zapravo poseban slučaj Markovljevog lanca na općenitom skupu stanja. Pretpostavimo da je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac s prebrojivim ili konačnim skupom stanja* S, *početnom distribucijom* μ *i prijelaznom matricom* P. *Budući da je prostor stanja diskretan, tada će* σ*-algebra* $\mathcal{B}(S)$ *označavati skup svih podskupova od* S. *Konačnodimenzionalne distribucije diskretnog Markovljevog lanca* X *zadovoljavaju*

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0)\, \mathbb{P}_{x_0}(X_1 = x_1)\, \mathbb{P}_{x_1}(X_1 = x_2) \dots \mathbb{P}_{x_{n-1}}(X_1 = x_n).$$

Pretpostavljajući da je X vremenski homogen Markovljev lanac, 1-koračne prijelazne vjerojatnosti lanca X ćemo označavati s $P(x, y) = \mathbb{P}_x(X_1 = y)$. Tada gornju jednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0)\, P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Uočimo iz relacije (1.4) *da Markovljeve lance na općenitom skupu stanja integriramo po mjerama $P(y_0, \cdot), \dots, P(y_{n-1}, \cdot)$ dok iz gornje jednakosti vidimo da je ponašanje lanca na diskretnom skupu određeno prijelaznom matricom koja sadrži vjerojatnosti prijelaza između stanja. Za prijelaznu matricu $P = (P(x, y) \ : \ x, y \in S)$ vrijedi $P(x, y) \geq 0$ i $\sum_{z \in S} P(x, z) = 1$, $x, y \in S$. Dakle, $P(x, \cdot)$ je vjerojatnosna mjera. n-koračna matrica $P^n = (P^n(x, y) \ : \ x, y \in S)$ definirana je induktivno s*

$$\begin{aligned} &P^0 = I, \\ &P^n(x, y) = \sum_{z \in S} P(x, z)\, P(z, y). \end{aligned}$$

Za $A \subseteq S$ vrijedi $P^n(x, A) = \sum_{y \in A} P^n(x, y)$. Dakle, možemo zaključiti da kod diskretnih Markovljevih lanaca, budući da je skup stanja prebrojiv, zbrajamo po svim mogućim putevima, dok u slučaju Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja integriramo po određenim mjerama.

Sljedeći teorem je poopćenje definicije *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti* koju smo već spomenuli u diskretnom slučaju. Dokaz teorema se može naći u Meyn i Tweedie [3].

Teorem 1.2.5. *Za svaki m takav da je $0 \leq m \leq n$, vrijedi*

$$P^n(x, A) = \int_S P^m(x, dy)\, P^{n-m}(y, A), \qquad x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S). \tag{1.6}$$

Riječima, jednakost (1.6) nam govori da ako lanac X se kreće iz stanja x u skup A u n koraka, u bilo kojem međukoraku m lanac mora posjetiti neko stanje $y \in S$ i u tom trenutku m, obzirom da je Markovljev lanac, zaboravlja prošlost i sljedećih $(n - m)$ koraka nastavlja kao da je krenuo iz stanja y. Prema tome, jednakost (1.6) možemo zapisati kao

$$\mathbb{P}_x(X_n \in A) = \int_S \mathbb{P}_x(X_m \in dy)\, \mathbb{P}_y(X_{n-m} \in A).$$

Pomoću očekivanja, možemo proširiti relaciju (1.4) kako bi Markovljevo svojstvo mogli iskazati u još jednom ekvivalentnom obliku koji je dan u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.2.6. *Ako je X Markovljev lanac na $(\Omega, \mathcal{F})$ s početnom distribucijom μ i $h : \Omega \leftarrow \mathbb{R}$ je ograničena i izmjeriva funkcija, tada vrijedi*

$$\mathbb{E}_\mu[h(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \,|\, X_0, \dots, X_n\,;\ X_n = x] = \mathbb{E}_x[h(X_1, X_2, \dots)] \tag{1.7}$$

Jedan od najvažnijih aspekata teorije Markovljevih lanaca je svojstvo zaboravljivosti (eng. forgetfulness) dano s (1.4), ili, ekivivalentno s (1.7).

U sljedećim primjerima ćemo navesti neke jednostavane primjere Markovljevih lanca na općenitom skupu stanja.

Primjer 1.2.7. *Pretpostavimo da je $S = (S_n : n \geq 0)$ niz slučajnih varijabli definiranih tako da je $S_0 = 0$ i za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo*

$$S_n = S_{n-1} + W_n,$$

gdje je W_n niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u skupu $\mathbb{R}$ te funkcijom distribucije $\Gamma(A) = \mathbb{P}(W \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tako definirani niz S zovemo slučajna šetnja na $\mathbb{R}$. Uočimo da je očito da je S Markovljev lanac jer nezavisnost slučajnih varijabli W_n garantira nezavisnost S_{n+1} od $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots$ uz dano $S_n = x$. Za neki $A \subseteq (0, \infty)$, funkcija prijelaza dana je s

$$\begin{aligned} P(x, A) &= \mathbb{P}(S_0 + W_1 \in A \,|\, S_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(W_1 \in A - x) \\ &= \Gamma(A - x). \end{aligned}$$

Primjer 1.2.8. *Proces $X = (X_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ se zove autoregresivni proces reda 1, skraćeno AR(1) model, ako vrijedi*

(i) za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, X_n i W_n su slučajne varijable na $\mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1},$$

za neki $\alpha \in \mathbb{R}$,

(ii) niz $\{W_n\}$ je niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom Γ na $\mathbb{R}$.

AR(1) model je trivijalno Markovljev proces: nezavisnost X_{n+1} od $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$ uz dano $X_n = x$ slijedi iz (i) *jer vrijednost od W_n ne ovisi o niti jednom $\{X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\}$ zbog* (ii). *Taj model možemo smatrati proširenjem slučajne šetnje, gdje u svakom trenutku uzimamo skaliranu prethodnu vrijednost i dodajemo neku slučajnu vrijednost ("grešku" ili "šum"). Može se pokazati da parametar α jako utječe na ponašanje lanca.*

Sada ćemo spomenuti još neke pojmove koji opisuju teoriju Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja, no mi ih nećemo koristiti u daljnjem radu.

Distribucija lanca X u trenutku n je osnova njegova postojanja, ali kako bismo mogli analizirati njegovo ponašanje od velike važnosti nam je i distribucija u nekim posebnim trenucima.

Definicija 1.2.9. *Neka je X Markovljev lanac.*

(i) Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(S)$, broj dolazaka u skup A, *kojeg označavamo s η_A, je broj posjeta lanca X skupu A nakon trenutka* 0 *i definiran je s*

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in A\}}.$$

(ii) Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(S)$, varijable

$$\begin{aligned} \tau_A &= \min\{n \geq 1 \ : \ X_n \in A\} \\ \sigma_A &= \min\{n \geq 0 \ : \ X_n \in A\} \end{aligned}$$

zovu se vrijeme prvog povratka *u skup A i* vrijeme prvog pogađanja *skupa A.*

Analogno kao i u diskretnom slučaju, iterativno definiramo k-to vrijeme povratka u skup A (oznaka: $\tau_A(k)$) s

$$\begin{aligned} &\tau_A(1) := \tau_A \\ &\tau_A(k) := \min\{n > \tau_A(k-1) \ : \ X_n \in A\}. \end{aligned}$$

Za daljnju analizu lanca X definirajmo jezgru U s

$$\begin{aligned} U(x, A) &:= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \\ &= \mathbb{E}_x[\eta_A] \end{aligned} \tag{1.8}$$

koja preslikava $S \times \mathcal{B}(S)$ u $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, te vjerojatnost povratka s

$$\begin{aligned} L(x, A) &:= \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(X \,\text{posjeti}\, A). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Prema tome, da bismo mogli analizirati broj posjeta našeg lanca nekom skupu, često moramo razmotriti ponašanje lanca nakon prvog posjeta τ_A skupu A (koji se događa u nekom slučajnom vremenu), a ne ponašanje nakon nekih fiksnih vremena. Svojstvo zaboravljivosti vrijedi, ne samo za fiksna vremena n, nego i za lanac opažen u nekom slučajnom vremenu koje se naziva vrijeme zaustavljanja.

Definicija 1.2.10. *Funkcija $\zeta : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ zove se* vrijeme zaustavljanja *za X ako je, za bilo koju početnu distribuciju μ, događaj $\{\zeta = n\} \in \mathcal{F}_n^X$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, gdje je $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) \subseteq \mathcal{B}(S^{n+1})$.*

Vrijeme prvog povratka i vrijeme pogađanja nekog skupa su jednostavni primjeri vremena zaustavljanja.

Propozicija 1.2.11. *Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(S)$, varijable τ_A i σ_A su vremena zaustavljanja za X.*

Dokaz. Vrijedi

$$\{\tau_A = n\} = \bigcap_{m=1}^{n-1} \{X_m \in A^c\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X, \quad n \geq 1$$
$$\{\sigma_A = n\} = \bigcap_{m=0}^{n-1} \{X_m \in A^c\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X, \quad n \geq 0$$

pa po definiciji slijedi da su τ_A i σ_A uistinu vremena zaustavljanja. $\square$

Nadalje, koristeći Markovljevo svojstvo za svaki fiksni $n \in \mathbb{Z}_+$ i elemente prijelazne jezgre imamo:

Propozicija 1.2.12. *(i) Za sve $x \in S$, $A \in \mathcal{B}(S)$*

$$\mathbb{P}_x(\tau_A = 1) = P(x, A),$$

te induktivno za $n > 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau_A = n) &= \int_{A^c} P(x, dy)\, \mathbb{P}_y(\tau_A = n-1) \\ &= \int_{A^c} P(x, dy_1) \int_{A^c} P(y_1, dy_2) \ldots \int_{A^c} P(y_{n-2}, dy_{n-1}) P(y_{n-1}, A).\end{aligned}$$

(ii) Za sve $x \in S$, $A \in \mathcal{B}(S)$

$$\mathbb{P}_x(\sigma_A = 0) = \mathbb{1}_A(x)$$

te za svaki $n \geq 1$ i $x \in A^c$

$$\mathbb{P}_x(\sigma_A = n) = \mathbb{P}_x(\tau_A = n).$$

Ako je ζ proizvoljno vrijeme zaustavljanja s vrijednošću u skupu $\mathbb{Z}_+$, tada nam ta činjenica omogućava da definiramo slučajnu varijablu X_ζ sa $X_\zeta = X_n$ na događaju $\{\zeta = n\}$. Svojstvo koje nam govori da buduće ponašanje lanca X nakon vremena zaustavljanja ζ ovisi samo o vrijednosti X_ζ, a ne o bilo kojoj drugoj prošloj vrijednosti, naziva se jako Markovljevo svojstvo. Da bismo to mogli formalno opisati, definirajmo σ-algebru

$\mathcal{F}^X_\zeta := \{A \in \mathcal{F} : \{\zeta = n\} \cap A \in \mathcal{F}^X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, koja opisuje događaje koji su se dogodili do vremena ζ.
Za vrijeme zaustavljanja ζ i slučajnu varijablu $H = h(X_0, X_1, \dots)$, operator pomaka θ^ζ se definira s

$$\theta^\zeta H = h(X_\zeta, X_{\zeta+1}, \dots)$$

na skupu $\{\zeta < \infty\}$.

Definicija 1.2.13. *Kažemo da lanac X zadovoljava* jako Markovljevo svojstvo *ako za bilo koju početnu distribuciju μ, i bilo koju realnu ograničenu izmjerivu funkciju h na Ω, i za bilo koje vrijeme zaustavljanja ζ, vrijedi*

$$\mathbb{E}_\mu[\theta^\zeta H \,|\mathcal{F}^X_\zeta] = \mathbb{E}_{X_\zeta}[H], \quad \mathbb{P}_\mu\text{-g.s.}$$

na skupu $\{\zeta < \infty\}$.

Sada želimo razviti koncept sličan ireducibilnosti Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja, ali problem s poopćenjem definicije ireducibilnosti je taj da ne možemo definirati direktan analogon relacije komuniciranja "$\longleftrightarrow$", jer iako možemo na $L(x, A)$ gledati kao na pozitivnu vjerojatnost pogađanja skupa A ukoliko krenemo iz stanja x, općenitno ne možemo reći da ćemo se vratiti u neko određemo stanje x. U skladu s time uvodimo definiciju φ-ireducibilnosti, što je osnova za daljnje analize ponašanja lanca na općenitom skupu stanja.

Definicija 1.2.14. *Kažemo da je lanac $X = (X_n : n \geq 0)$* φ-ireducibilan *ako postoji mjera φ na $\mathcal{B}(S)$ takva da, kad god je $\varphi(A) > 0$, tada je $L(x, A) > 0$ za sve $x \in S$.*

Riječima, ireducubilnost znači da za svaki skup koji nije mjere nule postoji pozitivna vjerojatnost dolaska u taj skup. Postoji nekoliko alternativnih formulacija φ-ireducibilnosti o kojima govori sljedeća propozicija koju nećemo dokazivati.

Propozicija 1.2.15. *Sljedeće tvrdnje su evkivalentne s definicijom φ-ireducibilnosti:*

(i) za sve $x \in S$, ako je $\varphi(A) > 0$, tada je i $U(x, A) > 0$,

(ii) za sve $x \in S$, ako je $\varphi(A) > 0$, tada postoji $n > 0$ takav da vrijedi $P^n(x, A) > 0$,

(iii) za sve $x \in S$, ako je $\varphi(A) > 0$, tada je $K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) > 0$.

Pojam φ-ireducibilnosti kojeg smo do sada definirali je slabiji od pojma ireducibilnosti koji smo definirali na diskretnim skupovima stanja. Sada ćemo proširiti φ-ireducibilnost tako da, ukoliko imamo ireducibilan lanac tako da je svako stanje dostižno iz bilo kojeg drugog stanja, tada se prirodna mjera ireducibilnosti (npr. brojeća mjera) generira kao "maksimalna" mjera ireducibilnosti.

Propozicija 1.2.16. *Ako je X φ-ireducibilan za neku mjeru φ, tada postoji vjerojatnosna mjera ψ na $\mathcal{B}(S)$ takva da vrijedi:*

(i) *X je ψ-ireducibilan,*

(ii) *za bilo koju drugu mjeru φ', lanac X je φ'-ireducibilan ako i samo ako je $\psi \succ \varphi'$,*

(iii) *ako je $\psi(A) = 0$, tada je $\psi\{y : L(y, A) > 0\} = 0$,*

(iv) *vjerojatnosna mjera ψ je ekvivalentna mjeri*

$$\psi' := \int_S \varphi'(dy) K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A),$$

za bilo koju konačnu mjeru ireducibilnosti φ'.

Dokaz gornje propozicije se može naći u Meyn i Tweedie [3]. Nadalje, sa ψ ćemo označavati proizvoljnu maksimalnu mjeru ireducibilnosti za lanac X.

Definicija 1.2.17. *(i)* *Kažemo da je Markovljev lanac* ψ-ireducibilan *ako je φ-ireducibilan za neku mjeru φ i ψ je maksimalna mjera ireducibilnosti koja zadovoljava uvjete iz Propozicije 1.2.16.*

(ii) *Pišemo*

$$\mathcal{B}^+(S) = \{A \in \mathcal{B}(S) : \psi(A) > 0\}$$

za skupove pozitivne mjere ψ. Ekvivalentnost maksimalnih mjera ireducibilnosti nam osigurava da je $\mathcal{B}^+(S)$ jedinstveno određen.

(iii) *Skup $A \in \mathcal{B}(S)$ se naziva* punim *ako je $\psi(A^c) = 0$.*

(iv) *Skup $A \in \mathcal{B}(S)$ se naziva* apsorbirajućim *ako je $P(x, A) = 1$ za $x \in A$.*

Sljedeći rezultat ukazuje na vezu između apsorpcijskih i punih skupova.

Propozicija 1.2.18. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan lanac. Tada je*

(i) *svaki apsorbirajući skup puni,*

(ii) *svaki puni skup ima neprazan apsorbirajući podskup.*

Iako nam relacija $x \longleftrightarrow y$ općenito nije korisna kada je S neprebrojiv, budući da je $P^n(x, y) = 0$ u većini slučajeva, uvesti ćemo pojmove *dostižnosti* i *uniformne dostižnosti* koji učvršćuje ideju komuniciranja na kojoj se temelji ψ-ireducibilnost.

Definicija 1.2.19. *Skup $B \in \mathcal{B}(S)$ je* dostižan *iz skupa $A \in \mathcal{B}(S)$ ako je $L(x, B) > 0$ za svaki $x \in A$.*
Skup $B \in \mathcal{B}(S)$ je uniformno dostižan *iz skupa $A \in \mathcal{B}(S)$ ako postoji $\delta > 0$ takav da je*

$$\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \delta. \tag{1.10}$$

Ako (1.10) *vrijedi, tada pišemo $A \rightsquigarrow B$.*

Relacija $A \rightsquigarrow B$ vrijedi uniformno za svaki $x \in A$. Općenito, relacija "$\rightsquigarrow$" nije refleksivna iako mogu postojati skupovi A i B takvi da je skup A uniformno dostižan iz B i B je uniformno dostižan iz A. Može se pokazati da ako $A \rightsquigarrow B$ i $B \rightsquigarrow C$, tada $A \rightsquigarrow C$, odnosno da je relacija "$\rightsquigarrow$" tranzitivna.

Kao i u diskretnom slučaju, možemo definirati periodičnost i aperiodičnost lanca. Pretpostavimo da je X φ-ireducibilan Markovljev lanac. Najveći prirodan broj d za koji d-ciklus za X postoji naziva se periodom lanca X. Ako je $d = 1$, tada kažemo da je lanac X aperiodičan.

Ključnu ulogu u definiranju povratnosti i prolaznosti lanca ima slučajna varijabla $\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in A\}}$ koja nam govori koliko puta je lanac X posjetio skup A.

Definicija 1.2.20. *Skup A je* uniformno prolazan *ako postoji $M < \infty$ takav da je $\mathbb{E}_x[\eta_A] \leq M$ za svaki $x \in A$. Skup A je* povratan *ako je $\mathbb{E}_x[\eta_A] = \infty$ za svaki $x \in A$.*
Ako se skup $A \in \mathcal{B}(S)$ može prekriti s prebrojivo mnogo uniformno prolaznih skupova, tada je A prolazan *skup.*

Definicija 1.2.21. *(i) Lanac X je povratan ako je ψ-ireducibilan i $U(x, A) \equiv \infty$ za svaki $x \in S$ i svaki $A \in \mathcal{B}^+(S)$.*

(ii) Lanac X je prolazan ako je ψ-ireducibilan i S je prolazan.

Nadalje, promatrajmo sada samo povratne Markovljeve lance koje ćemo podijeliti na pozitivne i nul povratne lance. Također, pokazat ćemo pod kojim uvjetima se distribucija takvih lanca ne mijenja za različite vrijednosti od n. U tom slučaju, po Markovljevom svojstvu, konačnodimenzionalne distribucije lanca X će biti invarijantne obzirom na vrijeme te takvim razmatranjem dolazimo do definicije invarijantne mjere.

Definicija 1.2.22. *σ-konačna mjera π na $\mathcal{B}(S)$ sa svojstvom*

$$\pi(A) = \int_S \pi(dx)\, P(x, A), \quad A \in \mathcal{B}(S), \tag{1.11}$$

se naziva invarijantna *mjera.*

Teorem 1.2.23. *Ako je lanac X povratan, tada za njega postoji (do na multiplikativnu konstantu) invarijantna mjera π sa svojstvom da za bilo koji $A \in \mathcal{B}^+(S)$ vrijedi*

$$\pi(B) = \int_A \pi(dw)\, \mathbb{E}_w \left[\sum_{n=1}^{\tau_A} \mathbb{1}_{\{X_n \in B\}} \right], \quad B \in \mathcal{B}(S). \tag{1.12}$$

Dokaz teorema se može naći u Meyn i Tweedie [3].

Definicija 1.2.24. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan lanac i ima invarijantnu vjerojatnosnu mjeru π. Tada je X* pozitivan *lanac. Ukoliko X nema takvu mjeru, onda je on* nul-*lanac.*

Procesi sa svojstvom da za bilo koji k marginalne distribucije od $\{X_n, \dots, X_{n+k}\}$ se ne mijenjaju kako se n mijenja nazivaju se stacionarni procesi. Markovljev lanac općenito neće biti stacionaran proces jer za neku realizaciju možemo imati $X_0 = x$ sa vjerojatnošću jedan za neko fiksno stanje x. Međutim, katkad možemo odabrati početnu distribuciju za X_0 tako da dobijemo stacionaran proces $(X_n : n \in \mathbb{Z}_+)$.
Pokazuje se da je dovoljno razmotriti samo stacionarnost prvog koraka kako bismo stvorili čitav stacionarni proces. Početnu vjerojatnosnu mjeru π danu formulom

$$\pi(A) = \int_S \pi(dw)\, P(w, A),$$

možemo iterirati kako bismo dobili

$$\begin{aligned}
\pi(A) &= \int_S \left[\int_S \pi(dx)\, P(x, dw) \right] P(w, A) \\
&= \int_S \pi(dx) \int_S P(x, dw)\, P(w, A) \\
&= \int_S \pi(dx)\, P^2(x, A) \\
&\quad \vdots \\
&= \int_S \pi(dx)\, P^n(x, A) \\
&= \mathbb{P}_\pi(X_n \in A),
\end{aligned}$$

za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ i za svaki $A \in \mathcal{B}(S)$.

Iz Markovljevog svojstva je jasno da je X stacionaran proces ako i samo ako se distribucija od X_n ne mijenja kroz vrijeme.

Propozicija 1.2.25. *Ako je lanac X pozitivan, tada je i povratan.*

Pozitivni lanci se često nazivaju ”pozitivno povratni” kako bi naglasili činjenicu da su oni povratni.

Definirajmo još jednu širu klasu mjera.

Definicija 1.2.26. *Ako je μ σ-konačna i zadovoljava*

$$\mu(A) \geq \int_A \mu(dx)\, P(x, A), \quad A \in \mathcal{B}(S), \tag{1.13}$$

tada se μ naziva subinvarijantna *mjera.*

Propozicija 1.2.27. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan. Ako je μ neka mjera koja zadovoljava* (1.13) *sa svojstvom $\mu(A) < \infty$ za neki $A \in \mathcal{B}^+(S)$, tada*

(i) μ je σ-konačna i zato je μ subinvarijantna mjera,

(ii) $\mu \succ \psi$,

(iii) ako je $\mu(S) < \infty$, tada je μ invarijantna.

Poglavlje 2

Obrnuta slučajna šetnja

Cilj ovog pogavlja je pokazati Tanakinu konstrukciju novoga procesa dobivenog iz slučajne šetnje tako da zamijenimo varijable vremena i promjenimo predznake koraka slučajne šetnje, te "lijepljenjem" tako dobivenih koraka dobijemo novi proces koji poprima vrijednosti samo u intervalu $[0, \infty)$, odnosno ne pada nikada ispod nule. Glavni cilj je dokazati da je proces koji je definiran na opisan način Markovljev proces.

2.1 Osnovne pretpostavke i iskaz teorema

Pretpostavimo da se nalazimo u 1-dimenzionalom prostoru. Neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ slučajna šetnja definirana s

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad (n \geq 1),$$

gdje je $(X_i)_{i \geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Slučajne varijable niza $(X_i)_{i \geq 1}$ nazivamo koracima slučajne šetnje. Definirajmo vrijeme zaustavljanja

$$\tau = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}.$$

τ označava vrijeme prvog pada slučajne šetnje S ispod nule, odnosno u otvoreni interval $(-\infty, 0)$. Osnovna pretpostavka ovoga poglavlja je da je vrijeme zaustavljanja τ konačno, odnosno da vrijedi

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1. \tag{2.1}$$

Dakle, ukoliko nam τ_1 označava vrijeme prvog pada slučajne šetnje ispod nule, τ_2 vrijeme ponovno prvog pada slučajne šetnje S ispod nule ako slučajna šetnja kreće iz vremena τ_1, itd... ova pretpostavka nam govori da je broj vremena definiranih na taj način konačan. Lako se vidi da je $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$

Promatrajmo sada slučajnu šetnju do vremena τ. Zamijenom varijabli vremena i promjenom predznaka koraka slučajne šetnje S definiramo niz novih vrijednosti s

$$(0, S_{\tau-1} - S_\tau, S_{\tau-2} - S_\tau, \dots, S_1 - S_\tau, -S_\tau). \tag{2.2}$$

Iz gornjeg niza možemo uočiti da vrijedi

$$(0, -X_n^{*\tau}, -(X_n^{*\tau} + X_{n-1}^{*\tau}), \dots, -(X_1^{*\tau} + \dots + X_n^{*\tau}))$$

pri čemu je $X_n^{*\tau} = X_\tau$.
Budući da je $S_\tau < 0$ po definiciji vremena zaustavljanja τ, a $S_1, \dots, S_{\tau-1} > 0$, slijedi da su sve komponente iz (2.2) strogo pozitivne (osim prve jer je $S_\tau - S_\tau = 0$).

Označimo s $w_1^{'}, w_2^{'}, \dots$ niz vrijednosti dobivenih zamjenom varijabli vremena i promjenom predznaka koraka slučajne šetnje S, koje su oblika (2.2) za vremena zaustavljanja $\tau_1, \tau_2, \dots$ Dakle,

$$\begin{aligned}
w_1^{'} &= (0, S_{\tau_1-1} - S_{\tau_1}, S_{\tau_1-2} - S_{\tau_1}, \dots, S_1 - S_{\tau_1}, -S_{\tau_1}),\\
w_2{'} &= (0, S_{\tau_2-1} - S_{\tau_2}, S_{\tau_2-2} - S_{\tau_2}, \dots, S_1 - S_{\tau_2}, -S_{\tau_2}),\\
w_2{'} &= (0, S_{\tau_3-1} - S_{\tau_3}, S_{\tau_3-2} - S_{\tau_3}, \dots, S_1 - S_{\tau_3}, -S_{\tau_3}),\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Zbog pretpostavke da su vremena zaustavljanja konačna, slijedi da su i $w_1^{'}, w_2^{'}, w_3^{'}$, ... konačne, ali različite duljine.
Primjetimo da $w_2^{'}$ sadrži niz vrijednosti koji smo već zapisali u $w_1^{'}$, odnosno te dvije varijable su zavisne. Prema tome, iz $w_2^{'}$ nam nisu bitne sve vrijednosti nego samo podskup onih vrijednosti koje se nalaze između vremena τ_2 i τ_1 (slučajnu šetnju promatramo od vremena τ_2 do vremena 0 koja obuhvaća i vrijeme τ_1) jer smo preostali dio već izračunali u $w_1^{'}$. Također, iz $w_3^{'}$ nam je značajan samo podskup onih vrijednosti između vremena τ_3 i τ_2. Prema tome, još jedna važna pretpostavka će biti da varijable koje ćemo koristiti za konstrukciju obrnute slučajne šetnje budu nezavisne, odnosno da budu iz skupa

$$\mathcal{W} = \left\{ w = (w(0), w(1), \dots, w(l)) : \begin{array}{l} w(0) = 0, \\ 0 < w(l) = \min\limits_{1 \le k \le l} w(k), \quad l \ge 1 \end{array} \right\}.$$

U daljnjem razmatranju, za slučajne varijable iz $\mathcal{W}$ ćemo koristiti oznaku

$$w_k = (w_k(0), w_k(1), w_k(2), \dots, w_k(l_k)),\ k \ge 1.$$

Svaka slučajna varijabla $w_k \in \mathcal{W}$ ima svoju duljinu l_k, koja je konačna i jednaka broju koraka koje je napravila slučajna šetnja između dva vremena zaustavljanja. Slijedi da je

$w_1 = w_1^{'}$ te $w_k \subset w_k^{'}$, $k \geq 2$.

U skladu sa svim pojmovima koje smo uveli do sada možemo definirati obrnutu slučajnu šetnju.
Obrnuta slučajna šetnja $W = (W_n \ : \ n \geq 0)$ je proces definiran na sljedeći način:

$$W_n = \begin{cases} w_1(n), & \text{za } 0 \leq n \leq l_1, \\ w_1(l_1) + w_2(n - l_1), & \text{za } l_1 < n \leq l_1 + l_2, \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ \sum_{j=1}^{k-1} w_j(l_j) + w_k(n - \sum_{j=1}^{k-1} l_j), & \text{za } \sum_{j=1}^{k-1} l_j < n \leq \sum_{j=1}^{k} l_j, \\ \quad \vdots & \quad \vdots \end{cases} \tag{2.3}$$

Pokažimo na vrlo jednostavnom primjeru slučajne šetnje kako se konstruira proces W.

Primjer 2.1.1. *Prepostavimo da su vrijednosti slučajne šetnje dane nizom* $S = (S_0, \ldots, S_{11}) = (0, 1, 1, 2, -1, 2, 3, 4, -2, 1, 1, -3)$. *Na Slici 2.1 prikazani su koraci slučajne šetnje* S.
Vidimo da imamo tri vremena zaustavljanja: $\tau_1 = 4, \tau_2 = 8$ *i* $\tau_3 = 11$. *Izračunajmo sada* $w_1^{'}, w_2^{'}$ *i* $w_3^{'}$*:*

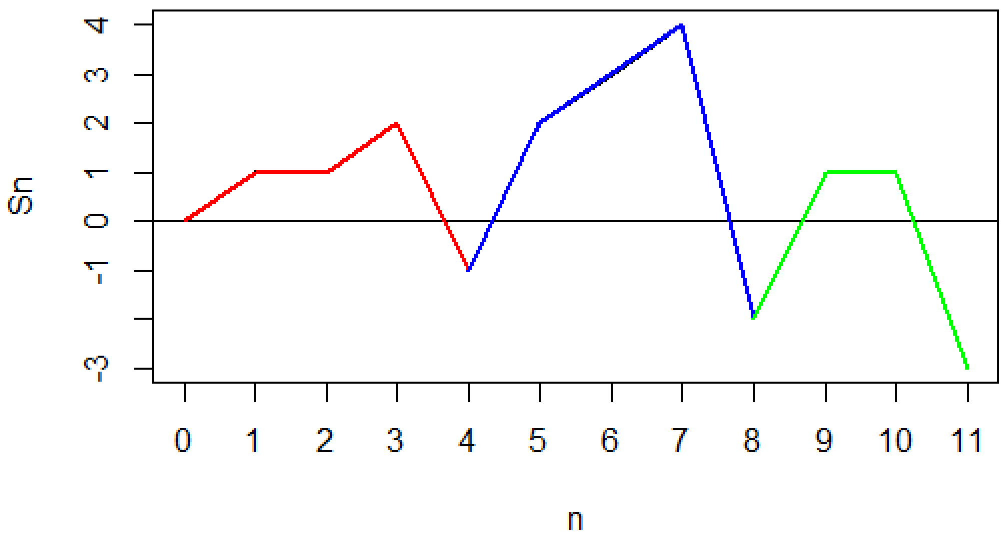
$$\begin{aligned} w_1^{'} &= (0, S_{\tau_1 - 1} - S_{\tau_1}, S_{\tau_1 - 2} - S_{\tau_1}, S_{\tau_1 - 3} - S_{\tau_1}, -S_{\tau_1}) \\ &= (0, S_3 - S_4, S_2 - S_4, S_1 - S_4, -S_4) \\ &= (0, 3, 2, 2, 1) \end{aligned}$$

Uočimo da je $w_1^{'} \in \mathcal{W}$. *Prema tome koristimo oznaku:* $w_1 = w_1^{'} = (w_1(0), \ldots, w_1(l_1))$ *iz čega slijedi da je* $w_1 = (0, 3, 2, 2, 1)$ *i* $l_1 = 4$.

$$\begin{aligned} w_2^{'} &= (0, S_{\tau_2 - 1} - S_{\tau_2}, S_{\tau_2 - 2} - S_{\tau_2}, S_{\tau_2 - 3} - S_{\tau_2}, S_{\tau_2 - 4} - S_{\tau_2}, \\ &\quad\ S_{\tau_2 - 5} - S_{\tau_2}, S_{\tau_2 - 6} - S_{\tau_2}, S_{\tau_2 - 7} - S_{\tau_2}, -S_{\tau_2}) \\ &= (0, S_7 - S_8, S_6 - S_8, S_5 - S_8, S_4 - S_8, \\ &\quad\ S_3 - S_8, S_2 - S_8, S_1 - S_8, -S_8) \\ &= (0, 6, 5, 4, 1, 4, 3, 3, 2) \end{aligned}$$

Odredimo sada w_2 *koji treba biti oblika* $(w_2(0), \ldots, w_2(l_2))$*, gdje je* $w_2(0) = 0$*,* $w_2(l_2) = \min_{1 \leq k \leq l_2} w_2(k)$*, te je* $w_2 \subset w_2^{'}$. *Slijedi da je* $w_2 = (0, 6, 5, 4, 1)$ *i* $l_2 = 4$. *Izračunajmo još* $w_3^{'}$*:*

$$\begin{aligned} w_3^{'} &= (0, S_{\tau_3 - 1} - S_{\tau_3}, S_{\tau_3 - 2} - S_{\tau_3}, S_{\tau_3 - 3} - S_{\tau_3}, S_{\tau_3 - 4} - S_{\tau_3}, \\ &\quad\ S_{\tau_3 - 5} - S_{\tau_3}, S_{\tau_3 - 6} - S_{\tau_3}, \ldots, S_{\tau_3 - 10} - S_{\tau_3}, -S_{\tau_3}) \\ &= (0, S_{10} - S_{11}, S_9 - S_{11}, S_8 - S_{11}, S_7 - S_{11}, S_6 - S_{11}, \\ &\quad\ S_5 - S_{11}, \ldots, S_1 - S_{11}, -S_{11}) \\ &= (0, 4, 4, 1, 7, 6, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 4, 3) \end{aligned}$$

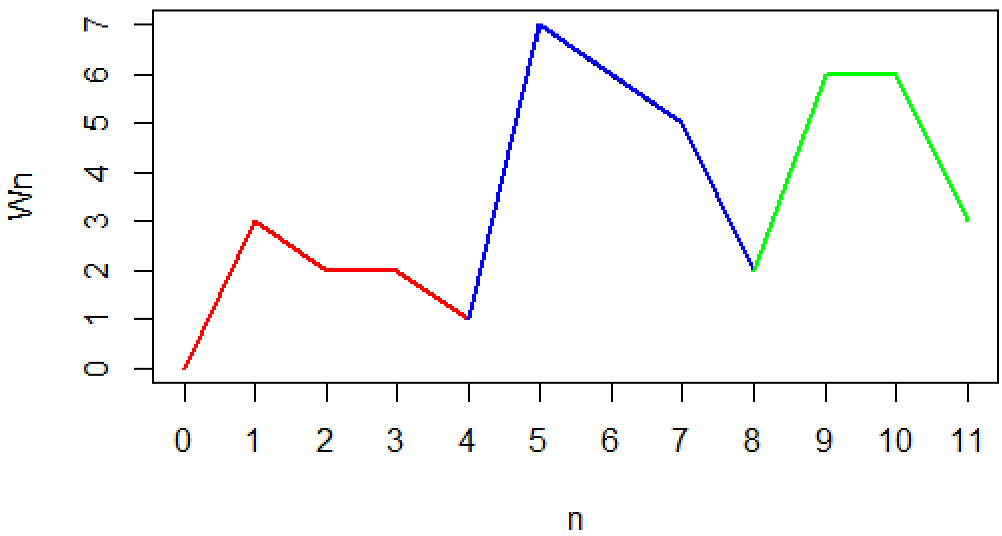


Slika 2.1: Slučajna šetnja S

Na isti način, odredimo w_3 *koji, također, treba biti iz* $\mathcal{W}$ *i* $w_3 \subset w_3'$. *Slijedi da je* $w_3 = (0,4,4,1)$ *i* $l_3 = 3$. *Na kraju izračunajmo proces* $W = (W_1, \dots, W_{11})$*:*

$$\begin{aligned} W =& (w_1(0), w_1(1), w_1(2), w_1(3), w_1(4), \\ & w_1(4) + w_2(1), w_1(4) + w_2(2), w_1(4) + w_2(3), w_1(4) + w_2(4), \\ & w_1(4) + w_2(4) + w_3(1), w_1(4) + w_2(4) + w_3(2), w_1(4) + w_2(4) + w_3(3)) \\ =& (0, 3, 2, 2, 1, 7, 6, 5, 2, 6, 6, 3) \end{aligned}$$

Na Slici 2.2 možemo vidjeti grafički prikaz obrnute slučajne šetnje te primjetimo da ona ima pozitivan drift.
Iz ovih slika možemo zaključiti da je prvi crveni korak na Slici 2.2 jednak zadnjem crvenom koraku na Slici 2.1 s promijenjenim predznakom, i tako dalje za ostale crvene korake. Također, isto vrijedi i za plave i zelene korake.



Slika 2.2: Obrnuta slučajna šetnja W

Definirajmo sada očekivani broj prolazaka slučajne šetnje S, koju smo definirali na početku poglavlja, kroz interval $[0, x)$ do vremena zaustavljanja τ s

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x = 0, \\ \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{1}_{[0,x)}(S_n)\right], & \text{za } x > 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

pri čemu $\mathbb{1}_A$ označava indikatorsku funkciju skupa A.

Za tako definirani $\xi(x)$, neka je

$$\hat{p}_\xi(x, dy) = \frac{1}{\xi(x)} \mathbb{P}(x - X_1 \in dy)\, \xi(y)\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y). \tag{2.5}$$

Dakle, $\hat{p}_\xi(x, dy)$ je vjerojatnost da slučajna šetnja $\hat{S}_n = \hat{S}_{n-1} - X_n$, koja kreće iz stanja x, pogodi neko stanje, te je ta vjerojatnost pomnožena s težinskim faktorom $\frac{1}{\xi(x)}\xi(y)\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$. Uočimo da je $\hat{S}_0 = S_0$ te $\hat{S}_n = -S_n$, $n \geq 1$.

U idućoj lemi ćemo pokazati da je $\hat{p}_\xi(x, dy)$ Markovljeva funkcija prijelaznih vjerojatnosti. Međutim, prije toga uvedimo još neke pojmove koji će nam trebati u dokazu te leme.

Za $x \in \mathbb{R}$ definirajmo slučajnu šetnju $S^x = (S^x_n : n \geq 0)$, gdje je $S^x_n = x + S_n$. Dodavanjem konstante x, slučajna šetnja S^x ne kreće iz ishodišta nego iz stanja x. Neka je

$$\tau^x = \min\{n \geq 1 : S^x_n < 0\}, \quad x \geq 0,$$

prvo vrijeme kada slučajna šetnja S^x padne ispod nule. Definirajmo

$$G(x, A) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau^x} \mathbb{1}_A(S^x_n)\right], \quad x \geq 0, \quad A \in \mathcal{B}([0,\infty)). \tag{2.6}$$

$G(x, A)$ je očekivani broj prolazaka slučajne šetnje S^x kroz Borelov skup A do vremena τ^x. Uočimo da vrijedi $\xi(x) = G(0, [0, x))$, za $x > 0$.

Definirajmo sada prijelazne vjerojatnosti slučajnih šetnji S i $\hat{S}$:

$$p(x, dy) = \mathbb{P}(x + X_1 \in dy), \quad \hat{p}(x, dy) = \mathbb{P}(x - X_1 \in dy) \tag{2.7}$$

$p(x, dy)$, odnosno $\hat{p}(x, dy)$, označava vjerojatnost da slučajna šetnja S, odnosno slučajna šetnja $\hat{S}$, koja kreće iz x u prvom koraku pogodi neko stanje.

Lema 2.1.2. $\hat{p}_\xi(x, [0,\infty))$ *je Markovljeva funkcija prijelaza na skupu* $[0, \infty)$.

Dokaz. Pokazati ćemo da vrijedi

$$\hat{p}_\xi(x, [0, \infty)) = \hat{p}_\xi(x, (0, \infty)) = 1, \quad x \geq 0,$$

odnosno da je $\hat{p}_\xi(x, [0, \infty))$ vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}([0, \infty))$. Prva jednakost u gornjoj relaciji nam kaže da nulu možemo isključiti jer, ukoliko proces kreće iz nule s vjerojatnošću 1 pogađa skup $[0, \infty)$. Iz definicije od $\hat{p}_\xi(x, dy)$ dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\int \frac{1}{\xi(x)}\, \hat{p}(x, dy)\, \xi(y)\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = 1$$
$$\frac{1}{\xi(x)} \int_{(0,\infty)} \hat{p}(x, dy)\, \xi(y) = 1,$$

odnosno

$$\int_{(0,\infty)} \hat{p}(x, dy)\, \xi(y) = \xi(x), \quad x \geq 0. \tag{2.8}$$

Dokaz je podijeljen u dva koraka.

Korak 1. Prvo ćemo pokazati da vrijedi $\int_{[0,\infty)} G(0,dx)\,\mathbb{P}(-X_1 \in (x,\infty)) = 1$. Slijedi

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}(\tau < \infty) \\
&= \mathbb{P}(\tau = 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n+1) \\
&= \int_{(-\infty,0)} p(0,dy) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\infty)} p(0,dx_1) \int_{[0,\infty)} p(x_1,dx_2) \dots \int_{[0,\infty)} p(x_{n-1},dx_n) \int_{(-\infty,0)} p(x_n,dy) \\
&= \int_{(-\infty,0)} p(x,dy) \left(\delta_0(dx) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\infty)} p(0,dx_1) \int_{[0,\infty)} p(x_1,dx_2) \dots \int_{[0,\infty)} p(x_{n-1},dx) \right) \\
&= \int_{[0,\infty)} G(0,dx) \int_{(-\infty,0)} p(x,dy) \\
&= \int_{[0,\infty)} G(0,dx)\,\mathbb{P}(x + X_1 \in (-\infty,0)) \\
&= \int_{[0,\infty)} G(0,dx)\,\mathbb{P}(X_1 \in (-\infty,-x)) \\
&= \int_{[0,\infty)} G(0,dx)\,\mathbb{P}(-X_1 \in (x,\infty))
\end{aligned}$$

Korak 2. U drugom koraku ćemo pokazati da je $\int_{(0,\infty)} \hat{p}(x,dy)\,\xi(y) = \xi(x),\ x \geq 0$.

Lijeva strana gornje jednakosti jednaka je

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)} \mathbb{P}(x - X_1 \in dy) \int_{[0,y)} G(0, dz) \\
&\qquad = \int_{[0,\infty)} G(0, dz) \int_{(z,\infty)} \mathbb{P}(x - X_1 \in dy) \\
&\qquad = \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(x - X_1 \in (z, \infty)) \\
&\qquad = \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(-X_1 \in (z - x, \infty)) \\
&\qquad = \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\ [\mathbb{P}(-X_1 \in (z, \infty)) + \mathbb{P}(-X_1 \in (z - x, z])] \\
&\qquad = \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(-X_1 \in (z, \infty)) + \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(-X_1 \in (z - x, z]) \\
&\qquad = 1 + \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(-X_1 \in (z - x, z]),
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti zamjenili poredak integracije, a u zadnjoj jednakosti smo upotrijebili rezultat iz *Koraka 1.* Također, možemo primjetiti da je drugi član jednak nuli ako je $x = 0$. Posljednji red možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&1 + \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(-X_1 \in (-x, 0] + z) \\
&\qquad = 1 + \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\, \mathbb{P}(-z - X_1 \in (-x, 0]) \\
&\qquad = 1 + \int_{[0,\infty)} G(0, dz)\mathbb{P}(z + X_1 \in [0, x)) \\
&\qquad = 1 + \int_{[0,x)} p(0, dy) \\
&\qquad\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\infty)} p(0, dx_1) \int_{[0,\infty)} p(x_1, dx_2) \ldots \int_{[0,\infty)} p(x_{n-1}, dx_n) \int_{[0,x)} p(x_n, dy) \\
&\qquad = \delta_0([0, x)) + \int_{[0,x)} p(0, dy) \\
&\qquad\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\infty)} p(0, dx_1) \int_{[0,\infty)} p(x_1, dx_2) \ldots \int_{[0,\infty)} p(x_{n-1}, dx_n) \int_{[0,x)} p(x_n, dy) \\
&\qquad = G(0,\ [0, x)) \\
&\qquad = \xi(x).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali gornju lemu. □

U skladu s time možemo iskazati glavni teorem ovoga pogavlja.

Teorem 2.1.3. *Uz pretpostavku* (2.1)*,* $W = (W_n : n \geq 0)$ *je Markovljev proces na* $[0, \infty)$ *s Markovljevom funkcijom prijelaza* $\hat{p}_\xi(x, dy)$*.*

Napomena 2.1.4. *Možemo primjetiti da vrijedi* $\xi(x) < \infty$*,* $x \geq 0$*. Postoji više načina da se dokaže ta konačnost. Gore imamo dokaz leme koji se temelji na jednakosti* (2.8) *koja je dokazana bez primjene konačnosti od* $\xi(x)$*. Pretpostavka* (2.1) *implicira da je* $\hat{p}(x, (x + \varepsilon, \infty)) = \mathbb{P}(-X_1 > \varepsilon) > 0$ *za neke* $\varepsilon > 0$*. Stoga jednakost* (2.8) *uz* $x = 0$ *implicira da je* $\xi(x_1) < \infty$ *za neke* $x_1 > \varepsilon$*. Nadalje, ukoliko stavimo* $x = x_1$ *ista jednakost implicira da je* $\xi(x_2) < \infty$ *za neke* $x_2 > x_1 + \varepsilon$*. Ponavljanjem takvog zaključka, možemo primjetiti da postoji niz* x_n*, gdje je* $x_0 = 0$*,* $x_n - x_{n-1} > \varepsilon$ *i* $\xi(x_n) < \infty$ *za sve* $n \geq 1$*. Povezujući to s monotonošću od* $\xi(x)$ *slijedi da je* $\xi(x) < \infty$ *za sve* $x \geq 0$*.*

2.2 Dokaz teorema u diskretnom slučaju

U ovom potpoglavlju, dokaz Teorema 2.1.3 ćemo provesti u diskretnom slučaju gdje je

$$\mathbb{P}(X_k \in \mathbb{Z}) = 1, \tag{2.9}$$

odnosno, pretpostavljamo da su koraci slučajne šetnje cijeli brojevi $\mathbb{P}$-g.s. Dokaz teorema u općem slučaju može se naći u Tanaka [5].

U ovom slučaju, prostor $\mathcal{W}$ se sastoji od različitih trajektorija oblika $w = (w(0), w(1), ...w(l))$ gdje je $w(k) \in \mathbb{Z}$, $w(0) = 0$, $0 < w(l) = \min_{1 \leq k \leq l} w(k)$ i $l \geq 1$. Neka je μ vjerojatnosna mjera na $\mathcal{W}$, te neka je $w \in \mathcal{W}$. Tada ćemo s $\mu \sim (0, S_{\tau-1} - S_\tau, S_{\tau-2} - S_\tau, \ldots, S_1 - S_\tau, -S_\tau)$ označavati da je zakon razdiobe od $(0, S_{\tau-1} - S_\tau, S_{\tau-2} - S_\tau, \ldots, S_1 - S_\tau, -S_\tau)$ jednak μ, tj. da vrijedi

$$\mathbb{P}((0, S_{\tau-1} - S_\tau, S_{\tau-2} - S_\tau, \ldots, S_1 - S_\tau, -S_\tau) \in w) = \mathbb{P}_{(0, S_{\tau-1} - S_\tau, S_{\tau-2} - S_\tau, \ldots, S_1 - S_\tau, -S_\tau)}(w) = \mu(w),$$

za sve $w \in \mathcal{W}$. Stavimo

$$p(x, y) = \mathbb{P}(x + X_1 = y), \qquad \hat{p}(x, y) = p(y, x), \qquad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Uočimo da druga jednakost vrijedi zbog

$$\hat{p}(x, y) = \mathbb{P}(x - X_1 = y) = \mathbb{P}(y + X_1 = x) = p(y, x), \quad x, y \in \mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

Pokažimo sljedeću lemu koja nam kaže da se zakon razdiobe μ jednog puta obrnute slučajne šetnje W može napisati kao produkt odgovarajućih prijelaznih vjerojatnosti.

Lema 2.2.1. *Ako* $a_1, a_2, \dots, a_l \in \mathbb{Z}\,(l \geq 1)$ *zadovoljavaju*

$$\min_{1\leq k\leq l} a_k = a_l > 0, \tag{2.11}$$

tada vrijedi

$$\mu\{w = (0, a_1, \dots, a_l)\} = \hat{p}(0, a_1)\hat{p}(a_1, a_2)\dots\hat{p}(a_{l-1}, a_l). \tag{2.12}$$

Dokaz. S obzirom da je događaj

$$\Gamma = \{\tau = l,\ S_{l-k} - S_l = a_k\,(1 \leq k \leq l)\}$$

jednak događaju $\{S_{l-k} - S_l = a_k\,(1 \leq k \leq l)\}$, lijeva strana jednakosti (2.12) jednaka je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Gamma) &= \mathbb{P}(S_{l-1} - S_l = a_1, \dots, S_1 - S_l = a_{l-1},\ -S_l = a_l)\\
&= \mathbb{P}(S_{l-1} = a_1 - a_l,\ S_{l-2} = a_2 - a_l, \dots, S_1 = a_{l-1} - a_l,\ S_l = -a_l)\\
&= \mathbb{P}(S_1 = a_{l-1} - a_l,\ S_2 = a_{l-2} - a_l, \dots, S_{l-1} = a_1 - a_l,\ S_l = -a_l)\\
&= \mathbb{P}(X_1 = a_{l-1} - a_l)\,\mathbb{P}((a_{l-1} - a_l) + X_1 = a_{l-2} - a_l)\dots\mathbb{P}((a_1 - a_l) + X_1 = -a_l)\\
&= p(0, a_{l-1} - a_l)\,p(a_{l-1} - a_l, a_{l-2} - a_l)\dots p(a_1 - a_l, -a_l)\\
&= p(a_l, a_{l-1})\,p(a_{l-1}, a_{l-2})\dots p(a_1, 0)\\
&\overset{(2.10)}{=} \hat{p}(a_{l-1}, a_l)\,\hat{p}(a_{l-2}, a_{l-1})\dots\hat{p}(0, a_1)\\
&= \hat{p}(0, a_1)\,\hat{p}(a_1, a_2)\dots\hat{p}(a_{l-2}, a_{l-1})\,\hat{p}(a_{l-1}, a_l),
\end{aligned}$$

gdje smo u četvrtoj jednakosti koristili činjenicu da su koraci slučajne šetnje nezavisni, dok šesta jednakost slijedi iz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = a_{l-1} - a_l) = \mathbb{P}(a_l + X_1 = a_{l-1})\\
&\mathbb{P}((a_{l-1} - a_l) + X_1 = a_{l-2} - a_l) = \mathbb{P}(a_{l-1} + X_1 = a_{l-2})\\
&\qquad\vdots\\
&\mathbb{P}((a_1 - a_l) + X_1 = -a_l) = \mathbb{P}(a_1 + X_1 = 0).
\end{aligned}$$

□

Iz gornje leme slijedi da se za x, x_j, y, a uvijek prepostavlja da su cijeli brojevi. Za $x, y \geq a$ stavimo

$$g_a(x, y) = \delta_{x,y} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0 = x\\ x_1,\dots,x_n \geq a}} p(x_0, x_1)\,p(x_1, x_2)\dots p(x_n, y),$$

$$\hat{g}_a(x, y) = \delta_{x,y} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0 = x\\ x_1,\dots,x_n \geq a}} \hat{p}(x_0, x_1)\,\hat{p}(x_1, x_2)\dots\hat{p}(x_n, y)$$

Tada vrijedi

$$g_a(x,y) = \hat{g}_a(y,x), \qquad x,y \geq a, \tag{2.13}$$

$$g_a(x,y) = g_{a+b}(x+b, y+b), \qquad x,y \geq a, \forall b \in \mathbb{Z}, \tag{2.14}$$

$$\xi(x) = G(0,[0,x)) = \sum_{0<a\leq x} g_a(a,x), \qquad x \geq 1. \tag{2.15}$$

U (2.15) druga jednakost slijedi iz

$$\begin{aligned}\sum_{0<a\leq x} g_a(a,x) &\overset{(2.14)}{=} \sum_{0<a\leq x} g_0(0,x-a) = \\ &= [z = x-a \Rightarrow 0 \leq z < x \quad (\text{zbog } x \geq a \text{ i } a > 0)] = \\ &= \sum_{z\in[0,x)} \left(\delta_{0,z} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_1,\ldots,x_n\geq 0} p(0,x_1)\, p(x_1,x_2)\ldots p(x_n,z) \right) = \\ &= G(0,\ [0,x))\end{aligned}$$

Za $w = (w(0), w(1), \ldots, w(l)) \in \mathcal{W}$ definiramo duljinu jednog puta reflektirane slučajne šetnje $l(w)$ sa

$$l(w) = l. \tag{2.16}$$

Neka su $a_1, \ldots, a_m$ $(m \geq 1)$ zadani *pozitivni* cijeli brojevi te neka je

$$a^* = \min_{1\leq k\leq m} a_k. \tag{2.17}$$

Za cijeli broj a gdje je $0 < a \leq a^*$ promatramo sljedeće događaje:

$$\Lambda_n(a_1,\ldots,a_m;\ a) = \left\{ w \in \mathcal{W} : \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w(k) = a_k\ (1 \leq k \leq m) \\ l(w) = m+n \\ w(m+n) = a \end{array} \right\}, \quad n \geq 0,$$

$$\Lambda(a_1,\ldots,a_m;\ a) = \cup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(a_1,\ldots,a_m;\ a).$$

Skup Λ_n opisuje događaj u kojem prvi ciklus traje $m+n$ i tada pogađa a, dok u koracima $1,2,\ldots,m$ pogađa redom $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Dakle, Λ je unija svih takvih događaja za $n \geq 0$.

U sljedećoj lemi ćemo pokazati čemu je jednaka razdioba od $\Lambda(a_1,\ldots,a_m;\ a)$.

Lema 2.2.2. *Za pozitivne cijele brojeve* $a, a_1, \ldots, a_m$ $(m \geq 1)$ *za koje vrijedi* $0 < a \leq a^*$*, pri čemu je* a^* *definiran formulom* (2.17)*, vrijedi*

$$\mu\{\Lambda(a_1,\ldots,a_m;\ a)\} = \left\{ \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1},a_j) \right\} \cdot g_a(a,a_m), \quad a_0 = 0. \tag{2.18}$$

Dokaz. Jednakost (2.18) je posljedica sljedećih jednakosti:

$$\mu\{\Lambda_0(a_1,\dots,a_m;\,a)\} = \begin{cases} \prod_{k=1}^m \hat{p}(a_{k-1},a_k), & \text{ako je } a = a_m \text{ (i stoga} = a^*) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\mu\{\Lambda_n(a_1,\dots,a_m;\,a)\} \\ &\quad= \sum_{a_{m+1},a_{m+2},\dots,a_{m+n-1}\geq a} \mu\{w = (0,a_1,\dots,a_m,a_{m+1},\dots,a_{m+n-1},a)\} \\ &\quad= \sum_{a_{m+1},a_{m+2},\dots,a_{m+n-1}\geq a} \hat{p}(0,a_1)\hat{p}(a_1,a_2)\dots\hat{p}(a_{m+n-1},a) \quad \text{(po (2.12))} \\ &\quad= \left\{\prod_{j=1}^m \hat{p}(a_{j-1},a_j)\right\}\cdot g_n, \qquad n\geq 1, \end{aligned} \tag{2.20}$$

gdje je

$$g_n = \begin{cases} \hat{p}(a_m,a), & \text{ako je } n = 1, \\ \sum_{a_{m+1},a_{m+2},\dots,a_{m+n-1}\geq a} \hat{p}(a_m,a_{m+1})\,\hat{p}(a_{m+1},a_{m+2})\dots\hat{p}(a_{m+n-1},a), & \text{ako je } n\geq 2. \end{cases}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} &\delta_{a_m,a} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \\ &= \delta_{a_m,a} + \hat{p}(a_m,a) + \sum_{a_{m+1}\geq a} \hat{p}(a_m,a_{m+1})\,\hat{p}(a_{m+1},a) + \dots + \\ &\qquad \sum_{a_{m+1},a_{m+2},\dots,a_{m+n-1}\geq a} \hat{p}(a_m,a_{m+1})\,\hat{p}(a_{m+1},a_{m+2})\dots\hat{p}(a_{m+n-1},a) + \dots \\ &= \delta_{a_m,a} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{x_0=a_m \\ a_{m+1},\dots,a_{m+n-1}\geq a}} \hat{p}(x_0,a_{m+1})\dots\hat{p}(a_{m+n-1},a) \\ &= \hat{g}_a(a_m,\,a) \\ &\overset{(2.13)}{=} g_a(a,\,a_m). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Tvrdnja leme slijedi iz jednakosti (2.19), (2.20) i (2.21). □

Sada prelazimo na dokaz našeg teorema pretpostavljajući da vrijedi (2.1) i (2.9). Neka su $w_1, w_2, \dots$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s vrijednošću u $\mathcal{W}$ i sa zajedničkom razdiobom μ te definiramo proces $W = \{W_n : n \geq 0\}$ pomoću formule (2.3). Za dane cijele brojeve

$$a_0 = 0, a_1 > 0, \ldots, a_m > 0 \quad (m \geq 1),$$

promatramo sljedeće događaje

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{W_k = a_k \, (1 \leq k \leq m)\}, \\ \Lambda_a &= \{W_k = a_k \, (1 \leq k \leq m), \, W_m^* = a\}, \end{aligned}$$

gdje je $W_m^* = \min_{n \geq m} W_n$. Uočimo da je Λ_a događaj u kojem obrnuta slučajna šetnja pogađa redom $a_1, a_2, \ldots, a_m$ i minimum joj je jednak $a \leq a_m$ od trenutka m pa nadalje. Tada je $\Lambda = \cup_{0<a\leq a_m} \Lambda_a$ (slučaj $a = 0$ isključujemo jer je $W_n \geq 1, \forall n \geq 1$). Stavimo $0 < a \leq a_m$ i definiramo $m(0) > m(1) > m(2) > \ldots > m(\alpha) = 0$ na sljedeći način:

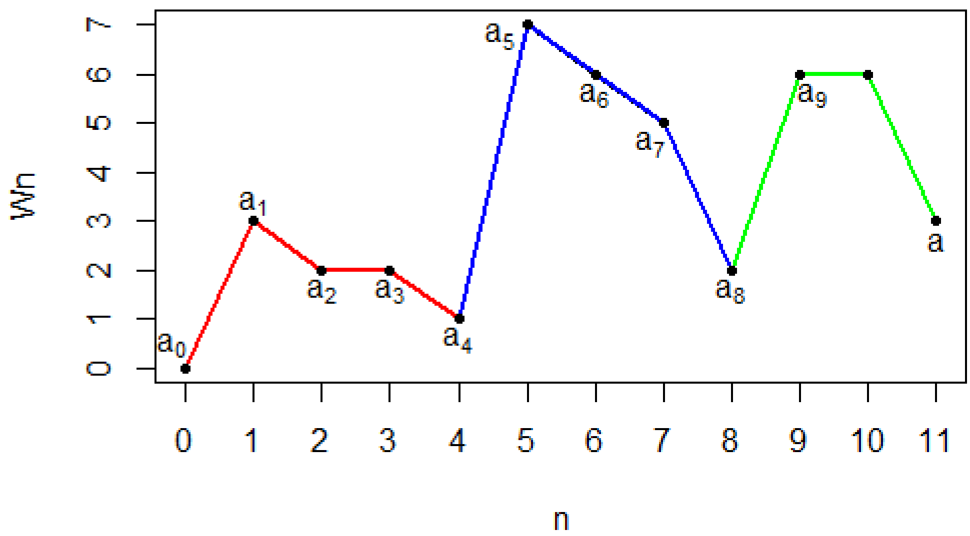
$$\begin{aligned} m(0) &= m, \\ m(1) &= \max\{n < m : a_n < a\}, \\ m(2) &= \max\{n < m(1) : a_n < a_{m(1)}\}, \\ &\vdots \\ m(\alpha) &= \max\{n < m(\alpha - 1) : a_n < a_{m(\alpha-1})\}. \end{aligned}$$

Potom je jasno da

$$\begin{aligned} &(0, a_1, a_2, \ldots, a_{m(\alpha-1)}) \in \mathcal{W}, \\ &(0, a_{m(\alpha-1)+1} - a_{m(\alpha-1)}, a_{m(\alpha-1)+2} - a_{m(\alpha-1)}, \ldots, a_{m(\alpha-2)} - a_{m(\alpha-1)}) \in \mathcal{W}, \\ &\quad \vdots \\ &(0, a_{m(2)+1} - a_{m(2)}, a_{m(2)+2} - a_{m(2)}, \ldots, a_{m(1)} - a_{m(2)}) \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Primjer 2.2.3. *Pokažimo na primjeru obrnute šetnje prikazane na Slici 2.2 koliko imamo punih ciklusa u nizu pozitivnih cijelih brojeva* $a_1, \ldots, a_m$.
Stavimo

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 3, \\ a_2 &= 2, & a_3 &= 2, \\ a_4 &= 1, & a_5 &= 7, \\ a_6 &= 6, & a_7 &= 5, \\ a_8 &= 2, & a_6 &= 9. \end{aligned}$$



Slika 2.3: Niz odabranih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_9$

Primjetimo da smo brojeve odabrali tako da je $W_k = a_k$ za $1 \leq k \leq m$, te iz $W_m^* = a$ i $W_m^* = \min_{n \geq m} W_n$ slijedi da je $a = 3$. Prema gornjoj formuli računamo:

$$
\begin{aligned}
m(0) &= 9 \\
m(1) &= \max\{n < 9 : a_n < 3\} = 8 \\
m(2) &= \max\{n < 8 : a_n < 2\} = 4 \\
m(3) &= \max\{n < 4 : a_n < 1\} = 0
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo

$$
\begin{aligned}
(0, a_1, a_2, \dots, a_{m(\alpha-1)}) &= (0, a_1, a_2, a_3, a_4) \\
&= (0, 3, 2, 2, 1) \in \mathcal{W}, \\
(0, a_{m(2)+1} - a_{m(2)}, a_{m(2)+2} - a_{m(2)}, \dots, a_{m(1)} - a_{m(2)}) &= (0, a_5 - a_4, a_6 - a_4, a_7 - a_4, a_8 - a_4) \\
&= (0, 6, 5, 4, 1) \in \mathcal{W}.
\end{aligned}
$$

Uočimo, iz Slike 2.3 možemo zaključiti da u nizu brojeva $a_1, a_2, \dots, a_9$ imamo dva puna ciklusa koji su označeni crvenom i plavom bojom.

Prema gore pokazanom, događaj Λ_a možemo zapisati na sljedeći način:

$$\Lambda_a = \left[\bigcap_{k=1}^{\alpha-1}\{w_k = (0, a_{m(\alpha-k+1)+1} - a_{m(\alpha-k+1)}, \dots, a_{m(\alpha-k)} - a_{m(\alpha-k+1)})\}\right] \\ \cap \{w_\alpha \in \Lambda(a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, \dots, a_m - a_{m(1)})\}.$$

Primjenom Leme 2.2.1 i Leme 2.2.2 dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mu\{w_1 = (0, a_{m(\alpha)+1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha)+2} - a_{m(\alpha)}, \dots, a_{m(\alpha-1)-1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha-1)} - a_{m(\alpha)})\} \\
&= \hat{p}(0, a_{m(\alpha)+1} - a_{m(\alpha)})\, \hat{p}(a_{m(\alpha)+1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha)+2} - a_{m(\alpha)}) \dots \hat{p}(a_{m(\alpha-1)-1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha-1)} - a_{m(\alpha)}), \\
&\quad\vdots \\
&\mu\{w_{\alpha-1} = (0, a_{m(2)+1} - a_{m(2)}, a_{m(2)+2} - a_{m(2)}, \dots, a_{m(1)-1} - a_{m(2)}, a_{m(1)} - a_{m(2)})\} \\
&= \hat{p}(0, a_{m(2)+1} - a_{m(2)})\, \hat{p}(a_{m(2)+1} - a_{m(2)}, a_{m(2)+2} - a_{m(2)}) \dots \hat{p}(a_{m(1)-1} - a_{m(2)}, a_{m(1)} - a_{m(2)}), \\
&\mu\{w_\alpha\} = \mu\{\Lambda(a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, \dots, a_m - a_{m(1)};\ a - a_{m(1)})\} \\
&= \hat{p}(0, a_{m(1)+1} - a_{m(1)})\, \hat{p}(a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, a_{m(1)+2} - a_{m(1)}) \dots \\
&\qquad \hat{p}(a_{m(0)-1} - a_{m(1)}, a_m - a_{m(1)}) \cdot g_{a-a_{m(1)}}(a - a_{m(1)}, a_m - a_{m(1)}),
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je

$$\mathbb{P}(\Lambda_\alpha) = \left\{\prod_{k=1}^{\alpha} \prod_{j=1}^{m(\alpha-k)-m(\alpha-k+1)} \hat{p}_{kj}\right\} g_{a-a_{m(1)}}(a - a_{m(1)}, a_m - a_{m(1)}), \tag{2.22}$$

gdje je

$$\hat{p}_{kj} = \hat{p}(a_{m(\alpha-k+1)+j-1} - a_{m(\alpha-k+1)}, a_{m(\alpha-k+1)+j} - a_{m(\alpha-k+1)}).$$

Možemo primjetiti da vrijedi

$$\begin{aligned}
&\hat{p}(0, a_{m(\alpha)+1} - a_{m(\alpha)})\, \hat{p}(a_{m(\alpha)+1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha)+2} - a_{m(\alpha)}) \dots \hat{p}(a_{m(\alpha-1)-1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha-1)} - a_{m(\alpha)}) \\
&= \hat{p}(a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha)+1})\, \hat{p}(a_{m(\alpha)+1}, a_{m(\alpha)+2}) \dots \hat{p}(a_{m(\alpha-1)-1}, a_{m(\alpha-1)}), \\
&\quad\vdots \\
&\hat{p}(0, a_{m(1)+1} - a_{m(1)})\, \hat{p}(a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, a_{m(1)+2} - a_{m(1)}) \dots \hat{p}(a_{m(0)-1} - a_{m(1)}, a_m - a_{m(1)}) \\
&= \hat{p}(a_{m(1)}, a_{m(1)+1})\hat{p}(a_{m(1)+1}, a_{m(1)+2}) \dots \hat{p}(a_{m(0)-1}, a_m),
\end{aligned}$$

stoga primjenom relacije (2.14) i činjenice da je $a_{m(\alpha)} = a_0$ jednakost (2.22) možemo zapisati kao

$$\mathbb{P}(\Lambda_\alpha) = \left\{\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{k-1}, a_k)\right\} g_a(a, a_m).$$

Prema tome, zaključujemo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Lambda) &= \mathbb{P}(\cup_{0<a\le a_m}\Lambda_a) \\
&= \sum_{0<a\le a_m} \mathbb{P}(\Lambda_a) \\
&= \left\{\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{k-1}, a_k)\right\} \cdot \sum_{0<a\le a_m} g_a(a, a_m) \\
&= \left\{\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{k-1}, a_k)\right\} \cdot \xi(a_m) \qquad\qquad \text{(po (2.15))} \\
&= \prod_{k=1}^{m} \hat{p}_\xi(a_{k-1}, a_k),
\end{aligned}
$$

što dokazuje teorem u diskretnom slučaju. □

2.3 Interpretacija teorema

U ovom potpoglavlju ćemo provesti simulacijsku studiju te na temelju procijenjenih rezultata ćemo moći sugerirati da obrnuta slučajna šetnja i slučajna šetnja koja je uvjetovana da ostane pozitivnom imaju istu razdiobu.

Neka je $(X_i)_{i\ge1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Slučajne varijable X_i koje koristimo su samo primjer. Pretpostavimo da je slučajna šetnja $S = (S_n : n \ge 0)$ definirana sa

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad (n \ge 1).$$

Možemo primjetiti da je očekivanje slučajnih varijabli X_i veće od nula. Također, budući da tako definirana slučajna šetnja ide prema $+\infty$, vrijedi $\mathbb{P}(\inf S_n > 0) > 0$, za sve $n \ge 1$. Stoga, ima smisla definirati slučajnu kojoj je infimum veći od nule te koju ćemo označavati sa $(S_n \mid \inf S_n > 0)$ i nazivati slučajna šetnja uvjetovana da ostane pozitivnom.

Biggins [2] i Bertoin [1] su pokazali da možemo definirati slučajnu šetnju $S_n^Y = -S_n$, gdje je $S_n^Y = Y_1 + \ldots + Y_n$ i $Y_i = -X_i$. Očekivanje slučajnih varijabli Y_i je strogo manje od nule pa možemo primijetiti da je osnovna pretpostavka iz Tanakinog teorema zadovoljena, tj. vrijedi $\mathbb{P}(\tau^Y < \infty) = 1$. Prema tome, iz procesa (S_n^Y) Tanakinom konstrukcijom možemo dobiti proces (W_n) kojega smo ranije definirali. Oni su došli do zaključka da procesi (W_n) i $(S_n \mid \inf S_n > 0)$ imaju istu razdiobu.

U programu R smo proveli simulacijsku studiju slučajne šetnje koju smo definirali na početku ovog potpoglavlja. Obrnutu slučajnu šetnju (W_n) smo simulirali iz slučajne šetnje S, čiji koraci X_i imaju distribuciju kao na početku potpoglavlja, te koja je duljine 100 tako da smo prvo pronašli prvo vrijeme kada šetnja S padne ispod nule (vrijeme zaustavljanja τ). Zatim smo izračunali prvi korak obrnute šetnje tako da smo oduzeli vrijednosti slučajne šetnje S pridružene vremenima $\tau - 1$ i τ. Drugi korak smo dobili tako da smo oduzeli vrijednost slučajne šetnje pridružene vremenu $\tau - 2$ i vrijednost pridružene vremenu $\tau - 1$. Proces $(S_n \mid \inf S_n > 0)$ smo također simulirali iz šetnje S tako da smo promatrali S samo ako ona nije pala ispod nule pa su nam, prema tome, prvi i drugi korak od $(S_n \mid \inf S_n > 0)$ upravo prva dva koraka šetnje S. Simulaciju smo prekinuli ako je šetnja dosegnula nulu prije 100.-tog koraka. Zbog jednostavnosti, označimo $A = \{\inf S_n > 0\}$. Pogledajmo sljedeće rezultate:

	$x = 1$	x=4
$\mathbb{P}(W_1 = x)$	0.3082	0.6917
$\mathbb{P}(S_1 = x \mid A)$	0.3067	0.6933

Tablica 2.1: Procjene razdioba procesa (W_n) i procesa $(S_n \mid \inf S_n > 0)$ nakon prvog koraka

Na temelju procijenjenih vrijednosti koje su prikazane u Tablici 2.1 možemo primijetiti da su razdiobe danih procesa nakon prvog koraka približno jednake. Pogledajmo sada razdiobu drugog koraka:

	$x = -2$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$
$\mathbb{P}(W_2 - W_1 = x)$	0.1081	0.1469	0.3069	0.4381
$\mathbb{P}(S_2 - S_1 = x \mid A)$	0.1082	0.1466	0.3072	0.4379

Tablica 2.2: Procjene razdioba drugog koraka procesa (W_n) i procesa $(S_n \mid \inf S_n > 0)$

Uočimo, vjerojatnosne procjene da će drugi korak biti jedna od vrijednosti $-2, -1, 1$ ili 4 su približno jednake za dane procese, pa prema tome možemo zaključiti da će i procjene razdioba procesa (W_n) i procesa $(S_n \mid \inf S_n > 0)$ biti približno jednake nakon što procesi naprave dva uzastopna koraka. Analogno možemo provesti analizu i ostalih koraka danih procesa te možemo primijetiti da dobivene procjene sugeriraju da su razdiobe obrnute slučajne šetnje i šetnje uvjetovane da ostane pozitivnom jednake.

Bibliografija

[1] J. Bertoin, *Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Lévy processes*, Stochastic Processes and their Applications **47** (1993), br. 1, 17–35.

[2] J.D. Biggins, *Random walk conditioned to stay positive*, Journal of the London Mathematical Society **67** (2003), br. 1, 259–272.

[3] S. P. Meyn i R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer Science & Business Media, 2012.

[4] A. Lisičar, *Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja i povratnost*, (2014).

[5] H. Tanaka, *Time Reversal of Random Walks in One-Dimension*, Tokyo Journal of Mathematics **12** (1989), br. 1, 159–174.

[6] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci, skripta*, Prirodoslovno-matematicki fakultet u Zagrebu (2008).

Sažetak

U ovom radu govorimo o Tanakinoj konstrukuciji procesa kojega možemo dobiti iz slučajne šetnje te pokazujemo da je tako konstruiran proces Markovljev lanac.

U prvom poglavlju obrađujemo nužnu teoriju koja nam je podloga za daljnja razmatranja, a to je teorija Markovljevih lanaca na diskretnom i općenitom skupu stanja. Definiramo pojmove poput Markovljevog lanca, Markovljeve funkcije prijelaza, svojstva zaboravljivosti i vremena zaustavljanja. Pokazujemo da je slučajna šetnja Markovljev lanac i na diskretnom i na općenitom skupu stanja, te da je vrijeme kada slučajna šetnja prvi put padne ispod nule vrijeme zaustavljanja. Također, pokazujemo da je Markovljev lanac na diskretnom skupu stanja poseban slučaj Markovljevog lanca na općenitom skupu stanja. To su samo neki tehnički rezultati koji su važan dio nekih vrlo bitnih tvrdnji koje se nalaze u sljedećem poglavlju.

U drugom poglavlju Tanakinom metodom konstruiramo novi proces kojega nazivamo obrnuta slučajna šetnja te kojega smo dobili koristeći neke vrlo elementarne metode. Na vrlo jednostavnom primjeru pokazujemo kako se iz slučajne šetnje konstruira obrnuta slučajna šetnja te iz toga primjećujemo da takva šetnja ima pozitivan drift. Definirali smo Markovljevu funkciju prijelaza i dokazali da ona to uistinu je. U glavnom teoremu smo iskazali da je obrnuta slučajna šetnja Markovljev proces na skupu $[0, \infty)$ s prethodno definiranom funkcijom prijelaza, te dokazali tu tvrdnju diskrenom slučaju.

Summary

In this work we talk about Tanaka's construction of processes which we can get from a random walk and show that such constructed process is Markov chain.

In first chapter we process the necessary theory which is basis for further consideration and that is theory of Markov chain on a countable and general state space. We define terms such as Markov chain, Markov transition function, "forgetfulness" property and stopping times. We show that a random walk is a Markov chain on both a countable and a general state space, and that the time of first entry into the open negative half line for the random walk is the stopping time. Also, we show that Markov chain on countable state space is special case of Markov chain on a general state space. That are just some technical results which are important part of some very important claims which are found in the next chapter.

In the second chapter, we construct a new process using Tanaka's method, which we call the reverse random walk, and which we obtained using some very elementary methods. On a very simple example, we show how reverse random walk is constructed from a random walk, and from this we notice that such a walk has a positive drift. We have defined Markov transition function and proved that it truly is. In the main theorem, we have shown that the reverse random walk is a Markov process on $[0, \infty)$ with a previously defined Markov transition function, and we have proved this claim in a special case.

Životopis

Matea Oremović rođena je 17. svibnja 1995. godine u Bjelovaru. Nakon završetka III. osnovne škole u Bjelovaru, upisuje opću gimnaziju u Gimnaziji Bjelovar. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2014. godine upisuje Preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završava 2017. godine te potom upisuje diplomski studij Financijske i poslovne matematike na istoimenom fakultetu.