SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mario Pavličević

FUNKCIJE S VRIJEDNOSTIMA U FAMILIJI SEGMENATA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovo postignuće posvećujem svojim roditeljima i najdražoj Dori bez čije podrške ne bih nikad uspio kao i svima onima koji su me podržavali i poticali tijekom studija. Zahvaljujem se svojoj mentorici, prof. Varošanec na uputama, savjetima i strpljenju prilikom izrade ovog rada.

Sadržaj

Uvod

U matematičkim i računalnim modelima nekih determinističkih pojava u realnom svijetu postoje određene nesigurnosti i nepreciznosti glede njihovih parametara. Da bi se nekako riješili takvi problemi, počela se razvijati intervalna analiza. Prvi koji je razvijao tu granu bio je Moore [2] koji je uspješno razvio aritmetička pravila s intervalima.

Teorija se pokazala pogodnom za daljnji razvoj u teorijskom smislu, međutim, imala je jedan bitak manjak. Za aritmetičku operaciju zbrajanja općenito ne postoji inverzni element, odnosno, iz $a + b = 0$ ne slijedi nužno $b = -a$. Ipak, teorija se počela uspješno razvijati nakon što je Hukuhara 1967. godine uveo koncept segmentne razlike koja je nazvana Hukuharina razlika, a definirala se kao $a \ominus b = c$ ako i samo ako je $a = b + c$. Tako definirana operacija zadovoljava mnoga željena svojstva, no nije uvijek definirana.

Postupnim razvojem, a ponajviše zaslugom Stefaninija i Bedea [3, 4], koncept Hukuharine razlike je poopćen i definiran kao generalizirana Hukuharina razlika (gH-razlika) za svaka dva segmenta. Na tom temelju mogla se dalje graditi teorija. Već je Hukuhara počeo razvijati koncept derivacije funkcije s vrijednostima u segmentima na temelju H-razlike, no zbog manjkavosti iste, takva derivacija nije bila u potpunosti primijenjiva. Ipak, Stefanini i Bede na temelju gH-razlike definiraju generaliziranu Hukuharinu derivaciju, a zatim i integral.

Teorija se razvijala i dalje, ali mnogi njezini rezultati izlaze van okvira ovog rada. Ipak treba spomenuti značajni doprinos autora kao što su Tao i Zhang [5] koji su, između ostalog došli do mnogih rezultata vezanih za svojstva gH-razlike i gH-derivacije te Chalco-Cano i sur. [1] koji su dobivene rezultate uspješno primijenili za neke nejednakosti, od kojih posebno ističemo nejednakost Ostrowskog.

Ovaj rad, stoga, dijelimo na tri dijela. U prvom dijelu ćemo opisati računske operacije sa segmentima. U drugom dijelu ćemo proučavati gH-razliku te funkcije koje kao vrijednosti imaju segmente. U trećem dijelu ćemo se osvrnuti na derivaciju i integral funkcija s vrijednostima u familiji segmenata te pokazati primjenu tih funkcija na nejednakost

Poglavlje 1

Računske operacije sa segmentima

1.1 Aritmetika segmenata

Osnovni pojmovi

Podsjetimo se najprije što je segment. Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a \leq b$. **Zatvoreni interval** ili **segment** u oznaci $[a, b]$ je skup realnih brojeva dan sa

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}.$$

Skup svih segmenata u $\mathbb{R}$ označit ćemo sa $\mathbb{IR}$.

U ovom radu, segmente ćemo označavati malim slovima, rubove segmenata istim malim slovom, ali sa eksponentima L i R redom za lijevi i desni rub, dakle

$$a = \left[a^L, a^R\right].$$

Za dva segmenta a i b kažemo da su **jednaka** ako je $a^L = b^L$ i $a^R = b^R$.

Za segment a kažemo da je **degenerirani** ako je $a^L = a^R$. Takav segment sadrži samo jedan realan broj a, odnosno poistovjećujemo degenerirani segment $[a]$ sa realnim brojem a.

Duljinu segmenta a u oznaci $w(a)$ definiramo kao

$$w(a) := a^R - a^L. \tag{1.1}$$

Apsolutna vrijednost segmenta a u oznaci $|a|$ je definirana na sljedeći način:

$$|a| := \max\left\{\left|a^L\right|, \left|a^R\right|\right\}. \tag{1.2}$$

Središte segmenta a označavamo s $m(a)$ i definiramo kao

$$m(a) = \frac{1}{2}\left(a^L + a^R\right). \tag{1.3}$$

Relacija uređaja

Slično kao što je i na skupu $\mathbb{R}$ definirana relacija uređaja $<$, tako je i na $\mathbb{IR}$ definirana relacija uređaja koju ćemo također označavati s $<$ na sljedeći način:

$$a < b \iff a^R < b^L.$$

Aritmetičke operacije na segmentima

Sada ćemo definirati osnovne aritmetičke operacije na segmentima. Ono na što treba obratiti pažnju je da su segmenti po definiciji skupovi pa se operacije na segmentima svode na operacije sa skupovima. Primjerice, rezultat zbrajanja dva segmenta je segment koji sadrži sume svih parova brojeva, gdje je svaki broj u paru iz jednog od sumanada.

Zbroj dva segmenta definiramo na sljedeći način:

$$a + b := \{x + y\colon\ x \in a,\ y \in b\}. \tag{1.4}$$

Kako to izgleda u praksi ćemo razmotriti malo kasnije. Definirajmo prvo i ostale operacije.

Razlika dva segmenta je skup

$$a - b := \{x - y\colon\ x \in a,\ y \in b\}. \tag{1.5}$$

Slično, **umnožak** dva segmenta je dan sa

$$a \cdot b := \{xy\colon\ x \in a,\ y \in b\}. \tag{1.6}$$

Konačno, **količnik** dva segmenta je definiran kao

$$\frac{a}{b} := \left\{\frac{x}{y}\colon\ x \in a,\ y \in b\right\}, \tag{1.7}$$

uz uvjet da $0 \notin b$.

Pokažimo sada kako se u praksi koriste te operacije.

Zbrajanje

Budući da
$$x \in a \implies a^L \leq x \leq a^R$$
te
$$y \in b \implies b^L \leq y \leq b^R,$$
zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo
$$a^L + b^L \leq x + y \leq a^R + b^R.$$
Budući da je prema (1.4) $x + y \in a + b$, slijedi formula koja opisuje kako se zbrajaju segmenti:
$$a + b = [a^L + b^L,\ a^R + b^R]. \tag{1.8}$$

Primjer 1.1.1. *Neka je* $a = [4, 7]$, $b = [-2, 1]$. *Tada je*
$$a + b = [4 + (-2),\ 7 + 1] = [2,\ 8].$$

Oduzimanje

Uočimo kako formula (1.8) izražava zbroj segmenata $a + b$ u terminima rubova segmenata a i b. Slični izrazi se mogu izvesti i za ostale operacije.

Najprije definirajmo segment $-b$:
$$-b := \{y \in \mathbb{R} : \ -y \in b\}.$$
Drugim riječima,
$$-b = \left[-b^R, -b^L\right].$$
Sada možemo postupiti slično kao i kod zbrajanja. Vrijedi sljedeće.
$$x \in a \implies a^L \leq x \leq a^R$$
te
$$y \in -b \implies -b^R \leq -y \leq -b^L.$$
Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo
$$a^L - b^R \leq x - y \leq a^R - b^L.$$
Budući da je prema (1.5) $x - y \in a - b$, slijedi formula koja opisuje kako se oduzimaju segmenti:
$$a - b = [a^L - b^R,\ a^R - b^L]. \tag{1.9}$$
Napomenimo samo da je $a - b = a + (-b)$.

Primjer 1.1.2. *Neka je* $a = [-4, 7]$, $b = [-2, 1]$. *Tada je*

$$a - b = [-4 - 1,\ 7 - (-2)] = [-5,\ 9].$$

Primjer 1.1.3. *Neka je* $a \in \mathbb{IR}$. *Razlika* $a - a$ *generalno nije jednaka* ***nulsegmentu*** $[0, 0]$. *Zašto?*

$$a - a = [a^L,\ a^R] - [a^L,\ a^R] = [a^L - a^R\ a^R - a^L].$$

Ovaj izraz jednak je $[0, 0]$ *ako i samo ako je* $a^L = a^R$, *odnosno ako je* a *degenerirani segment.*

Prethodni primjer je vrlo bitan za daljnja razmatranja u ovom radu te ćemo se na njega vratiti kasnije.

Množenje

Neka su a i b segmenti, a S skup definiran na sljedeći način:

$$S = \{a^L b^L, a^L b^R, a^R b^L, a^R b^R\}.$$

Umnožak segmenata a i b dobiva se na sljedeći način:

$$a \cdot b = [\min S, \max S]. \tag{1.10}$$

Budući da degenerirani segment $[k, k]$ poistovjećujemo s realnim brojem k, formula za množenje segmenta a skalarom k je sljedeća:

$$ka = \begin{cases} \left[ka^L, ka^R\right], & k \geq 0, \\ \left[ka^R, ka^L\right], & k < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Dijeljenje

Kao i kod realnih brojeva, dijeljenje možemo prikazati kao množenje recipročnim djeliteljem. Dakle,

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = [\min S, \max S], \tag{1.12}$$

gdje je

$$S = \left\{a^L \cdot \frac{1}{b^L}, a^L \cdot \frac{1}{b^R}, a^R \cdot \frac{1}{b^L}, a^R \cdot \frac{1}{b^R}, \right\},$$

a

$$\frac{1}{b} = \left[\frac{1}{b^R}, \frac{1}{b^L}\right].$$

Korisna formula

Propozicija 1.1.4. *Neka je $a \in \mathbb{IR}$. Tada vrijedi*

$$a = m(a) + \frac{1}{2}w(a)[-1,1]. \tag{1.13}$$

Dokaz. Segment a je oblika $[a^L, a^R]$ pa je $m(a) = \frac{1}{2}(a^L + a^R)$, a $w(a) = a^R - a^L$. Izraz $w(a)[-1,1]$ je prema (1.11) jednak $[-w(a), w(a)]$ pa je $\frac{1}{2}w(a)[-1,1]$ jednak

$$\left[-\frac{1}{2}w(a),\ \frac{1}{2}w(a)\right],$$

odnosno

$$\left[\frac{1}{2}a^L - \frac{1}{2}a^R,\ \frac{1}{2}a^R - \frac{1}{2}a^L\right].$$

Konačno, izraz $m(a) + \frac{1}{2}w(a)[-1,1]$ je zbog činjenice da se realan broj poistovjećuje s degeneriranim segmentom jednak

$$\begin{aligned}
m(a) + \frac{1}{2}w(a)[-1,1] &= \frac{1}{2}(a^L + a^R) + \left[\frac{1}{2}a^L - \frac{1}{2}a^R,\ \frac{1}{2}a^R - \frac{1}{2}a^L\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}a^L + \frac{1}{2}a^R,\ \frac{1}{2}a^L + \frac{1}{2}a^R\right] + \left[\frac{1}{2}a^L - \frac{1}{2}a^R,\ \frac{1}{2}a^R - \frac{1}{2}a^L\right] \\
&\overset{(1.8)}{=} \left[a^L + a^R\right] \\
&= a.
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

1.2 Svojstva aritmetike segmenata

Komutativnost i asocijativnost

U prošlom poglavlju smo uveli osnovne aritmetičke operacije sa segmentima. Iz njihovih definicija slijedi niz poznatih algebarskih svojstava.

Propozicija 1.2.1. *Neka su a, b, $c \in \mathbb{IR}$. Tada vrijedi*

(*i*) *$a + b = b + a$, (komutativnost zbrajanja)*

(*ii*) *$a + (b + c) = (a + b) + c$, (asocijativnost zbrajanja)* (*iii*) *ab = ba, (komutativnost množenja)*

(*iv*) *a(bc) = (ab)c, (asocijativnost množenja)*

za svaki a, b i c.

Dokaz. (i) Neka je $x \in a + b$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} x \in a + b &\iff a^L + b^L \leq x \leq a^R + b^R \\ &\iff b^L + a^L \leq x \leq b^R + a^R \\ &\iff x \in b + a. \end{aligned}$$

Dakle, $a + b = b + a$.

(ii) Neka je $x \in a + (b + c)$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} x \in a + (b + c) &\iff a^L + (b + c)^L \leq x \leq a^R + (b + c)^R \\ &\iff a^L + (b^L + c^L) \leq x \leq a^R + (b^R + c^R) \\ &\iff (a^L + b^L) + c^L \leq x \leq (a^R + b^R) + c^R \\ &\iff (a + b)^L + c^L \leq x \leq (a + b)^R + c^R \\ &\iff x \in (a + b) + c. \end{aligned}$$

Dakle, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(iii) Neka su $x \in a$, $y \in b$. Tada je, prema (1.6):

$$\begin{aligned} ab &= \{xy \colon x \in a,\ y \in b\} \\ &= \{yx \colon y \in b,\ x \in a\} \\ &= ba. \end{aligned}$$

(iv) Neka su $x \in a$, $y \in b$, $z \in c$. Tada je, prema (1.6):

$$\begin{aligned} a(bc) &= a \cdot \{yz\colon\ y \in b,\ z \in c\} \\ &= \{x(yz)\colon\ x \in a,\ y \in b,\ z \in c\} \\ &= \{(xy)z\colon\ x \in a,\ y \in b,\ z \in c\} \\ &= \{xy\colon\ x \in a,\ y \in b\} \cdot c \\ &= (ab)c. \end{aligned}$$

□

Neutralni element

Degenerirani segmenti 0 i 1 su redom neutralni elementi za zbrajanje i množenje, odnosno, za $a \in \mathbb{IR}$ vrijedi

$$a + 0 = 0 + a = a, \tag{1.14}$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a. \tag{1.15}$$

Inverzni element

Inverzni elementi za zbrajanje i množenje ne postoje. Već u Primjeru 1.1.3 smo vidjeli da $-a$ nije inverzni element od a.

Propozicija 1.2.2. *Neka je $a \in \mathbb{IR}$. Tada je*

$$a - a = w(a)[-1, 1]. \tag{1.16}$$

Dokaz. Iz 1.1.3 znamo kako je

$$a - a = [a^L - a^R, a^R - a^L].$$

Primjenom Propozicije 1.1.4 slijedi

$$\begin{aligned} a - a &= m(a - a) + \frac{1}{2}w(a)[-1, 1] \\ &= \frac{1}{2}(a^L - a^R + a^R - a^L) + \frac{1}{2}(a^R - a^L - a^L + a^R)[-1, 1] \\ &= (a^R - a^L)[-1, 1] \\ &= w(a)[-1, 1]. \end{aligned}$$

□

S ovime utvrđujemo kako je $a - a = 0$ ako i samo ako je a degenerirani segment.

Slično, $\frac{a}{a} = 1$ ako i samo ako je a degenerirani segment. a općenito vrijedi

$$\frac{a}{a} = \begin{cases} \left[\frac{a^L}{a^R}, \frac{a^R}{a^L}\right] & \text{ako je } 0 < a^L, \\ \left[\frac{a^R}{a^L}, \frac{a^L}{a^R}\right] & \text{ako je } a^R < 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Subdistributivnost

Pravilo distributivnosti

$$a(b + c) = (ab + ac)$$

koje vrijedi u $\mathbb{R}$, ne vrijedi u $\mathbb{IR}$. Slijedi protuprimjer.

Primjer 1.2.3. *Neka je* $a = [1, 3]$, $b = [2, 2]$, $c = -[2, 2]$. *Tada je*

$$\begin{aligned} a(b + c) &= [1, 3] \cdot ([2, 2] - [2, 2]) \\ &= [1, 3] \cdot [0, 0] \\ &= [0, 0]. \\ ab + bc &= [1, 3] \cdot [2, 2] - [1, 3] \cdot [2, 2] \\ &= [2, 6] - [2, 6] \\ &\overset{(1.16)}{=} 4 \cdot [-1, 1] \\ &= [-4, 4]. \end{aligned}$$

Ipak, vrijedi tzv. subdistributivnost.

Propozicija 1.2.4. *Neka su* $a, b, c \in \mathbb{IR}$. *Tada je*

$$a(b + c) \subseteq ab + bc. \tag{1.18}$$

Dokaz. Neka je $x \in a(b + c)$. Koristeći definicije zbrajanja i množenja segmenata, slijedi:

$$\begin{aligned} x \in a(b + c) &\implies x = a'd, \quad a' \in a, d \in b + c \\ &\implies x = a'(b' + c'), \quad a' \in a, b' \in b, c' \in c \\ &\implies x = a'b' + a'c', \quad a' \in a, b' \in b, c' \in c \\ &\implies x \in ab + ac. \end{aligned}$$

Dakle, $a(b + c) \subseteq ab + bc$. □

Ipak, distributivnost vrijedi u posebnim slučajevima.

Propozicija 1.2.5. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$ *i* $b, c \in \mathbb{IR}$. *Tada je*

$$x(b + c) = xb + xc. \tag{1.19}$$

Dokaz. Neka je $y \in x \cdot (b + c)$. Slično kao i u prethodnoj propoziciji, slijedi:

$$\begin{aligned} y \in x \cdot (b + c) &\implies y = xd, \quad d \in b + c \\ &\implies y = x(b' + c'), \quad b' \in b, c' \in c \\ &\implies y = xb' + xc', \quad b' \in b, c' \in c \\ &\implies y \in xb + xc. \end{aligned}$$

Pokazali smo $x \cdot (b + c) \subseteq xb + xc$.

Sada, neka je $y \in xb + xc$. Slijedi:

$$\begin{aligned} y \in xb + xc &\implies y = \eta + \varphi, \quad \eta \in xb, \phi \in xc \\ &\implies y = xb' + xc', \quad b' \in b, c' \in c \\ &\implies y = x(b' + c'), \quad b' \in b, c' \in c \\ &\implies y \in xb + xc. \end{aligned}$$

Sada smo pokazali da je $xb+xc \subseteq x\cdot(b+c)$, dakle konačno je početna tvrdnja dokazana. □

O još jednom slučaju kada distributivnost vrijedi govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.6. *Neka su* $a, b, c \in \mathbb{IR}$ *te* $bc > 0$. *Tada je*

$$a(b + c) = ab + bc. \tag{1.20}$$

Dokaz. Budući da vrijedi (1.18), dovoljno je dokazati $ab + ac \subseteq a(b + c)$.

Neka je $x \in ab + ac$. Tada postoje $\eta \in ab$ i $\varphi \in ac$, takvi da je $x = \eta + \varphi$. Slijedi:

$$\begin{aligned} x &= \eta + \varphi \\ &= a_1 b_1 + a_2 c_1, \quad a_1, a_2 \in a, b_1 \in b, c_1 \in c. \end{aligned}$$

Zbog $bc > 0$ slijedi $b + c \neq 0$, stoga neka je

$$a' = a_1 \frac{b_1}{b_1 + c_1} + a_2 \frac{c_1}{b_1 + c_1}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \leq a_2$. Imamo dva slučaja. Prvi slučaj je $b < 0, c < 0$. Tada je $b_1 + c_1 < 0$. Želimo dokazati da je $a_1 \leq a'$. To je ekvivalentno sa

$$a_1 \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 c_1}{b_1 + c_1}$$

$$a_1(b_1 + c_1) \geq a_1 b_1 + a_2 c_1$$

$$a_1 c_1 \geq a_2 c_1$$

$$(a_2 - a_1)c_1 \leq 0.$$

Ovo je istina zbog $a_1 \leq a_2$ i $c_1 < 0$. Slično se dokaže i $a' \leq a_2$. Dobivamo $a_1 \leq a' \leq a_2$ pa je $a' \in a$.

Drugi slučaj je $b > 0$, $c > 0$. Tada je $b_1 + c_1 > 0$. Ponovno želimo dokazati $a_1 \leq a'$, što je ekvivaletno sljedećem:

$$a_1 \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 c_1}{b_1 + c_1}$$

$$a_1(b_1 + c_1) \leq a_1 b_1 + a_2 c_1$$

$$a_1 c_1 \leq a_2 c_1$$

$$(a_2 - a_1)c_1 \geq 0.$$

Ovo je istina zbog $a_1 \leq a_2$ i $c_1 > 0$. Slično se dokaže u $a' \leq a_2$. Dobivamo $a_1 \leq a' \leq a_2$ pa je $a' \in a$.

Dakle, imamo

$$x = a'(b_1 + c_1) \in a(b + c).$$

Time smo pokazali $ab + ac \subseteq a(b + c)$. □

Dokidanje i skraćivanje

Vrijedi sljedeće bitno svojstvo poznato iz skupa realnih brojeva.

Propozicija 1.2.7. *Neka su* $a, b, c \in \mathbb{IR}$. *Tada vrijedi:*

$$a + c = b + c \implies a = b. \tag{1.21}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} a + c = b + c &\implies [a^L + c^L, a^R + c^R] = [b^L + c^L, b^R + c^R] \\ &\implies a^L + c^L = b^L + c^L \ \wedge \ a^R + c^R = b^R + c^R \\ &\implies a^L = b^L \ \wedge \ a^R = b^R \\ &\implies a = b. \end{aligned}$$

□

Primjer 1.2.8. *"Skraćivanje" se ne može primijeniti za množenje segmenata, odnosno*

$$ca = cb \not\Rightarrow a = b. \tag{1.22}$$

Pokažimo to za $a = [0, 1]$, $b = [1, 1]$, $c = [0, 2]$. *Tada je*

$$ca = cb = [0, 2],$$

ali $a \neq b$.

Simetrični segmenti

Za segment a kažemo da je **simetričan** ako je

$$a^L = -a^R. \tag{1.23}$$

Primjeri simetričnih segmenata su $[-1, 1]$ i $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Svaki simetrični segment ima središte jednako nuli pa ako je a simetrični segment, prema (1.1) i (1.2) je

$$|a| = \frac{1}{2}w(a) \qquad \text{i} \qquad a = |a|[-1, 1].$$

Svojstva aritmetičkih operacija sa simetričnim segmentima su nešto jednostavnija. Ako su a, b i c simetrični segmenti, tada vrijedi:

$$a + b = a - b = (|a| + |b|)[-1, 1],$$

$$ab = |a||b|[-1, 1],$$

$$a(b \pm c) = ab + ac = |a|(|b| + |c|)[-1, 1].$$

Ako je b simetrični segment, a a bilo koji segment, tada je

$$ab = |a|b.$$

Ako su b i c simetrični segmenti, a a bilo koji segment, tada vrijedi

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Poglavlje 2

Funkcije s vrijednostima u familiji segmenata

2.1 Generalizirana Hukuharina razlika

U prošlom poglavlju smo opisali segmente i aritmetičke operacije sa segmentima. Posebno ističemo Primjer 1.1.3 koji govori da za segment a generalno ne vrijedi $a - a = 0$ što pokazuje da oduzimanje segmenata nije inverzna operacija zbrajanja. Zbog toga mnoga svojstva realnih brojeva se ne mogu proširiti na segmente. Stoga, da bi se taj nedostatak popravio, Hukuhara je uveo drugačiji koncept razlike, tzv. Hukuharinu razliku (H-razlika) u oznaci $a \ominus b$ tako da je $a \ominus b = c$ ako je $a = b + c$. Ta operacija daje rezultat $a \ominus a = 0$, ali problem je što $a \ominus a$ postoji samo ako je $w(a) \geq w(b)$.

Primjer 2.1.1. *Izračunajmo $a \ominus b$ ako je:*

(i) $a = [2, 8]$, $b = [1, 3]$,

(ii) $a = [1, 3]$, $b = [2, 8]$.

Rješenje.

(i)

$$\begin{aligned} a \ominus b &= c \\ [2, 8] \ominus [1, 3] &= [c^L, c^R] \\ [1, 3] + [c^L, c^R] &= [2, 8] \\ c &= [1, 5]. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} a \ominus b &= c \\ [1,3] \ominus [2,8] &= [c^L, c^R] \\ [2,8] + [c^L, c^R] &= [1,3] \\ c &= [-1,-5]. \end{aligned}$$

U ovom slučaju rezultat ne postoji jer $[-1,-5]$ *nema smisla.*

Radi ovog nedostatka je bilo potrebno generalizirati ovaj koncept razlike što je učinio Stefanini [3, 4] na sljedeći način.

Definicija 2.1.2. *Neka su* $a,\ b \in \mathbb{IR}$. *Tada se generalizirana Hukuharina razlika (gH-razlika) segmenata a i b definira kao*

$$a \ominus_g b = c, \tag{2.1}$$

gdje je $a = b + c$ *ako je* $w(a) \geq w(b)$ *ili* $b = a + (-1)c$ *ako je* $w(a) < w(b)$.

Primijećujemo kako je $a \ominus_g b = a \ominus b$ ako je $w(a) \geq w(b)$, no za $w(a) < w(b)$, gH-razlika je definirana dok H-razlika nije. Stoga je gH-razlika proširenje H-razlike.

Kroz sljedećih nekoliko lema prikazujemo neka svojstva gH-razlike.

Lema 2.1.3. *Neka su* $a, b \in \mathbb{IR}$ *te* $k \in \mathbb{R}$. *Vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $a \ominus_g b = [\min\{a^L - b^L, a^R - b^R\}, \max\{a^L - b^L, a^R - b^R\}]$,

(ii) $a \ominus_g a = 0$, $a \ominus_g 0 = a$, $0 \ominus_g a = (-1)a$,

(iii) $(-a) \ominus_g b = (-b) \ominus_g a$,

(iv) $a \ominus_g b = (-b) \ominus_g (-a) = -(b \ominus_g a)$,

(v) $(a + b) \ominus_g b = a, a \ominus_g (a + b) = -b$,

(vi) $(a \ominus_g b) + b = a$, *ako je* $w(a) \geq w(b)$; $a + (-1)(a \ominus_g b) = b$, *ako je* $w(a) < w(b)$,

(vii) $k(a \ominus_g b) = ka \ominus_g kb$.

Dokaz. (i) Razmatramo dva slučaja. Prvo, neka je $w(a) \geq w(b)$. To povlači $a^R - a^L \geq b^R - b^L$, odnosno $a^R - b^R \geq a^L - b^L$. Sada je

$$a \ominus_g b = c$$

$$b + c = a$$

$$[b^L, b^R] + [c^L, c^R] = [a^L, a^R]$$

$$[b^L + c^L, b^R + c^R] = [a^L, a^R]$$

$$b^L + c^L = a^L \qquad b^R + c^R = a^R$$

$$c^L = a^L - b^L \qquad c^R = a^R - b^R$$

$$c^L = \min\{a^L - b^L, a^R - b^R\} \qquad c^R = \max\{a^L - b^L, a^R - b^R\}.$$

Drugi slučaj je $w(a) < w(b)$, tj. $a^R - b^R < a^L - b^L$. Imamo

$$a \ominus_g b = c$$

$$a + (-1)c = b$$

$$[a^L, a^R] - [c^L, c^R] = [b^L, b^R]$$

$$[a^L - c^R, a^R - c^L] = [b^L, b^R]$$

$$a^L - c^R = b^L \qquad a^R - c^L = b^R$$

$$c^R = a^L - b^L \qquad c^L = a^R - b^R$$

$$c^L = \min\{a^L - b^L, a^R - b^R\} \qquad c^R = \max\{a^L - b^L, a^R - b^R\}.$$

(ii) Sva tri svojstva slijede direktno iz definicije gH-razlike.

(iii) Najprije konstatirajmo kako je $w(a) = w(-a)$ za bilo koji $a \in \mathbb{IR}$. Sada, neka je $w(a) \geq w(b)$. Neka je $(-a) \ominus_g b = c$. Tada prema definiciji imamo:

$$-a = b + c$$

$$[-a^R, -a^L] = [b^L + c^L, b^R + c^R]$$

$$c^L = -a^R - b^L \qquad c^R = -a^L - b^R.$$

S druge strane, neka je $(-b) \ominus_g a = d$. Prema definiciji imamo:

$$a = -b + (-1)d$$

$$[a^L + a^R] = [-b^R - d^R, -b^L - d^L]$$

$$d^R = -a^L - b^R \qquad d^L = -a^R - b^L.$$

Dobili smo $c = d$, odnosno traženu tvrdnju.

Slučaj $w(a) < w(b)$ se dokazuje analogno.

(*iv*) Ako je $w(a) \geq w(b)$, tada ako je $(-b) \ominus_g (-a) = c$, slijedi $-a = -b + (-1)c$, a ako je $b \ominus_g a = d$, slijedi $a = b + (-1)d$. Odavde imamo $c = -d$, odnosno $(-b) \ominus_g (-a) = -(b \ominus_g a)$. Također, ako je $a \ominus_g b = e$, slijedi $a = b + e$, tj. $-a = -b + (-1)e$ pa je $e = c = -d$, odnosno vrijedi tvrdnja.

Ako je $w(a) < w(b)$, imamo $b = a + (-1)e$, $-b = -a + c$ te $b = a + d$. Slijedi $e = c = -d$, odnosno početna tvrdnja.

(*v*) Neka je $(a + b) \ominus_g b = c$. Želimo dokazati $c = a$. Ili je $a + b = b + c$ pa prema Propoziciji 1.2.7 imamo $a = c$ ili $b = a + b + (-1)c$ te nakon primjene iste propozicije $0 = a - c$. Primjer 1.1.3 nam govori da su a i c degenerirani pa je $a = c$.

Sada neka je $a \ominus_g (a + b) = c$. Želimo dokazati $-b = c$. Ili je $a = a + b + c$ pa nakon primjene Propozicije 1.2.7 i Primjera 1.1.3 proizlazi da su b i c degenerirani, odnosno $-b = c$ ili je $a + b = a + (-1)(-b)$ što je uvijek istinito pa ostaje iz prvog slučaja $-b = c$ te je time tvrdnja dokazana.

(*vi*) Svojstvo slijedi direktno iz definicije gH-razlike.

(*vii*) Neka je $a \ominus_g b = c$. Za $w(a) \geq w(b)$ imamo $ka \ominus_g kb = [k(b+c)] \ominus_g kb = (kb+kc) \ominus_g kb$. Prema prvoj tvrdnji svojstva (*v*) iz ove leme slijedi $ka \ominus_g kb = kc$. Za $w(a) < w(b)$ imamo $ka \ominus_g b = ka \ominus_g [k(a-c)] = ka \ominus_g (ka - kc)$. Primjenom druge tvrdnje svojstva (*v*) slijedi tražena tvrdnja.

□

Lema 2.1.4. *Neka su a, b, c* $\in \mathbb{IR}$. *Vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $a \ominus_g b = 0$ *ako i samo ako je* $a = b$,

(ii) $(a + b) \ominus_g (a + c) = b \ominus_g c$,

(iii) $(a \ominus_g b) \ominus_g (a \ominus_g c) = c \ominus_g b$, *ako je* $w(a) \leq \min(w(b), w(c))$ *ili* $w(a) \geq \max(w(b), w(c))$.

Dokaz. (i) Neka je $a \ominus_g b = 0$. Tada je, prema definiciji gH-razlike, ili $a = b + 0$ ili $b = a + (-1) \cdot 0$ što u oba slučaja daje $a = b$. Obratno, neka je $a = b$. Tada je $a \ominus_g b = a \ominus_g a = 0$ prema Lemi 2.1.3 (ii).

(ii) Neka je $(a + b) \ominus_g (a + c) = d$. Sada je prema definiciji gH-razlike $a + b = a + c + d$ ili $a + c = a + b + (-1)d$. Prema Propoziciji 1.2.7 slijedi da je $b = c + d$ ili $c = b + (-1)d$, što znači da je $b \ominus_g c = d$.

(iii) Neka je $a \ominus_g b = e$, $a \ominus_g c = f$ i $e \ominus_g f = g$. Kada je $w(a) \leq \min(w(b), w(c))$, imamo da je $b = a + (-1)e$ i $c = a + (-1)f$. Dakle, ako je $w(e) \geq w(f)$, onda je $e = f + g$ pa slijedi $a + (-1)e = a + (-1)f + (-1)g$. Dobili smo $b = c + (-1)g$. S druge strane, ako je $w(e) < w(f)$, imamo $f = e + (-1)g$ pa stoga je $a + (-1)f = a + (-1)e + g$. Dobiva se $c = b + g$. Dakle, dobili smo $g = c \ominus_g b$.

Slično, kada je $w(a) \geq \max(w(b), w(c))$, slijedi da je $a = b + e$ i $a = c + f$. Ako je $w(e) \geq w(f)$, dobiva se $c + f = b + e = b + f + g$, odnosno, $c = b + g$. S druge strane, ako je $w(e) < w(f)$, imamo $b + e = c + f = c + e + (-1)g$, a iz toga $b = c + (-1)g$. Dakle, također smo dobili $g = c \ominus_g b$.

□

Radi jednostavnosti uvodimo oznake r_{ab} i r_{bc}, gdje je $r_{ab} = w(a) - w(b)$ i $r_{bc} = w(b) - w(c)$.

Lema 2.1.5. *Neka su a, b, c* $\in \mathbb{IR}$. *Vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $$(a \ominus_g b) \ominus_g c = \begin{cases} a \ominus_g (b + c), & r_{ab} \geq 0, \\ (a + (-1)c) \ominus_g b, & \textit{inače;} \end{cases}$$

(ii) $$a \ominus_g (b \ominus_g c) = \begin{cases} (a + c) \ominus_g b, & r_{bc} \geq 0, \\ c \ominus_g (b + (-1)a), & \textit{inače;} \end{cases}$$

(iii) $$a \ominus_g (b + c) = \begin{cases} (a \ominus_g b) \ominus_g c, & r_{ab} \geq 0, \\ a \ominus_g b + (-1)c, & \textit{inače;} \end{cases}$$

(iv) $$a \ominus_g b + c = \begin{cases} (a + c) \ominus_g b, & r_{ab} \geq 0, \\ a \ominus_g (b + (-1)c), & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $a \ominus_g b = d$ i $b \ominus_g c = d_1$. Ako je $r_{ab} \geq 0$, tada je $a = b + d$ te ako je $r_{ab} < 0$, tada je $b = a + (-1)d$. Slično, ako je $r_{bc} \geq 0$, tada je $b = c + d_1$ te ako je $r_{bc} < 0$, tada je $c = b + (-1)d_1$.

(i) Neka je $e_1 = d \ominus_g c$. Po definiciji je $d = c + e_1$ ako je $w(d) \geq w(c)$ te $c = d + (-1)e_1$ ako je $w(d) < w(c)$. U slučaju da je $r_{ab} \geq 0$, ako je $w(d) \geq w(c)$, dobivamo $a = b+d = b+c+e_1$ te ako je $w(d) < w(c)$, onda je $b+c = b+d+(-1)e_1 = a+(-1)e_1$. Prema tome, imamo $e_1 = a \ominus_g (b + c)$.

S druge strane, u slučaju da je $r_{ab} < 0$, ako je $w(d) \geq w(c)$, dobivamo $b = a + (-1)d = a + (-1)c + (-1)e_1$ te ako je $w(d) < w(c)$, onda je $a + (-1)c = a + (-1)d + e_1 = b + e_1$. Prema tome, imamo $e_1 = (a + (-1)c) \ominus_g b$.

(ii) Neka je $e_2 = a \ominus_g d_1$. Za $w(a) \geq w(d_1)$ se dobiva $a = d_1 + e_2$, a za $w(a) < w(d_1)$ je $d_1 = a + (-1)e_2$. U slučaju da je $r_{ab} \geq 0$, ako je $w(a) \geq w(d_1)$, dobiva se $a+c = c+d_1+e_2 = b+e_2$, a ako je $w(a) < w(d_1)$, onda je $b = c+d_1 = a+c+(-1)e_2$. Zbog tih dviju jednakosti je $e_2 = (a + c) \ominus_g b$.

S druge strane, u slučaju da je $r_{ab} < 0$, ako je $w(a) \geq w(d_1)$, dobiva se $b + (-1)a = b + (-1)d_1 + (-1)e_2 = c + (-1)e_2$, a ako je $w(a) < w(d_1)$, onda je $c = b + (-1)d_1 = b + (-1)a + e_2$. Stoga je $e_2 = c \ominus_g (b + (-1)a)$.

(iii) Neka je $e_3 = a \ominus_g (b+c)$. Prva jednakost je ista kao i u (i) pa preostaje pokazati drugu. Ako je $r_{ab} < 0$, tada je očito $w(a) \leq w(b + c)$. To znači da je $b + c = a + (-1)e_3$. Dakle, dobivamo $e_3 = d + (-1)c$.

(iv) U slučaju $r_{ab} \geq 0$, znamo da je $a = b + d$ zbog čega je $a + c = b + c + d$. Budući da je $w(a + c) \geq w(b)$, dobivamo $d + c = (a + c) \ominus_g b$.

S druge strane, u slučaju $r_{ab} < 0$, uočimo da je $w(a) < w(b + (-1)c)$ i $b = a + (-1)d$ zbog čega je $b + (-1)c = a + (-1)(d + c)$. Dakle, $d + c = a \ominus_g (b + (-1)c)$.

□

2.2 Normirani kvazilinearni prostor

Prostor segmenata

Neka su a, b i $c \in \mathbb{IR}$ te $k, l \in \mathbb{R}$. Podsjećamo na poznata svojstva zbrajanja i množenja skalarom:

(i) $a + b = b + a$,

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(iii) $a + 0 = a$,

(iv) $k(a + b) = ka + kb$,

(v) $k(la) = (kl)a$,

(vi) $1 \cdot a = a$.

Ipak, nedostatak ove teorije je što generalno ne postoji $e \in \mathbb{IR}$ takav da je $a + e = 0$, a jednakost $(k + l)a = ka + la$ je istinita samo ako je $kl \geq 0$. Na primjer, za $k = 1$, $l = -1$ i $a = [2, 3]$, $b = [-3, -2]$, izraz $(k + l)a$ je jednak 0, a $ka + la = [4, 6]$. Isto tako, ako je $a+b = 0$, tada mora biti $2+b^L = 0$ i $3+b^R = 0$, dakle $b = [-2, -3]$ što je očito nemoguće.

Možemo zaključiti da $\mathbb{IR}$ nije linearni prostor sa ranije opisanim pravilima zbrajanja i množenja skalarom, ali zadržava gotovo sva svojstva linearnog prostora ako zamijenimo operaciju oduzimanja sa gH-razlikom. Stoga, prostor $\mathbb{IR}$ zovemo kvazi-linearni prostor sa gH-razlikom. U takvom kvazilinearnom prostoru, za bilo koji $a \in \mathbb{IR}$, postoji jedinstveni $e \in \mathbb{IR}$ takav da je $a \ominus_g e = 0$.

Da bismo istražili daljnje odnose između elemenata iz $\mathbb{IR}$, uvodimo **Hausdorff-Pompeiujevu metriku** (H-metriku) na $\mathbb{IR}$ na sljedeći način:

$$H(a, b) := \max\{|a^L - b^L|, |a^R - b^R|\}. \tag{2.2}$$

Teorem 2.2.1. *Funkcija H je metrika.*

Dokaz. Prema definiciji, za a, $b \in \mathbb{IR}$, $H(a, b)$ je jednak ili $|a^L - b^L|$ ili $|a^R - b^R|$ što je nenegativno.

Pretpostavimo $H(a, b) = 0$. Zbog nenegativnosti apsolutne vrijednosti realnog broja slijedi $|a^L - b^L| = 0$ i $|a^R - b^R| = 0$, odnosno $a^L = b^L$ i $a^R = b^R$, dakle $a = b$. Obratno, neka je $a = b$. Tada je $H(a, a) = \max\{|a^L - a^L|, |a^R - a^R|\} = 0$.

Simetričnost je očita zbog svojstava apsolutne vrijednosti realnog broja.

Dokažimo još nejednakost trokuta. Neka je $a' = a^L - c^L$, $b' = c^L - b^L$ pa vrijedi $a' + b' = a^L - b^L$. Zbog nejednakosti trokuta za apsolutnu vrijednost, vrijedi

$$|a' + b'| \leq |a'| + |b'| \implies |a^L - b^L| \leq |a^L - c^L| + |c^L - b^L|.$$

Vrijedi $|a^L - c^L| \leq H(a,c)$ zato što je $H(a,c) = \max\{|a^L - c^L|, |a^R - c^R|\}$ pa je odmah $|a^L - c^L| \leq H(a,c)$ ili $|a^L - c^L| = H(a,c)$ u slučaju $|a^L - c^L| \geq |a^R - c^R|$. Analogno je i $|c^L - b^L| \leq H(c,b)$ pa vrijedi

$$|a^L - b^L| \leq |a^L - c^L| + |c^L - b^L| \implies |a^L - b^L| \leq H(a,c) + H(c,b).$$

Analogno se dobiva i $|a^R - b^R| \leq H(a,c) + H(c,b)$.

Budući da su i $|a^L - b^L|$ i $|a^R - b^R|$ manji ili jednaki $H(a,c) + H(c,b)$, znači da je $M := \max\{|a^L - b^L|, |a^R - b^R|\} \leq H(a,c) + H(c,b)$, ali $M = H(a,b)$ prema definiciji od H. Konačno slijedi tvrdnja. □

Sada navodimo neka svojstva H-metrike, gdje se svojstva (iv) i (v) vežu uz H-razliku.

Propozicija 2.2.2. *Neka su a, b, c, d* $\in \mathbb{IR}$ *te k* $\in \mathbb{R}$*. Vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $H(a+b, a+c) = H(b,c)$;

(ii) $H(ka, kb) = |k|H(a,b)$;

(iii) $H(a+b, c+d) \leq H(a,c) + H(b,d)$;

(iv) *ako postoje* $a \ominus b$ *i* $a \ominus c$*, tada je* $H(a \ominus b, a \ominus c) = H(b,c)$;

(v) *ako postoje* $a \ominus b$ *i* $c \ominus d$*, tada je* $H(a \ominus b, c \ominus d) = H(a+d, b+c)$.

Dokaz. (i)

$$\begin{aligned} H(a+b, a+c) &= \max\{|a^L + b^L - a^L - c^L|, |b^R + c^R - a^R - c^R|\} \\ &= \max\{|b^L - c^L|, |b^R - c^R|\} \\ &= H(b,c). \end{aligned}$$

(*ii*)

$$\begin{aligned}H(ka, kb) &= \max\{|ka^L + kb^L|, |ka^R + kb^R|\}\\&= \max\{|k||a^L + b^L|, |k||a^R + b^R|\}\\&= |k| \max\{|a^L + b^L|, |a^R + b^R|\}\\&= |k|H(a, b).\end{aligned}$$

(*iii*) Primjenom nejednakosti trokuta za H metriku i svojstva (*i*) iz ove propozicije, imamo

$$\begin{aligned}H(a + b, c + d) &\leq H(a + b, b + c) + H(b + c, c + d)\\&= H(a, c) + H(b, d).\end{aligned}$$

(*iv*) Neka je $a \ominus b = d$ te $a \ominus c = e$. Tada slijedi

$$\begin{aligned}H(d, e) &= \max\{|d^L - e^L|, |d^R - e^R|\}\\&= \max\{|a^L - b^L - a^L + c^L|, |a^R - b^R - a^R + c^R|\}\\&= \max\{|c^L - b^L|, |c^R - b^R|\}\\&= H(c, b)\\&= H(b, c).\end{aligned}$$

(*v*) Neka je $a \ominus b = e$ te $c \ominus d = f$. Tada vrijedi $a = b + e$ i $c = d + f$. Primjenom svojstva (*i*) ove propozicije imamo

$$H(a + d, b + c) = H(b + d + e, b + d + f) = H(e, f).$$

□

Radi jednostavnijeg zapisa stavimo $r_{ab} = w(a) - w(b)$, $r_{ac} = w(a) - w(c)$, $r_{cd} = w(c) - w(d)$, gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{IR}$.

Lema 2.2.3. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{IR}$. Vrijedi*

$$H(a \ominus_g b, a \ominus_g c) \leq H(b, c). \tag{2.3}$$

Jednakost vrijedi ako je $r_{ab} r_{ac} \geq 0$.

Dokaz. Neka je $d = a \ominus_g b$ te $e = a \ominus_g c$. Ako je $r_{ab}r_{ac} \geq 0$, imamo dva slučaja.

U prvom slučaju neka je $r_{ab} \geq 0$, $r_{ac} \geq 0$. Tada je $d = a \ominus b$, $e = a \ominus c$ pa iz Propozicije 2.2.2 (iv) slijedi jednakost.

U drugom slučaju je $r_{ab} \leq 0$, $r_{ac} \leq 0$. Tada je $b = a + (-1)d$, $c = a + (-1)e$. Imamo:

$$H(d,e) \overset{\text{Prop. 2.2.2}(ii)}{=} H((-1)d,(-1)e) \overset{\text{Prop. 2.2.2}(i)}{=} H(a+(-1)d, a+(-1)e) = H(b,c).$$

Jednakost vrijedi i u ovom slučaju pa vrijedi za $r_{ab}r_{ac} \geq 0$.

Ako je $r_{ab}r_{ac} < 0$, opet imamo dva slučaja. U prvom neka je $r_{ab} > 0$ i $r_{ac} < 0$. Tada je $a = b + d$, $c = a + (-1)e$. Imamo

$$\begin{aligned} H(b,c) &= H(b, a+(-1)e) \\ &= H(b, b+d+(-1)e) \\ &\overset{\text{Prop. 2.2.2}(i)}{=} H(0, d+(-1)e) \\ &= H([0,0],[d^L - e^R, d^R - e^L]) \\ &= \max\{|d^L - e^R|, |d^R - e^L|\} \\ &\geq \max\{|d^L - e^L|, |d^R - e^R|\} \\ &= H(d,e). \end{aligned}$$

U drugom slučaju $r_{ab} < 0$ i $r_{ac} > 0$ se analogno dobiva $H(b,c) \geq H(d,e)$. Time je tvrdnja dokazana. □

Lema 2.2.4. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{IR}$. Vrijedi*

$$H(a \ominus_g b, c \ominus_g d) \leq H(a+d, b+c). \tag{2.4}$$

Jednakost vrijedi ako je $r_{ab}r_{cd} \geq 0$.

Dokaz. Neka je $e = a \ominus_g b$ te $h = c \ominus_g d$. Ako je $r_{ab}r_{cd} \geq 0$, imamo dva slučaja.

U prvom slučaju neka je $r_{ab} \geq 0$, $r_{cd} \geq 0$. Tada je $e = a \ominus b$, $h = c \ominus d$ pa iz Propozicije 2.2.2 (v) slijedi jednakost.

U drugom slučaju je $r_{ab} \leq 0$, $r_{cd} \leq 0$. Tada je $b = a + (-1)e$, $d = c + (-1)h$. Imamo:

$$\begin{aligned} H(e,h) &\overset{\text{Prop. 2.2.2}(ii)}{=} H((-1)e,(-1)h) \\ &\overset{\text{Prop. 2.2.2}(i)}{=} H(a+c+(-1)e, a+c+(-1)h) \\ &= H(b+c, a+d). \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi i u ovom slučaju pa vrijedi za $r_{ab}r_{cd} \geq 0$.

Ako je $r_{ab}r_{cd} < 0$, opet imamo dva slučaja. U prvom neka je $r_{ab} > 0$ i $r_{cd} < 0$. Tada je $a = b + e$, $d = c + (-1)h$. Imamo

$$\begin{aligned} H(a+d, b+c) &= H(b+c+e+(-1)h, b+c) \\ &= H(e+(-1)h, 0) \\ &= \max\{|e^L - h^R|, |e^R - h^L|\} \\ &\geq \max\{|e^L - h^L|, |e^R - h^R|\} \\ &= H(e,h). \end{aligned}$$

U drugom slučaju $r_{ab} < 0$ i $r_{cd} > 0$ se slično dobiva $H(a+d, b+c) \geq H(e,h)$. Time je tvrdnja dokazana. □

Lema 2.2.5. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{IR}$. Vrijedi*

$$H(ac, bc) \leq H(0,c)H(a,b). \tag{2.5}$$

Ova lema se dokazuje promatranjem različitih slučajeva s obzirom na međusobni položaj skupova a, b i c.

Definirajmo $||a||_I = H(a, 0)$, za $a \in \mathbb{IR}$.

Teorem 2.2.6. *Prostor* $(\mathbb{IR}, ||\cdot||_I)$ *je normirani.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{IR}$, $k \in \mathbb{R}$. Treba dokazati da je funkcija $\|\cdot\|_I$ norma. Pokažimo da je pozitivno definitna. Pretpostavimo da je $\|a\|_I = 0$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
H(a, 0) &= 0 \\
\max\{|a^L - 0|, |a^R - 0|\} &= 0 \\
|a^L - 0| = 0 \qquad \wedge \qquad |a^R - 0| &= 0 \\
a^L = 0 \qquad \wedge \qquad a^R &= 0 \\
a &= 0.
\end{aligned}$$

Obratno, neka je $a = 0$. Tada imamo

$$\|a\|_I = H(a, 0) = H(0, 0) = 0.$$

Provjerimo sada homogenost.

$$\begin{aligned}
\|ka\|_I &= H(ka, 0) \\
&= \max\{|ka^L|, |ka^R|\} \\
&= \max\{|k||a^L|, |k||a^R|\} \\
&= |k| \max\{|a^L|, |a^R|\} \\
&= |k| H(a, 0) \\
&= |k| \|a\|_I.
\end{aligned}$$

Preostaje nejednakost trokuta, tj. treba dokazati

$$\|a + b\|_I \leq \|a\|_I + \|b\|_I. \tag{2.6}$$

Prelaskom na H-metriku, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$H(a + b, 0) \leq H(a, 0) + H(b, 0),$$

ili

$$\max\{|a^L + b^L|, |a^R + b^R|\} \leq \max\{|a^L|, |a^R|\} + \max\{|b^L|, |b^R|\}.$$

Napomenimo još kako vrijedi

$$|a^L + b^L| \leq |a^L| + |b^L|; \tag{2.7}$$

$$|a^R + b^R| \leq |a^R| + |b^R|. \tag{2.8}$$

Razmatramo četiri slučaja.

(i) Prvi slučaj je $|a^L| \leq |a^R|$, $|b^L| \leq |b^R|$. Tada je $H(a,0) = |a^R|$, $H(b,0) = |b^R|$. Imamo

$$|a^L + b^L| \overset{(2.7)}{\leq} |a^L| + |b^L| \leq |a^R| + |b^R| = H(a,0) + H(b,0);$$

$$|a^R + b^R| \overset{(2.8)}{\leq} |a^R| + |b^R| = H(a,0) + H(b,0);$$

Budući da su i $|a^L + b^L|$ i $|a^R + b^R|$ manji od $H(a,0) + H(b,0)$ tada je i $\max\{|a^L + b^L|, |a^R + b^R|\} = H(a+b,0) \leq H(a,0) + H(b,0)$.

(ii) Drugi slučaj je $|a^L| \leq |a^R|$, $|b^L| > |b^R|$. Tada je $H(a,0) = |a^R|$, $H(b,0) = |b^L|$. Imamo

$$|a^L + b^L| \overset{(2.7)}{\leq} |a^L| + |b^L| \leq |a^R| + |b^L| = H(a,0) + H(b,0);$$

$$|a^R + b^R| \overset{(2.8)}{\leq} |a^R| + |b^R| \leq |a^R| + |b^L| = H(a,0) + H(b,0);$$

Budući da su i $|a^L + b^L|$ i $|a^R + b^R|$ manji od $H(a,0) + H(b,0)$ tada je i $\max\{|a^L + b^L|, |a^R + b^R|\} = H(a+b,0) \leq H(a,0) + H(b,0)$.

(iii) Treći slučaj je $|a^L| > |a^R|$, $|b^L| \leq |b^R|$. Tada je $H(a,0) = |a^L|$, $H(b,0) = |b^R|$. Imamo

$$|a^L + b^L| \overset{(2.7)}{\leq} |a^L| + |b^L| \leq |a^L| + |b^R| = H(a,0) + H(b,0);$$

$$|a^R + b^R| \overset{(2.8)}{\leq} |a^R| + |b^R| \leq |a^L| + |b^R| = H(a,0) + H(b,0);$$

Budući da su i $|a^L + b^L|$ i $|a^R + b^R|$ manji od $H(a,0) + H(b,0)$ tada je i $\max\{|a^L + b^L|, |a^R + b^R|\} = H(a+b,0) \leq H(a,0) + H(b,0)$.

(iv) Četvrti slučaj je $|a^L| > |a^R|$, $|b^L| > |b^R|$. Tada je $H(a,0) = |a^L|$, $H(b,0) = |b^L|$. Imamo

$$|a^L + b^L| \overset{(2.7)}{\leq} |a^L| + |b^L| = H(a,0) + H(b,0);$$

$$|a^R + b^R| \overset{(2.8)}{\leq} |a^R| + |b^R| \leq |a^L| + |b^L| = H(a,0) + H(b,0);$$

Budući da su i $|a^L + b^L|$ i $|a^R + b^R|$ manji od $H(a,0) + H(b,0)$ tada je i $\max\{|a^L + b^L|, |a^R + b^R|\} = H(a+b,0) \leq H(a,0) + H(b,0)$.

□

Za $\mathbb{IR}$ kažemo da je normirani kvazilinearan prostor. Sljedeći teorem govori o nekim svojstvima norme $\|\cdot\|_I$.

Teorem 2.2.7. *Neka su a, $b \in \mathbb{IR}$. Tada vrijedi:*

(i) $||a \ominus_g b||_I = H(a, b)$;

(ii) $||a||_I - ||b||_I \leq ||a \ominus_g b||_I \leq ||a||_I + ||b||_I$;

(iii) $||ab||_I = ||a||_I ||b||_I$.

Dokaz. (i) Prema definiciji norme imamo $||a \ominus_g b||_I = H(a \ominus_g b, 0)$. U slučaju $r_{ab} \geq 0$ i $r_{ab} < 0$ imamo da je to jednako $\max\{|a^L - b^L|, |a^R - b^R|\} = H(a, b)$.

(ii) Prema definiciji norme i svojstvu (i) vrijedi

$$||a \ominus_g b||_I \leq ||a||_I + ||b||_I \iff H(a, b) \leq H(a, 0) + H(b, 0).$$

Tvrdnja je istinita zbog nejednakosti trokuta za H-metriku.

Prema definiciji norme i svojstvu (i) vrijedi

$$\begin{aligned} & ||a||_I - ||b||_I \leq ||a \ominus_g b||_I \\ \iff & H(a, 0) - H(b, 0) \leq H(a, b) \\ \iff & H(a, 0) \leq H(a, b) + H(b, 0). \end{aligned}$$

Opet, tvrdnja je istinita zbog nejednakosti trokuta za H-metriku.

(iii)

$$\begin{aligned} ||ab||_I &= H(ab, 0) \\ &= \max\{|a^L b^L|, |a^L b^R|, |a^R b^L|, |a^R b^R|\} \\ &= \max\{|a^L|, |a^R|\} \cdot \max\{|b^L|, |b^R|\} \\ &= H(a, 0) H(b, 0) \\ &= ||a||_I ||b||_I. \end{aligned}$$

□

Prostor segmentnih funkcija

Neka je $I = [t_1, t_2]$ i $t_0 \in I$. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{IR}$ je **funkcija s vrijednostima u familiji segmenata** ili kraće, **segmentna funkcija**. Za $a \in \mathbb{IR}$ kažemo da je **limes** funkcije f u točki t_0 ako $||f(t) \ominus_g a||_I \to 0$ kad $t \to t_0$. Za funkciju f kažemo da je **neprekidna** na I ako za svaki $t_0 \in I$, $\|f(t) \ominus_g f(t_0)\|_I \to 0$ kad $t \to t_0$.

Definiramo prostor neprekidnih segmentnih funkcija,

$$C(I, \mathbb{IR}) := \{f \colon I \to \mathbb{IR} | f \text{ je neprekidna na } I\}.$$

Uvodimo sljedeća poznata aritmetička pravila za f, $g \in C(I, \mathbb{IR})$:

(*i*) $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$;

(*ii*) $(kf)(t) = kf(t)$, $k \in \mathbb{R}$;

(*iii*) $(f \ominus_g g)(t) = f(t) \ominus_g g(t)$;

(*iv*) $(fg)(t) = f(t)g(t)$.

Uzimajući u obzir ta pravila, proučavamo osnovna svojstva u $C(I, \mathbb{IR})$.

Teorem 2.2.8. *Neka su f, $g \in C(I, \mathbb{IR})$ te $k \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije kf, $f + g$, $f \ominus_g g$ i fg neprekidne na I.*

Dokaz. Prema Propoziciji 2.2.2 i Teoremu 2.2.7, za svaki $t_0 \in I$ imamo

$$H(kf(t), kf(t_0)) = |k| H(f(t), f(t_0))$$

što implicira da je kf neprekidna u t_0.

Prema Propoziciji 2.2.2 dobivamo

$$H(f(t) + g(t), f(t_0) + g(t_0)) \leq H(f(t), f(t_0)) + H(g(t), g(t_0)).$$

Sada je uz $t \to t_0$, $H(f(t) + g(t), f(t_0) + g(t_0)) \to 0$ pa je $f + g \in C(I, \mathbb{IR})$.

Prema Propoziciji 2.2.2 i Lemi 2.2.4 slijedi

$$\begin{aligned} H(f(t) \ominus_g g(t), f(t_0) \ominus_g g(t_0)) &\leq H(f(t) + g(t_0), g(t) + f(t_0)) \\ &\leq H(f(t), f(t_0)) + H(g(t), g(t_0)), \end{aligned}$$

što implicira $f \ominus_g g \in C(I, \mathbb{IR})$.

Konačno, zbog nejednakosti trokuta i Leme 2.2.5 imamo

$$\begin{aligned} H(f(t)g(t), f(t_0)g(t_0)) &\leq H(f(t)g(t), f(t)g(t_0)) + H(f(t)g(t_0), f(t_0)g(t_0)) \\ &\leq H(0, f(t))H(g(t), g(t_0)) + H(0, g(t_0))H(f(t), f(t_0)) \end{aligned}$$

što povlači $fg \in C(I, \mathbb{IR})$. □

Iz prethodnog dokaza možemo uočiti da je $f \in C(I, \mathbb{IR})$ ako i samo ako su f^L, $f^R \in C(I, \mathbb{R})$ gdje je $f(t) = [f^L(t), f^R(t)]$. Nadalje, prema aritmetičkim pravilima, $C(I, \mathbb{IR})$ je također kvazilinearan prostor. Definirajmo

$$\rho(f, g) := \sup_{t \in I} \{H(f(t), g(t))\} . \tag{2.9}$$

Tako definirana funkcija ρ je metrika, dakle, $(C(I, \mathbb{IR}), \rho)$ je metrički prostor.

Na kraju ovog dijela, slično kao što smo uveli normu na prostoru $\mathbb{IR}$, uvodimo normu na $C(I, \mathbb{IR})$ na sljedeći način:

$$||f||_C := \rho(f, 0). \tag{2.10}$$

Poglavlje 3

Derivacija i integral funkcija s vrijednostima u familiji segmenata

3.1 Derivacija segmentne funkcije

Definicija 3.1.1. *Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{IR}$ kažemo da je **gH-diferencijabilna** na I ako je f gH-diferencijabilna u $t \in I$, odnosno ako postoji $f'(t) \in \mathbb{IR}$ takav da je*

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) \ominus_g f(t)}{h}. \tag{3.1}$$

*Za f kažemo da je **(i)-diferencijabilna** u $t \in I$ ako je $f'(t) = \left[(f^L)'(t), (f^R)'(t)\right]$, a **(ii)-diferencijabilna** ako je $f'(t) = \left[(f^R)'(t), (f^L)'(t)\right]$, gdje je $f(t) = \left[f^L(t), f^R(t)\right]$.*

Uočavamo da kad je f (i)-diferencijabilna, funkcija $w(f(t))$ je rastuća, a kad je f (ii)-diferencijabilna, tada je ta funkcija padajuća. Nadalje, slično kao i u realnoj analizi opisujemo izraze za derivaciju slijeva i derivaciju zdesna u točki t:

$$f'_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t+h) \ominus_g f(t)}{h}, \tag{3.2}$$

$$f'_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(t+h) \ominus_g f(t)}{h}. \tag{3.3}$$

Sada dajemo dovoljan i nužan uvjet za gH-diferencijabilnost funkcije.

Teorem 3.1.2. *Funkcija $f\colon I \to \mathbb{IR}$ je gH-diferencijabilna u $t \in I$ ako i samo ako postoje $f'_+(t)$ i $f'_-(t)$ i $f'_+(t) = f'_-(t)$.*

Dokaz. Neka je f gH-diferencijabilna u $t \in I$. Tada po definiciji vrijedi

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) \ominus_g f(t)}{h},$$

odnosno za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $|h| < \delta$ vrijedi

$$\left\| \frac{1}{h}[f(t+h) \ominus_g f(t)] \ominus_g f'(t) \right\|_I < \epsilon. \tag{3.4}$$

U slučaju $-\delta < h < 0$, (3.4) vrijedi. Isto tako, za $0 < h < \delta$, zaključak je isti. Prema tome, $f'_+(t) = f'(t) = f'_-(t)$.

Obratno, pretpostavimo da $f'_+(t)$ i $f'_-(t)$ postoje i da je $f'_+(t) = f'_-(t)$. Radi jednostavnosti zapisa, označimo tu vrijednost sa L. Iz postojanja f'_+ slijedi da za svaki $\epsilon > 0$, postoji $\delta_1 > 0$ tako da vrijedi

$$0 < h < \delta_1 \implies \left\| \frac{1}{h}[f(t+h) \ominus_g f(t)] \ominus_g L \right\|_I < \epsilon.$$

Iz postojanja f'_- slijedi da za svaki $\epsilon > 0$, postoji $\delta_2 > 0$ tako da vrijedi

$$-\delta_2 < h < 0 \implies \left\| \frac{1}{h}[f(t+h) \ominus_g f(t)] \ominus_g L \right\|_I < \epsilon.$$

Za dani ϵ uzmemo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za $|h| < \delta$ imamo slučajeve

(*i*) $h > 0$ i $h < \delta \leq \delta_1$;

(*ii*) $h < 0$ i $|h| < \delta \leq \delta_2$.

U svakom slučaju vrijedi

$$\left\| \frac{1}{h}[f(t+h) \ominus_g f(t)] \ominus_g L \right\|_I < \epsilon,$$

tj. $f'(t)$ postoji. □

Sljedeći teorem govori o vezi između gH-derivacije i uobičajenih derivacija, odnosno gH-derivaciju funkcije f možemo izraziti pomoću derivacija funkcija na rubovima segmenata, a taj rezultat je pokazan u Stefanini i dr. [4].

Teorem 3.1.3. *Funkcija $f \colon I \to \mathbb{IR}$ je gH-diferencijabilna u $t \in I$ ako i samo ako su f^L i f^R diferencijabilne i*

$$f' = [\min\{(f^L)', (f^R)', \max\{(f^L)', (f^R)'\}] \tag{3.5}$$

Promatrajmo sad derivaciju zbroja funkcija. Za razliku od realne analize, općenito ne vrijedi $(f+g)' = f'+g'$, no sljedeći teorem nam govori pod kojim uvjetima ta jednakost ipak vrijedi. Radi jednostavnije notacije postavimo $\omega(t) = f(t) \ominus_g g(t)$, $u(t,h) = f(t+h) \ominus_g f(t)$ i $v(t,h) = g(t+h) \ominus_g g(t)$, za $t+h \in I$.

Teorem 3.1.4. *Neka su $f, g\colon I \to \mathbb{I}\mathbb{R}$ takve da su istovremeno (i)-diferencijabilne ili (ii)-diferencijabilne. Tada vrijedi*

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Dokaz. Pretpostavimo da su f i g (i)-diferencijabilne. Tada su $w(f(t))$ i $w(g(t))$ rastuće funkcije. Prema tome, za $h > 0$ imamo $w(f(t+h)) \geq w(f(t))$ i $w(g(t+h)) \geq w(g(t))$. Prema definiciji gH-razlike slijedi $f(t+h) = f(t) + u(t,h)$ i $g(t+h) = g(t) + v(t,h)$ pa je

$$f(t+h) + g(t+h) = f(t) + g(t) + u(t,h) + v(t,h).$$

Za $h < 0$ je $w(f(t+h)) \leq w(f(t))$ i $w(g(t+h)) \leq w(g(t))$ pa je $f(t) = f(t+h) + (-1)u(t,h)$ i $g(t) = g(t+h) + (-1)v(t,h)$ te

$$f(t) + g(t) = f(t+h) + g(t+h) + (-1)(u(t,h) + v(t,h)).$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[(f(t+h) + g(t+h)) \ominus_g (f(t) + g(t))\Big] \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\,[u(t,h) + v(t,h)] \\
&= f'(t) + g'(t) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\Big[(f(t+h) + g(t+h)) \ominus_g (f(t) + g(t))\Big].
\end{aligned}$$

Prema tome, $f+g$ je gH-diferencijabilna i slijedi tvrdnja. Dokaz se slično provodi i u slučaju da su f i g (ii)-diferencijabilne. □

Teorem 3.1.5. *Neka su $f, g\colon I \to \mathbb{I}\mathbb{R}$. Ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta:*

(*i*) *f je (i)-diferencijabilna i g je (ii)-diferencijabilna,*

(*ii*) *f je (ii)-diferencijabilna i g je (i)-diferencijabilna,*

tada vrijedi

$$(f \ominus_g g)' = f' + (-1)g'. \tag{3.6}$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je f (i)-diferencijabilna i g (ii)-diferencijabilna. Tada je $w(f(t))$ rastuća funkcija, a $w(g(t))$ padajuća. Za $h > 0$ imamo $f(t+h) = f(t) + u(t,h)$ i $g(t) = g(t+h) + (-1)v(t,h)$. Dakle,

$$f(t+h) + g(t) = f(t) + g(t+h) + u(t,h) + (-1)v(t,h). \tag{3.7}$$

Budući da je $f(t) = g(t) + \omega(t)$, iz (3.7) slijedi

$$g(t+h) + \omega(t+h) + g(t) = g(t) + \omega(t) + g(t+h) + u(t,h) + (-1)v(t,h), \tag{3.8}$$

a odavde imamo

$$\omega(t+h) = \omega(t) + u(t,h) + (-1)v(t,h). \tag{3.9}$$

Na isti način, budući da je $g(t) = f(t) + (-1)v(t,h)$ iz (3.7) slijedi

$$\omega(t) = \omega(t+h) + (-1)\left[u(t,h) + (-1)v(t,h)\right]. \tag{3.10}$$

Sada iz (3.9) i (3.10) slijedi

$$\omega(t+h) \ominus_g \omega(t) = u(t,h) + (-1)v(t,h). \tag{3.11}$$

Za $h < 0$ imamo $f(t) = f(t+h) + (-1)u(t,h)$ i $g(t+h) = g(t) + v(t,h)$ pa (3.11) opet vrijedi. Budući da su f i g diferencijabilne, dobivamo

$$\begin{aligned}
\omega'_+(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\omega(t+h) \ominus_g \omega(t)\right] \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[u(t,h) + (-1)v(t,h)\right] \\
&= f'(t) + (-1)g'(t) \\
&= \omega'_-(t).
\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo tvrdnju. Na sličan način se dokazuje i drugi slučaj, tj. ako je f (ii)-diferencijabilna, a g (i)-diferencijabilna. □

Ilustrirajmo primjerom kako (3.6) nije istinita ako su obje funkcije f i g (i)-diferencijabilne.

Primjer 3.1.6. *Neka je* $f(t) = [t, 4t+1]$ *i* $g(t) = [t, 5t+1]$ *sa* $0 \le t \le 1$. *Funkcije* f *i* g *su (i)-diferencijabilne pa imamo:*

$$(f(t) \ominus_g g(t))' = [-t, 0]' = [-1, 0].$$

S druge strane,

$$f'(t) + (-1)g'(t) = [1,4] + (-1)[1,5] = [-4,3] \neq (f(t) \ominus_g g(t))'.$$

Sljedeće pitanje je, je li produkt dvije segmentne funkcije gH-diferencijabilan? Odgovor je - generalno ne. Pogledajmo to na primjeru.

Primjer 3.1.7. *Neka je* $f(t) = [e^{t+1}, e^{t+2}]$ *i* $g(t) = [-\sin t, \sin t]$ *za* $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$. *Tada je*

$$(f(t)g(t))' = \left[-e^{t+2}\sin t, e^{t+2}\sin t\right]' = [-e^{t+2}(\sin t - \cos t), e^{t+2}(\sin t + \cos t)],$$

$$f'(t)g(t) = [e^{t+1}, e^{t+2}][-\sin t, \sin t] = \left[-e^{t+2}\sin t, e^{t+2}\sin t\right]$$

$$f(t)g'(t) = [e^{t+1}, e^{t+2}][\cos t, -\cos t] = \left[e^{t+2}\cos t, -e^{t+2}\cos t\right].$$

Odavde vidimo kako je

$$(f(t)g(t))' \neq f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

U sljedećem dijelu degeneriramo segmentnu funkciju f u skalarnu funkciju i proučavamo neka svojstva umnoška fg. Uz već uvedenu notaciju za pojedine funkcije u svrhu pojednostavljivanja, dodajmo još i sljedeće: $W(t,h) = f(t+h)g(t+h) \ominus_g f(t)g(t)$, $U(t,h) = f(t+h) - f(t)$.

Teorem 3.1.8. *Neka je* $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, *a* g *(i)-diferencijabilna segmentna funkcija. Ako je* $f(t)f'(t) > 0$, *onda vrijedi*

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{3.12}$$

Dokaz. Promatrajmo slučaj $h > 0$, gdje je $t + h \in I$. Budući da je g (i)-diferencijabilna, $w(g(t))$ je rastuća funkcija pa je $g(t+h) = g(t) + v(t,h)$. Zbog $f(t)f'(t) > 0$, $f(t)$ i $U(t,h)$ su istog predznaka, iz čega slijedi

$$f(t+h)g(t+h) = f(t)g(t) + f(t)v(t,h) + U(t,h)g(t) + U(t,h)v(t,h). \tag{3.13}$$

Dakle,

$$W(t,h) = f(t)v(t,h) + U(t,h)g(t) + U(t,h)v(t,h). \tag{3.14}$$

U slučaju $h < 0$, imamo $w(g(t+h)) \leq w(g(t))$ pa je $g(t) = g(t+h) + (-1)v(t,h)$. Zbog $f(t)f'(t) > 0$, $f(t)$ i $(-1)U(t,h)$ su istog predznaka, iz čega slijedi da je

$$\begin{aligned} f(t)g(t) = f(t+h)g(t+h) + (-1)[&f(t+h)v(t,h) \\ &+ U(t,h)g(t+h) + (-1)U(t,h)v(t,h)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dakle,

$$W(t,h) = f(t+h)v(t,h) + U(t,h)g(t+h) + (-1)U(t,h)v(t,h). \tag{3.16}$$

Nadalje, zbog neprekidnosti i diferencijabilnosti od f i g, zbog (3.14) i (3.16) imamo

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}W(t,h) &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}U(t,h)\right)g(t) + f(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}v(t,h)\\ &\quad + \lim_{h\to 0^+}U(t,h)\left(\frac{1}{h}v(t,h)\right)\\ &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}W(t,h).\end{aligned}$$

Ovime smo dokazali tvrdnju teorema. □

Teorem 3.1.9. *Neka je $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, a g (i)-diferencijabilna segmentna funkcija. Ako je $f(t)f'(t) < 0$, onda ako je $w(f(t)g(t))$ rastuća, vrijedi*

$$(fg)' + (-1)f'g = fg', \tag{3.17}$$

a ako je $w(f(t)g(t))$ padajuća, tada je

$$(fg)' + (-1)fg' = f'g. \tag{3.18}$$

Dokaz. Neka je $w(f(t)g(t))$ rastuća. Zbog $f(t)f'(t) < 0$, kad je $h > 0$, tada su $f(t+h)$ i $(-1)U(t,h)$ istog predznaka, a kad je $h < 0$, tada su $f(t)$ i $U(t,h)$ istog predznaka. U slučaju $h > 0$, znamo da je $g(t+h) = g(t) + v(t,h)$ zbog (i)-diferencijabilnosti funkcije g. Dakle,

$$[f(t+h) + (-1)U(t,h)]g(t+h) = f(t)[g(t) + v(t,h)],$$

odnosno

$$f(t+h)g(t+h) + (-1)U(t,h)g(t,h) = f(t)g(t) + f(t)v(t,h). \tag{3.19}$$

Zbog $w(f(t+h)g(t+h)) \geq w(f(t)g(t))$, dobivamo

$$f(t+h)g(t+h) = f(t)g(t) + W(t,h). \tag{3.20}$$

Supstitucijom izraza iz (3.20) u (3.19) te primjenom Propozicije 1.2.7, imamo

$$W(t,h) + (-1)U(t,h)g(t+h) = f(t)v(t,h). \tag{3.21}$$

Dakle,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}W(t,h) + (-1)g(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}U(t,h) = f(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}v(t,h),$$

tj.

$$(f(t)g(t))'_+ + (-1)f'(t)g(t) = f(t)g'(t). \tag{3.22}$$

Sada, u slučaju $h < 0$, jer je g (i)-diferencijabilna dobivamo $g(t) = g(t+h) + (-1)v(t,h)$. Dakle,

$$f(t+h)[g(t+h) + (-1)v(t,h)] = [f(t) + U(t,h)]g(t).$$

Drugim riječima,

$$f(t+h)g(t+h) + (-1)f(t+h)v(t,h) = f(t)g(t) + U(t,h)g(t). \tag{3.23}$$

Zbog

$$f(t)g(t) = f(t+h)g(t+h) + (-1)W(t,h), \tag{3.24}$$

slično kao i prije, iz (3.23) te (3.24) uz korištenje Propozicije 1.2.7, dobivamo

$$W(t,h) + (-1)U(t,h)g(t) = f(t+h)v(t,h). \tag{3.25}$$

Prema tome,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} W(t,h) + (-1)g(t) \lim_{h\to 0^-} U(t,h) = f(t) \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} v(t,h),$$

odnosno

$$(f(t)g(t))'_- + (-1)f'(t)g(t) = f(t)g'(t). \tag{3.26}$$

Jednadžbe (3.22) i (3.26) povlače gH-diferencijabilnost funkcije fg te (3.17) vrijedi. Slično se dokazuje i (3.18). $\square$

Još preostaje spomenuti što se događa s fg ako je g (ii)-diferencijabilna. Navodimo teorem, ali zbog sličnosti izostavljamo dokaz.

Teorem 3.1.10. *Neka je $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, a g (ii)-diferencijabilna segmentna funkcija. Ako je $f(t)f'(t) < 0$, onda vrijedi*

$$(fg)' = f'g + fg',$$

a ako je $f(t)f'(t) > 0$, uz $w(f(t)g(t))$ rastuću imamo

$$(fg)' + (-1)fg' = f'g,$$

dok uz padajuću $w(f(t)g(t))$ imamo

$$(fg)' + (-1)f'g = fg'.$$

3.2 Integral segmentne funkcije

U ovom dijelu definiramo integral segmentne funkcije i navodimo neka njegova svojstva.

Neka je $J = [t_0, t_f]$ i $f(t) = [f^L(t), f^R(t)]$, gdje je $t \in J$. **Integral** funkcije f definiramo ovako:

$$\int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt := \left[\int_{t_0}^{t_f} f^L(t)\,dt, \int_{t_0}^{t_f} f^R(t)\,dt\right], \tag{3.27}$$

a za f kažemo da je integrabilna na J.

Promatrajući integrabilnu segmentnu funkciju g, iz definicije gH-razlike slijedi

$$\int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt \ominus_g \int_{t_0}^{t_f} g(t)\,dt = \Bigg[\min\left\{\int_{t_0}^{t_f} \left(f^L(t) - g^L(t)\right)\,dt\right\}, \max\left\{\int_{t_0}^{t_f} \left(f^L(t) - g^L(t)\right)\,dt\right\}\Bigg]. \tag{3.28}$$

Navedimo neka svojstva.

Propozicija 3.2.1. *([1, 5]) Neka su f, $g \in C(J, \mathbb{IR})$. Tada vrijedi*

(*i*) $\int_{t_0}^{t_f} (f(t) + g(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_f} g(t)\,dt$;

(*ii*) $\int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{\tau} f(t)\,dt + \int_{\tau}^{t_f} f(t)\,dt$, $t_0 < \tau < t_f$.

Propozicija 3.2.2. *([5, 4]) Neka je $f \in C(J, \mathbb{IR})$. Tada vrijedi*

(*i*) *$F(x)$ je gH-diferencijabilna i $F'(x) = f(x)$, gdje je $F(x) = \int_{t_0}^{x} f(t)\,dt$;*

(*ii*) *$G(x)$ je gH-diferencijabilna i $G'(x) = -f(x)$, gdje je $G(x) = \int_{x}^{t_f} f(t)\,dt$.*

Teorem 3.2.3. *Neka su f i g integrabilne segmentne funkcije na J. Tada je $f \ominus_g g$ integrabilna na J i vrijedi*

$$\int_{t_0}^{t_f} (f(t) \ominus_g g(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt \ominus_g \int_{t_0}^{t_f} g(t)\,dt, \tag{3.29}$$

bez obzira je li $w(f(t)) \leq w(g(t))$ ili $w(f(t)) \geq w(g(t))$.

Dokaz. Neka je $h(t) = f(t) \ominus_g g(t)$. Ako je $w(f(t)) \geq w(g(t))$ za bilo koji t, tada je $f(t) = g(t) + h(t)$ pa je

$$\int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_f} g(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_f} h(t)\,dt. \tag{3.30}$$

Ako je $w(f(t)) \leq w(g(t))$ za bilo koji t, tada je $g(t) = f(t) + (-1)h(t)$ pa imamo

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt + (-1)\int_{t_0}^{t_f} h(t)\,dt. \tag{3.31}$$

Iz te dvije jednakosti proizlazi tvrdnja. □

Teorem 3.2.4. *Neka su g_1, $g_2 \in C(J, \mathbb{IR})$. Vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$H\left(\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds, \int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds\right) \leq \int_{t_0}^{t} H(g_1(s), g_2(s))\,ds. \tag{3.32}$$

Dokaz. Zapišimo $g_1(t) = \left[g_1^L(t), g_1^R(t)\right]$ i $g_2(t) = \left[g_2^L(t), g_2^R(t)\right]$. Slijedi

$$\begin{aligned}
&H\left(\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds, \int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds\right)\\
&= \max\left\{\left|\int_{t_0}^{t} g_1^L(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} g_2^L(s)\,ds\right|, \left|\int_{t_0}^{t} g_1^R(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} g_2^R(s)\,ds\right|\right\}\\
&\leq \max\left\{\int_{t_0}^{t} \left|g_1^L(s) - g_2^L(s)\right|\,ds, \int_{t_0}^{t} \left|g_1^R(s) - g_2^R(s)\right|\,ds\right\}\\
&\leq \int_{t_0}^{t} \max\left\{\left|g_1^L(s) - g_2^L(s)\right|, \left|g_1^R(s) - g_2^R(s)\right|\right\}\,ds\\
&= \int_{t_0}^{t} H(g_1(s), g_2(s))\,ds.
\end{aligned}$$

□

Primjenom Leme 2.2.5 i Teorema 3.2.4 dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.2.5. *Ako je $f \in C(J, \mathbb{R})$ i g_1, $g_2 \in C(J, \mathbb{IR})$, vrijedi*

$$H\left(\int_{t_0}^{t} f(s)g_1(s)\,ds, \int_{t_0}^{t} f(s)g_2(s)\,ds\right) \leq \int_{t_0}^{t} |f(s)|H(g_1(s), g_2(s))\,ds. \tag{3.33}$$

Sada dajemo inačicu Newton-Leibnitzove formule primijenjene na segmente što će nam biti važno za dobivanje rezultata u primjeni.

Teorem 3.2.6. *Neka je $f\colon J \to \mathbb{IR}$ segmentna funkcija. Ako je f (i)-diferencijabilna ((ii)-diferencijabilna) na J, tada vrijedi*

$$\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt = f(t_f) \ominus_g f(t_0). \tag{3.34}$$

Dokaz. Neka je f (i)-diferencijabilna. Tada je prema definiciji $f'(t) = \left[(f^L)'(t), (f^R)'(t)\right]$. Koristeći definiciju integrala segmentne funkcije i Newton-Leibnitzovu formulu za realne funkcije dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt &= \left[\int_{t_0}^{t_f} (f^L)'(t)\,dt, \int_{t_0}^{t_f} (f^R)'(t)\,dt\right] \\ &= \left[f^L(t_f) - f^L(t_0), f^R(t_f) - f^R(t_0)\right]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} f(t_f) \ominus f(t_0) &= [\,\min\{f^L(t_f) - f^L(t_0), f^R(t_f) - f^R(t_0)\}, \\ &\quad \max\{f^L(t_f) - f^L(t_0), f^R(t_f) - f^R(t_0)\}] \\ &= \left[f^L(t_f) - f^L(t_0), f^R(t_f) - f^R(t_0)\right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Tvrdnja je istinita.

Sada, neka je f (ii)-diferencijabilna. Tada je prema definiciji $f'(t) = \left[(f^R)'(t), (f^L)'(t)\right]$.

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt &= \left[\int_{t_0}^{t_f} (f^R)'(t)\,dt, \int_{t_0}^{t_f} (f^L)'(t)\,dt\right] \\ &= \left[f^R(t_f) - f^R(t_0), f^L(t_f) - f^L(t_0)\right]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} f(t_f) \ominus f(t_0) &= [\,\min\{f^L(t_f) - f^L(t_0), f^R(t_f) - f^R(t_0)\}, \\ &\quad \max\{f^L(t_f) - f^L(t_0), f^R(t_f) - f^R(t_0)\}] \\ &= \left[f^R(t_f) - f^R(t_0), f^L(t_f) - f^L(t_0)\right]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Tvrdnja vrijedi i u ovom slučaju čime je dokaz gotov. □

Kako bismo mogli nastaviti, definirajmo pojam točke zamjene.

Definicija 3.2.7. *Za $t' \in I$ kažemo da je **točka zamjene** za diferencijabilne segmentne funkcije f ako u svakoj okolini V od t' postoje točke $t_1 < t' < t_2$ takve da vrijedi:*

(i) f je (i)-diferencijabilna, a nije (ii)-diferencijabilna u t_1, dok je f (ii)-diferencijabilna, a nije (i)-diferencijabilna u t_2;

(*ii*) *f je (ii)-diferencijabilna, a nije (i)-diferencijabilna u t_1, dok je f (i)-diferencijabilna, a nije (ii)-diferencijabilna u t_2;*

Teorem 3.2.8. *Neka je $f\colon J \to \mathbb{IR}$ gH-diferencijabilna funkcija na J sa konačnim brojem točaka zamjene u $t_0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n < c_{n+1} = t_f$ i točno u tim točkama. Tada vrijedi*

$$\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n+1} \Big[f(c_i) \ominus_g f(c_{i-1})\Big]. \tag{3.39}$$

Dokaz. Zbog jednostavnosti razmatramo slučaj sa samo jednom točkom zamjene zato što slučaj sa konačno mnogo točaka zamjene slijedi na sličan način. Pretpostavimo da je f (i)-diferencijabilna na $[t_0, c]$ i (ii)-diferencijabilna na $[c, t_f]$. Primjenom Propozicije 3.2.1 i Teorema 3.2.6 slijedi

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt &= \int_{t_0}^{c} f'(t)\,dt + \int_{c}^{t_f} f'(t)\,dt \\ &= (f(c) \ominus_g f(t_0)) + (f(t_f) \ominus_g f(c)),\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana za ovaj slučaj. □

Slijedi još jedan teorem (inačica teorema srednje vrijednosti) koji će biti važan za primjenu ovakvih funkcija.

Teorem 3.2.9. *Neka je $f\colon J \to \mathbb{IR}$ gH-diferencijabilna funkcija na J sa konačnim brojem točaka zamjene u $t_0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n < c_{n+1} = t_f$ i točno u tim točkama. Pretpostavimo da je f' neprekidna. Tada je*

$$H(f(t_f), f(t_0)) \le \|f'\|_C (b-a). \tag{3.40}$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je f gH-diferencijabilna i da nema točaka zamjene na J. Uzimajući u obzir Teorem 3.2.6, imamo

$$\begin{aligned}H(f(t_f), f(t_0)) &= H(f(t_f) \ominus_g f(t_0), 0) \\ &= H\left(\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt, 0\right) \\ &= H\left(\int_{t_0}^{t_f} f'(t)\,dt, \int_{t_0}^{t_f} 0\,dt\right) \\ &\le \int_{t_0}^{t_f} H(f'(t), 0)\,dt \\ &\le \|f'\|_C (b-a).\end{aligned}$$

Sada razmatramo slučaj sa samo jednom točkom zamjene zato što slučaj sa konačno mnogo točaka zamjene slijedi na sličan način. Pretpostavimo da je f (i)-diferencijabilna na $[t_0, c]$ i (ii)-diferencijabilna na $[c, t_f]$. Tada slijedi

$$\begin{aligned} H(f(t_f), f(t_0)) &\leq H(f(t_f), f(c)) + H(f(c), f(t_0)) \\ &\leq (b-c) \sup_{t\in[c,r_f]} H(f'(t), 0) + (c-a) \sup_{t\in[a_0,c]} H(f'(t), 0) \\ &\leq (b-a) \sup_{t\in[r_0,r_f]} H(f'(t), 0) \\ &\leq \|f'\|_C (b-a). \end{aligned}$$

□

3.3 Nejednakost Ostrowskog

U ovom dijelu ćemo se bazirati na primjenu svojstava segmentnih funkcija za nejednakost Ostrowskog. Prvo, iskažimo nejednakost Ostrowskog za realne funkcije.

Teorem 3.3.1. *Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ diferencijabilno preslikavanje na $\langle a, b\rangle$ sa svojstvom $|f'(t)| \leq M$, za svaki $t \in \langle a, b\rangle$. Tada je*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] (b-a)M, \tag{3.41}$$

za sve $x \in [a, b]$.

Konstanta $\frac{1}{4}$ je najbolja u smislu da ne može biti zamijenjena s manjom.

Promatrajući lijevu stranu nejednakosti, u toj se nejednakosti ocjenjuje razlika vrijednosti funkcije u pojedinoj točki i integralna srednja vrijednost te funkcije. Ta ocjena ovisi o rubnim točkama intervala na kojem funkcija djeluje, o točki čija se vrijednost funkcije promatra te o gornjoj međi derivacije funkcije.

Izraz u desnoj strani nejednakosti koji množi M može se transformirati u ovaj oblik: $\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}$. Također je jasno da se umjesto gornje međe derivacije funkcije na desnoj strani nejednakosti može pisati upravo najmanja gornja međa, tj. $\sup\{|f'|\}$, što se još označava i kao $\|f'\|_\infty$.

Sad desna strana nejednakosti Ostrowskog za realnu funkciju poprima oblik:

$$\|f'\|_\infty \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2(b-a)}.$$

U sljedećem teoremu dajemo rezultat analogan nejednakosti Ostrowskog.

Teorem 3.3.2. *Neka je $f\colon J \to \mathbb{IR}$ neprekidno gH-diferencijabilna funkcija na J sa konačnim brojem točaka zamjene u $t_0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n < c_{n+1} = t_f$. Tada za $x \in [t_0, t_f]$ imamo*

$$H\left(\frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} f(y)\,dy, f(x)\right) \le \|f'\|_C \frac{(x-t_0)^2 + (t_f - x)^2}{2(t_f - t_0)}. \tag{3.42}$$

Dokaz. Koristeći Teorem 3.2.9 i svojstva H-metrike, imamo

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} f(y)\,dy, f(x)\right) &= H\left(\frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} f(y)\,dy, \frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} f(x)\,dy\right)\\
&\le \frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} H(f(y), f(x))\,dy\\
&\le \frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} \sup_{y\in[t_0,t_f]} H(f'(y), 0)|y-x|\,dy\\
&= \frac{1}{t_f - t_0} \sup_{y\in[t_0,t_f]} H(f'(y), 0)\int_{t_0}^{t_f} |y-x|\,dy\\
&= \|f'\|_C \frac{(x-t_0)^2 + (t_f - x)^2}{2(t_f - t_0)}.
\end{aligned}$$

Time je nejednakost dokazana. □

Primjer 3.3.3. *Promatrajmo funkciju $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{IR}$ definiranu sa*

$$f(t) = [4,8]\cos(8t),$$

ili

$$f(t) = \begin{cases} [4\cos(8t), 8\cos(8t)]\,, & 0 \le t \le \frac{\pi}{16} \\ [8\cos(8t), 4\cos(8t)]\,, & \frac{\pi}{16} \le t \le \frac{3\pi}{16} \\ [4\cos(8t), 8\cos(8t)]\,, & \frac{3\pi}{16} \le t \le \frac{5\pi}{16} \\ [8\cos(8t), 4\cos(8t)]\,, & \frac{5\pi}{16} \le t \le \frac{7\pi}{16} \\ [4\cos(8t), 8\cos(8t)]\,, & \frac{7\pi}{16} \le t \le \frac{9\pi}{16} \\ [8\cos(8t), 4\cos(8t)]\,, & \frac{9\pi}{16} \le t \le \frac{11\pi}{16} \\ [4\cos(8t), 8\cos(8t)]\,, & \frac{11\pi}{16} \le t \le \frac{13\pi}{16} \\ [8\cos(8t), 4\cos(8t)]\,, & \frac{13\pi}{16} \le t \le \frac{15\pi}{16} \\ [4\cos(8t), 8\cos(8t)]\,, & \frac{15\pi}{16} \le t \le \pi \end{cases}$$

Budući da je $g(t) = \cos(8t)$ *neprekidno diferencijabilna funkcija, tada je* f *neprekidno gH-diferencijabilna i* $f'(t) = [-64, -32]\sin(8t)$. *Dakle,* $\|f'\|_C = 64$.

Budući da f *ima konačan broj točaka promjene (15), u uvjetima smo nejednakosti Ostrowskog. Lijeva strana nejednakosti Ostrowskog je jednaka*

$$H\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[4,8]\cos(8t)\,dt, f\left(\frac{\pi}{16}\right)\right) = H\left(\frac{1}{\pi}\,[-4,4]\,,0\right) = \frac{4}{\pi},$$

dok je desna strana jednaka

$$64\left(\frac{\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 + \left(\frac{15\pi}{16}\right)^2}{2\pi}\right) = 64\cdot\frac{113\pi}{256} = \frac{113\pi}{4},$$

čime smo demonstrirali da je nejednakost Ostrowskog valjana za takav f.

Bibliografija

[1] Y. Chalco-Cano, A. Flores-Franulič i H. Roman-Flores, *Ostrowski type inequalities for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative*, Computational and applied mathematics **31** (2012), 457–472.

[2] R. E. Moore, R. B. Kearfoot i M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, 2009.

[3] L. Stefanini, *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic*, Fuzzy Sets Syst. **161** (2010), 1564–1584.

[4] L. Stefanini i B. Bede, *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 1311–1328.

[5] J. Tao i Z. Zhang, *Properties of interval-valued function space under the gH-difference and their application to semi-linear interval differential equations*, Advances in Difference Equations (2016), br. 2016:45, 28pp.

Sažetak

Rad je podijeljen u tri dijela (poglavlja). U prvom dijelu rada opisuje se aritmetika u familiji realnih segmenata. Potom se definira generalizirana Hukuharina (gH) razlika, funkcije čije su vrijednosti segmenti te opisuju računske operacije s njima. U trećem poglavlju se definiraju generalizirana Hukuharina (gH) derivacija i integral te daje primjena tih funkcija na nejednakost Ostrowskog za segmente.

Summary

This thesis is divided in three parts (chapters). In the first part we describe the arithmetic on family of closed intervals. Next, we define generalized Hukuhara (gH) difference, interval-valued functions, and describe arithmetic operations on them. In the third chapter we define the generalized Hukuhara (gH) derivative, the integral, and observe the application of such functions on Ostrowski inequality.

Životopis

Moje ime je Mario Pavličević i rođen sam 21. 6. 1991. godine u Varaždinu. Odrastao sam u mjestu Zbelava pokraj Varaždina, a u susjednom Donjem Kućanu sam pohađao Sedmu osnovnu školu Varaždin. Godine 2006. upisujem Prvu gimnaziju Varaždin, prirodoslovno-matematički smjer te istu završavam 2010. godine. Upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, smjer Matematika pri Sveučilištu u Zagrebu te iste godine. Ipak, 2016. godine se prebacujem na smjer Matematika; nastavnički, a 2018. godine završavam preddiplomski studij. Upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički iste godine. Od 2020. godine radim u Osnovnoj školi Otok u Zagrebu kao učitelj matematike.