Perron-Frobeniusov teorem

Puček, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Puček

PERRON–FROBENIUSOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji, dečku i kolegama s fakulteta

Sadržaj

Uvod

Matematičar Oskar Perron je 1907. godine dokazao teorem za matrice s pozitivnim vrijednostima, koji ukratko možemo izreći na sljedeći način:

Po apsolutnoj vrijednosti, najveća svojstvena vrijedost pozitivne kvadratne matrice A je pozitivna i kratnosti 1 te joj pripada pozitivan svojstveni vektor.

Ovaj, u posljednje vrijeme pomalo zanemaren, teorem iz linearne algebre će nam biti središnja tema ovoga rada. Kroz vrijeme se pokazalo da pozitivnost matrice nije nužno svojstvo. Matematičar Ferdinand Georg Frobenius, u nizu je svojih radova, proširio rezultat na nenegativne, odsnosno na matrice s nenegativnim elementima. Od ovih otkrića teorija nenegativnih matrica je postala jedno od najaktivnijih područja linearne algebre.

Važnost Perron-Frobeniusovog teorema možemo vidjeti u raznim njegovim primjenama. Kao prvo, u stvarnim životnim situacijama. Kod mjerenja interakcija ili veličina baratamo najčešće sa pozitivnim brojevima, ili barem nenegativnim. Primjerice, vrijeme a_{ij} potrebno da se dođe iz lokacije i u lokaciju j je uvijek nenegativno, kao što je i postotak $a_{i,i+1}$ ljudi dobne skupine i koji dožive dob $i+1$. U ekonomiji, j-ti sektor troši $a_{ij}x_j$ nenegativnih jedinica izlaza x_i sektora i da proizvede x_j jedinica. To su samo neki od mnogobrojnih primjera. Dakle, u praktične svrhe, matrice su češće nenegativne nego što nisu.

U prvom poglavlju ćemo se baviti dokazom samoga teorema, onako kako se povijesno dokazivao. Prvo ćemo razmatrati samo strogo pozitivne matrice te ćemo nakon toga poopćiti teorem na klase nenegativnih matrica. Pritom ćemo razjasniti zašto je svojstvo ireducibilnosti nužno u cijeloj priči.

Drugo poglavlje će biti posvećeno primjenjivosti teorema. Proći ćemo kroz primjene iz Markovljevih lanaca, ekonomije i matematičkog modeliranja.

Poglavlje 1

Dokaz Perron-Frobeniusovog teorema

1.1 Pozitivne matrice

Najprije ćemo se pozabaviti dokazom teorema koji se povijesno ranije pojavio. On ima malo jače pretpostavke, no iz njega ćemo lako doći do našeg glavnog rezultata. Prvo ćemo proći kroz definicije i bitna svojstva koja će nam biti korisna.

Definicija 1.1. *Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ kažemo da je pozitivna (nenegativna) ako su joj svi elementi pozitivni (nenegativni), odnosno vrijedi $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$), za sve $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$.*

U ovom radu ćemo pozitivne matrice A označavati s $A > 0$, dok će nejednakost $A > B$ za neke dvije proizvoljne matrice istih dimenzija značiti da je $A - B$ pozitivna matrica. Analogno definiramo oznaku za nenegativnu matricu A kao $A \geq 0$. Spomenimo još i oznaku $A < 0$; ovo pišemo kada je matrica $-A$ pozitivna. Napomenimo da pozitivna matrica nije isto što i pozitivno definitna matrica. Kako ne bi došlo do zabune navodimo i ovu definiciju.

Definicija 1.2. *Hermitska matrica A je pozitivno definitna (semidefinitna) ako je $x^*Ax > 0$ ($x^*Ax \geq 0$) za svaki $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ($x \in \mathbb{C}^n$).*

Pozitivnu definitnost matrice najlakše provjeravamo Sylvesterovim kriterijem koji kaže da je *hermitska matrica A pozitivno definitna ako i samo ako su joj sve vodeće glavne minore pozitivne.*
Promotrimo sljedeći primjer:

Primjer 1.3. *a)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Matrica A je očito pozitivna matrica budući da su joj svi elementi pozitivni.

Izračunajmo glavne minore:

$$\nabla_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \nabla_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad \nabla_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -51.$$

Iz Sylvesterovog kriterija lagano zaključujemo da matrica A nije pozitivno definitna.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Matrica B nije pozitivna jer se u njoj nalaze negativni elementi. Izračunajmo i za nju glavne minore:

$$\nabla_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \nabla_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \nabla_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

Ova matrica je pozitivno definitna. Dakle, ovaj primjer nam prikazuje kako pozitivnost i pozitivna definitnost matrice nisu ni u kakvoj vezi, niti jedno svojstvo ne povlači ono drugo.

Definirajmo sada osnovne pojmove kojima ćemo se koristiti u ostatku ovoga rada.

Definicija 1.4. *Neka je $A \in M_n$ matrica. Svojstvena vrijednost matrice A je broj $\lambda \in \mathbb{C}$ koji zadovoljava jednadžbu $Ax = \lambda x$, gdje je $x \neq 0$ stupac. Stupac x zovemo svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti zovemo spektar (matrice A) i označavamo sa $\sigma(A)$.*

Definicija 1.5. *Neka je $A \in M_n$ matrica i V n-dimenzionalni vektorski prostor. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda) := \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ naziva geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ i označava se s $d(\lambda)$.*

Definicija 1.6. *Neka je $A \in M_n$ matrica. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni polinom matrice A.*

Definicija 1.7. *Neka je $A \in M_n$ matrica i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je karakteristični polinom oblika $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$, $p(\lambda_0) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$. Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.*

Definirajmo još jednu bitnu veličinu za matrice. Ona je usko povezana sa spektrom te će se na njoj temeljiti Perron-Frobeniusova teorija.

Definicija 1.8. *Spektralni radijus $\rho(A)$ kvadratne matrice A je broj*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Kako će nam spektralni radijus biti vrlo bitan, dokazat ćemo nekoliko činjenica o njemu. U tu svrhu moramo prvo definirati matričnu normu.

Definicija 1.9. *Matrična norma je preslikavanje $\| \cdot \| : M_n \to \mathbb{C}$ koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

(a) $\|A\| \geq 0$, *za sve $A \in M_n$, sa jednakosti ako i samo ako je $A = 0$,*

(b) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, *za sve $\alpha \in \mathbb{C}$ i $A \in M_n$,*

(c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, *za sve $A, B \in M_n$,*

(d) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, *za sve $A, B \in M_n$.*

Svojstvo (a) se zove pozitivna definitnost, (b) je homogenost, (c) nejednakost trokuta, a (d) submultiplikativnost. Navedimo neke najčešće korištene matrične norme:

1. Matričnu 1-normu definiramo kao

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

   tj. kao maksimalnu sumu apsolutnih vrijednosti po stupcima matrice A.

2. Matričnu 2-normu definiramo kao

$$\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^*A)},$$

   gdje s A^* označavamo adjungiranu matricu.

3. Matričnu ∞-normu definiramo kao

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

   tj. kao maksimalnu sumu apsolutnih vrijednosti po retcima matrice A.

4. Matričnu Frobeniusovu normu definiramo kao

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \mathrm{tr}(A^*A).$$

Teorem 1.10 (Gelfand). $\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Napomena 1.11. *Sve norme na konačnodimenzionalnom prostoru su ekvivalentne. Stoga je svejedno koju normu uzimamo u gornjem teoremu.*

Propozicija 1.12. *Neka su A i B nenegativne matrice takve da je $A \leq B$. Tada vrijedi $\rho(A) \leq \rho(B)$.*

Dokaz. Iz $A \leq B$ slijedi $A^m \leq B^m$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Budući da su A i B nenegativne matrice i da je svejedno koju normu uzimamo za spektralni radijus, u ovoj nejednakosti možemo uzeti primjerice 1-normu i ona se neće narušiti, dakle vrijedi $\|A^m\|_1 \leq \|B^m\|_1$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Odavde imamo $\|A^m\|_1^{\frac{1}{m}} \leq \|B^m\|_1^{\frac{1}{m}}$ za sve $m \in \mathbb{N}$. Uzmimo limes u posljednjoj jednakosti i po teoremu 1.10 dobivamo $\rho(A) \leq \rho(B)$. $\square$

Svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_n$ i njene slične matrice $B = S^{-1}AS$ su jednake, što se lagano vidi iz sljedećeg. Uzmimo svojstvenu vrijednost λ i pripadni svojstveni vektor $x \neq 0$ matrice B, odnosno vrijedi $Bx = \lambda x$. Iz ovoga slijedi da vrijedi $S^{-1}AS = \lambda x$. Dakle, imamo $ASx = \lambda Sx$, odnosno λ je svojstvena vrijednost matrice A kojoj pripada svojstveni vektor $Sx \neq 0$.

To nas motivira da nađemo što jednostavniju sličnu matricu B iz koje bismo lako mogli izračunati ili čak iščitati svojstvene vrijednosti matrice A. Na tom problemu je radio matematičar I. Schur te je došao do vrlo korisnog rezultata koristeći unitarne matrice. Za matricu $U \in M_n$ kažemo da je unitarna ako vrijedi $U^*U = I_n$.

Teorem 1.13. *Neka je $A \in M_n$ matrica i neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A u proizvoljnom poretku. Postoji unitarna matrica U i gornje trokutasta matrica T tako da je $A = UTU^*$ i $T_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, ..., n$. Zapis $A = UTU^*$ zovemo Schurova dekompozicija matrice A, a matrica T se zove Schurova forma od A.*

Dokaz. Neka je x_1 jedinični svojstveni vektor matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_1, dakle, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Neka je $U_1 = [x_1\ u_2\ ...\ u_n]$ unitarna matrica čiji je prvi stupac vektor x_1. Sada imamo

$$\begin{aligned} U_1^*AU_1 &= U_1^*[Ax_1\ Au_2\ ...\ Au_n] = U_1^*[\lambda_1 x_1\ Au_2\ ...\ Au_n] \\ &= \begin{bmatrix} x_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} [\lambda_1 x_1\ Au_2\ ...\ Au_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1^* x_1 & x_1^* A u_2 & \cdots & x_1^* A u_n \\ \lambda_1 u_2^* x_1 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ \lambda_1 u_n^* x_1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)\det(A_1 - \lambda I_{n-1})$ slijedi da su $\lambda_2, ..., \lambda_n$ svojstvene vrijednosti podmatrice $A_1 \in M_{n-1}$. Ako je $n = 2$ došli smo do tražene dekompozicije. Ako je

$n > 2$, nastavljamo istim postupkom za matricu A_1. Dakle, neka je x_2 jedinični svojstveni vektor matrice A_1 koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_2. Odaberemo unitarnu matricu U_2 koja za prvi stupac ima vektor x_2 i tada imamo

$$U_2^* A_1 U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Neka je $V_2 = [e_1 \ U_2]$, gdje je e_1 vektor koji na prvom mjestu ima jedinicu. Sada računamo:

$$(U_1V_2)^* AU_1V_2 = V_2^* U_1^* AU_1V_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & D & E \\ 0 & \lambda_2 & F \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Nastavimo istim postupkom, dakle definiranjem unitarnih matrica $U_i \in M_{n-i+1}$, $i = 1, ..., n-1$ i unitarnih matrica $V_i \in M_n$, $i = 2, ..., n-2$. Matrica $U = U_1V_2V_3 \cdots V_{n-2}$ je unitarna i matrica U^*AU je gornje trokutasta s dijagonalnim elementima $\lambda_1, ..., \lambda_n$. □

Propozicija 1.14. *Neka je $A \in M_n$ i neka je $\| \cdot \|$ matrična norma na M_n. Tada je*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Dokaz. Neka je λ neka svojstvena vrijednost matrice A i $x \neq 0$ pripadajući svojstveni vektor. Neka je $X \in M_n$ matrica koja u svakom stupcu ima vektor x. Kako vrijedi $Ax = \lambda x$ to vrijedi i

$$AX = \lambda X.$$

Sada imamo

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|.$$

Dijeljenjem gornjeg izraza s $\|X\|$ dobivamo $|\lambda| \leq A$. Kako je λ proizvoljna svojstvena vrijednost, vrijedi $\rho(A) \leq \|A\|$. □

Propozicija 1.15. *Neka su dani matrica $A \in M_n$ i $\varepsilon > 0$. Postoji matrična norma $|||\cdot|||$ za koju vrijedi $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$.*

Dokaz. Neka je $UAU^* = T$ Schurova dekompozicija matrice A. Dakle, $U \in M_n$ je unitarna matrica, a $T = [t_{ij}] \in M_n$ je gornjetrokutasta matrica. Definirajmo matricu

$D_k \coloneqq \mathrm{diag}(k, k^2, k^3, ...k^n)$ i računamo

$$D_k T D_k^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & k^{-1}t_{12} & k^{-2}t_{13} & \cdots & k^{-(n-1)}t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & k^{-1}t_{23} & \cdots & k^{-(n-2)}t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & k^{-(n-3)}t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k^{-1}t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Za dovoljno veliki k, suma apsolutnih vrijednosti svih elemenata matrice $D_kTD_k^{-1}$ koji se ne nalaze na dijagonali je manja od ε. Odnosno, vrijedi $\|D_kTD_k^{-1}\|_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$, za dovoljno velike k. Definirajmo normu $|||\cdot|||$ kao

$$|||B||| \coloneqq \|D_kU^*BUD_k^{-1}\|_1 = \|(D_kU^*)B(D_kU^*)^{-1}\|_1$$

za $B \in M_n$. Ako odaberemo dovoljno veliki k, tada smo konstruirali matričnu normu za koju vrijedi $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$. □

Teorem 1.16. *Neka je $A \in M_n$. Tada je $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$ ako i samo ako je $\rho(A) < 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$. Neka je $x \neq 0$ vektor takav da je $Ax = \lambda x$. Tada vrijedi $A^kx = \lambda^kx$, a iz ovoga imamo da vrijedi

$$|\lambda^k|\|x\| = \|A^kx\| \leq \|A^k\|\|x\| \to 0, \quad \text{za } k \to \infty.$$

Izraz $|\lambda^k|\|x\|$ teži u 0 ako i samo ako je $\lim_{k\to\infty} |\lambda^k| = 0$. Iz ovoga dobivamo da je $|\lambda| < 1$. Kako ova nejednakost vrijedi za svaku svojstvenu vrijednost matrice A, zaključujemo da je $\rho(A) < 1$.

Suprotno, pretpostavimo da vrijedi $\rho(A) < 1$. Tada propozicija 1.15 daje matričnu normu $|||\cdot|||$ takvu da je $|||A||| < 1$. Onda je $\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right| \leq |||A|||^k$ i $\lim_{k\to\infty} |||A|||^k = 0$. To znači da je $A^k \to 0$ za $k \to \infty$ u normi $|||\cdot|||$ (pa onda i u svakoj drugoj normi jer su sve međusobno ekvivalentne na konačnodimenzionalnom prostoru). □

Lema 1.17. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ nenegativna matrica. Tada je $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ i $\rho(A) \leq \|A\|_1$. Ako su sume po svim retcima matrice A jednake, tada vrijedi $\rho(A) = \|A\|_\infty$. Ako su sve sume po stupcima jednake, tada je $\rho(A) = \|A\|_1$.*

Dokaz. Znamo da vrijedi $|\lambda| \leq \rho(A) \leq \|A\|$ za proizvoljnu svojstvenu vrijednost λ od A i proizvoljnu matričnu normu $\|\cdot\|$ (To slijedi iz definicije spektralnog radijusa i propozicije 1.14).

Ako su sume po svim retcima matrice A jednake, tada je vektor $e = [1\ ...\ 1]^T$ svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = \|A\|_\infty$ pa vrijedi $\|A\|_\infty = \lambda \leq \rho(A) \leq \|A\|_\infty$.

Ako su sume po svim stupcima matrice A jednake, ponavljamo gornji postupak za matricu A^T. Dakle, tada je vektor $e = [1\ ...\ 1]^T$ svojstveni vektor matrice A^T pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = \|A^T\|_\infty = \|A\|_1$ pa vrijedi $\|A\|_1 = \lambda \leq \rho(A^T) = \rho(A) \leq \|A\|_1$. □

Teorem 1.18. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ nenegativna matrica. Tada je*

$$\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$
$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $\alpha = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Ako je $\alpha = 0$, definiramo $B \coloneqq 0$. Ako je $\alpha > 0$, tada definiramo $B = [b_{ij}]$ tako da je

$$b_{ij} \coloneqq \alpha \frac{a_{ij}}{(\sum_{k=1}^{n} a_{ik})}, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Sada imamo $A \geq B \geq 0$ i $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \alpha$, za sve $i = 1, ..., n$. Iz leme 1.17 dobivamo $\rho(B) = \alpha$, dok iz leme 1.12 zaključujemo $\rho(B) \leq \rho(A)$. Dakle, dobili smo donju ogradu. Gornja ograda za spektralni radijus slijedi direktno iz leme 1.17. □

Napomena 1.19. *Prethodni teorem se može poopćiti tako da dodamo slobodne parametre. Naime, ako definiramo dijagonalnu matricu $S = \operatorname{diag}(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, tada matrice $S^{-1}AS = [a_{ij}x_i^{-1}x_j] \geq 0$ i $A \geq 0$ imaju jednake spektralne radijuse. Odnosno, $\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$. Uvrstimo matricu $S^{-1}AS$ u teorem 1.18 i dobivamo nove ograde za spektralni radijus:*

$$\min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$
$$\min_{1\leq j\leq n} \frac{1}{x_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \frac{1}{x_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i.$$

Kako ćemo često baratati s kompliciranijim matricama koje se sastoje od produkata i zbrojeva, uvodimo oznaku $[A]_i$ koja označava i-ti redak matrice A.

Teorem 1.20 (Collatz-Wielandtove formule)**.** *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ nenegativna matrica. Ako A ima pozitivan svojstveni vektor, tada je*

$$\rho(A) = \max_{x>0} \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

$$\rho(A) = \min_{x>0} \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Dokaz. Neka je x^* zadan pozitivan svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Označimo $f(x) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ i $g(x) = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \max_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax]_i}{x_i}$. Iz napomene 1.19 slijedi

$$f(x) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = g(x)$$

za svaki pozitivan vektor x. Iz ovoga slijedi da je $\max_{x>0} f(x) \leq \rho(A) \leq \min_{x>0} g(x)$. Računamo

$$f(x^*) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax^*]_i}{x_i^*} = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[\lambda x^*]_i}{x_i^*} = \lambda \min_{1\leq i\leq n} \frac{x_i^*}{x_i^*} = \lambda,$$

$$g(x^*) = \max_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax^*]_i}{x_i^*} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{[\lambda x^*]_i}{x_i^*} = \lambda \max_{1\leq i\leq n} \frac{x_i^*}{x_i^*} = \lambda.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\lambda = f(x^*) \leq \rho(A) \leq g(x^*) = \lambda.$$

To znači da se u x^* postiže maksimalna, odnosno minimalna vrijednost za funkcije $f(x)$ i $g(x)$. Dakle, vrijede Collatz-Wielandtove formule za spektralni radijus. □

Sada navodimo par tehničkih lema koje će nam biti korisne kod dokaza glavnog teorema.

Lema 1.21. *Neka je A pozitivna kvadratna matrica i neka su θ i ψ dva različita vektora tako da vrijedi $\theta \geq \psi$. Tada je $A\theta > A\psi$ i postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A\theta > (1+\varepsilon)A\psi$.*

Dokaz. Počnimo s dokazom prve nejednakosti tako da $A\psi$ prebacimo na lijevu stranu:

$$[A\theta - A\psi]_i = [A(\theta - \psi)]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta_j - \psi_j).$$

Trebamo dokazati da je gornji izraz pozitivan i to ćemo napraviti tako da ocijenimo proizvoljan element stupca $A(\theta - \psi)$:

$$[A(\theta - \psi)]_i \geq \sum_{j=1}^{n} \min_{i,j}(a_{ij})(\theta_j - \psi_j) = \min_{i,j}(a_{ij}) \sum_{j=1}^{n}(\theta_j - \psi_j) > 0.$$

Posljednji izraz je pozitivan zbog pozitivnosti matrice A i zbog $\theta \neq \psi$ i $\theta \geq \psi$. To dokazuje prvu tvrdnju leme.

Ako promijenimo vektor $A(\theta - \psi)$ za neku malu vrijednost, tada će taj vektor i dalje biti pozitivan. Odnosno imamo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A(\theta - \psi) - \varepsilon\psi > 0$. Dakle, vrijedi $A\theta > (1 + \varepsilon)A\psi$. Time smo dokazali drugu tvrdnju leme. □

Lema 1.22. *Ako su $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takvi da je $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$, onda postoji $\nu \in \mathbb{R}$ tako da je $e^{i\nu} z_i > 0,\ i = 1, ..., n$.*

Dokaz. Dokažimo prvo jednostavnu činjenicu: za svaki $z \in \mathbb{C}$ postoji $\theta \in \mathbb{R}$ tako da je $e^{-i\theta} z = |z|$. Ako je $z \neq 0$, tada uzmemo $\theta = \arg(z)$. Ako je $z = 0$, možemo za θ uzeti bilo koji realan broj.
Sada možemo uzeti $\theta \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $e^{-i\theta}(z_1 + ... + z_n) = |z_1 + ... + z_n|$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + ... + z_n| &= \mathrm{Re}(|z_1 + z_2 + ... + z_n|) \\
&= \mathrm{Re}(e^{-i\theta}(z_1 + z_2 + ... + z_n)) \\
&= \mathrm{Re}(e^{-i\theta} z_1) + Re(e^{-i\theta} z_2) + ... + \mathrm{Re}(e^{-i\theta} z_n)) \\
&\leq |e^{-i\theta} z_1| + |e^{-i\theta} z_2| + ... + |e^{-i\theta} z_n| \\
&= |z_1| + |z_2| ... + |z_n|.
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci leme, u gornjem raspisu vrijedi jednakost. Dakle, vrijedi $Re(e^{-i\theta} z_k) = |e^{-i\theta} z_k|,\ \forall k = 1, ..., n$. Iz ovoga slijedi $z_k = e^{i\theta}|z_k|,\ \forall k = 1, ..., n$. Na kraju, uzmimo $\nu = -\theta$ i to je traženi broj koji zadovoljava tvrdnju leme. □

Lema 1.23. *Neka je A pozitivna matrica te neka je ψ vektor i j proizvoljan indeks. Ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|\psi_j| = |\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\psi_j|,$$

tada postoji realan broj $\nu \neq 0$ tako da vrijedi $e^{i\nu}\psi \geq 0$.

Dokaz. Primijenimo prethodnu lemu na vektore $a_{ij}\psi_j$. Dobivamo da postoji $\nu \in \mathbb{R}$ takav da je $e^{i\nu} a_{ij}\psi_j > 0,\ \forall i = 1, ..., n$. Znamo da je $a_{ij} > 0,\ \forall i = 1, ..., n$ pa mora vrijediti $e^{i\nu}\psi_j > 0$. Time smo dokazali lemu. □

Sada, kada smo definirali i dokazali sve prethodne tvrdnje, smo spremni iskazati i dokazati glavni teorem ovoga poglavlja, pa čak i cijelog rada. Perron-Frobeniusov teorem će biti proširenje ovog teorema na veći skup matrica.

Teorem 1.24 (Perron)**.** *Neka je A pozitivna kvadratna matrica. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $\rho(A) > 0$,

(b) $\rho(A)$ *je svojstvena vrijednost matrice A i njoj pripada pozitivan svojstveni vektor,*

(c) $\rho(A)$ *je jedinstvena svojstvena vrijednost na kružnici* $|\lambda| = \rho(A)$,

(d) $\rho(A)$ *ima geometrijsku kratnost 1,*

(e) $\rho(A)$ *ima algebarsku kratnost 1.*

Dokaz. (a) Primijenimo teorem 1.18 na pozitivnu matricu A i dobivamo:

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A).$$

(b) A ima svojstvenu vrijednost λ kojoj pripada pozitivan svojstveni vektor.

Iz definicije spektralnog radijusa znamo da postoji svojstvena vrijednost λ tako da vrijedi $|\lambda| = \rho(A)$. Neka je ψ neki njoj pridruženi svojstveni vektor. Definirajmo vektor Ψ tako da vrijedi $\Psi_j = |\psi_j|$, $j = 1, ..., n$. Sada imamo:

$$(A\Psi)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\psi_j| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\psi_j \right| = |(A\Psi)_i| = |\lambda\psi_i| = \rho(A)\Psi_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Odavde slijedi da je $A\Psi \geq \rho(A)\Psi$.

Ako gore imamo jednakost, onda smo gotovi jer je tada Ψ traženi pozitivan svojstveni vektor.

Ako vrijedi stroga nejednakost, primijenimo lemu 1.21 na vektore $A\Psi$ i $\rho(A)\Psi$. Dakle, vrijedi $A^2\Psi > \rho(A)A\Psi$ i postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A^2\Psi > (1+\varepsilon)\rho(A)A\Psi$.

Matrica A je pozitivna pa su pozitivne i sve njezine potencije A^m, zbog toga možemo pomnožiti obje strane posljednje nejednakosti s A^m i nejednakost se neće promijeniti. Imamo:

$$A^{m+2}\Psi \geq (1+\varepsilon)\rho(A)A^{m+1}\Psi.$$

Kako to vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$, možemo se lako "spustiti" do prve potencije:

$$\begin{aligned} A^{m+1}\Psi &\geq (1+\varepsilon)\rho(A)A^m\Psi \\ &\geq (1+\varepsilon)^2\rho(A)^2A^{m-1}\Psi \\ &\geq ... \\ &\geq (1+\varepsilon)^m\rho(A)^mA\Psi. \end{aligned}$$

No, po Gelfandovom teoremu imamo $\rho(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} \geq (1+\varepsilon)\rho(A)$. To nas dovodi do kontradikcije. Dakle, mora vrijediti $\Psi = \psi$, odnosno $A\Psi = \rho(A)\Psi$. Zaključujemo da je Ψ također svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$.

On nije samo nenegativan, već je i pozitivan jer vrijedi $\Psi \neq 0$ i $\Psi \geq 0$ pa možemo koristiti lemu 1.21 koja nam daje $A\Psi > 0$. Kako vrijedi $A\Psi = \rho(A)\Psi$, to vrijedi da je $\rho(A)\Psi > 0$. Iz $\rho(A) > 0$ dobivamo $\Psi > 0$.

(c) Jedina svojstvena vrijednost na kružnici $|\lambda| = \rho(A)$ je $\rho(A)$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji još jedna svojstvena vrijednost λ na kružnici $|\lambda| = \rho(A)$ $(\lambda \neq \rho(A))$. Definirajmo vektor Ψ kao u prvom dijelu dokaza, tj. $\Psi = |\psi|$. Pokazali smo da vrijedi $A\Psi = \rho(A)\Psi$. To možemo zapisati na drugačiji način:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|\psi_j| = |\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\psi_j|, \quad \forall\ 1 \leq j \leq n.$$

Vrijede uvjeti leme 1.23 pa postoji $c \in \mathbb{C}$ $(c \neq 0)$ tako da je $c\psi \geq 0$. No, to znači da vrijedi $\lambda(c\psi) = c(\lambda\psi) = c(A\psi) = A(c\psi) \geq 0$ i $c\psi \geq 0$ pa treba vrijediti $\lambda \geq 0$. Došli smo do kontradikcije, budući da je $\rho(A)$ jedini nenegativan broj na kružnici $|\lambda| = \rho(A)$.

(d) $\rho(A)$ ima geometrijsku kratnost 1.

Pretpostavimo da je ψ pozitivan svojstveni vektor kao u prethodnim dijelovima dokaza (tako da pripada svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$). Uzmimo neki drugi svojstveni vektor ψ' koji je linearno nezavisan sa ψ i koji također pripada svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$.
Možemo pretpostaviti da je ψ' realan. U suprotnom, uzmemo realan i imaginaran dio i ti dijelovi su tada također svojstveni vektori jer su A i $\rho(A)$ realni. Jedan od ta dva dijela tada mora biti linearno nezavisan sa ψ.

Neka je $c > 0$ takav da je $\psi - c\psi'$ nenegativan i tako da se barem na jednoj koordinati pojavljuje 0. To nije nul-vektor jer su ψ i ψ' linearno nezavisni. Kako su oba vektora svojstveni vektori za istu svojstvenu vrijednost $\rho(A)$ slijedi:

$$A(\psi - c\psi^{'}) = \rho(A)(\psi - c\psi^{'}).$$

Dakle, vrijedi da je vektor $\psi - c\psi^{'}$ svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$. Po (a) dijelu zaključujemo da taj vektor mora biti pozitivan.

Time smo došli do kontradikcije s načinom odabira broja c, budući da $\psi - c\psi'$ mora imati barem jednu koordinatu jednaku 0. Sada zaključujemo da ne postoje dva linearno nezavisna svojstvena vektora za svojstvenu vrijednost $\rho(A)$ pa time $\rho(A)$ ima geometrijsku kratnost 1.

(e) $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost 1.

Kao i do sada, neka je ψ svojstveni vektor svojstvene vrijednosti $\rho(A)$. Sada, po dokazanome, znamo da postoji samo jedan pozitivan svojstveni vektor pridružen $\rho(A)$ tako da vrijedi $\psi_1 + ... + \psi_n = 1$ (Jedinstvenost smo osigurali skaliranjem). Promotrimo matricu A^T. Ona je pozitivna budući da je A pozitivna matrica. Također, one imaju iste svojstvene vrijednosti pa time i isti spektralni radijus $(\rho(A) = \rho(A^T))$. Neka je v svojstveni vektor matrice A^T pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$. Vektor v po (a) dijelu teorema možemo skalirati tako da bude pozitivan. Prema tome, definirajmo svojstveni vektor π na slijedeći način: $\pi := \frac{v}{v^T\psi}$. Tako dobivamo identitet $\pi^T\psi$=1. Ovaj par svojstvenih vektora (ψ i π) nam daje dekompoziciju prostora $\mathbb{R}^n$ na direktnu sumu.
Zaista, uočimo prvo da je prostor $\Pi^T := \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x = 0\}$ invarijantan za A, što se lagano vidi: Neka je $x \in \Pi^T$ i sada imamo $\pi^T Ax = (\pi^T A)\, x = \rho(A)\pi^T x = 0$. Π^T je prostor dimenzije $n-1$ i vrijedi $\psi \notin \Pi^T$ jer je $\pi^T\psi = 1 > 0$. Time smo dokazali da je $\mathbb{R}^n$ direktna suma od span$\{\psi\}$ i Π^T.
Neka je $\{\psi_2, \psi_3, ...\psi_n\}$ baza prostora Π^T. Definirajmo matricu

$$X = \begin{bmatrix} \psi & \psi_2 & \psi_3 & ... & \psi_n \end{bmatrix}.$$

Ovo je regularna matrica pa idemo odrediti kojeg je oblika njezin inverz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = I_n = X^{-1}X = \begin{bmatrix} \gamma^T \\ \Gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi & \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^T\psi & \gamma^T\Psi \\ \Gamma^T\psi & \Gamma^T\Psi \end{bmatrix}.$$

Dobivamo identitete:

$$\gamma^T\psi = 1, \quad \gamma^T\Psi = 0, \quad \Gamma^T\psi = 0, \quad \Gamma^T\Psi = I_{n-1}.$$

Možemo uzeti da je $\gamma = \pi$ jer on zadovoljava prva dva identiteta. S ovakvom matricom možemo matricu A transformirati u blok dijagonalnu matricu:

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix}\pi^T \\ \Gamma^T\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}\psi & \Psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi^T A\psi & \pi^T A\Psi \\ \Gamma^T A\psi & \Gamma^T A\Psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi^T \rho(A)\psi & \rho(A)\pi^T\Psi \\ \Gamma^T\rho(A)\psi & \Gamma^T A\Psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho(A) & 0 \\ 0 & Y\end{bmatrix}$$

za neku matricu Y.

Matrica $X^{-1}AX$ je slična matrici A pa one imaju iste svojstvene vrijednosti. Pretpostavimo da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost veću od 1. Tada $\rho(A)$ mora također biti svojstvena vrijednost matrice Y. No, tada Y mora imati svojstveni vektor pridružen $\rho(A)$. Ako je x' svojstveni vektor za Y pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$, onda je $Yx' = \rho(A)x'$ pa je

$$X^{-1}AX \begin{bmatrix}0 \\ x'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho(A) & 0 \\ 0 & Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ x'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ Yx'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ \rho(A)x'\end{bmatrix} = \rho(A)\begin{bmatrix}0 \\ x'\end{bmatrix}.$$

No, također imamo

$$X^{-1}AX \begin{bmatrix}1 \\ 0_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho(A) \\ 0_{n-1}\end{bmatrix} = \rho(A)\begin{bmatrix}1 \\ 0_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Dakle, imamo dva nezavisna svojstvena vektora za $\rho(A)$ pa $\rho(A)$ ima geometrijsku kratnost $d(\rho(A)) \geq 2$ (s obzirom na matricu $X^{-1}AX$). Time dobivamo kontradikciju s (d) dijelom dokaza. Zaključujemo da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost 1.

□

Napomena 1.25. *Vektori ψ i π iz (e) dijela prethodnog dokaza se redom zovu desni i lijevi Peronnov vektor. To su jedinstveni vektori za koje vrijedi:*

$$A\psi = \rho(A)\psi, \quad \psi_1 + ... + \psi_n = 1, \quad \psi > 0,$$
$$\pi^T A = \rho(A)\pi^T, \quad \psi_1\pi_1 + ... + \psi_n\pi_n = 1, \quad \pi > 0.$$

Jedinstvenost Perronovih vektora za proizvoljnu matricu slijedi iz teorema 1.24.

Nadalje, promotrimo što još možemo zaključiti iz prethodnog dokaza. Vratimo se ponovo na (e) dio gdje smo matricu A transformirali u blok dijagonalnu. Dakle,

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix}\rho(A) & 0 \\ 0 & Y\end{bmatrix}.$$

Dokazali smo da je $\rho(A)$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti 1 i da je ona strogo najveća po modulu. Sada zaključujemo da je $\rho(Y) < \rho(A)$, a iz toga vrijedi $\rho(\rho(A)^{-1}Y) < 1$. Koristimo teorem 1.16:

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^m = X\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & (\rho(A)^{-1}Y)^m\end{bmatrix}X^{-1} \xrightarrow{m\to\infty} X\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1}\end{bmatrix}X^{-1} = \psi\pi^T.$$

Ovo svojstvo nam je vrlo bitno jer često javlja u raznim primjenama. Sumirajmo dokazanu tvrdnju u teorem.

Teorem 1.26. *Neka je $A \in M_n$ pozitivna matrica. Ako su ψ i π desni i lijevi Perronov vektor matrice A, tada je $\lim_{m\to\infty}(\rho(A)^{-1}A)^m = \psi\pi^T$.*

Napomena 1.27. *Za (b) dio Perronovog teorema možemo dokazati i obratnu tvrdnju koja kaže sljedeće: Neka je $A \in M_n$ nenegativna matrica. Ako je x pozitivan svojstveni vektor matrice A, onda je $\rho(A)$ svojstvena vrijednost od A i pripadni svojstveni vektor joj je x.*

Dokaz. *Ako je $x > 0$ i $Ax = \lambda x$, vrijedi da je $\lambda \geq 0$ i jednakost možemo zapisati kao $\lambda x \leq Ax \leq \lambda x$. Iz nejednakosti $\lambda x \leq Ax$ slijedi da je $\lambda x_i \leq [Ax]_i$, $i = 1, ..., n$, a iz ovoga pak slijedi da je $\lambda \leq \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Napomena 1.19 nam daje $\lambda \leq \rho(A)$. Analogno se dokaže i druga ograda. Dakle, imamo da vrijedi $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$, odnosno $\rho(A) = \lambda$.* □

1.2 Primitivne matrice

Nakon što je Perron iznio svoj poznati teorem, Frobenius ga je proširio na određenu klasu nenegativnih matrica i time se dobilo mnoštvo novih primjena, budući da se vrlo često u primjenama pojavljuju nule u matricama. Prva takva klasa matrica koje ćemo obraditi su primitivne matrice.

Definicija 1.28. *Kažemo da je nenegativna kvadratna matrica A primitivna ako postoji m takav da je $A^m > 0$.*

Teorem 1.29 (Perron-Frobenius)**.** *Neka je A primitivna matrica. Tada vrijede tvrdnje $(a) - (e)$ teorema 1.24.*

Dokaz. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A (brojimo i algebarske kratnosti). Pretpostavimo da je λ_1 najveća po apsolutnoj vrijednosti. Tada su svojstvene vrijednosti od A^m upravo $\lambda_1^m, \lambda_2^m, ..., \lambda_n^m$, gdje je λ_1^m najveća po apsolutnoj vrijednosti.

Kako je A^m pozitivna matrica, možemo iskoristiti teorem 1.24. On nam daje da je $\lambda_1^m > 0$ i da je pripadni svojstveni vektor $\psi > 0$. Također nam daje da su sve ostale svojstvene vrijednosti matrice A^m manje od λ_1^m po apsolutnoj vrijednosti.

Ali, ako vrijedi $|\lambda_1|^m > |\lambda_k|^m$, $\forall k \geq 2$, tada vrijedi i $|\lambda_1| > |\lambda_k|$, $\forall k \geq 2$. Iz toga vidimo da je λ_1 po apsolutnoj vrijednosti najveća svojstvena vrijednost matrice A. Ona ima algebarsku kratnost 1. Neka je x svojstveni vektor pridružen λ_1. Tada vrijedi $Ax = \lambda_1 x$, odnosno $A^m x = \lambda_1^m x$. Dakle, $x = \psi$ je svojstveni vektor svojstvene vrijednosti λ_1 i on je pozitivan.

Kako λ_1 ima algebarsku kratnost 1, slijedi da joj je geometrijska kratnost također 1 jer geometrijska kratnost ne može biti veća od algebarske.

Primijetimo još da je $\lambda_1 > 0$ budući da je ona svojstvena vrijednost nenegativne matrice kojoj pripada pozitivan svojstveni vektor.
Dakle, dokazali smo sve tvrdnje $(a) - (e)$. □

1.3 Ireducibilne nenegativne matrice

Sljedeća klasa nenegativnih matrica su ireducibilne matrice pa navodimo definiciju.

Definicija 1.30. *Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n$ reducibilna ako postoji permutacijska matrica $P \in M_n$ takva da vrijedi*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad B \in M_r, \quad D \in M_{n-r} \quad i \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Kvadratna matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako nije reducibilna.

Permutaciju $P^T AP$ zovemo simetrična permutacija od A. Efekt je taj da se retci zamjene na isti način kao i stupci.

Propozicija 1.31. *Svaka primitivna matrica $A \in M_n$ je ireducibilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A reducibilna pa ćemo dokazati da nije primitivna. Neka je $P^T AP = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$. Tada je

$$A^n = P \begin{bmatrix} A^n & B' \\ 0 & D^n \end{bmatrix} P^T$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga A nije primitivna jer A^n nije pozitivna ni za koji $n \in \mathbb{N}$. □

Zanimljivu i vrlo korisnu analogiju s matricama možemo pronaći u teoriji grafova, pogotovo kada ćemo baratati s ireducibilnim matricama. Ona će nam biti korisna u primjenama, kao i za dokaz glavnog teorema. Graf $\mathcal{G}(A)$ matrice $A = [a_{ij}] \in M_n$ definiramo kao usmjeren graf s n vrhova $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gdje postoji usmjereni brid od vrha v_i do vrha v_j ako i samo ako je $a_{ij} \neq 0$. Vrijedi da je $\mathcal{G}(P^T AP) = \mathcal{G}(A)$ za proizvoljnu permutacijsku matricu P. Efekt je samo preoznačavanje vrhova. Usmjereni graf $\mathcal{G}(A)$ je jako povezan ako za svaka dva vrha v_i i v_j postoji put koji vodi od v_i do v_j, odnosno postoji niz različitih vrhova $\{v_i, v_k, v_{k+1}, ..., v_j\}$ tako da su svaka dva susjedna vrha u tom nizu povezana usmjerenim bridom (od lijevog do desnog vrha). Jaka povezanost se razmatra samo kod usmjerenih grafova jer za njih možemo promatrati više vrsta povezanosti kao što je slaba povezanost, no ona nam neće trebati u ovom radu. Sada navodimo rezultat koji opravdava uvođenje grafova.

Propozicija 1.32. *Matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako i samo ako je graf $\mathcal{G}(A)$ jako povezan.*

Dokaz. Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: Matrica $A \in M_n$ je reducibilna ako i samo ako $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan.

Pretpostavimo da je $A = [a_{ij}] \in M_n$ reducibilna matrica. Tada, po definiciji, postoji permutacijska matrica $P \in M_n$ takva da vrijedi

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad B \in M_r, \quad D \in M_{n-r} \quad i \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Kako vrijedi $\mathcal{G}(P^T AP) = \mathcal{G}(A)$, možemo promatrati graf matrice $P^T AP$. Označimo vrhove u skladu s tom matricom. Uočimo da iz vrhova $V_2 := \{v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n\}$ ne postoje direktni usmjereni bridovi prema vrhovima iz skupa $V_1 := \{v_1, v_2, ..., v_r\}$. Naravno, skupovi V_1 i V_2 su neprazni jer je $1 \leq r \leq n-1$. Uzmimo vrh $v_i \in V_2$ i vrh $v_j \in V_1$. Iz vrha v_i možemo doći samo u vrhove iz skupa V_2 i nijedan vrh iz V_2 nema brid prema vrhu iz V_1. Dakle, našli smo dva vrha između kojih ne postoji put pa po definiciji graf $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan.

Obratno, pretpostavimo da $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan. Tada postoje vrhovi v_p i v_q između kojih ne postoji put. Definiramo skup vrhova $V_1 := \{v_i : v_i = v_q$ ili postoji put u $\mathcal{G}(A)$ od v_i do $v_q\}$ i neka je V_2 skup svih vrhova grafa $\mathcal{G}(A)$ koji nisu u V_1. Prema tome kako smo definirali skupove vrijedi $V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i $v_q \in V_1$ pa je $V_1 \neq \emptyset$ i $v_p \in V_2$ pa je $V_2 \neq \emptyset$. Ako bi postojao put od nekog vrha $v_i \in V_2$ do nekog vrha $v_j \in V_1$, tada bi po definiciji skupa V_1 postojao put od v_i do v_q pa je $v_i \in V_1$. Zbog toga ne postoje putevi iz skupa V_2 do skupa V_1. Označimo vrhove na sljedeći način: $V_1 = \{\widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_r\}$, $V_2 = \{\widetilde{v}_{r+1}, ..., \widetilde{v}_n\}$. Neka je P permutacijska matrica koja se slaže s novim oznakama vrhova. Tako smo dobili

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad B \in M_r, \quad D \in M_{n-r}.$$

Prema tome, matrica A je reducibilna. □

Napomena 1.33. *Sada, kada imamo analogiju matrica s teorijom grafova vrlo je lagano vidjeti da su primitivne matrice ujedno i ireducibilne. Naime, ako je $A \in M_n$ primitivna matrica, tada postoji m takav da je $A^m > 0$, a to upravo znači da se u matrici A od svakog vrha do svakog drugog može doći putem koji ima $\leq m$ koraka.*

Sada je jasno da je matrica A ireducibilna prema karakterizaciji ireducibilnosti preko jake povezanosti grafa.

Navedimo još jednu korisnu karakterizaciju ireducibilnosti, ali sada za nenegativne matrice.

Propozicija 1.34. *Nenegativna matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako i samo ako je $(I+A)^{n-1} > 0$.*

Dokaz. Ekvivalentna tvrdnja gornjoj tvrdnji je: A je reducibilna matrica ako i samo ako matrica $(I+A)^{n-1}$ sadrži barem jednu nulu. Ovu tvrdnju ćemo dokazati.

Pretpostavimo da je A reducibilna i da za neku matricu permutacije P imamo

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \widetilde{A}, \quad B \in M_r,\ D \in M_{n-r} \quad i \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Uočimo da matrice $\widetilde{A}^2, \widetilde{A}^3, ..., \widetilde{A}^{n-1}$ imaju nule u donjem lijevom $(n-r) \times r$ bloku. Raspisujemo:

$$\begin{aligned} P^T(I+A)^{n-1}P &= P^T(I + (n-1)A + \binom{n-1}{2} A^2 + ... + A^{n-1})P \\ &= P^T P + (n-1)P^T A P + \binom{n-1}{2} P^T A^2 P + ... + P^T A^{n-1} P \\ &= I + (n-1)\widetilde{A} + \binom{n-1}{2} \widetilde{A}^2 + ... + \widetilde{A}^{n-1}. \end{aligned}$$

Ovdje svaki sumand ima nule u donjem lijevom $(n-r)\times r$ bloku. Iz toga zaključujemo da je matrica $(I+A)^{n-1}$ reducibilna pa tako ima barem jednu koordinatu jednaku nula.

Pretpostavimo da za indekse p, q matrica $(I+A)^{n-1}$ na mjestu (p,q) ima nulu. Imamo

$$(I+A)^{n-1} = I + (n-1)A + \binom{n-1}{2} A^2 + ... + A^{n-1}.$$

Uočimo da su svi gornji pribrojnici nenegativni pa svaki pribrojnik na mjestu (p,q) ima nulu. Zbog toga što je jedan pribrojnik matrica I vrijedi da je $p \neq q$. Sada zaključujemo da ne postoji put u $\mathcal{G}(A)$ od vrha v_p do vrha v_q jer svaka potencija od A ima nulu na mjestu (p,q). To, po definiciji, znači da graf $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan. Prema propoziciji 1.32, matrica A je reducibilna. □

Propozicija 1.35. *Ako je $A \in M_n$ nenegativna, tada je $\rho(A)$ svojstvena vrijednost matrice A i postoji nenegativan svojstveni vektor x takav da je $Ax = \rho(A)x$.*

Dokaz. Uzmimo $\varepsilon > 0$ i definiramo $A(\varepsilon) = A + \varepsilon J_n$ ($J_n \in M_n$ je matrica koja na svakom mjestu ima jedinicu). Neka je $x(\varepsilon)$ Perronov vektor od $A(\varepsilon)$, dakle vrijedi $x(\varepsilon) > 0$ i $\sum_{i=1}^{n} x(\varepsilon)_i = 1$. Kako se skup vektora $\{x(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ nalazi u kompaktnom skupu $\{x : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1 \leq 1\}$, postoji padajući niz $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq ...$ sa $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ tako da postoji $\lim_{k\to\infty} x(\varepsilon_k) = x$. Kako su $x(\varepsilon_k) > 0$ i $\|x(\varepsilon_k)\|_1 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, limes $x = \lim_{k\to\infty} x(\varepsilon_k)$ mora biti nenegativan i nije nul-vektor jer je $\|x\|_1 = 1$.

Po propoziciji 1.12 zaključujemo

$$\rho(A(\varepsilon_k)) \geq \rho(A(\varepsilon_{k+1})) \geq ... \geq \rho(A), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odavde slijedi da postoji $\rho = \lim_{k\to\infty} \rho(A(\varepsilon_k))$ i $\rho \geq \rho(A)$. Međutim, $x \neq 0$ i

$$Ax = \lim_{k\to\infty} A(\varepsilon_k)x(\varepsilon_k) = \lim_{k\to\infty} \rho(A(\varepsilon_k))x(\varepsilon_k) = \lim_{k\to\infty} \rho(A(\varepsilon_k)) \lim_{k\to\infty} x(\varepsilon_k) = \rho x.$$

Iz gornjeg raspisa slijedi da je ρ svojstvena vrijednost matrice A. Dakle, vrijedi $\rho \leq \rho(A)$ budući da je spektralni radijus najveća svojstvena vrijednost po modulu. Na kraju imamo $\rho = \rho(A)$. □

Napomena 1.36. *Za proizvoljnu nenegativnu matricu A ne mora vrijediti da je spektralni radijus pozitivan. Također, svojstveni vektor može sadržavati nule i geometrijska i algebarska kratnost od $\rho(A)$ može biti veća od 1.*

Činjenice navedene u napomeni se pojavljuju već kod malih i vrlo jednostavnih matrica, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.37. *a)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrica A je nenegativna i nilpotentna (već je druga potencija A^2 nul-matrica). Za nju vrijedi da je $\rho(A) = 0$.

b) $B = I \in M_n$. *Matrica B je nenegativna. Ona je također dijagonalna pa joj možemo iščitati svojstvene vrijednosti. Jedina svojstvena vrijednost je 1 pa zaključujemo da je $\rho(B) = 1$. Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\rho(B)$ je veća od 1 pa je onda i algebarska kratnost veća od 1.*

Iz primjera vidimo da sama negativnost nije dovoljan uvjet da vrijede tvrdnje teorema 1.24. Uočimo da matrice u primjeru nisu ireducibilne. To možemo primjerice dokazati koristeći propoziciju 1.34. Dakle,

$$(I + A)^{n-1} = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$(I + B)^{n-1} = (2I)^{n-1} = 2^{n-1}I$$

Obje gornje matrice sadrže nule pa su matrice A i B reducibilne.

Lema 1.38. *Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od $A \in M_n$. Tada su $\lambda_1 + 1, ..., \lambda_n + 1$ svojstvene vrijednosti od $I + A$ i $\rho(I + A) \leq \rho(A) + 1$. Ako je A nenegativna matrica, tada vrijedi jednakost.*

Dokaz. Raspisujemo:

$$(I + A)x_k = x_k + Ax_k = x_k + \lambda_k x_k = (1 + \lambda_k)x_k.$$

Odavde slijedi da je $1 + \lambda_k$ svojstvena vrijednost matrice $I + A$ za sve $k = 1, 2, ..., n$. Dalje imamo

$$\rho(I + A) = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k + 1| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| + 1 = \rho(A) + 1.$$

Zadnja tvrdnja leme slijedi iz propozicije 1.35. Naime, kako je A nenegativna matrica, tada je $\rho(A)$ svojstvena vrijednost od A pa je, po gore dokazanom, $\rho(A)+1$ svojstvena vrijednost matrice $I+A$. Koristeći dokazanu nejednakost i činjenicu da ova svojstvena vrijednost ne smije biti veća od spektralnog radijusa dobivamo $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$. □

Teorem 1.39 (Perron-Frobenius)**.** *Neka je $n \geq 2$ i $A \in M_n$ ireducibilna i nenegativna matrica. Tada je*

(a) $\rho(A) > 0$,

(b) $\rho(A)$ *ima algebarsku kratnost 1,*

(c) Postoji jedinstveni desni Perronov vektor,

(d) Postoji jedinstveni lijevi Perronov vektor.

Dokaz. (a) Uočimo da matrica A nema niti jedan cijeli stupac ili redak jednak 0 jer je ona ireduciblna. U suprotnom, ako bi A imala npr. jedan cijeli redak jednak 0 (bez smanjenja općenitosti neka je to n-ti redak) tada iz vrha v_n grafa $\mathcal{G}(A)$ ne bi mogli doći do nijednog drugog vrha. Zbog toga graf $\mathcal{G}(A)$ ne bi bio jako povezan, a to je kontradikcija s propozicijom 1.32.

Dakle, vrijedi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ za sve $i = 1, ..., n$. Iz teorema 1.18 imamo da vrijedi

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A).$$

(b) Pretpostavimo da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost veću od 1. Lema 1.38 nam daje da $1 + \rho(A) = \rho(I + A)$ ima algebarsku kratnost veću od 1 (kao svojstvena vrijednost matrice $I + A$). Zato $(1 + \rho(A))^{n-1} = \rho((I + A)^{n-1})$ ima algebarsku kratnost veću od 1 za matricu $(I + A)^{n-1}$. Ovo je u kontradikciji s (e) dijelom teorema 1.24 jer je po propoziciji 1.34 matrica $(I + A)^{n-1}$ pozitivna.

(c) Iz propozicije 1.35 imamo da postoji $x \geq 0$ takav da je $Ax = \rho(A)x$. Kako je A ireducibilna, onda je po propoziciji 1.34 $(I + A)^{n-1}$ pozitivna matrica i koristeći lemu 1.38 dobivamo

$$\begin{aligned}(I + A)^{n-1}x &= (I + (n-1)A + \binom{n-1}{2}A^2 + ... + A^{n-1})x \\ &= x + (n-1)Ax + \binom{n-1}{2}A^2x + ... + A^{n-1}x \\ &= x + (n-1)\rho(A)x + \binom{n-1}{2}\rho(A)^2x + ... + \rho(A)^{n-1}x \\ &= (1 + \rho(A))^{n-1}x \\ &= \rho(I + A)^{n-1}x.\end{aligned}$$

Dakle dobili smo da je vektor x svojstveni vektor pozitivne matrice koji pripada spektralnom radijusu. Po (b) dijelu teorema 1.24 taj vektor je pozitivan. Na kraju normiramo vektor tako da vrijedi $x_1 + ... + x_n = 1$. Jedinstvenost je osigurana (b) dijelom teorema 1.24.

(d) Ovaj dio se pokazuje analogno (c) dijelu samo što ćemo koristiti A^T. Dakle, propozicija 1.35 nam daje da postoji $y \geq 0$ takav da je $A^T y = \rho(A)y$. Zapišimo to na način $y^T A = \rho(A)y^T$. Na analogan način zaključimo da je vektor y svojstveni vektor pozitivne matrice koji pripada spektralnom radijusu. Po (b) dijelu teorema 1.24 taj vektor je pozitivan. Na kraju normiramo vektor tako da umjesto y uzmemo $\frac{y}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$. To nam osigurava identitet $x_1y_1 + ... + x_ny_n = 1$. Jedinstvenost je osigurana (b) dijelom teorema 1.24.

□

Poglavlje 2

Primjene Perron-Frobeniusovog teorema

2.1 Fanov teorem

Svojstvene vrijednosti dijagonalne ili dimenzijom male matrice je lagano locirati. No, što ako baratamo sa kompliciranim matricama? Npr. kod diferencijalnih jednadžbi često može biti problem provjeriti stabilnost oscilirajućeg sustava te je tada važno znati da sve svojstvene vrijednosti imaju negativan realan dio. U statistici ili numeričkoj analizi često je korisno dokazati da su sve svojstvene vrijednosti matrice pozitivne. Sada ćemo navesti jednu zgodnu primjenu Perronovog teorema koja se veže uz teoriju lociranja svojstvenih vrijednosti. U tu svrhu definirajmo prvo Geršgorinove diskove.

Definicija 2.1. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ matrica i neka je $R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ za $i = 1, ..., n$. Definiramo n Geršgorinovih diskova kao*

$$G_i(A) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}, \quad i = 1, ..., n.$$

Teorem 2.2. *Svojstvene vrijednosti matrice $A = [a_{ij}] \in M_n$ se nalaze u uniji Geršgorinovih diskova $G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(A)$.*

Dokaz. Uzmimo $\lambda \in \mathbb{C}$ i vektor $x = [x_i] \neq 0$ tako da vrijedi $Ax = \lambda x$. Neka je $p \in \{1, ..., n\}$ indeks takav da je $|x_p| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Tada je $|x_i| \leq |x_p|$ za sve $i = 1, ..., n$ i, naravno, $x_p \neq 0$ jer je $x \neq 0$. Iz jednakosti $Ax = \lambda x$ uzmimo p-tu koordinatu i dobivamo $\lambda x_p = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j$. Zapišimo to na drugačiji način:

$$x_p(\lambda - a_{pp}) = \sum_{j \neq p} a_{pj} x_j.$$

Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$|x_p||\lambda - a_{pp}| = \left|\sum_{j\neq p} a_{pj}x_j\right| \leq \sum_{j\neq p} |a_{pj}x_j| = \sum_{j\neq p} |a_{pj}||x_j| \leq |x_p| \sum_{j\neq p} |a_{pj}| = |x_p|R_p(A).$$

Kako je $x_p \neq 0$, zaključujemo da je $|\lambda - a_{pp}| \leq R_p(A)$, odnosno λ se nalazi u krugu $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}$ pa se tako nalazi i u većem skupu $G(A)$. Kako je λ bila proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A, zaključujemo da se sve svojstvene vrijednosti nalaze u uniji Geršgorinovih diskova. □

Napomena 2.3. *Gornji teorem se može poopćiti sa pozitivnim realnim brojevima. Definiramo li matricu $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ tako da je $d_i > 0$ za sve $i = 1, ..., n$, tada matrice $D^{-1}AD$ i A imaju iste svojstvene vrijednosti. Dakle, po prethodnom teoremu, sve svojstvene vrijednosti matrice A se nalaze u*

$$G(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j\neq i} d_j |a_{ij}|\}.$$

Sada navodimo glavni teorem u kojem ćemo koristiti teoriju iz prvog poglavlja. Iz njega će slijediti da se povoljnim odabirom matrice B vrlo lagano mogu locirati svojstvene vrijednosti zadane matrice A.

Teorem 2.4 (Fan)**.** *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ i neka je $B = [b_{ij}] \in M_n$ nenegativna matrica takva da vrijedi $b_{ij} \geq |a_{ij}|$ za sve $i \neq j$. Tada se sve svojstvene vrijednosti matrice A nalaze u uniji*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B) - b_{ii}\}.$$

Posebno, A je regularna ako je $|a_{ii}| > \rho(B) - b_{ii}$ za sve $i = 1, ..., n$.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $B > 0$. Teorem 1.24 nam osigurava egzistenciju pozitivnog vektora x takvog da vrijedi $Bx = \rho(B)x$, stoga slijedi

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|x_j \leq \sum_{j\neq i} b_{ij}x_j = \rho(B)x_i - b_{ii}x_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Sada imamo

$$\frac{1}{x_i} \sum_{j\neq i} |a_{ij}|x_j \leq \rho(B) - b_{ii}, \quad i = 1, ..., n.$$

Sada u napomeni 2.3 stavimo $d_i = x_i$ za sve $i = 1, ..., n$ i tako dobivamo tvrdnju teorema za pozitivnu matricu B.

Ako je neka koordinata matrice B jednaka 0, uzmimo $B_\varepsilon = B + \varepsilon J_n$ za $\varepsilon > 0$. Tada je $b_{ij} + \varepsilon > |a_{ij}|$ za sve $i \neq j$. Matrica B_ε je pozitivna pa se tako sve svojstvene vrijednosti matrice A nalaze u

$$G(B_\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B_\varepsilon) - (b_{ii} + \varepsilon)\}.$$

Sada tvrdnju za nenegativne matrice B dobivamo iz činjenice da $\rho(B_\varepsilon) - (b_{ii} + \varepsilon) \to \rho(B) - b_{ii}$ za $\varepsilon \to 0$. Ako je $|a_{ii}| > \rho(B) - b_{ii}$ za $i = 1, ..., n$, tada $z = 0$ nije u $\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B) - b_{ii}\}$. □

2.2 Rangiranje timova

Postoje mnogi sportovi, a još više raznih natjecanja tijekom cijele godine. Logično je pitanje: Koji tim ili natjecatelj je najbolji? Jesu li metode rangiranja uistinu točne? U ovoj cjelini ćemo se pozabaviti matematičkim modeliranjem rangiranja natjecatelja i uistinu je vrlo zanimljivo koliko će nam u tome pomoći Perron-Frobeniusov teorem. Jedan ovakav dobar model bi bio vrlo koristan kod na primjer rangiranja nogometnih timova, za kreiranje teniske ljestvice ili kod mnogih drugih sportova.

2.2.1 Modeliranje rangiranja timova

Prvo ćemo opisati najdirektniju metodu za rangiranje timova. Svakom timu želimo dodijeliti bodove koji se temelje na interakciji s drugim natjecateljima. Bodovi bi trebali ovisiti o ishodu utakmice i snazi protivnika.

Pretpostavimo da imamo vektor $r = [r_i] > 0$, u kojem su rangirani svi timovi. Komponente r_i neka označavaju snagu i-tog tima. Definiramo bodove za i-ti tim kao

$$s_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} r_j,$$

gdje s n_i označavamo broj utakmica koje je odigrao i-ti tim i gdje je $A = [a_{ij}]$ matrica s elementima a_{ij} koji ovise o rezultatu igre između i-tog i j-tog tima. Budući da želimo primijeniti Perron-Frobeniusov teorem, matricu A odabiremo tako da je ona nenegativna. Jedan logičan način je sljedeći:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ pobijedio} \\ \frac{1}{2}, & \text{neriješeno} \\ 0, & i \text{ izgubio} \end{cases}.$$

Uočimo da je za broj bodova bolje uzeti srednju vrijednost jer ne igraju svi timovi jednak broj igara. Sada pretpostavimo da snaga natjecatelja treba biti proporcionalna njegovim bodovima, dakle

$$Ar = \lambda r,$$

za matricu $A = [\frac{a_{ij}}{n_i}]$. Perron-Frobenius nam kaže kada gornja jednadžba ima rješenje. Dakle, jedini problem nam je definirati dobru matricu A. Ako bismo uzeli

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \text{ izgubio} \\ 1, & i \text{ pobijedio} \end{cases},$$

matrica A bi bila ireducibilna ako ne postoji podjela timova u dva skupa S i T tako da ni jedan tim iz S ne igra ni sa jednim timom iz T ili ako bi sve igre završile tako da tim iz S pobijedi. Također, ne bi smio postojati tim koji bi izgubio svaku utakmicu. Kako onda odabrati dobru matricu A?

Ako uzmemo da je matrica A jednaka prethodnom razmatranju s vrijednostima $1, \frac{1}{2}, 0$, tada dobivamo zanimljiva razmatranja za vektor r_0, koji ima svaki koordinatu jednaku 1. Naime, tada je $[Ar_0]_i$ vjerojatnost pobjede i-tog tima i $[A^2 r_0]_i$ je prosječna vjerojatnost pobjede timova koje je i-ti tim pobijedio. Ovo nas motivira da promatramo sve veće potencije. Kako potencija raste, to je bolja aproksimacija vektora rangova, i to nije slučajnost.

Teorem 2.5. *Neka je $A \in M_n$ dijagonalizabilna matrica s apsolutno dominantnom svojstvenom vrijednosti λ. Tada postoji vektor $x_0 \neq 0$ takav da vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A^n x_0}{\|A^n x_0\|} = x,$$

gdje je x jedinični svojstveni vektor za λ.

Dokaz. Kako je A dijagonalizabilna matrica, znamo da postoje n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $x_1, x_2, ..., x_n$ s pripadajućim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Budući da su svojstveni vektori $x_1, x_2, ..., x_n$ linearno nezavisni, oni čine jednu bazu za prostor $\mathbb{R}^n$. Tada početni vektor x_0 biramo tako da u njegovom zapisu u bazi

$$x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$

bude $c_1 \neq 0$. Na taj način ćemo osigurati konvergenciju. Pomnožimo obje strane jednakosti s matricom A i dobivamo

$$\begin{aligned} Ax_0 &= A(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n) \\ &= c_1(Ax_1) + c_2(Ax_2) + ... + c_n(Ax_n) \\ &= c_1(\lambda_1x_1) + c_2(\lambda_2x_2) + ... + c_n(\lambda_nx_n). \end{aligned}$$

Ponavljanjem množenja gornje jednadžbe s A i izlučivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} A^kx_0 &= c_1(\lambda_1^kx_1) + c_2(\lambda_2^kx_2) + ... + c_n(\lambda_n^kx_n) \\ &= \lambda_1^k(c_1x_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + ... + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n). \end{aligned}$$

Pretpostavka nam je da je λ_1 najveća po apsolutnoj vrijednosti pa su kvocijenti $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ za sve $i = 2, 3, ..., n$. Iz ovoga zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0, \quad i = 2, 3, ..., n.$$

Vidimo da A^kx_0, kako se k povećava, sve više "naginje" smjeru svojstvenog vektora x_1 (jer je $c_1 \neq 0$). Da A^kx_0 zaista postaje paralelan s x_1 vidimo iz sljedećeg:

$$\left\|\frac{A^k}{\lambda_1^k}x_0 - c_1x_1\right\|_2 \leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k (|c_2|\|x_2\|_2 + ... + |c_n|\|x_n\|_2) \to 0 \quad \text{za} \quad k \to \infty.$$

Dokazali smo da $\frac{1}{\lambda_1^k}A^kx_0 \to c_1x_1$. Tada i $\frac{1}{\lambda_1^k}\|A^kx_0\| \to |c_1|\|x_1\|$. Slijedi da

$$\frac{\frac{1}{\lambda_1^k}A^kx_0}{\frac{1}{\lambda_1^k}\|A^kx_0\|} = \frac{A^kx_0}{\|A^kx_0\|} \to \frac{c_1x_1}{|c_1|\|x_1\|}.$$

To znači da $\frac{A^kx_0}{\|A^kx_0\|}$ konvergira prema αx_1 za neki $\alpha \neq 0$, tj. prema svojstvenom vektoru pridruženom svojstvenoj vrijednosti λ_1. □

Napomena 2.6. *Imamo veliku slobodu kod odabira vektora x_0. Naime, možemo odabrati bilo koji vektor čija x_1-komponenta nije nula. U praksi se taj vektor odabire nasumično uz vjerojatnost 0 da će imati x_1-komponentu jednaku nuli.*

Uočimo da brzina konvergencije prema svojstvenom vektoru ovisi o kvocijenu $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$. Što je taj kvocijent bliži 1, konvergencija je sporija.

Vratimo se opet na odabir matrice A. Odabir matrice s vrijednostima $1, \frac{1}{2}, 0$ je jako dobar kod igara gdje isti timovi igraju puno puta tijekom sezone. U takvom slučaju naš model bolje aproksimira snagu pojedinog tima.

Negativne strane definicije ovakve matrice su primjerice ako imamo tim koji nema nijednu pobjedu. On ima nula bodova te pri tome ne donosi nikakve bodove timu koji ga pobijedi. Dakle, ako neki tim pobijedi takav tim, njegovi prosječni bodovi se smanje. Da spriječimo ovu manu, možemo definirati matricu A na drugačiji način.

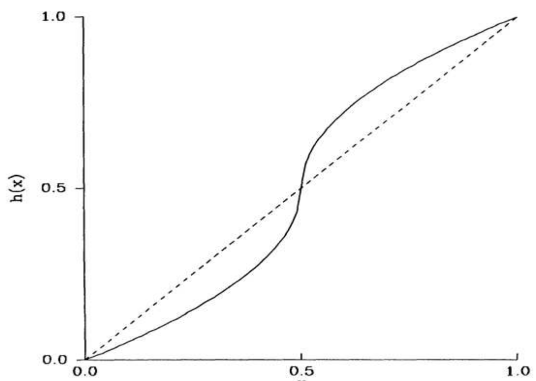
Označimo sa S_{ij} i sa S_{ji} broj bodova koje je postigao i-ti tim, odnosno j-ti tim kod međusobnog susreta. Tada definiramo matricu $A = [a_{ij}]$ kao $a_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{ij}+S_{ji}}$. No, i ovo možemo malo poboljšati jer ako je, na primjer, konačni rezultat utakmice $3 : 0$, tada opet prvi igrač uzima sve bodove. Da to spriječimo, neka je $a_{ij} = \frac{S_{ij}+1}{S_{ij}+S_{ji}+2}$.

Ovakva definicija ima opet jednu manu, a to je da se pobjednički tim ponekad ne nagradi dovoljno za svoju pobjedu (na primjer kod konačnog rezultata $0 : 1$). Jedno rješenje bi bilo da uzmemo

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= h\left(\frac{S_{ij}+1}{S_{ij}+S_{ji}+2}\right), \\
h(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{|2x-1|},
\end{aligned}
$$

gdje smo za h odabrali neprekidnu nelinearnu funkciju sa svojstvima

$$
h(0) = 0, \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad h(1) = 1.
$$



Slika 2.1: Prikaz funkcije h

Iako je gornji model matematički točan, raspored natjecanja nije toliko savršen da bi on uvijek dobro funkcionirao u konkretnim primjenama. Primjerice, ako jak tim ima raspored igara u kojem igra većinom sa slabim igračima i sa malo jakih, on se ne može plasirati na visoku poziciju. Također, ako neki tim igra vrlo dobro protiv jakih timova iako izgubi poneku igru, on se po našem modelu može visoko rangirati.

Time smo motivirani da poopćimo naš model tako da jaki igrači ne budu podcijenjeni. No, kako ćemo to učiniti? Vidjeli smo da nelinearne funkcije daju bolje rezultate jer ih možemo "namjestiti" tako da zadovoljavaju neka bitna svojstva.

U tu svrhu trebamo proširiti Perron-Frobeniusov teorem. Ako je F nelinearna funkcija, tada jednadžba

$$F(r) = r$$

predstavlja nelinearni problem svojstvenih vrijednosti za koji želimo pronaći pozitivan svojstveni vektor. Preciznije, radi se o fiksnoj točki. Imamo sljedeći teorem koji nam daje odgovor na to kakva bi funkcija F trebala biti da dobijemo jedinstveno pozitivno rješenje.

Definicija 2.7. *Funkciju $F : [0, \infty\rangle^n \to \langle 0, \infty\rangle^n$ je strogo konkavna ako je*

$$F(tx + (1-t)y) > tF(x) + (1-t)F(y), \quad \forall\ 0 < t < 1.$$

Napomena 2.8. *Kao i za matrice, tako i za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ oznaka $x \geq y$ ($x > y$) znači da je vektor $x - y$ nenegativan (pozitivan).*

U skladu s time, reći ćemo da je funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rastuća ako $x \leq y$ povlači $F(x) \leq F(y)$.

Za funkciju $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ćemo reći da je ograničena ako je $F_i(x) < M_i$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ i sve $i = 1, .., n$.

Primijetimo da za konkavnu funkciju $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ za koju vrijedi da je $F(0) > 0$ vrijedi i

$$F(tx) > F(tx + (1-t)0) > tF(x) + (1-t)F(0) > tF(x), \quad \forall\ 0 < t < 1,$$

ako u definiciju stroge konkavnosti uvrstimo $y = 0$. Ova nejednakost će nam biti korisna u dokazu sljedećeg teorema.

Teorem 2.9. *Neka je $F : [0, \infty\rangle^n \to \langle 0, \infty\rangle^n$ ograničena, pozitivna, rastuća i strogo konkavna funkcija. Tada funkcija F ima jedinstvenu fiksnu točku.*

Dokaz. Dokažimo prvo egzistenciju. Neka je $F_i(x) \leq M_i$ za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$ i tako za sve $i = 1, ..., n$. Neka je r_0 vektor kojem se na i-toj koordinati nalazi vrijednost M_i i primijetimo da vrijedi $F(r_0) \leq r_0$.

Ako je $F(r_0) = r_0$, tada je r_0 fiksna točka.

Ako je $F(r_0) < r_0$, definirajmo niz vektora $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekurzivno kao

$$r_k = F(r_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Primijetimo da, zbog toga što je funkcija F rastuća, vrijedi $r_k < r_{k-1}$ pa je $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monotono padajući niz vektora koji je ograničen odozdo s $F(0) > 0$. Zbog toga niz vektora konvergira prema pozitivnom vektoru r. Kako je F neprekidna imamo

$$F(r) = F(\lim_{k\to\infty} r_k) = \lim_{k\to\infty} F(r_k) = \lim_{k\to\infty} r_{k+1} = r.$$

Dakle, r je fiksna točka funkcija F.

Preostaje nam dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji pozitivan vektor q tako da vrijedi $F(q) = q$. Kako je $r \neq q$, jedna od nejednakosti $r \leq q$ ili $q \leq r$ sigurno ne vrijedi. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da ne vrijedi $q \leq r$. Sada, postoji maksimalan t_0 sa $0 < t_0 < 1$ takav da je $tq \leq r$ za svaki t za koji je $0 \leq t \leq t_0$. No, imamo

$$r = F(r) \geq F(t_0 q) > t_0 F(q) = t_0 q$$

što daje kontradikciju s maksimalnošću od t_0. □

Sada kada smo poopćili Perron-Frobeniusov teorem, možemo nastaviti s našim modelom. Rangove timova možemo definirati kao

$$r_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{N} f(e_{ij} r_j), \tag{2.1}$$

gdje je e_{ij} veličina koja ovisi o ishodu utakmice između i-tog i j-tog tima, r_i jest opet rang i-tog tima, a f je neprekidna, rastuća funkcija za koju vrijedi

$$f(0) > 0, \quad f(\infty) = 1.$$

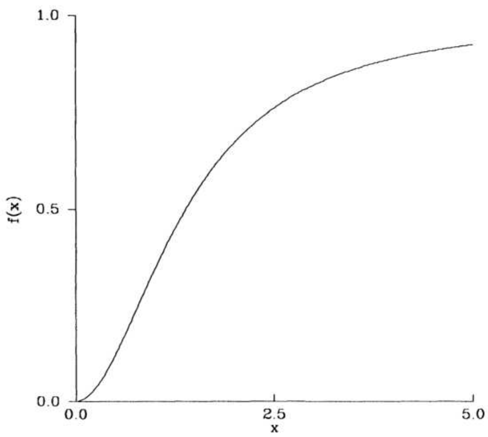
Primijetimo da je funkcija F za koju tražimo fiksnu točku definirana po koordinatama jednadžbom (2.1). Dakle,

$$F_i(r) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{N} f(e_{ij} r_j).$$

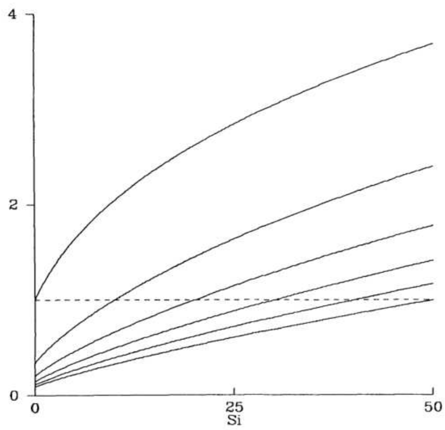
Da bi jednadžba (2.1) imala jedinstveno pozitivno rješenje, moramo osigurati da je funkcija f strogo konkavna i da je pozitivna jer će tada funkcija F zadovoljavati sve uvjete teorema 2.9.

Sljedeći izbor funkcije f i veličina e_{ij} se pokazao vrlo pogodnim (vidi [8] i slike 2.2 i 2.3):

$$f(x) = \frac{0.05x + x^2}{2 + 0.05x + x^2}, \quad e_{ij} = \frac{5 + S_{ij} + S_{ij}^{2/3}}{5 + S_{ji} + S_{ij}^{2/3}}.$$



Slika 2.2: Prikaz funkcije f



Slika 2.3: Prikaz veličine $e_{ij}(S_{ij}, S_{ji})$ kao funkcije od S_{ij} s vrijednostima $S_{ji} = 0, 10, 20, 30, 40$ i 50

2.2.2 Procjenjivanje vjerojatnosti pobjede

Osim rangiranja, korisno je znati i kolika je vjerojatnost da će naš tim ili igrač pobijediti u sljedećoj igri. U ovom odjeljku ćemo se pozabaviti malo detaljnije ovom temom.

Pretpostavimo da imamo vektor r u kojem su rangirani timovi. Označimo s π_{ij} vjerojatnost da tim i pobijedi tim j. Logično je da se ta vjerojatnost može izračunati kao

$$\pi_{ij} = \frac{r_i}{r_i + r_j}.$$

Ako bismo uzeli rezultate igara da procijenimo π_{ij}, tada bi razumna procjena bila

$$\pi_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{ij} + S_{ji}}.$$

Izjednačimo gornje procjene za π_{ij} i računamo:

$$\frac{r_i}{r_i + r_j} = \frac{S_{ij}}{S_{ij} + S_{ji}} \iff r_i S_{ij} + r_i S_{ji} = r_i S_{ij} + r_j S_{ij} \iff S_{ji} r_i - S_{ij} r_j = 0.$$

Ako timovi i i j ne igraju ni jednu utakmicu zajedno, uzimamo da je $S_{ij} = 0$ i $S_{ji} = 0$. Kako u jednoj sezoni postoji puno više utakmica nego timova, to znači da imamo više jednadžbi nego nepoznanica pa problem možemo riješiti pomoću metode najmanjih kvadrata. Naravno da postoji trivijalno rješenje $r = 0$, no ono nas ne zanima jer ne daje rangiranje timova.

Nas zanimaju vektori r koji imaju normu 1 pa time rješavamo problem uvjetnog ekstrema. Koristimo Lagrangeove multiplikatore pa moramo minimizirati funkciju

$$\sum_{ij} (S_{ji} r_i - S_{ij} r_j)^2 - \mu \left(\sum_{i=1}^{N} r_i^2 - 1 \right).$$

Deriviramo gornju fuknciju po r i dobivamo nužan uvjet za ekstrem

$$Br = \mu r,$$

gdje je matrica $B = [b_{ij}]$ definirana kao

$$b_{ii} = \sum_k S_{ik}^2, \quad b_{ij} = -S_{ij} S_{ji}, \quad i \neq j.$$

Sada smo problem sveli na problem svojstvenih vrijednosti. Komentirajmo malo kakva su svojstva matrice B. Ona je invertibilna kad god su njezini stupci linearno nezavisni, a oni su linearno nezavisni ako jednadžba $S_{ij}r_i - S_{ji}r_j = 0$ ima netrivijalno rješenje. No, to možemo pretpostaviti jer se to ispuni kada se odigra veći broj igara.

Za daljnju analizu matrice B nam je potrebna definicija dijagonalno dominantne matrice.

Definicija 2.10. *Matrica $A \in M_n$ je dijagonalno dominantna ako vrijedi*

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = 1, ..., n.$$

Matrica B ima pozitivnu dijagonalu i svi ostali elementi su joj negativni. Neka je $\lambda_0 > 0$ takav da je matrica $B' = B + \lambda_0 I$ dijagonalno dominantna. Neka je r_0 vektor jedinica. Tada je vektor $B'r_0$ pozitivan. Sada uzmimo vektore r_j za $j = 1, ..., N$ takve da imaju sve pozitivne koordinate osim j-te koja je nula. Tada vrijedi $[B'r_j]_j \leq 0$ jer se u tom umnošku ne uračuna pozitivna dijagonala matrice B'. iskoristimo opet pretpostavku da se odigrao dovoljan broj igara te tada imamo $[B'r_j]_j < 0$. Dakle, rub pozitivnog kvadranta se matricom B' preslikava van pozitivnog kvadranta. Još smo dobili da sigurno postoji vektor pozitivnog kvadranta koji se preslikava u pozitivan kvadrant, a to je vektor r_0. Dakle B' preslikava pozitivan kvadrant u njegov pokrivač. Iz ovoga zaključujemo da B'^{-1} preslikava pozitivan kvadrant u samog sebe. Dakle, matrica B'^{-1} je pozitivna pa možemo koristiti Perron-Frobeniusov teorem. Teorem 1.24 nam daje egzistenciju jedinstvenog pozitivnog svojstvenog vektora r matrice B'^{-1} sa pripadnom svojstvenom vrijednosti $\rho(B'^{-1})$. Vektor r je također svojstveni vektor matrice, naime

$$B'B'^{-1} = I \implies B'B'^{-1}r = r \implies B\rho(B'^{-1})r = r \implies Br = \frac{1}{\rho(B'^{-1})}r.$$

Traženi svojstveni vektor r možemo izračunati pomoću teorema 2.5 i onda iz toga dobivamo vjerojatnosti pobjede.

2.3 Markovljevi lanci

Navodimo sada dva zanimljiva rezultata vezana za Markovljeve lance koji su dobiveni pomoću Perron-Frobeniusovog teorema. Prvi će biti vezan uz proizvoljne ireducibilne Markovljeve lance i njihove stacionarne distribucije, a drugi će biti vezan uz konkretan primjer, Markovljev lanac koji opisuje Googleov PageRank algoritam.

2.3.1 Stacionarna distribucija

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ i prijelaznom matricom $P = [p_{ij}]$. Veličina p_{ij} označava vjerojatnost prelaska iz stanja

i u stanje j. Dakle, matrica P je nenegativna. Uočimo da, ako se nalazimo u stanju i, u sljedećem koraku se moramo pomaknuti u neko stanje iz S pa vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

odnosno suma svakog retka matrice P je jedan. Takve matrice nazivamo stohastičkim matricama.

Uzmimo vektor v_0 kojemu su sve koordinate jednake 1 i uočimo da vrijedi

$$Pv_0 = v_0.$$

Dakle, matrica P je nenegativna i pronašli smo jedan njezin pozitivan svojstveni vektor. Koristeći napomenu 1.27 zaključujemo da je $\rho(P)$ svojstvena vrijednost matrice P i da joj je pripadni svojstveni vektor v_0. Iz gornje jednakosti još možemo zaključiti da je $\rho(P) = 1$.

Pretpostavimo da je matrica P pozitivna i promotrimo matricu

$$P^\infty = \lim_{n\to\infty} P^n.$$

Po teoremu 1.26 točno znamo oblik matrice P^∞ budući da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{P}{\rho(P)}\right)^n = \psi\pi^T,$$

gdje su ψ i π desni i lijevi Perronov vektor matrice P. Vrijedi da je $\psi = \frac{1}{n}v_0$. Sada možemo raspisati limes da vidimo kakvog je oblika matrica P^∞:

$$P^\infty = \psi\pi^T = \frac{1}{n}v_0\pi^T = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\end{bmatrix}.$$

Vidimo da je matrica P ranga 1. Označimo li s $p = \frac{1}{n}\pi$, tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi_i = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\pi_i = 1.$$

Dakle, p_i su vjerojatnosti da će se sustav u limesu nalaziti u stanju s_i. Kako je vektor p skalirani lijevi Peronnov vektor, slijedi da za njega vrijedi

$$p^TP = p^T.$$

Napomena 2.11. *Distribucija π na skupu stanja za koju vrijedi $\pi P = \pi$ se zove stacionarna distribucija Markovljevog lanca sa prijelaznom matricom P.*

Promotrimo sljedeći zanimljiv primjer koji koristi ova razmatranja.

Primjer 2.12. *Neka je n molekula (n paran broj) zatvoreno u kutiji. Particioniramo kutiju u dva jednaka dijela A i B imaginarnom particijom. Neka je skup stanja broj molekula koje se nalaze u dijelu A, odnosno brojevi od 0 do n. Molekula se bira nasumice i prebacuje se u drugu polovicu kutije. Matrica prijelaza $P = [p_{ij}]$ je definirana na sljedeći način:*

$$p_{01} = 1, \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{n} \quad p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{n}, \quad p_{n,n-1} = 1,$$

te su sve ostale vrijednosti 0.

Primijetimo da je matrica prijelaza ireducibilna. Naime, ako se nalazimo u stanju s_i i želimo doći u stanje s_j (Bez smanjenja općenitosti neka je $i < j$), tada je $\{s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, ..., s_{j-1}, s_j\}$ jedan put od stanja s_i do stanja s_j. Dakle, pripadni graf matrice P je jako povezan pa po propoziciji 1.32 dobimo ireducibilnost matrice P.

Matrica P je nenegativna i ireducibilna pa po teoremu 1.39 dobivamo da vrijede razmatranja prije primjera, odnosno vjerojatnosti konačnih stanja molekula su u vektoru p koji zadovoljava jednakost $p^T P = p^T$. Uočimo da iz definicije matrice prijelaza vrijedi

$$p_i = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) p_{i-1} + \frac{i+1}{n} p_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$
$$p_0 = \frac{p_1}{n}, \quad p_n = \frac{p_{n-1}}{n}.$$

Ova rekurzija ima sljedeće rješenje:

$$p_i = \binom{n}{i} 2^{-n} = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i},$$

što je zapravo gustoća binomne distribucije sa srednjom vrijednosti $\mu = \frac{n}{2}$. Dakle, za očekivati je da će se sustav stabilizirati tako da se pola svih molekula nalazi u dijelu A.

Ovaj primjer je vrlo bitan u fizici budući da nam on potvrđuje nepovratnost vremena kod drugog zakona termodinamike. Iz primjera je očito da ako molekule počinju iz samo jedne polovice sustava, da će s vremenom sustav doći u ravnotežu gdje će se molekule ravnomjerno rasporediti u A i B.

2.3.2 Google PageRank

Spomenut ćemo još jednu primjenu vezanu uz Markovljeve lance. Opisat ćemo kako je modelirana Google tražilica te kako ona sortira web-stranice po važnosti. Dvije su glavne pretpostavke: prvo, web-stranica je bitnija ako postoji više poveznica na tu stranicu, a drugo, ako postoji poveznica sa stranice koja je visoko rangirana na neku stranicu, tada ta druga stranica postane bitnija.

Počnimo od najjednostavnijeg modela. Neka ukupno postoji N web-stranica. Pretpostavimo da imamo korisnika interneta koji se dosađuje te nasumično klika po poveznicama na stranici, na svaku sa jednakom vjerojatnosti. Ako na stranici nema poveznica, ode na neku drugu, također na bilo koju sa jednakom vjerojatnosti. Ako je x N-dimenzionalan vektor koji sadrži vjerojatnosti da se korisnik trenutno nalazi na stranici $1, 2, ..., N$, tada želimo definirati matricu $A \in M_N$ tako da vektor Ax sadrži vjerojatnosti za koje će se korisnik nalaziti na stranici $1, 2, ..., N$ u sljedećem koraku.

Definirajmo sada takvu matricu. Neka je $L(j)$ broj poveznica na j-toj stranici. Za matricu $A = [a_{ij}]$ možemo uzeti

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L(j)}, & \text{ako postoji poveznica iz } j \text{ do } i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Ovo je pretpostavka da su sve poveznice na jednoj stranici kliknute s jednakom vjerojatnošću. No, kako ne moraju na svakoj stranici postojati poveznice, modificirajmo matricu A u A' na sljedeći način:

$$a'_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L(j)}, & \text{ako postoji poveznica iz } j \text{ do } i \\ \frac{1}{N}, & \text{ako ne postoji link na } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Mrežu web-stranica si vrlo lagano možemo zamisliti kao usmjeren graf, sa web-stranicama kao vrhovima, u kojem postoji brid između dva vrha ako postoji poveznica sa jedne na drugu stranicu, ili postoji brid prema svim stranicama ako na trenutnoj stranici nema nijedan link. Dakle, taj graf možemo poistovijetiti s matricom A'. Prirodno je za očekivati da ako se nalazimo na jednoj proizvoljnoj web-stranici da postoji pozitivna vjerojatnost da dođemo u bilo koju drugu web-stranicu. Drugim riječima, prirodno je za očekivati da je graf jako povezan pa i time da je matrica A ireducibilna (propozicija 1.32). To su na umu imali i izumitelji PageRanka pa su na taj način definirali Googleovu matricu:

$$G = \alpha A' + \frac{1-\alpha}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dodan je faktor $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ koji je u Google tražilici stavljen na vrijednost $\alpha = 0.85$. Ovakva definicija daje korisniku vjerojatnost $1 - \alpha$ da ode nasumično na bilo koju stranicu, u bilo kojem trenutku.

Matrica G je pozitivna i ona je stupčano stohastička, odnosno suma svakog stupca joj je 1. Primijetimo da smo zapravo konstruirali markovljev lanac gdje je skup stanja svaka web-stranica i prijelazna matrica je G^T.

Kako je matrica G pozitivna, iz teorema 1.24 dobivamo da je $\rho(G)$ svojstvena vrijednost kojoj pripada pozitivan svojstveni vektor. Također su lijevi i desni Perronov vektor jedinstveni i pozitivni. Kako je A stohastička matrica, vrijedi $\rho(G) = 1$, a to se vidi i iz sljedećeg:

$$G^T v_0 = v_0 \iff v_0^T G = v_0,$$

gdje je v_0 vektor kojemu je svaka koordinata jednaka 1 i taj vektor je lijevi Perronov vektor koji po Perronovom teoremu treba pripada svojstvenoj vrijednosti $\rho(G)$ pa je spektralni radijus jednak 1.

Iz ovoga slijedi da postoji jedinstveni jedinični vektor $\psi > 0$ takav da je

$$G\psi = \psi.$$

Primijetimo da je PageRank algoritam zapravo niz iteracija

$$x_0,\ Gx_0,\ G^2x_0,\ G^3x_0,\ \ldots$$

za početni vektor x_0. Po teoremu 2.5 znamo da takav niz iteracija teži prema svojstvenom vektoru koji pripada apsolutno najvećoj svojstvenoj vrijednosti (u našem slučaju je to $\rho(G) = 1$). Dakle, ovaj niz iteracija konvergira prema desnom Perronovom vektoru matrice G.

2.4 Leontijev ulazno-izlazni ekonomski model

U ovom odjeljku ćemo spomenuti još jednu primjenu Perron-Frobeniusovog teorema, i to u ekonomiji. Na taj način ćemo još više dočarati snagu i svestranost ovoga teorema.

Zamislimo pojednostavljenu ekonomiju sa samo tri proizvodna sektora (agrikultura, industrija i ugostiteljstvo) zajedno sa neproizvodnim konzumerskim sektorom, prikazano sljedećom tablicom.

	Agrikultura	Industrija	Ugostiteljstvo	Potrošač	Ukupna proizv.
Agr.	$0.3x_1$	$0.2x_2$	$0.3x_3$	4	x_1
Ind.	$0.2x_1$	$0.4x_2$	$0.3x_3$	5	x_2
Ugost.	$0.2x_1$	$0.5x_2$	$0.1x_3$	12	x_3

U prvom retku tablice je zapisano u kojim postotcima se konzumira ukupna proizvodnja agrikulture x_1 među svim djelatnostima. Dakle, 30% potroši sama agrikultura, $0.2x_2$ se potroši na industriju da ona proizvede x_2 jedinica svojeg proizvoda, $0.3x_3$ se potroši na ugostiteljstvo da proizvede x_3 proizvoda. Preostalih 4 jedinica se potroši u sektoru potrošača. Ukratko, osnovna pretpostavka je da je ulazna proizvodnja j-tog sektora od izlazne proizvodnje i-tog sektora x_i proporcionalna izlaznoj proizvodnji j-tog sektora x_j. Ako jedan sektor poveća proizvodnju, njegova potrošnja po sektorima se proporcionalno poveća.

Tablicu možemo zapisati matrično kao

$$Ax + b = x.$$

Glavno je pitanje: Ima li ova jednadžba nenegativno rješenje x za zadani $c \geq 0$? Nenegativno rješenje x bi postojalo ako $I - A$ ima nenegativan inverz jer vrijedi

$$x = (I - A)^{-1}b.$$

No, koji je dovoljan uvjet da matrica $I - A$ ima inverz? Na to pitanje dolazimo pomoću Perron-Frobeniusove teorije.

Propozicija 2.13. *Ako je $A \in M_n$ dijagonalno dominantna matrica, tada je ona regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je A singularna matrica. Po tome je i A^T singularna pa ona ima netrivijalnu jezgru, odnosno postoji $y \neq 0$ takav da je $A^T y = 0$. Iz ovoga slijedi

$$y_j a_{jj} + \sum_{i \neq j} a_{ij} y_i = 0, \quad j = 1, ..., n,$$

a iz ovoga imamo

$$|y_j||a_{jj}| = |y_j a_{jj}| = |\sum_{i \neq j} a_{ij} y_i| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij} y_i| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}||y_i|, \quad j = 1, ..., n.$$

Neka je J skup indeksa takvih da za $j \in J$ vrijedi $|y_j| \geq |y_i|$ za sve $i = 1, ..., n$. Sada imamo

$$|y_j||a_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |y_i||a_{ij}| \leq \sum_{i \neq j} |y_j||a_{ij}|, \quad j \in J.$$

Podijelimo sve s $|y_j| > 0$ i dobivamo

$$|a_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j \in J.$$

Time smo došli u kontradikciju s dijagonalnom dominantnošću matrice A. $\square$

Propozicija 2.14. *Neka je $B \in M_n$ dijagonalno dominantna matrica za koju vrijedi da je $b_{ii} > 0$ za sve $i = 1, ..., n$ i $b_{ij} \leq 0$ za sve $i \neq j$. Tada postoji jedinstveni $x \geq 0$ takav da je $Bx = c$ za svaki $c \geq 0$.*

Dokaz. Kako je matrica B dijagonalno dominantna, po propoziciji 2.13 ona je regularna pa time postoji jedinstveno rješenje $x = B^{-1}c$. Dokažimo da je ono nenegativno.

Pretpostavimo suprotno. Neka je J skup indeksa tako da je $x_j < 0$ za $j \in J$. Zbog pretpostavke, skup J je neprazan. Zapišimo jednadžbu $Bx = c$ na drugačiji način, uzimajući u obzir samo redove $i \in J$:

$$\sum_{j \notin J} b_{ij}x_j + \sum_{j \in J} b_{ij}x_j = c_i \geq 0, \quad i \in J.$$

Možemo pisati

$$\sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} b_{ij}x_j + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} b_{ij}x_j = \sum_{i \in J} c_i \geq 0. \tag{2.2}$$

Uočimo da je prvi pribrojnik ≤ 0 jer je $x_j \geq 0$ za svaki $j \notin J$ i $b_{ij} \leq 0$ za sve $i \neq j$ (U toj sumi se ne pojavljuju dijagonalni elementi matrice B).

Iz dijagonalne dominantnosti matrice B slijedi

$$\sum_{i \in J, i \neq j} |b_{ij}| \leq \sum_{i \neq j} |b_{ij}| < |b_{jj}|, \quad j = 1, ..., n.$$

Gornja tvrdnja vrijedi za sve $j = 1, ..., n$ pa onda vrijedi i za sve $j \in J$ jer je $J \subseteq \{1, ..., n\}$. Dakle,

$$\sum_{i \in J, i \neq j} |b_{ij}| < |b_{jj}|, \quad j \in J.$$

Kako je $b_{jj} > 0$ imamo

$$\sum_{i\in J, i\neq j} b_{ij} + b_{jj} = \sum_{i\in J} b_{ij} > 0, \quad j \in J.$$

Zapišimo drugi pribrojnik u (2.2) kao

$$\sum_{i\in J}\sum_{j\in J} b_{ij}x_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in J} b_{ij}\right) x_j.$$

Sada vidimo da je gornji izraz negativan jer je $x_j < 0$ i $\sum_{i\in J} b_{ij} > 0$ za sve $j \in J$ pa se gornja suma sastoji od zbroja negativnih brojeva. Dakle, lijeva strana jednakosti (2.2) je negativna. Time smo došli do kontradikcije s nenegativnošću broja c. □

Lema 2.15. *Neka je $A \in M_n$ nenegativna matrica i neka su dani proizvoljni vektor $x \geq 0$ i broj $r \in \mathbb{R}$. Ako je $Ax \geq rx$, tada je $r \leq \rho(A)$.*

Dokaz. Po napomeni 1.19 imamo da vrijedi

$$r \leq r \min_{1\leq i\leq n} \frac{x_i}{x_i} \leq \min_{1\leq i\leq n} \frac{rx_i}{x_i} \leq \min_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax]_i}{x_i} \leq \rho(A).$$

□

Teorem 2.16. *Neka je $A \in M_n$ nenegativna matrica i $B = rI - A$ za neki $r \in \mathbb{R}$. Ako vrijedi $\rho(A) < r$, tada je matrica B regularna i $B^{-1} \geq 0$.*

Dokaz. Koristeći lemu 2.15 zaključujemo da ako je $\rho(A) < r$, tada za svaki $x \geq 0$ imamo da je $Ax < rx$ ili $(rI - A)x > 0$, odnosno $Bx > 0$. Zapišimo ovu nejednakost po retcima:

$$b_{ii}x_i > -\sum_{j\neq i} b_{ij}x_j, \quad i = 1, ..., n, \quad x \geq 0.$$

Kako za matricu B vrijedi $b_{ij} \leq 0$ za $i \neq j$, desna strana gornje nejednakosti je nenegativna pa je $b_{ii} > 0$ za svaki $i = 1, ..., n$. Dakle, obje strane nejednakosti su nenegativne pa možemo staviti apsolutne vrijednosti. Za vektor $x = [1, 1, 1, ..., 1]^T$ dobivamo:

$$|b_{ii}| > \sum_{j\neq i} |b_{ij}|.$$

Dakle, matrica B je dijagonalno dominantna. Sada iz propozicije 2.13 zaključujemo da je matrica B regularna.

Dokažimo i drugu tvrdnju teorema. Iz leme 2.14 znamo da postoji jedinstveno nenegativno rješenje jednadžbe $Bx = c$ za proizvoljan $c \geq 0$, odnosno $x = B^{-1}c \geq 0$ za sve $c \geq 0$. Neka je $c_i = [0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]^T$ vektor koji na i-tom mjestu ima jedinicu. Tada dobivamo da je $B^{-1}c_i \geq 0$ za sve $i = 1, ..., n$ pa je $B^{-1} \geq 0$.

□

Napomena 2.17. *Ako je matrica $A \in M_n$ nenegativna, tada matricu $B = rI - A$ za $r \in \mathbb{R}$, gdje je $b_{ii} \geq 0$ za sve $i = 1, ..., n$, zovemo M-matricom. To je vrlo bitna klasa matrica koja se često javlja u raznim modelima. One imaju puno lijepih svojstava, npr. svojstvene vrijednosti imaju pozitivne realne dijelove, regularne su i imaju nenegativan inverz ako je $\rho(A) < r$. Za više informacija vidi [15] i [12].*

Vratimo se sada na naš primjer ekonomskog modela i primijenimo dokazane tvrdnje. Došli smo do odgovora kada naš model ima rješenje, a to je kada je spektralni radijus nenegativne matrice A strogo manji od 1, odnosno $\rho(A) < 1$. Iz teorema 1.18 slijedi da je $\rho(A) \leq 0.9 < 1$ jer je maksimalna suma retka matrice A jednaka 0.9. Time dobivamo nenegativno rješenje našega modela:

$$x = (I - A)^{-1}b \approx \begin{bmatrix} 38.3019 \\ 44.3396 \\ 46.478 \end{bmatrix}.$$

Ovo je jedna od mnogobrojnih primjena Perron-Frobeniusove teorije u ekonomiji. Za više informacija i primjera vidi [15].

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, školska knjiga (2008).

[2] J. Baldin, *The Perron-Frobenius Theorem and its Application to Population Dynamics* dostupno na https://www.lakeheadu.ca/sites/default/files/uploads/77/Baldin.pdf (2017).

[3] A. Borobia, *A Geometric Proof of the Perron-Frobenius Theorem*, Revista Matematica (1992), 57–63.

[4] H. Cairns, *A short proof of Perron's theorem* dostupno na http://pi.math.cornell.edu/~web6720/Perron-Frobenius_Hannah%20Cairns.pdf (2014).

[5] Y. Cheng, T. Carson, M. B. M. Elgindi, *A Note on the Proof of the Perron-Frobenius Theorem*, Applied Mathematics (2012), 1697–1701.

[6] Z. Drmač, *Numerička Analiza 1*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~drmac/NA1-2.pdf (2008).

[7] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985).

[8] J. P. Keener, *The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1993), 80–93.

[9] J. Li, *Markov Chain Interpretation of Google Page Rank*, dostupno na http://web.mst.edu/~gosavia/page_rank_model.pdf (2005).

[10] C. R. MacCluer, *The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2000), 487–498.

[11] C. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2000).

[12] H. Minc, *Nonnegative Matrices*, John Wiley & Sons (1988).

[13] I. Nakić, *Predavanja iz Diskretne matematike*, dostupnno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf` (2012).

[14] K. Shum, *Notes on PageRank Algorithm*, Advanced Engineering Mathematics (2013).

[15] A. Takayama, *Mathematical Economics*, The Dryden Press, Hinsdale, IL (1974).

[16] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci*, predavanja, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml12-predavanja.html` (2013).

Sažetak

U ovom radu osnovni objekti su pozitivne i nenegativne matrice, odnosno one sa pozitivnim i nenegativnim elementima. Središnji pojmovi su svojstvene vrijednosti i njihovi pripadni svojstveni vektori. Među svim svojstvenim vrijednostima najbitnija nam je ona najveća po modulu pa smo time uveli pojam spektralnog radijusa. Za njega smo dokazali mnoge tvrdnje, nejednakosti i formule kako ga možemo izračunati.

U prvom poglavlju smo, nakon definiranja osnovnih pojmova, detaljno i postepeno prošli kroz dokaz teorema. Ono je podijeljeno na tri dijela. Baš onako kako se povijesno proširivao teorem, tako i u ovom radu prvo se bavimo sa striktno pozitivnim matricama, a tek onda nakon toga s nenegativnim primitivnim matricama i naposlijetku s nenegativnim ireducibilnim matricama. Pritom uvodimo vezu matrica s teorijom grafova i navodimo karakterizacije ireducibilnosti.

Drugo poglavlje ovoga rada je posvećeno raznim primjenama. Prvo je obrađen Fanov teorem koji daje moćan alat u lociranju svojstvenih vrijednosti. On je posebno koristan kod kompliciranih i velikih matrica te tako i Fanov teorem sam po sebi ima mnoštvo primjena. Nakon toga smo naveli nekoliko načina modeliranja rangiranja sportskih timova i pritom nam je Perron-Frobeniusov teorem jamčio da postoje rješenja naših modela i da su ona jedinstvena. Obrađene su i primjene u Markovljevim lancima te objašnjeno kako funkcionira Googleov PageRank algoritam. Naposlijetku, navedena je i primjena na M-matricama kod ekonomskog modela.

Summary

In this thesis, the basic objects are positive and non-negative matrices, i.e. matrices with positive and non-negative elements respectively. Central notions are eigenvalues and their corresponding eigenvectors. Among all eigenvalues, the most important to us is the one largest in modulus, so we introduced the concept of spectral radius. We have proved many claims, inequalities, and formulas for calculating it.

In the first chapter, after defining the basic concepts, we went through the proof of the theorem gradually and in detail. It is divided into three parts. Just as the theorem has historically evolved, so in this paper we first deal with strictly positive matrices, and only then with nonnegative primitive matrices and finally with nonnegative irreducible matrices. In doing so, we introduce a connection between matrices and graph theory and state the characterizations of irreducibility.

The second chapter of this paper is devoted to various applications. First, Fan's theorem is given, which provides a powerful tool in locating eigenvalues. It is especially useful for complicated and large matrices, and so the Fan theorem in itself has many applications. After that, we listed several ways of modeling the ranking of sports teams, and the Perron-Frobenius theorem guaranteed that there are solutions for these models and that they are unique. The applications to Markov chains are also discussed, and it is explained how Google's PageRank algorithm works. Finally, an application to M-matrices in the economic model is also mentioned.

Životopis

Rođena sam 7. svibnja 1996. u Varaždinu. Odrasla sam u okolici Varaždina, u selu Tužno, gdje sam ujedno i pohađala Osnovnu školu Tužno. Nakon toga, 2011. godine upisujem prirodoslovno-matematički smjer u Drugoj gumnaziji Varaždin. Tijekom svog osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sam sudjelovala na brojnim natjecanjima iz matematike, kemije, biologije, geografije i drugih predmeta. Sudjelovala sam na više državnih natjecanja iz matematike te sam 2013. osvojila prvo mjesto. Dobitnica sam županijske nagrade za najbolju maturanticu.

Nakon srednje škole, 2015. godine, upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Kasnije, 2018. upisujem diplomski studij Matematička statistika na istome fakultetu. Kroz studij sam držala demonstrature iz Elementarne matematike 1 i 2 te Elementarne geometrije.