

# Numerička metoda za problem nelinearnog elastičnog štapa inkremenatalnom metodom

---

Perić, Jurica

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:952905>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Jurica Perić

**NUMERIČKA METODA ZA PROBLEM  
NELINEARNOG ELASTIČNOG ŠTAPA  
INKREMENATALNOM METODOM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof.dr.sc. Josip Tambača

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojim roditeljima*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Metoda inkremenata</b>	<b>2</b>
<b>2 Nelinearni model zakrivljenog elastičnog štapa</b>	<b>5</b>
<b>3 Primjena metode inkremenata</b>	<b>12</b>
3.1 Varijacijska (slaba) formulacija problema . . . . .	12
3.2 Linearizacija modela . . . . .	16
3.3 Algoritam . . . . .	19
<b>Bibliografija</b>	<b>20</b>

---

## Uvod

Metoda inkremenata metoda je aproksimacija rješenja nelinearnih zadaća. Svaka nelinearna zadaća koja se javlja u računu predstavlja linearizaciju nelinearne zadaće oko prethodne aproksimacije. Na taj način u konačno mnogo koraka dolazimo do aproksimacije nelinearne zadaće.

Nelinearni problem implementacijom metode inkremenata aproksimiramo gdje ukupno opterećenje dijelimo na seriju manjih inkremenata koji mogu po iznosu biti jednaki ili različiti. zapravo do aproksimacije rješenja dolazimo rješavanjem niza linearnih problema, što geometrijski možemo shvatiti kao nelinearnu krivulju zadanu s  $\mathcal{K}(u)$  aproksimiramo po dijelovima linearnom izlomljenom krivuljom. Primjenjujemo jedan inkrement opterećenja u svakom koraku, jednadžbe koje rješavamo su linearne, matrica krutosti je konstantna  $[\mathcal{K}]$  ali s različitim vrijednostima u različitim koracima. Cilj je doći do rješenja u  $N$  koraka primjenjujući samo maleni iznos sile  $(\lambda^{n+1} - \lambda^n)f$  u svakom od koraka.

Metodu inkremenata u ovom radu primjenjujemo na nelinearni model zakrivljenog štapa izveden pomoću  $\Gamma$  konvergencije iz trodimenzionalne hiperelastičnosti. Promatrat ćemo varijantu modela iz rada [8] koji je dobro formuliran za štapove parametrizirane Lipschitzovom krivuljom. Za originalni minimizacijski problem ravnoteže zakrivljenog štapa izvedena je slaba formulacija te je ona linearizirana oko zadane netrivialne deformacije što je potrebno za formulaciju metode inkremenata.

---

# Poglavlje 1

## Metoda inkremenata

U ovom poglavlju navodimo opće podatke o metodi inkremenata, metoda se koristi za numeričku aproksimaciju nelinearnih zadaća jer se one ne mogu svesti na rješavanje jednog linearnog sustava jednažbi. Nelinearnosti možemo podijeliti u skupine:

- (i) Materijalna nelinearnost (Konstitutivne jednažbe)
- (ii) Geometrijska nelinearnost (velike deformacije)
- (iii) Nelinearni rubni problemi (Promjena rubnih uvjeta za vrijeme analize)

Metode za rješavanje nelinearnih problema u kombinaciji sa metodom konačnih elemenata možemo podijeliti u tri kategorije:

- (i) Inkrementalna metoda (prediktor metode)
- (ii) Iterativne metode
  - Newthon Raphson metoda
  - Modificirana Newthon Raphson metoda
  - Arc-length metoda
- (iii) Inkrementalno-iterativna metoda (prediktor-korektor metode)

Inkrementalne metode možemo podijeliti u dvije klase:

- (i) Čiste inkrementalne metode nazivamo ih još samo prediktor metodama
  - (ii) Inkrementalno-iterativne metode nazivamo ih još prediktor-korektor metodama
-

Inicijalni odabir veličine inkrementa je važan faktor inkrementalnih metoda. Iterativne metode primjenjuju cijelo opterećenje (silu) u svakoj iteraciji metode ali uz postupnu promjenu pomaka-deformacije kako bi zadovoljili nelinearne jednadžbe ravnoteže. Mješovite metode koriste inkrementalno iterativni pristup koji dijeli opterećenje u seriju manih inkremenata i iterativni izačun se vrši u svakom inkrementu.

Kad je zadaća nelinearna, matrica krutosti  $\mathcal{K}(u)$  neće biti konstantna već će ovisiti o rješenju  $u$ .

$$[\mathcal{K}(u)]\{u\} = f \quad (1.1)$$

Tada nelinearni problem aproksimiramo implementacijom metode inkremenata gdje ukupno opterećenje dijelimo na seriju manjih inkremenata koji mogu po iznosu biti jednaki ili različiti. Zapravo do aproksimacije rješenja dolazimo rješavanjem niza linearnih problema, što geometrijski možemo shvatiti kao da nelinearnu krivulju zadanu s  $\mathcal{K}(u)$  aproksimiramo po dijelovima linearnom izlomljenom krivuljom.

Primjenjujemo jedan inkrement opterećenja u svakom koraku, jednadžbe koje rješavamo su linearne, matrica krutosti je konstantna  $[\mathcal{K}]$  ali s različitim vrijednostima u različitim koracima.

Inkrement pomaka  $\Delta u$  određujemo u svakom koraku, kada je jedan inkrement opterećenja  $\Delta f$  primjenjen te se pomak  $u$  se odredi kumulativno  $\{u\} = \sum_{n=1}^m \Delta u_n$ , podjelom opterećenja u  $m$  inkremenata.

Neka promatramo zadaću:

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in \mathcal{V} \text{ t.d. vrijedi :} \\ \mathcal{A}(u) = f \end{cases} \quad (1.2)$$

za neki nelinearni operator  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  pri čemu su  $\mathcal{V}$  i  $\mathcal{W}$  Banahovi prostori, te  $f \in \mathcal{W}$ . S obzirom da je operator  $\mathcal{A}$  nelinearan standardna metoda za aproksimaciju rješenja ove jednadžbe je Newton-ova metoda. Međutim i u jednostavnijem kontekstu funkcija na  $\mathbb{R}^n$ , metoda konvergira samo za početnu iteraciju dovoljno blisku rješenju. Kako bi izbjegli tu ovisnost ideja je "po malo" inkrementima se približiti rješenju. Stoga uzimamo:

$$0 = \lambda^0 < \lambda^1 < \dots < \lambda^{N-1} < \lambda^N = 1, \quad (1.3)$$

cilj je doći do rješenja u  $N$  koraka primjenjujući samo maleni iznos sile  $(\lambda^{n+1} - \lambda^n)f$  u svakom od koraka. Za parametre  $\lambda$  i  $\Delta\lambda \in [0, 1]$  označimo sa  $u(\lambda)$  rješenje zadaće:

$$\mathcal{A}(u(\lambda)) = \lambda f. \quad (1.4)$$

Stoga za  $\lambda + \Delta\lambda$  imamo:

$$\mathcal{A}[u(\lambda + \Delta\lambda)] = (\lambda + \Delta\lambda)f. \quad (1.5)$$



Oduzimanjem zadnje dvije jednadžbe dobivamo:

$$\mathcal{A}(u(\lambda + \Delta\lambda)) - \mathcal{A}(u(\lambda)) = \Delta\lambda f \quad (1.6)$$

Ukoliko  $\mathcal{A}$  ima Taylorov razvoj dobivamo:

$$\mathcal{A}'(u(\lambda))(u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)) + \mathcal{O}(u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)) = \Delta\lambda f, \quad (1.7)$$

gdje je  $\mathcal{A}'(u(\lambda))$  Gâteaux derivacija u točki  $u(\lambda)$ . Stoga je:

$$(u(\lambda + \Delta\lambda) \approx u(\lambda) + \Delta u(\lambda), \quad (1.8)$$

gdje je  $\mathcal{A}u(\lambda)$  rješenje zadace:

$$\mathcal{A}'(u(\lambda))\Delta u(\lambda) = \Delta\lambda f. \quad (1.9)$$

Ovu posljednju relaciju koristimo za formulaciju metode inkremenata:

$$\begin{cases} \text{Za zadani } u^0 = 0 \text{quad računamo:} \\ \mathcal{A}'(u^n)\Delta u^n = (\lambda^{n+1} - \lambda^n)f, \\ u^{n+1} = u^n + \Delta u^n. \end{cases} \quad (1.10)$$

Gâteaux-ova derivacija  $\mathcal{A}'(u^n)$  operatora  $\mathcal{A}$  zapravo je linearizacija jednadžbi modela zadanog operatorom  $\mathcal{A}$  u točki, tj. oko funkcije  $u^n$ .

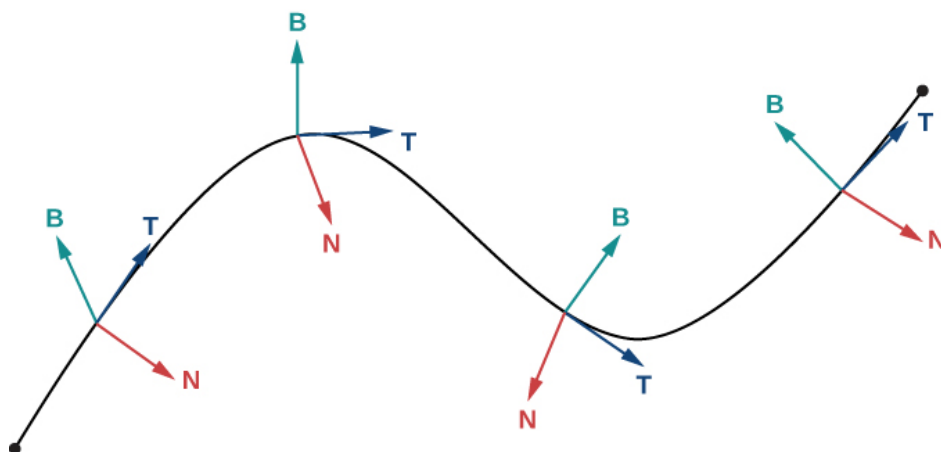
## Poglavlje 2

# Nelinearni model zakrivljenog elastičnog štapa

U ovom poglavlju formuliramo model koristeći rezultate iz [8] i [4]. Neka je  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna ( $|\gamma'(s)| = 1$  za  $s \in [0, L]$ ) prirodna parametrizacija jednostavne krivulje klase  $\mathbb{C}^2$  koja opisuje središnju liniju štapa i neka su također dane glatke funkcije  $v_2, v_3 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  takve da je

$$|v_2(s)| = |v_3(s)| = 1, \quad s \in [0, L],$$

te da u svakoj točki definiraju matricu  $Q := [\gamma', v_2, v_3]$  koja je rotacija poprečnog presjeka referentne konfiguracije ( $Q = I$  za ravne štapove).



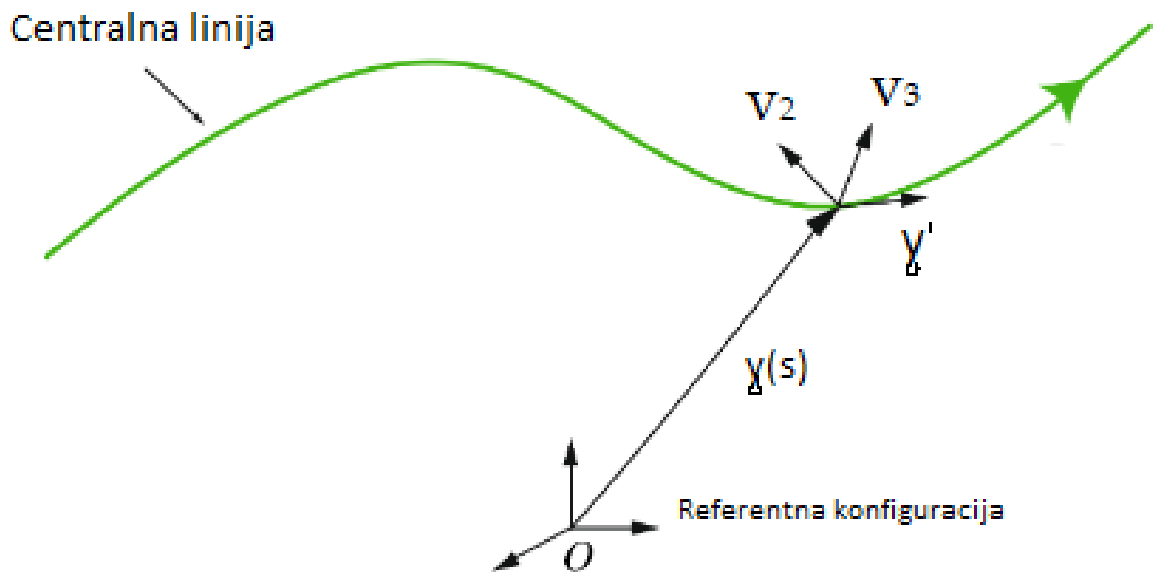
Slika 2.1: Localna Frenetova baza krivulje

Iz pretpostavke na  $Q$  slijedi

$$v_2 \cdot v_3 = \gamma' \cdot v_2 = \gamma' \cdot v_3 = 0.$$

Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je poprečni presjek konstantan, parametriziran sa skupa  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  u točki  $\gamma(s)$  funkcijom:

$$\mathcal{S} \ni (\xi, \zeta) \mapsto \gamma(s) + \xi v_2(s) + \zeta v_3(s). \quad (2.1)$$



Slika 2.2: Referentna konfiguracija elastičnog zakrivljenog štapa

Sada parametriziramo nedeformirani štاپ  $\bar{\Omega}$  preslikavanjem

$$(s, \xi, \zeta) \mapsto \gamma(s) + \xi v_2(s) + \zeta v_3(s),$$

s kojim smo opisali nedeformiranu (referentnu) konfiguraciju.

Neka je deformirana centralna linija štapa parametrizirana funkcijom  $y \in \mathcal{W}^{1,2}([0, L], \mathbb{R}^3)$  za koju pretpostavljamo da vrijedi  $|y'| = 1$  što predstavlja uvjet neproduljivosti. Neka su jedinični vektori  $d_2$  i  $d_3$  koji odgovaraju vektorima  $v_2, v_3$  nakon deformacije. Pretpostavka modela je da su  $d_2$  i  $d_3$  međusobno okomiti takvi da razapinju normalnu ravninu na krivulju parametriziranu sa  $y$ .

Stoga je deformirana konfiguracija parametrizirana sa

$$(s, \xi, \zeta) \mapsto y(s) + \xi d_2(s) + \zeta d_3(s),$$

te je opisana sa  $\mathcal{R} = [y', d_2, d_3]$  funkcijom koja u svakoj točki poprima vrijednosti u  $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ , te zbog  $|y'| = 1$  središnja linija štapa ostaje neproduljivom. Kako je  $\mathcal{R} \in \mathbb{S}\mathbb{O}(3)$  za svaki  $s \in [0, L]$  slijedi da je  $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{I}$ . Deriviranjem dobivamo

$$(\mathcal{R}^T)' \mathcal{R} + \mathcal{R}^T \mathcal{R}' = 0,$$

pa je

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R}' = -(\mathcal{R}^T \mathcal{R}')^T$$

u svakoj točki, pa je matrica  $\mathcal{R}^T \mathcal{R}'$  antisimetrična, tj. vrijedi:

$$(\mathcal{R}^T \mathcal{R}')_{1k} = -(\mathcal{R}^T \mathcal{R}')_{k1} = y' \cdot d'_k, \quad (2.2)$$

za  $k = 2, 3$ , te

$$(\mathcal{R}^T \mathcal{R}')_{23} = -(\mathcal{R}^T \mathcal{R}')_{32} = d_2 \cdot d'_3, \quad (2.3)$$

mjere savijanje i torziju.

**Definicija 2.0.1.** Definiramo momente inercije  $\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$  te produktni moment  $\mathcal{I}_{23}$

$$\mathcal{I}_2 = \int_S (\xi)^2 d\xi d\zeta, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_S (\zeta)^2 d\xi d\zeta, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{I}_{23} = \int_S \xi \zeta d\xi d\zeta. \quad (2.6)$$

Pojam hiperelastičnosti označava elastični materijal koji dopušta minimizacijsku (energetska) formulaciju problema. Formulaciju rubnog problema nelinearnog modela elastičnog štapa za određena opterećenja promatramo kao minimizacijski problem za  $\mathcal{R} \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{S}\mathbb{O}(3))$  na prikladno odabranom skupu funkcija uključujući rubne uvjete.

Definiramo klasu dopustivih deformacija:

$$\mathcal{A} = \{(y, d_2, d_3) \in \mathcal{W}^{2,2}((0, L); \mathbb{R}^3) \times \mathcal{W}^{2,1}((0, L); \mathbb{R}^3) \times \mathcal{W}^{2,1}((0, L); \mathbb{R}^3) \mid (y'(s), d_2(s), d_3(s)) \in \mathbb{S}\mathbb{O}(3), s \in [0, L]\} \quad (2.7)$$

Model zakrivljenog nelinearnog elastičnog štapa iz [4] korišten u radu [8] dan je u minimizacijskoj formulaciji gdje je funkcional unutrašnje energije zadan izrazom:

$$I(y, d_2, d_3) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^L \mathcal{Q}_2[s, (\mathcal{R}^T(s) \mathcal{R}'(s) - \mathcal{Q}^T(s) \mathcal{Q}'(s))] ds & \text{za } (y, d_2, d_3) \in \mathcal{A}, \\ \infty & \text{inače.} \end{cases}$$

Forma  $\mathcal{Q}_2$  pomoću koje se opisuje funkcija unutrašnje energije elastičnog tijela je funkcija

$$\mathcal{Q}_2 : [0, L] \times \mathcal{R}_{skew}^{3 \times 3} \mapsto [0, +\infty) \quad (2.8)$$

koja je kvadratna pozitivno definitna forma u drugom argumentu. Svojstva materijala općenito razmatrana kroz funkciju  $\mathcal{W}$  u ovom modelu možemo promatrati kroz formu  $\mathcal{Q}_2$ , koja je osobito jednostavna ukoliko je štap homogen, tj. vrijedi  $\mathcal{Q}_2(x, \mathcal{F}) = \mathcal{Q}_2(\mathcal{F})$ . Obično se pretpostavlja da je pozitivna definitnost uniformna s obzirom na parametar duljine luka  $s$ .

Kako smo već ranije naveli diferenciranjem  $\mathcal{R}(s)^T \mathcal{R}(s) = I$  dobivamo da je  $\mathcal{R}(s)^T \mathcal{R}'(s)$  antisimetrična matrica, a isto vrijedi i za  $\mathcal{Q}(s)^T \mathcal{Q}'(s)$ . Stoga je dovoljno imati da je  $\mathcal{Q}_2$  definiran na skupu antisimetričnih matrica.

**Napomena 2.0.2.** U slučaju homogenih izotropnih štapova kružnog poprečnog presjeka vrijedi:

$$\mathcal{Q}_2 = \left( s, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{E}I(a^2 + b^2) + \mu\mathcal{K}c^2, \quad (2.9)$$

gdje je  $\mathbb{E}$  Youngov modul elastičnosti materijala,  $I$  moment inercije poprečnog presjeka dok je izraz  $\mu\mathcal{K}$  torzijska krutost poprečnog presjeka. U ovom modelu deformirana konfiguracija štapa opisana trojkom  $[y, d_2, d_3]$  gdje funkcija  $y$  opisuje deformaciju (parametrizaciju) središnje linije. S obzirom da je  $y'(s) = \mathcal{R}(s)e_1$  gdje je  $e_1 = (1, 0, 0)^T$  parametrizacija deformirane središnje krivulje slijedi iz  $\mathcal{R}$  te rubnog uvjeta za  $y(0)$

$$y(s) = y(0) + \int_0^s \mathcal{R}(t)e_1 dt. \quad (2.10)$$

Kako  $\mathcal{R}(s) \in \mathbb{SO}(3)$  implicira  $|y'(s)| = 1$  slijedi da su dopustive deformacije neproduktivne, štoviše trojka  $[y', d_2, d_3]$  formira ortonormiranu bazu uzduž deformirane krivulje, te  $d_2$  i  $d_3$  pripadaju normalnoj ravnini deformirane krivulje i opisuju rotaciju porečnog presjeka. Stoga slijedi da je model nesmičljiv. Primjetimo da fiksiranjem  $\mathcal{Q} = I$  u funkcionalu (2.11) dobivamo model za ravne štapove. Kod ravnotežnog modela s konzervativnim članom sile  $\mathcal{F}(y, d_2, d_3)$  model može biti zapisan kao minimizacija funkcionala:

$$\mathcal{J}(y, d_2, d_3) = I(y, d_2, d_3) - \mathcal{F}(y, d_2, d_3) \quad (2.11)$$

na skupu  $\mathcal{A}$  dopustivih funkcija zajedno sa rubnim uvjetima. S obzirom na (2.11) konzervativni član sile može se prikazati kao funkcija od  $y(0)$  i  $\mathcal{R}$ . Za zadano  $y_0$  fiksno  $y(0) = y_0$  tada model možemo preformulirati za funkcional:

$$\mathcal{J} : \mathcal{W}^{1,2}(0, l; \mathbb{S}\mathbb{O}(3)) \rightarrow \mathcal{R}, \quad \mathcal{J}(R) = I(R) - \mathcal{F}(R), \quad (2.12)$$

i formulirati ga sa:

$$\begin{cases} \text{Odrediti} & R^* \in A, \\ \text{Takav da} & \mathcal{J}(R^*) = \min_{R \in \mathcal{A}} \mathcal{J}(R) \end{cases} \quad (2.13)$$

za neki skup dopustivih funkcija  $A \subset W^{1,2}(0, l; \mathbb{S}\mathbb{O}(3))$  određen rubnim uvjetima. Za jednom određen  $R^*$  koristeći (2.11) računamo deformaciju štapa (parametriziranu) sa:

$$y(s) = y(0) + \int_0^s \mathcal{R}^*(t) e_1 dt. \quad (2.14)$$

**Napomena 2.0.3.** U slučaju zadane sile linijske gustoće koja je "Dead load"  $f$  koristeći (2.11) te zamjenom poretka integracije dobijemo:

$$\int_0^L f(s) \cdot y(s) ds = \int_0^L f(s) \cdot \left[ y(0) + \int_0^s \mathcal{R}(t) e_1 dt \right] ds \quad (2.15)$$

$$= \int_0^L f(s) \cdot y_0 ds + \int_0^L \left[ \int_t^L f(s) ds \right] \cdot \mathcal{R}(t) e_1 dt \quad (2.16)$$

$$= \int_0^L f(s) \cdot y_0 ds + \mathcal{F}(R). \quad (2.17)$$

U slučaju zadane kontaktne sile  $g$  u točki  $s = L$  imamo:

$$g \cdot y(L) = g \cdot \left[ y(0) + \int_0^s \mathcal{R}(t) e_1 dt \right] \quad (2.18)$$

$$= g \cdot \left[ y(0) + \int_0^L \mathcal{R}(t) e_1 dt \right] \quad (2.19)$$

$$= g \cdot y_0 + \mathcal{F}(R). \quad (2.20)$$

Primjetimo da je u definiciji funkcionala  $\mathcal{I}$  referentna konfiguracija zadana sa  $Q \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L; \mathbb{S}\mathbb{O}(3))$ . To implicira da je  $\gamma \in \mathcal{W}^{2,2}(0, L, \mathbb{R}^3)$ . S obzirom da je  $\mathcal{R}(s) \in \mathbb{S}\mathbb{O}(3)$  slijedi da je štap neproduljiv te nesmičljiv. Veličina naprežanja u modelu ovisi o razlici:

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} - Q^T Q, \quad (2.21)$$

gdje je  $Q$  Frenetova baza nedeformirane konfiguracije.

Rotaciju  $\mathcal{R}$  možemo promatrati kao rotaciju  $\mathcal{P}$  primijenjenu na nedeformiranu geometriju tj.

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{P}(s)Q(s), \quad s \in [0, L]. \quad (2.22)$$

Jednostavnim računom možemo pokazati da se rubni problem može reformulirati preko funkcije  $\mathcal{P}$ . Takva formulacija nema derivaciju na  $Q$  te je model dobro postavljen za  $\mathcal{P} \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{R}^3)$  kao i za proizvoljnu izmjerivu  $Q$  s vrijednostima u  $\mathbb{SO}(3)$  skoro svuda. Za  $Q \in \mathbb{L}^1(0, L; \mathbb{SO}(3))$  to implicira novu formulaciju koja uključuje Lipschitz središnju liniju. Primjerice nova formulacija je dobro definirana na nedeformiranoj geometriji s kutovima. Dakle uvodimo novu varijablu  $\mathcal{P} \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L; \mathbb{SO}(3))$  (transformaciju rotacije) da bi uklonili član  $Q'$  iz funkcionala i zapisali naš funkcional preko:

$$\mathcal{P} := \mathcal{R}Q^T. \quad (2.23)$$

$\mathcal{P}$  predstavlja rotaciju koja lokalno transformira nedeformiranu konfiguraciju u deformiranu. Zbog tog  $\mathcal{P}$  matricu nazivamo rotacijskom transformacijom. Štoviše sada mjera deformacije (strain) glasi:

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R}' - Q^T Q' = Q^T \mathcal{P}^T (\mathcal{P}' Q + \mathcal{P} Q') - Q^T Q' = Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q. \quad (2.24)$$

Zbog toga novi funkcional glasi:

$$\mathcal{I}^{New}(\mathcal{P}) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^L Q_2[s, (Q^T(s)\mathcal{P}(s)^T \mathcal{P}'(s)Q(s))] ds & \text{za } \mathcal{P} \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L; \mathbb{SO}(3)) \\ \infty & \text{inače} \end{cases}$$

Posljedično funkcionalne  $\mathcal{F}, \mathcal{J}$  mijenjamo sa:

$$\mathcal{F}^{New}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}Q), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{J}^{New}(\mathcal{P}) = \mathcal{I}^{New}(\mathcal{P}) - \mathcal{F}^{New}(\mathcal{P}). \quad (2.26)$$

Problem ravnoteže je sada zadan sa:

$$\begin{cases} \text{Odredi } \mathcal{P}^* \in \mathcal{A}^{New}, \\ \text{Takav da } \mathcal{J}^{New}(\mathcal{P}^*) = \min_{\mathcal{P} \in \mathcal{A}^{New}} \mathcal{J}^{New}(\mathcal{P}). \end{cases} \quad (2.27)$$

Za neki dopustivi skup funkcija  $\mathcal{A}^{New} \subseteq \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{SO}(3))$  određen rubnim uvjetima.

Za jednom određen  $\mathcal{P}^*$  koristeći jednadžbu (2.11) dobivamo deformaciju štapa parametriziranu s:

$$y(s) = y(0) + \int_0^s \mathcal{P}(\tau)Q(\tau)e_1 d\tau. \quad (2.28)$$

**Napomena 2.0.4.** Primjetimo da je  $\mathcal{I}^{New}$  dobro definiran za proizvoljnu izmjerivu funkciju  $Q$  s vrijednostima u  $\mathbb{SO}(3)$  gotovo svuda koja je ekvivalentna funkciji  $Q \in \mathbb{L}^\infty(0, L, \mathbb{SO}(3))$ . Primjerice  $\mathcal{I}^{New}$  je dobro definiran za štapove nedeformirane središnje linije koje su neprekidne, po dijelovima glatke funkcije. Za  $Q \in \mathbb{L}^\infty(0, L, \mathbb{SO}(3))$  parametrizacija središnje linije nedeformiranog štapa je zadana sa:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \int_0^s Q(\tau)e_1 d\tau. \quad (2.29)$$

**Napomena 2.0.5.** Kako je matrica dobivena u prethodnoj transformaciji:

$$Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q \quad (2.30)$$

antisimetrična, čitava netrivialna informacija sadržana je u njenom aksijalnom vektoru. Za antisimetričnu matricu  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  označimo s  $a_{\mathcal{M}}$  njen aksijalni vektor tj. vektor takav da vrijedi:

$$a_{\mathcal{M}} \times x = \mathcal{M}x. \quad (2.31)$$

Sada se djelovanje kvadratne forme  $\mathcal{Q}_2$  na antisimetričnu matričnu funkciju

$$Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q$$

može općenito zapisati sa:

$$\mathcal{Q}_2[s, Q^T(s)\mathcal{P}^T(s)\mathcal{P}'(s)Q(s)] = \mathcal{H}(s)a_{Q^T(s)\mathcal{P}^T(s)\mathcal{P}'(s)Q(s)} \cdot a_{Q^T(s)\mathcal{P}^T(s)\mathcal{P}'(s)Q(s)}. \quad (2.32)$$

Stoga je sada:

$$\mathcal{I}^{New}(\mathcal{P}) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^L \mathcal{H} a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} \cdot a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} ds & \text{za } \mathcal{P} \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L; \mathbb{SO}(3)), \\ \infty & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.34)$$



## Poglavlje 3

# Primjena metode inkremenata

### 3.1 Varijacijska (slaba) formulacija problema

Kako bi primjenili metodu inkremenata na nelinearni model zakrivljenog štapa iz Odjeljka 2 iz minimizacijske formulacije izvodimo prvo slabu formulaciju. Zbog općenitosti ne koristimo formulaciju samo s rotacijom  $\mathcal{P}$  već koristimo formulaciju koja uključuje i deformaciju  $\phi$ . Zadaća od koje polazimo glasi: naći  $(\mathcal{P}, \phi)$  koji je minimum funkcionala,

$$\mathcal{J}^{New}(\mathcal{P}, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^L \mathcal{H} a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} \cdot a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} - \int_0^L f \cdot \phi ds \quad (3.1)$$

na podskupu dozvoljenih deformacija  $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{S}\mathbb{O}(3))$  koji uključuje rubne uvjete, te ograničenje:

$$\mathcal{P}Qe_1 = \phi' \quad (3.2)$$

koje zadaje svojstvo neproduljivosti i nesmičljivosti. Ovdje je funkcija  $\mathcal{H} > 0$  s vrijednostima u skupu matrica  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , a preslikavanje

$$f : [0, L] \mapsto \mathbb{R}^3$$

je linijska gustoća sile.

Do slabe (varijacijske) formulacije dolazimo na standardan način. Neka je  $(\mathcal{P}, \phi)$  minimum funkcionala  $\mathcal{J}^{New}$  na nekom skupu dopustivih funkcija  $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{S}\mathbb{O}(3))$  koji uključuje i rubne uvjete. Perturbacija od  $(\mathcal{P}, \phi)$  je  $(\mathcal{P}_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$  gdje su:

$$\mathcal{P}_\varepsilon = e^{\varepsilon \mathcal{A}_w} \mathcal{P}, \quad \phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon v,$$


---

dok je matrica  $\mathcal{A}_w$  antisimetrična matrica s jedinstvenim aksijalnim vektorom  $w$  tj. vrijedi:

$$\mathcal{A}_w x = w \times x, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

Sada je:

$$Q^T \mathcal{P}_\varepsilon^T \mathcal{P}'_\varepsilon Q = Q^T [\mathcal{P}^T e^{-\varepsilon \mathcal{A}_w}] [(e^{\varepsilon \mathcal{A}_w})' \mathcal{P} + e^{\varepsilon \mathcal{A}_w} \mathcal{P}'] Q \quad (3.4)$$

$$= Q^T \mathcal{P}^T [I - \varepsilon \mathcal{A}_w] [(e^{\varepsilon \mathcal{A}_w})' \mathcal{P} + (I + \varepsilon \mathcal{A}_w) \mathcal{P}'] Q + O(\varepsilon^2), \quad (3.5)$$

gdje smo iskoristili razvoj u red eksponencijalne funkcije. Sada je:

$$Q_\varepsilon^T \mathcal{P}_\varepsilon^T \mathcal{P}'_\varepsilon Q_\varepsilon = Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q + \varepsilon Q^T \mathcal{P}^T [\mathcal{A}_w' \mathcal{P} + \mathcal{A}_w \mathcal{P}' - \mathcal{A}_w \mathcal{P}'] Q + O(\varepsilon^2) \quad (3.6)$$

$$= Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q + \varepsilon Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w' \mathcal{P} Q + O(\varepsilon^2), \quad (3.7)$$

tj:

$$a_{Q^T \mathcal{P}_\varepsilon^T \mathcal{P}'_\varepsilon Q} = a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} + \varepsilon a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w' \mathcal{P} Q} + O(\varepsilon^2). \quad (3.8)$$

Sada uvrstimo ovu perturbaciju u funkcional  $\mathcal{J}^{New}$  jer želimo odrediti Gâteaux-ovu derivaciju funkcionala. Kako je  $(\mathcal{P}, \phi)$  minimum funkcionala zadovoljava nejednakost:

$$\mathcal{J}^{New}(\mathcal{P}, \phi) \leq \mathcal{J}^{New}(\mathcal{P}^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \quad (3.9)$$

gdje je :

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}^\varepsilon, \phi^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_0^L \mathcal{H}[a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} + \varepsilon a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w' \mathcal{P} Q}] \quad (3.10)$$

$$\cdot [a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} + \varepsilon a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w' \mathcal{P} Q}] ds \quad (3.11)$$

$$- \int_0^L f \cdot (\phi + \varepsilon v) ds + O(\varepsilon^2). \quad (3.12)$$

Stoga je:

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}^\varepsilon, \phi^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_0^L \mathcal{H}[a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} \cdot a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} \quad (3.13)$$

$$+ 2\varepsilon \mathcal{H} a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w' \mathcal{P} Q}] \quad (3.14)$$

$$- \int_0^L f \cdot (\phi + \varepsilon v) + O(\varepsilon^2). \quad (3.15)$$

Kako (3.9) vrijedi za svaki  $\varepsilon > 0$  iz (3.13) slijedi da član uz  $\varepsilon$  mora biti jednak nuli,

$$\int_0^L \mathcal{H} a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} \cdot a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w \mathcal{P} Q} = \int_0^L f \cdot v \quad (3.16)$$

za sve  $(v, w)$  iz tangencijalnog prostora od  $\mathcal{A}$ .

Pri tom iz uvjeta

$$e^{\varepsilon \mathcal{A}_w} \mathcal{P} Q e_1 = \phi' + \varepsilon v'$$

dobivamo:

$$(I + \varepsilon \mathcal{A}_w) \mathcal{P} Q e_1 = \phi' + \varepsilon v' + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.17)$$

Zbog uvjeta u  $\mathcal{A}$  danog sa  $\mathcal{P} Q e_1 = \phi'$  u vodećem članu nam ostaje uvjet na test funkcije:

$$\mathcal{A}_w \mathcal{P} Q e_1 = v'. \quad (3.18)$$

Sada

$$\mathcal{A}_w \mathcal{P} Q e_1 = v' \implies v' + \mathcal{P} Q e_1 \times w = 0. \quad (3.19)$$

Slaba formulacija problema sada glasi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } (\mathcal{P}, \phi) \in \mathcal{A} \\ \text{takav da je } \mathcal{P} \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{S}\mathbb{O}(3)) \\ \text{zatim } \phi \in \mathcal{W}^{1,2}(0, L, \mathbb{R}^3) \\ \mathcal{P} Q e_1 = \phi' \quad \text{uz uvjet} \\ \phi(0) = \phi_0, \quad \mathcal{P}(0) = I \quad \text{vrijedi:} \\ \int_0^L \mathcal{H} a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{P}' Q} \cdot a_{Q^T \mathcal{P}^T \mathcal{A}_w \mathcal{P} Q} ds = \int_0^L f \cdot v ds \\ \text{za svaki } (v, w) \text{ takav da je} \\ v' + \mathcal{P} Q e_1 \times w = 0 \quad \text{i} \quad v(0) = w(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Podsjetimo se da smo za  $M$  antisimetričnu matricu koristili njen aksijalni vektor tj. vektor  $a_M$  takav da je  $Mx = a_M \times x$ . Vrijedi koristan rezultat:

**Lemma 3.1.1.** *Neka je  $M \in \mathbb{M}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$  antisimetrična i  $Q \in \mathbb{SO}(3)$ . Tada vrijedi*

$$Q^T a_M = a_{Q^T M Q}. \quad (3.21)$$

*Dokaz.*

$$a_{Q^T M Q} \times x = Q^T (M(Qx)) = Q^T [a_M \times Qx] = Q^T a_M \times Q^T Qx = Q^T a_M \times x.$$

□

**Napomena 3.1.2.** Lema 3.1.1. sada povlači da je lijeva strana u slaboj formulaciji (3.17) dana sa:

$$\int_0^L \mathcal{H} Q^T a_{\mathcal{P}^T \mathcal{P}'} \cdot Q^T a_{\mathcal{P}^T A_w \mathcal{P}}. \quad (3.22)$$

Stoga slaba formulacija glasi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } (\mathcal{P}, \phi) \text{ koji zadovoljava} \\ \mathcal{P} Q e_1 = \phi' \\ \text{uz rubne uvjete:} \\ \phi(0) = \phi_0 \quad \mathcal{P}(0) = I \\ \text{te jednadžbu:} \\ \int_0^L \mathcal{H} Q^T a_{\mathcal{P}^T \mathcal{P}'} \cdot Q^T a_{\mathcal{P}^T A_w \mathcal{P}} ds = \int_0^L f \cdot v ds \\ \text{za svaki } (v, w) \in \mathbb{H}^1(0, L, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(0, L, \mathbb{R}^3) \\ \text{koji zadovoljavaju } v(0) = w(0) \quad i \quad v' + \mathcal{P} Q e_1 \times w = 0. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

## 3.2 Linearizacija modela

U ovom odjeljku lineariziramo model iz Odjeljka 3.1 oko proizvoljne deformacije  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\phi})$ . Nelinearni model zakrivljenog štapa dan je sa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } (\mathcal{P}, \phi) \text{ t.d. } \mathcal{P}(0) = I, \quad \phi(0) = \phi_0 \\ \mathcal{P}Qe_1 = \phi' \\ \int_0^L QHQ^T a_{\mathcal{P}^T \mathcal{P}'} \cdot a_{\mathcal{P}^T \mathcal{A}_\omega \mathcal{P}} ds = \int_0^L f \cdot v ds \\ \text{za sve } (v, w) \in \mathbb{H}^1(0, L, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(0, L, \mathbb{R}^3), \\ \text{takve da je } v(0) = w(0) = 0, \\ v' + \mathcal{P}Qe_1 \times w = 0. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

U nastavku lineariziramo ovaj model u okolini  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\phi})$ . Neka je  $(\mathcal{P}, \phi)$  dobiven perturbacijom  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\phi})$  kao i kod izvoda slabe formulacije,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \tilde{\phi} + u \\ \mathcal{P} = e^{\mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}}} \\ \text{za neke } u \text{ i } \omega \text{ iz } \mathbb{H}^1(0, L, \mathbb{R}^3) \text{ koji zadovoljavaju} \\ u(0) = \omega(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Sada je:

$$\mathcal{P}^T = \tilde{\mathcal{P}}^T (e^{\mathcal{A}_\omega})^T \quad (3.26)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}^T (e^{-\mathcal{A}_\omega}) \quad (3.27)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}^T (I - \mathcal{A}_\omega + \mathcal{O}(\omega^2)) \quad (3.28)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}^T - \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega + \mathcal{O}(\omega^2). \quad (3.29)$$

Zatim:

$$\mathcal{P}' = [(I + \mathcal{A}_\omega + \mathcal{O}(\omega^2))\tilde{\mathcal{P}}]' \quad (3.30)$$

$$= [\mathcal{A}_\omega' + \mathcal{O}(\omega)]\tilde{\mathcal{P}} + (I + \mathcal{A}_\omega + \mathcal{O}(\omega^2))\tilde{\mathcal{P}}' \quad (3.31)$$

$$= \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{P}}' + \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}}' + \mathcal{O}(\omega^2). \quad (3.32)$$

Dobivamo:

$$\mathcal{P}^T \mathcal{P}' = [\tilde{\mathcal{P}}^T - \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega + O(\omega^2)][\mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{P}}' + \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}}' + O(\omega^2)] \quad (3.33)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}' + \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}}' - \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}}' + O(\omega^2) \quad (3.34)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}' + \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}} + O(\omega^2). \quad (3.35)$$

U zadaći (3.21) sada imamo:

$$a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} = a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} + \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}} + O(\omega^2) = a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} + a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}}} + O(\omega^2), \quad (3.36)$$

te korištenjem Leme 3.1.1. dobivamo:

$$a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} = a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} + \tilde{\mathcal{P}}^T a_{\mathcal{A}_\omega} + O(\omega^2), \quad (3.37)$$

te kako je:

$$a_{\mathcal{A}_\omega} = \omega' \quad (3.38)$$

slijedi:

$$a_{\mathcal{P}^T \mathcal{P}'} = a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} + \tilde{\mathcal{P}}^T \omega' + O(\omega^2). \quad (3.39)$$

Slično argumentiramo i u drugom članu relacije (3.21)

$$a_{\mathcal{P}^T \mathcal{A}_\omega \mathcal{P}} = \mathcal{P}^T a_{\mathcal{A}_\omega} = \mathcal{P}^T \omega' = (\tilde{\mathcal{P}}^T - \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega) \omega' + O(\omega^2). \quad (3.40)$$

Uvrštavanjem izraza (3.35), (3.36) u (3.21) dobivamo:

$$\int_0^L \mathcal{Q} \mathcal{H} \mathcal{Q}^T [a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} + \tilde{\mathcal{P}}^T \omega' + O(\omega)] \cdot [(\tilde{\mathcal{P}}^T - \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega) \omega' + O(\omega^2)] ds \quad (3.41)$$

$$= \int_0^L \mathcal{Q} \mathcal{H} \mathcal{Q}^T a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} \cdot \tilde{\mathcal{P}}^T \omega' ds + \int_0^L \mathcal{Q} \mathcal{H} \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{P}}^T \omega' \cdot \tilde{\mathcal{P}}^T \omega' ds \quad (3.42)$$

$$- \int_0^L \mathcal{Q} \mathcal{H} \mathcal{Q}^T a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\mathcal{P}}'} \cdot \tilde{\mathcal{P}}^T \mathcal{A}_\omega \omega' ds + O(\omega^2). \quad (3.43)$$

Linearizacija preostalih uvjeta na  $\phi$  i  $\mathcal{P}$  daje:

$$(\mathcal{I} + \mathcal{A}_\omega + O(\omega^2)) \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{Q} e_1 = \tilde{\phi}' + u', \quad (3.44)$$

tj. preostali uvjet je:

$$\mathcal{A}_\omega \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{Q} e_1 = u', \quad (3.45)$$

tj.

$$u' + \tilde{\mathcal{P}}Qe_1 \times \omega = 0, \quad (3.46)$$

Što odgovara uvjetu na test funkcije:

$$v' + \tilde{\mathcal{P}}Qe_1 \times w = 0. \quad (3.47)$$

Stoga model dobiven linearizacijom oko  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\phi})$  glasi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } (u, \omega) \in \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \quad \text{t.d.} \\ u(0) = \omega(0), \\ u' + \tilde{\mathcal{P}}Qe_1 \times \omega = 0, \\ \int_0^L \tilde{\mathcal{P}}QHQT \tilde{\mathcal{P}}^T \omega' \cdot w' ds + \int_0^L \omega \times [\tilde{\mathcal{P}}QHQT a_{\tilde{\mathcal{P}}^T \tilde{\phi}'}] \cdot w' ds = \int_0^L f \cdot v ds \\ \text{za sve } (v, w) \in \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \\ \text{koji zadovoljavaju: } v' + \mathcal{P}Qe_1 \times w = 0, \quad v(0) = w(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Jednadžba (3.42) do na drugi član s lijeve strane jednakosti zapravo predstavlja linearni model zakrivljenog štapa za nedeformiranu geometriju opisanu sa  $\tilde{\phi}$  i s tangencijalnim vektorom  $\tilde{\mathcal{P}}Qe_1$ .

### 3.3 Algoritam

U ovom odjeljku konačno formuliramo metodu inkremenata za aproksimaciju modela nelinearnog zakrivljenog štapa. Neka je dana parametrizacija  $\gamma : [0, L] \mapsto \mathbb{R}^3$  nedeformiranog štapa i matična funkcija  $Q : [0, L] \mapsto \mathbb{SO}(3)$  t.d.  $\gamma' = Qe_1$ . Neka su također dani brojevi:

$$0 = \lambda^0 < \lambda^1 < \dots < \lambda^{N-1} < \lambda^N = 1 \quad (3.49)$$

Definiramo:

$$\begin{cases} \phi^0 = \gamma \\ \mathcal{P}^0 = \mathcal{I} \end{cases} \quad (3.50)$$

za  $n = 0, \dots, N - 1$  računamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } (u, \omega) \in \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \\ \text{takav da } u(0) = \omega(0) = 0 \\ u' + \mathcal{P}_n Q e_1 \times \omega = 0, \\ \int_0^L \mathcal{P}_n Q H Q^T \mathcal{P}_n \omega' \cdot w' ds + \int_0^L \omega \times (\mathcal{P}_n Q H Q^T a_{\mathcal{P}_n^T \mathcal{P}_n}) \cdot w' ds \\ \quad = (\lambda^{n+1} - \lambda^n) \int_0^L f \cdot v ds, \\ \text{za sve } (v, w) \in \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(0, L; \mathbb{R}^3) \text{ koji zadovoljavaju:} \\ v' + \mathcal{P}_n Q e_1 \times w = 0, \quad v(0) = w(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Nakon toga definiramo nove vrijednosti  $\phi_{n+1}$  i  $\mathcal{P}_{n+1}$  sa:

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + u \\ \mathcal{P}_{n+1} = e^{\mathcal{A}\omega} \mathcal{P}_n. \end{cases} \quad (3.52)$$



## Bibliografija

- [1] P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity. Vol. I, Three-dimensional elasticity*. North-Holland Publishing. Co., Amsterdam, 1988.
- [2] C. A. Felippa : CDepartment of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder  
[http://kis.tu.kielce.pl//mo/COLORADO\\_NFEM/colorado/](http://kis.tu.kielce.pl//mo/COLORADO_NFEM/colorado/)
- [3] D. Knuth: Computers and Typesetting,  
<http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html>
- [4] L. Scardia. *The nonlinear bending-torsion theory for curved rods as  $\Gamma$ -limit of three-dimensional elasticity*. Asymptotic Analysis 47 (2006), no. 3-4, 317–343.
- [5] J. Tambača, Teorija elastičnosti predavanja i vježbe, PMF MO, Sveučilište u Zagrebu, 2020.
- [6] J. Tambača, *A numerical method for solving the curved rod model*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 86 (2066), 210-221.
- [7] J. Tambača, *A model of irregular curved rods*. Applied mathematics and scientific computing (Dubrovnik, 2001), 289–299, Kluwer/Plenum, New York, 2003.
- [8] J. Tambača, M. Kosor, *Nonlinear bending-torsion model for curved rods with little regularity*. Mathematics and Mechanics of Solids 22 (2017) 708-717.
- [9] M. Jurak, J. Tambača, Z. Tutek. *Modelling of curved rods*,. *Applied Mathematics and Scientific Computing* . Applied mathematics and scientific computing (Dubrovnik, 2001), 91–121, Kluwer/Plenum, New York, 2003.
- [10] J. Tambača, I. Velčić, *Derivation of the nonlinear bending-torsion model for a junction of elastic rods*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A 142 (2012), 633-664.
-

- [11] J. Tambača, B. Žugec, *A biodegradable elastic stent model*, *Mathematics and Mechanics of Solids* 24 (2019), 2591-2618.

# Sažetak

U ovom radu predstavljena je metoda inkremenata za rješavanje nelinearnih zadaća zadanih diferencijalnim jednačbama. Metoda je primjenjena na nelinearni model zakrivljenog elastičnog štapa.

# Summary

In this paper, the increment method for solving nonlinear problems given by differential equations is presented. The method is applied to a nonlinear model of a curved elastic rods.

## **Životopis**

Jurica Perić rođen je u Šibeniku gdje je završio osnovnu i srednju školu nakon koje odlazi na studij u Zagreb. Prediplomski studij matematike na PMF-Matematičkom odsjeku upisuje 2010/11. te ga uspješno završava 2015.g. Akademsku godinu 2016./17. upisuje diplomski studij primjenjene matematike također na PMF-Matematičkom odsjeku.