Eulerovski i Narayanini brojevi

Lončarević, Karlo

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Karlo Lončarević

Eulerovski i Narayanini brojevi

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, studeni 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Zahvaljujem se svom mentoru, doc.dr.sc. Tomislavu Pejkoviću na ukazanom povjerenju, nesebično pruženoj pomoći i ustrajnosti tijekom izrade diplomskog rada.

Od srca se zahvaljujem tati, baki i djevojci koji su mi uvijek bili velika podrška. Također, zahvaljujem rodbini, prijateljima i kolegama na potpori.

Posebnu zahvalu upućujem učitelju i svim profesorima koji su bili dio mojeg školovanja kroz osnovnu i srednju školu te fakultet.

Sadržaj

Uvod

Kombinatorika je grana diskretne matematike koja se bavi diskretnim strukturama koje su konačne ili koje se mogu brojiti. Kombinatorika je povezana s mnogim drugim granama matematike kao što su teorija vjerojatnosti, algebra, geometrija, ali i računarstvo. Njezina primjena je široka i u svakodnevnom životu. Može nam pomoći za pronalaženje optimalnih rješenja u uvjetima povećanog protoka informacija i transporta ili ubrzanja nekih drugih procesa. S pravom se može reći da je kombinatorika novija grana matematike. Iako su interes za njom pokazivali u drevnoj Kini i Indiji, te nešto kasnije u židovskoj civilizaciji ona se jače počinje razvijati tek s razvojem teorije vjerojatnosti u prvoj polovici 17. stoljeća kada djeluju Blaise Pascal i Pierre de Fermat, a poseban zamah doživljava u drugoj polovici 20. stoljeća s razvojem računala.

Nama je posebno važna osoba u ovom radu švicarski matematičar Leonhard Euler (1717.–1783.) koji je do kasnije nazvanih Eulerovskih brojeva došao tražeći formulu za alternirajuću sumu potencija $1^n - 2^n + 3^n - \cdots$, dakle izvan kombinatorne interpretacije koja se pojavljuje tek oko sredine 20. stoljeća.

U to vrijeme druga važna osoba ovog rada, kanadski matematičar Tadepalli Venkata Narayana (1930.–1987.), dolazi do rezultata vezanih uz niz brojeva koje danas nazivamo Narayanini brojevi.

Ovaj diplomski rad posvećen je Eulerovskim i Narayaninim brojevima. Oni se međusobno isprepliću u mnogim svojstvima. Pokazat ćemo neka njihova osnovna svojstva i neke rezultate gdje se ti brojevi pojavljuju.

Koristimo naziv Eulerovski brojevi (engl. Eulerian numbers) kako bi ih razlikovali od Eulerovih brojeva (engl. Euler numbers) koji se pojavljuju kod razvoja funkcije $(\operatorname{ch} t)^{-1} = \frac{2}{e^t+e^{-t}}$ u Taylorov red, a javljaju se i u kombinatorici kod brojanja alternirajućih (cik-cak) permutacija.

Rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju navodimo neke osnovne pojmove i rezultate koji će nam koristiti za razumijevanje nastavka rada. Drugo poglavlje donosi Eulerovske brojeve, te se bavimo isključivo tim nizom krenuvši od definicije i osnovnih svojstava. Uvode se Eulerovski polinomi, te dokazuju dva važna identiteta. Poglavlje završavamo jednim zanimljivim geometrijskim problemom u kojem se neočekivano pojavljuju Eulerovski brojevi.

Treće poglavlje bavi se Narayaninim brojevima, a već iz njihove definicije je jasna bliska veza Narayaninih brojeva s Eulerovskim. U ovom poglavlju važno mjesto imaju i Catalanovi brojevi kojima su Narayanini svojevrsno profinjenje. Prikazat ćemo nekoliko primjera i poglavlje zaključiti dobivanjem funkcije izvodnice za Narayanine brojeve.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 -Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Poglavlje 1

Neke definicije i rezultati

Najprije navedimo neke definicije i tvrdnje koje će se koristiti u ovom radu. To će nam pomoći za lakše shvaćanje nekih pojmova ćemo susretati kasnije.

1.1 Funkcije

U ovom dijelu navest ćemo nekoliko definicija vezanih uz funkcije.

Definicija 1.1. *Neka su S i T dva skupa. Tada je funkcija ili preslikavanje sa skupa S u T uređena trojka (S, T, f), gdje je skup S domena funkcije ili područje definicije, skup T kodomena ili područje vrijednosti i f neko pravilo koje svakom elementu $x \in S$ pridružuje neki element $y \in T$.*

Definicija 1.2. *Za preslikavanje $f : S \to T$ kažemo da je injekcija ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi $x_1 = x_2$.*

Definicija 1.3. *Za preslikavanje $f : S \to T$ kažemo da je surjekcija ako je $\{f(x) : x \in S\} = T$.*

Definicija 1.4. *Funkcija f koja je injekcija i surjekcija naziva se bijekcija.*

Definicija 1.5. *Neka je $(f_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva. Tada je funkcija izvodnica toga niza formalni red potencija $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.*

Definicija 1.6. *Neka je $(f_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva. Tada je eksponencijalna funkcija izvodnica toga niza formalni red potencija $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$.*

1.2 Osnovni principi prebrojavanja

Nekoliko principa prebrojavanja koje ćemo koristiti u nastavku navodimo u obliku propozicija, ali ih ne dokazujemo.

U prvoj propoziciji navodimo princip jednakobrojnosti ili jednakosti kardinalnih brojeva skupova.

Propozicija 1.7. *Neka su S i T konačni skupovi. Ako postoji bijekcija među njima, tada je $|S| = |T|$.*

Sljedeća propozicija donosi princip sume.

Propozicija 1.8. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi takvi da je $S_i \cap S_j = \emptyset$, za svaki $i \neq j$, tj. disjunktni su u parovima. Tada je $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ konačan skup i vrijedi*

$$|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n| \,. \tag{1.1}$$

Još jedna važna propozicija prikazuje princip produkta.

Propozicija 1.9. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi. Tada je njihov Kartezijev produkt konačan skup i vrijedi*

$$|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| \,. \tag{1.2}$$

1.3 Permutacije

Najprije ćemo definirati pojam permutacije, zatim permutaciju reda n, a za kraj ovog potpoglavlja malo ćemo se pozabaviti simetričnim grupama i cikličkim permutacijama.

Definicija 1.10. *Neka je X neprazan skup. Bijekciju $w : X \to X$ sa skupa X na samog sebe nazivamo permutacijom skupa X.*

Skup svih bijekcija na X tvori grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)). \tag{1.3}$$

Neutralni element u toj grupi je identiteta $id(a) = a$ za svaki $a \in X$ te tako dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 1.11. *Neka je X neprazan skup. Grupa svih permutacija na skupu X naziva se simetrična grupa na X i označava sa S_X. Svaka podgrupa grupe S_X naziva se grupa permutacija na X.*

Ako je X konačan skup od n elemenata, onda S_X označavamo sa S_n i nazivamo simetrična grupa stupnja n.

Na skupu X možemo uvesti potpuni uređaj i bez smanjenja općenitosti elemente možemo označiti s $1, 2, \dots, n$. Sada možemo permutaciju $w \in S_n$ zapisati u matričnom obliku

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ w(1) & w(2) & \dots & w(n) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Alternativno, permutacije se mogu definirati i kao uređene n-torke međusobno različitih elemenata konačnog skupa od n elemenata. Odmah se vidi da je broj permutacija, tj. red simetrične grupe $|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Permutaciju w zapisujemo najčešće navodeći samo donji blok, pa za permutaciju w iz (1.4) pišemo $w = w(1)w(2) \dots w(n)$.

U simetričnoj grupi postoje permutacije koje neke elemente skupa X rotiraju, a nazivamo ih cikličke permutacije.

Definicija 1.12. *Neka je $w \in S_n$. Ako postoje $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takvi da je*

$$\begin{aligned} w(x_i) &= x_{i+1}, \ i = 1, 2, ...k-1, \\ w(x_k) &= x_1, \\ w(x) &= x, \ x \notin \{x_1, x_2, ...x_k\}, \end{aligned}$$

onda permutaciju w nazivamo ciklička permutacija duljine k i označavamo s $(x_1 x_2 \dots x_k)$.

Ciklička permutacija duljine dva naziva se transpozicija.

Dakle, ciklička permutacija preslikava elemente $x_1, x_2, \dots, x_k$ prema pravilu

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_k \mapsto x_1, \tag{1.5}$$

dok na ostalim elementima djeluje kao identiteta. Ciklička permutacija duljine jedan je identiteta koja se zapisuje (x) gdje je x bilo koji od brojeva $1, 2, \dots, n$.

1.4 Binomni koeficijenti

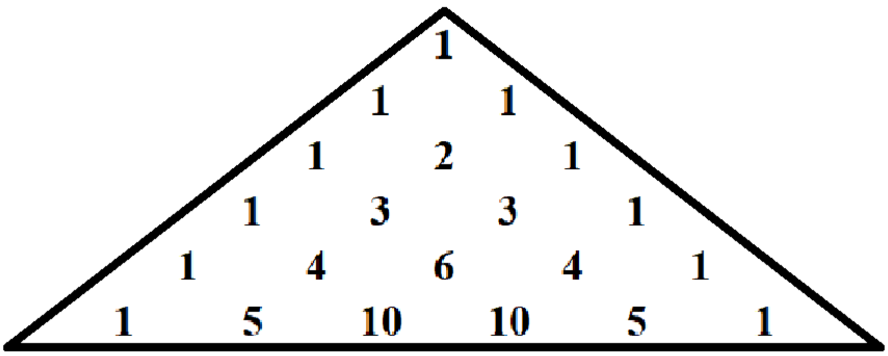
Jedan zanimljiv pojam koji ćemo prikazati je Pascalov trokut binomnih koeficijenata koji je poznat učenicima već u srednjoj školi. Neki se s pojmom Pascalovog trokuta susreću u prvom razredu srednje škole kada ga povezuju s koeficijentom uz element x^k u razvoju polinoma $(1 + x)^k$. Ipak, većina za njega sazna prilikom obrade nastavne cjeline kombinatorika u četvrtom razredu srednje škole kada se definira binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ kao broj podskupova koji sadrže točno k elemenata skupa od n elemenata.

Nije teško pokazati da binomni koeficijent možemo izračunati koristeći faktorijel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.6}$$

što je očito jednako $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$, pri čemu ovaj zapis ima smisla za proizvoljni realni broj n i nenegativni cijeli broj k.

Primijetimo kako za $n < k$ vrijedi $\binom{n}{k} = 0$ što je i u skladu s kombinatornom interpretacijom. Kasnije ćemo koristiti i lako provjerljivi identitet $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k}$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{R}$.



Slika 1.1: Prikaz početnog dijela Pascalovog trokuta binomnih koeficijenata

Na prethodnoj slici prikazan je početak Pascalovog trokuta binomnih koeficijenata. Na k-tom mjestu u n-tom retku nalazi se binomni koeficijent $\binom{n}{k}$. Pri tome retke i elemente numeriramo počevši od 0. Ovaj prikaz prikladan je zbog toga što učenici, bez da znaju teorijsku osnovu, induktivno mogu zaključiti koliko iznosi pojedini element Pascalovog trokuta. U ovom radu mi ćemo koristiti nešto drugačiji prikaz Pascalovog trokuta binomnih koeficijenata, a u nastavku rada i druge tablice ćemo prikazivati na sličan način.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Tablica 1.1: Početak Pascalovog trokuta binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}, 0 \leq k \leq n \leq 9$

Za konstrukciju Pascalovog trokuta koristimo sljedeću rekurziju koju ćemo dokazati kombinatorno. Kombinatorni dokazi obično daju bolji uvid od primjerice čisto algebarskih ili onih korištenjem matematičke indukcije. Zato ih preferiramo, premda nećemo izbjegavati ni druge načine dokazivanja.

Propozicija 1.13. *Za $0 \leq k \leq n$ vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{1.7}$$

Dokaz. Lijeva strana jednadžbe kaže da u razredu od n učenika biramo na primjer nogometnu ekipu od k učenika.

Na desnoj strani razlikujemo dva slučaja ovisno o tome da li u ekipu uzimamo jednog konkretnog učenika, nazovimo ga Marcelijan.

U prvom slučaju Marcelijan je već izabran u nogometnu ekipu te je potrebno od preostalih $n-1$ učenika izabrati još $k-1$ učenika pa imamo $\binom{n-1}{k-1}$ načina za to učiniti.

U drugom slučaju Marcelijan nije dio ekipe te u ovom slučaju od preostalih $n-1$ učenika njegovog razreda treba izabrati k učenika za nogometnu ekipu, što možemo učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina.

Koristeći princip sume dobivamo upravo zadanu tvrdnju, tj. kombinatorno smo dokazali tvrdnju propozicije. □

Navedimo sada tzv. razvoj u binomni red.

Propozicija 1.14. *Za* $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ *i* $n \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k. \tag{1.8}$$

Primijetimo da za prirodni broj n red s desne strane ima samo konačno mnogo članova jer su članovi s $k > n$ jednaki 0. U tom slučaju dobivamo standardni binomni teorem.

1.5 Catalanovi brojevi

Catalanovi brojevi su uz Fibonaccijeve brojeve jedan od najpoznatijih nizova brojeva. Vrlo često se pojavljuju u raznim područjima matematike poput geometrije, teorije grafova, teorije brojeva itd.

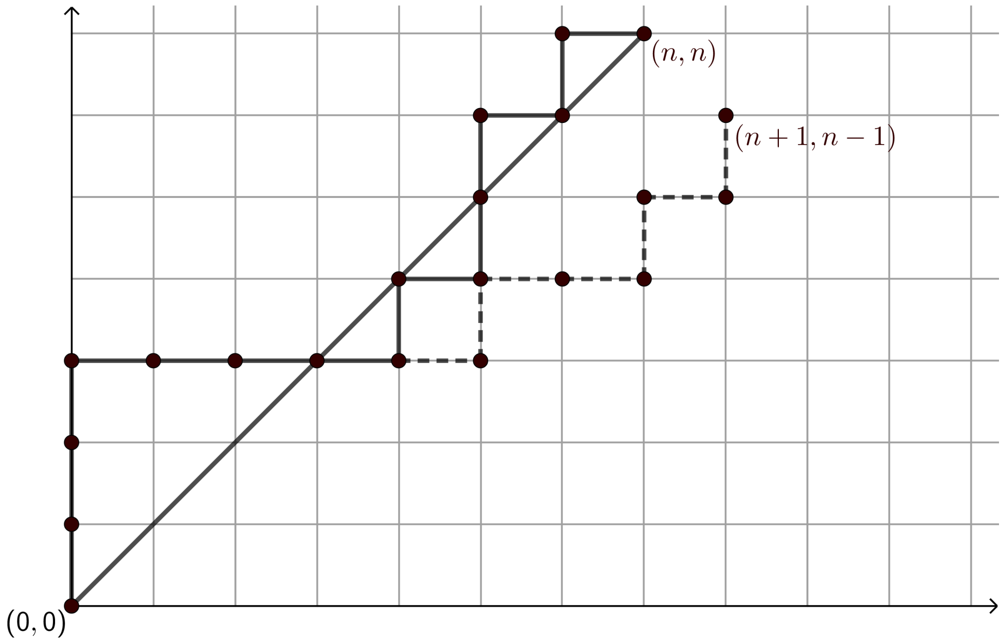
U ovom radu mi se nećemo fokusirano baviti Catalanovim brojevima, već ćemo ih koristiti kao pomoćno sredstvo. Stoga čitatelja upućujemo na drugu literaturu (poput [4]). Ovdje donosimo nekoliko osnovnih činjenica vezanih za Catalanove brojeve s oznakom C_n za n-ti Catalanov broj.

Najčešći način uvođenja Catalanovih brojeva je određivanje broja puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0,0)$ do (n,n) s pomacima samo za $(1,0)$ i $(0,1)$ pri čemu ne prelazimo ispod dijagonale, tj. pravca $y = x$. Takvi putevi se nazivaju Dyckovi putevi, a broj takvih puteva upravo je Catalanov broj C_n. Izračunajmo eksplicitno njegovu vrijednost.

Najprije prebrojimo sve puteve u cjelobrojnoj mreži od $(0,0)$ do (n,n) i od toga broja oduzmemo broj puteva koji prolaze ispod dijagonale.

Svaki put u cjelobrojnoj mreži možemo promatrati kao redoslijed pomaka za vektor desno $(1,0)$ i vektor gore $(0,1)$, a s obzirom da imamo mrežu dimenzija $n \times n$, to znači da imamo n pomaka udesno i n pomaka prema gore što je ukupno $2n$ pomaka. Označimo pomak udesno sa D, a pomak prema gore sa G. Tražimo dakle, broj riječi duljine $2n$ koje se sastoje od n slova D i n slova G. Kada izaberemo pozicije za slovo D, riječ je jednoznačno određena, a to možemo napraviti na $\binom{2n}{n}$ načina.

Sada trebamo još prebrojati puteve od $(0,0)$ do (n,n) koji prolaze ispod dijagonale, tj. spojnice tih dviju točaka.



Slika 1.2: Primjer puta koji prolazi ispod dijagonale gdje je $n = 7$

Promotrimo prvu točku koja se nalazi ispod dijagonale. Nakon te točke preslikamo put tako da svaki pomak udesno zamijenimo pomakom prema gore i svaki pomak prema gore onim udesno, tj. napravimo zrcaljenje puta nakon te točke s obzirom na pravac paralelan s dijagonalom. Na primjer za put p

$$p = GGGDDDD|GDGGDGD,$$

gdje | označava točku od koje modificiramo put, opisanim zrcaljenjem dobivamo

$$r(p) = GGGDDDD|DGDDGDG.$$

Ovom transformacijom dobivamo više slova D od slova G, odnosno pomaka za vektor $(1, 0)$ od pomaka za vektor $(0, 1)$. Do vertikalne crtice učinili smo k pomaka gore i $k+1$ pomak desno, a nakon vertikalne crte za dolazak do točke (n, n) potrebno je još napraviti $n-k$ pomaka gore i $n-k-1$ pomaka desno. Primjenom refleksije broj pomaka nakon vertikalne crte se zamjenjuje pa će izmijenjena staza imati $k+1+n-k = n+1$ pomaka desno i $k+n-k-1 = n-1$ pomaka gore. Dakle, dolazimo do točke $(n+1, n-1)$.

Svaki nedozvoljen put na takav način možemo preinačiti u jedinstveni put od $(0, 0)$ do $(n + 1, n - 1)$, a vrijedi i obrat, tj. svaki put od $(0, 0)$ do $(n + 1, n - 1)$ s pomacima za $(1, 0)$ i $(0, 1)$ dobiva se iz jedinstvenog nedozvoljenog puta od $(0, 0)$ do (n, n). Time je uspostavljena bijekcija između skupa svih najkraćih puteva od $(0,0)$ do (n,n) koji prolaze ispod pravca $y=x$ i svih najkraćih puteva od $(0,0)$ do $(n+1,n-1)$ kojih ima $\binom{2n}{n-1}$. Prema tome, dobivamo da je n-ti Catalanov broj za $n \geq 1$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{1.9}$$

Za Catalanove brojeve vrijedi i rekurzija koja se dobiva tako da promatramo zadnju točku puta od $(0,0)$ do (n,n) koja leži na pravcu $y=x$, tj. dijagonali pripadnog kvadrata i različita je od (n,n). Tako zaključujemo da je

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \text{za } n \geq 1, \tag{1.10}$$

uz uvjet da je $C_0 = 1$. Pomoću rekurzije (1.10) ili direktno iz formule (1.9) dobivamo funkciju izvodnicu za Catalanove brojeve

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{1.11}$$

Poglavlje 2

Eulerovski brojevi

Započet ćemo ovo poglavlje kombinatornom definicijom Eulerovskih brojeva. Nakon toga donosimo neka od svojstava tih brojeva.

2.1 Definicija i osnovna svojstva Eulerovskih brojeva

Definicija 2.1. *Za permutaciju $w = w_1 w_2 \dots w_n \in S_n$ kažemo da je prirodni broj i pad (eng. descent) ako je $w_i > w_{i+1}$ te označavamo s* $\mathrm{Pad}(w)$ *skup padova u w,*

$$\mathrm{Pad}(w) = \{i : w_i > w_{i+1}\}.$$

Dodatno, $\mathrm{pad}(w)$ *označava broj padova u w*

$$\mathrm{pad}(w) = |\mathrm{Pad}(w)| = |\{i : w_i > w_{i+1}\}|.$$

Na primjer u permutaciji $w = 2135746$ imamo pad za $i = 1$ jer je $w_1 = 2$, a sljedeći element $w_2 = 1$, odnosno vrijedi $w_1 > w_2$ to jest $2 > 1$. Promatrajući daljnje elemente, vidimo da imamo još jedan pad za $i = 5$ gdje vrijedi $w_5 > w_6$, odnosno $7 > 4$. Konačno dobivamo da je za ovu permutaciju $\mathrm{Pad}(w) = \{1, 5\}$ i $\mathrm{pad}(w) = 2$.

Imamo $\mathrm{pad}(w) = 0$ za permutaciju u kojoj za svaki i vrijedi da je $w_i < w_{i+1}$, tj. samo za identitetu $123 \dots n$. S druge strane, maksimalan broj padova dobiva se za permutaciju u kojoj za svaki i vrijedi da je $w_i > w_{i+1}$, tj. samo za permutaciju $n(n-1)(n-2)\dots 21$ i tada je $\mathrm{pad}(w) = n - 1$.

Sada imamo sve potrebne pojmove kako bismo definirali Eulerovske brojeve.

Definicija 2.2. *Za cijele brojeve $0 \leq k < n$, Eulerovski broj označen s $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ je broj permutacija u S_n s točno k padova, to jest*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = |\{w \in S_n : \mathrm{pad}(w) = k\}| \,. \tag{2.1}$$

Spomenimo kako je za $k \geq n$ i za $k < 0$ Eulerovski broj $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0$ što je u skladu s Definicijom 2.2.

Navodimo kako postoji i alternativna definicija Eulerovskih brojeva u kojoj se umjesto padova koriste rastovi to jest i-ovi za koje je $w_i < w_{i+1}$. U ovom radu mi ćemo koristiti isključivo Definiciju 2.2. No te su definicije zapravo ekvivalentne te ćemo u sljedećem primjeru uspostavit bijekciju između odgovarajuća dva skupa.

Primjer 2.3. *Neka je $\sigma = n(n-1)(n-2)\ldots 21 \in S_n$. Tada za $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in S_n$ imamo $w \circ \sigma = w_n w_{n-1} \ldots w_1$.*

Očito je $w \mapsto w \circ \sigma$ bijekcija na S_n. No, lako se vidi da je

$$|\{i : w_i > w_{i+1}\}| = |\{i : (w \circ \sigma)_i < (w \circ \sigma)_{i+1}\}| \,,$$

pa je $\mathrm{pad}(w) = \mathrm{rast}(w \circ \sigma)$, gdje smo funkciju rast definirali analogno funkciji pad uz očite zamjene. Stoga smo mogli Eulerovske brojeve definirati i sa

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = |\{w \in S_n : \mathrm{rast}(w) = k\}| \,.$$

Primjer 2.4. *Odredimo $\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle$, $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$ i $\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle$.*

Za $\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle$ tražimo permutacije za koje ne postoje padovi, tj. za sve i vrijedi $w_i < w_{i+1}$ pa je jedina takva mogućnost $w = 123$, tj. $\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle = 1$.

Za $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$ postoji jedan pad u permutaciji w. Permutacije w za koje to vrijedi su 132, 213, 231 i 312, odnosno $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4$.

Odredimo još $\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle$. Za ove uvjete postoji samo jedna permutacija iz S_3, a to je 321. Tako je $\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 1$.

Kreirajmo sada tablicu u kojoj su raspoređene permutacije iz skupova S_1, S_2, S_3 i S_4.

n\k	0	1	2	3
1	1			
2	12	21		
3	123	132 213 231 312	321	
4	1234	1243 1324 1342 1423 2134 2314 2341 2413 3124 3412 4123	1432 2143 2431 3142 3214 3241 3421 4132 4213 4231 4312	4321

Tablica 2.1: Permutacije n-članog skupa s k padova

Računalno dolazimo do Eulerovskog broja $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, $0 \leq k < n$, što je prikazano u sljedećoj tablici.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	4	1							
4	1	11	11	1						
5	1	26	66	26	1					
6	1	57	302	302	57	1				
7	1	120	1191	2416	1191	120	1			
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

Tablica 2.2: Eulerovski brojevi $\left\langle {n \atop k} \right\rangle, 0 \leq k < n \leq 10$

U nastavku ćemo preko rekurzije dobiti istu tablicu.

Najprije pokušajmo naslutiti kako izgleda rekurzivna formula.

Primjer 2.5. *Uzmimo da je $n = 4$ i $k = 1$. Pokušajmo naslutiti kako izgleda formula za $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle$. Krenimo od $n = 3$ i $k = 0$. Jedina permutacija* *koja zadovoljava ovaj uvjet je 123. Ubacivanjem broja 4 u ovu permutaciju dobivamo 3 permutacije koje odgovaraju našem uvjetu za* $n = 4$ *i* $k = 1$*, a to su 4123, 1423 i 1243.*

Pogledajmo sada permutacije sa $n = 3$ *i* $k = 1$*. Permutacije koje zadovoljavaju ovaj uvjet su 132, 213, 231 i 312. Promotrimo sada svaki slučaj pojedinačno kada ubacimo broj 4 tako da dobijemo permutaciju sa* $n = 4$ *i* $k = 1$*.*

Za 132 imamo 2 mogućnosti, 1342 i 1324.

Za 213 imamo 2 mogućnosti i to su 2413 i 2134.

Za 231 imamo 2 mogućnosti, 2341 i 2314.

Konačno, za 312 imamo još 2 mogućnosti, a to su 3412 i 3124.

Zbrojimo li sada sve mogućnosti koje smo ispisali imamo $3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$*. Dobili smo rezultat identičan kao kod ispisivanja svih mogućih permutacija (v. Tablicu 2.2), a i onaj koji nam je dalo računalo.*

Ovime dobivamo da je $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle = 3\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle + 2\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$ *te naslućujemo da je rekurzija oblika* $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$*.*

Teorem 2.6. *Za sve prirodne brojeve* $k < n$ *vrijedi*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle, \text{ gdje je } \left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1. \tag{2.2}$$

Dokaz. Promotrimo permutaciju $w = w_1 w_2 \dots w_{n-1}$ gdje su $w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, \dots, n-1\}$. U svaku pojedinu permutaciju w broj n možemo ubaciti na n različitih mjesta kako bismo dobili permutaciju iz S_n.

Pretpostavimo da broj n ubacimo na mjesto i u permutaciju w te tada dobivamo novu permutaciju $v = w_1 w_2 \dots w_{i-1} n w_i \dots w_{n-1}$. Sada prebrojimo padove u novonastaloj permutaciji v, a za to trebamo promotriti dvije moguće situacije. Prvi slučaj koji promatramo je za $w_{i-1} > w_i$. Tada ubacivanjem broja n, broj padova ostaje nepromijenjen jer vrijedi $w_{i-1} < n$ i $n > w_i$. Dakle, broj padova u v jednak je broju padova u w, tj. k. U ovaj slučaj uključeno je i $i = n$.

Drugi slučaj koji promatramo jest za $w_{i-1} < w_i$. U ovom slučaju uključeno je i $i = 1$ te uzimamo da je broj padova od w jednak $k - 1$. Ukoliko ubacimo n na mjesto i, dobivamo da permutacija v u ovom slučaju ima za jedan više pad od permutacije w, to jest ima ih k.

Prema tome, permutaciju $v \in S_n$ s k padova dobivamo na $(k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ načina iz permutacija $w \in S_{n-1}$ s k padova i iz permutacija $w \in S_{n-1}$ s $k - 1$ padova na dodatnih $((n-2) - (k-1) + 1)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$ načina.

Konačno, prema principu sume dobivamo tvrdnju teorema

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle. \qquad \square$$

Pomoću računala smo ispisali nekoliko Eulerovskih brojeva, potom smo naslutili rekurzivnu formulu i na kraju smo dokazali da ta rekurzivna formula uistinu vrijedi za svaki n i k.

Pogledamo li malo bolje Tablicu 2.2, primjećujemo da je svaki redak u njoj simetričan, a tu simetriju zapisujemo na sljedeći način.

Propozicija 2.7. *Za svaki $n > 0$ i $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1-k} \right\rangle.$$

Dokaz. Dokaz ove propozicije slijedi direktno iz činjenice pokazane u Primjeru 2.3 da permutacija s k padova ima jednak broj kao i permutacija s k rastova, tj. $n-1-k$ padova. $\square$

Nakon što smo definirali Eulerovske brojeve i dokazali nekoliko važnih identiteta, sada imamo alat za rad na primjerima u kojima se pojavljuju Eulerovski brojevi.

Propozicija 2.8. *Za neki prirodan broj n vrijedi*

$$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 2^n - n - 1. \tag{2.3}$$

Dokaz. Dokažimo kombinatorno ovu tvrdnju. Kod permutacije s točno jednim padom imamo dva rastuća niza. Neka je $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ permutacija takva da je $w_1 < w_2 < \cdots < w_k > w_{k+1} < w_{k+2} < \cdots < w_n$.

Dovoljno je izabrati elemente $w_1, \ldots, w_k$ prvog niza koji čine neprazan podskup od $\{1, 2, \ldots, n\}$, čiji je maksimum veći od minimuma njegovog komplementa.

Jedini podskupovi od $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji su isključeni su prazan skup i skupovi oblika $\{1, 2, \ldots, i\}$ za $i = 1, \ldots, n$. Iz toga slijedi da postoji $2^n - 1 - n$ načina za odabrati elemente iz prvog rastućeg niza, što nam daje jednakost (2.3). $\square$

Funkcija pad : $\bigcup_{n \geq 1} S_n \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ je primjer permutacijske statistike, odnosno funkcija sa skupa svih permutacija u skup nenegativnih cijelih brojeva. Primjeri permutacijskih statistika su i broj inverzija i broj ciklusa. Kada brojimo permutacije prema pojedinoj permutacijskoj statistici dobivamo distribuciju te statistike. Bilo koju statistiku čija distribucija daje brojeve $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ zovemo Eulerovska statistika. Osim funkcije pad postoji još mnogo drugih Eulerovskih permutacijskih statistika, na primjer jedna od njih je već spomenuta funkcija rast.

U nekoliko sljedećih primjera pokazat ćemo još neka mjesta gdje susrećemo Eulerovske statistike.

Propozicija 2.9. *Broj (maksimalnih, rastućih) staza permutacije,* $w = w_1 \dots w_n$ *u oznaci* $\mathrm{staza}(w)$*, gdje je maksimalna rastuća staza podniz* $w_i < w_{i+1} < \dots < w_{i+r}$ *takav da je* $w_{i-1} > w_i$ *(za* $i > 1$*) i* $w_{i+r} > w_{i+r+1}$ *(za* $i + r < n$*), je Eulerovska statistika.*

Dokaz. Primjerice u permutaciji $w = 1374265$ prva staza je 137, druga staza 4, treća 26 te četvrta staza 5, odnosno $\mathrm{staza}(w) = 4$.

Kada pokažemo da postoji bijekcija između skupa staza i skupa padova permutacije dobit ćemo da $\mathrm{staza}(w)$ zadovoljava Eulerovsku statistiku.

Padovi permutacije nalaze se između staza te permutacije. To se lako vidi ako stavimo pregradu, oznaku |, između staza permutacije. U spomenutom primjeru dobivamo 137|4|26|5. Dakle, broj padova je za jedan manji od broja staza, odnosno broj permutacija s k padova jednak je broju permutacija s $k + 1$ staza. $\square$

Sljedeći primjer nadovezuje se na prethodnu propoziciju.

Propozicija 2.10. *Broj čitanja permutacije, u oznaci* $\mathrm{citanje}(w)$ *je broj prolaza s lijeva na desno kroz permutaciju* w *dok ne pročitamo sve brojeve* $1, 2, \dots, n$ *u točno tom redoslijedu. Funkcija* $\mathrm{citanje}(w)$ *je Eulerovske statistika.*

Dokaz. Neka je npr. $w = 1374265$. Tada u prvom čitanju permutacije w pročitamo redom brojeve 1 i 2 te s obzirom na to da se na pozicijama nakon broja 2 u permutaciji w ne nalazi broj 3 dolazimo do kraja permutacije w i prelazimo na novo čitanje. U drugom čitanju pročitamo redom brojeve 3, 4 i 5. U trećem čitanju pročitamo 6, te u posljednjem, četvrtom, čitanju pročitamo 7. Dakle, dobivamo $\mathrm{citanje}(w) = 4$.

Čitanja permutacije w odgovaraju stazama u inverznoj permutaciji w^{-1}. U čitanju od w, gledamo je li 1 lijevo od 2, 2 lijevo od 3, itd., tj. $w_1^{-1} < w_2^{-1} < \dots$. Moramo započeti novo čitanje kad god je $w_i^{-1} > w_{i+1}^{-1}$.

Primjerice, za naš $w = 1374265$ je $w^{-1} = 1524763$ i lista pozicija u kojima čitamo $1, 2, 3, \dots$ u w odgovara elementima staza od w^{-1}.

čitanja od w	1	3	7	4	2	6	5
1	1				2		
2		3		4			5
3						6	
4			7				

staze od w^{-1}	1	5	2	4	7	6	3
1	1	5					
2			2	4	7		
3						6	
4							3

Dakle, broj permutacija s k čitanja jednak je broju permutacija s k staza, tj. pokazali smo da je $\text{staza}(w)$ Eulerovska statistika. $\square$

Broj prekoračenja permutacije je nova statistika koju definiramo u nastavku, a za koju ćemo pokazati da je Eulerovska statistika.

Definicija 2.11. *Za prirodan broj i, broj prekoračenja permutacije w, označen s* $\text{preko}(w)$, *je*

$$\text{preko}(w) = |\{i : w(i) > i\}| . \tag{2.4}$$

Veza između funkcija preko i pad nije očita, ali mi ćemo ju pronaći pomoću bijekcije sa skupa permutacija S_n na taj isti skup koja preslikava padove u prekoračenja, poznata je kao *fundamentalna transformacija* kako je nazivaju Dominique Foata i Marcel-Paul Schützenberger.

Propozicija 2.12. *Broj prekoračenja* $\text{preko}(w) = |\{i : w(i) > i\}|$ *je Eulerovska statistika.*

Dokaz. Kao što smo naveli u kratkom opisu, koristit ćemo fundamentalnu transformaciju, a ideja je sljedeća. Kada zapišemo permutaciju u cikličkom rastavu, prekoračenja odgovaraju rastovima unutar ciklusa, npr. imamo $w = 1376245 = (1)(2375)(46)$. Rastav na cikluse zapišemo u kanonskoj notaciji te maknemo sve zagrade i dobijemo permutaciju koja ima rastove na pozicijama na kojima je imala u ciklusima. To možemo napraviti na više načina, a mi ćemo na sljedeći način. Neka je kanonska ciklička notacija ona u kojoj zapisujemo svaki ciklus tako da započne s najmanjim elementom tog ciklusa, a cikluse poredamo tako da im prvi elementi čine padajući niz.

Primjerice, ciklus $1 \mapsto 7 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 1$ zapisujemo kao (1762), a nikako kao (7621), (6217) ili (2176). Ovakvim zapisom ciklusa osiguravamo da rastovi u ciklusu točno odgovaraju prekoračenjima u permutaciji. Zapišemo li taj ciklus kao (7621) sakrili smo činjenicu da je jedno prekoračenje na prvoj poziciji.

Kako smo naveli, zapišemo cikluse tako da je najmanji element svakog ciklusa manji od najmanjeg elementa ciklusa koji mu prethodi tako da je posljednji element veći od prvog elementa sljedećeg ciklusa. Npr. neka je $w = 137482695$ te su tada njegovi ciklusi (1), (2376), (4) i (589) te ih posložimo prema najmanjim elementima i dobivamo

$$(589)(4)(2376)(1).$$

Ukoliko izbrišemo zagrade oko ciklusa, dobivamo permutaciju v koja ima rastove samo na mjestima gdje su se nalazili unutar ciklusa, u našem primjeru je $v = 589423761$.

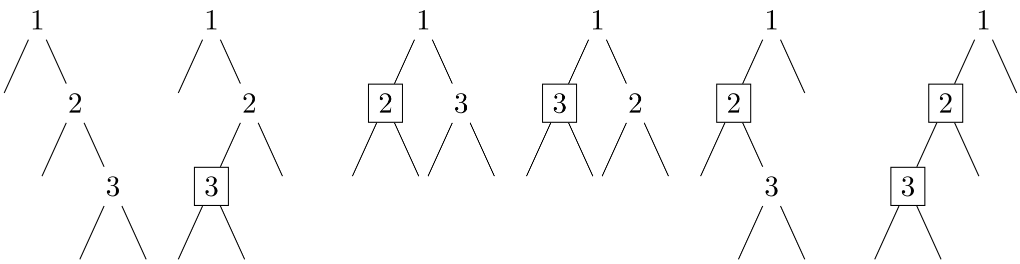
Ovu transformaciju je jednostavno invertirati. Definiramo lijevo-desni minimum kao element $w(j)$ takav da je $w(i) > w(j)$ za sve $i < j$. Ako stavimo pregradu lijevo od svakog lijevo-desnog minimuma, blokovi koje smo dobili mogu se transformirati u cikluse nove permutacije čija prekoračenja točno odgovaraju rastovima od w, npr. ako je $w = 879631524$, lijevo-desni minimumi su 8, 6, 3 i 1 te lijevo od njih umetnemo pregrade i dobivamo

$$w = |879|6|3|1524 \mapsto (879)(6)(3)(1524) = v. \qquad \square$$

Ovo potpoglavlje završiti ćemo primjerom s binarnim stablima.

Propozicija 2.13. *Rastuće binarno stablo veličine n je planarno stablo s korijenom i n unutarnjih čvorova (unutarnji znači da nije list) takvo da svaki unutarnji čvor ima dvoje djece (lijevo i desno dijete). Nadalje, unutarnji čvorovi označeni su s $1, 2, \ldots, n$ pri čemu bilo koji put od korijena do lista slijedi rastuće oznake. Broj rastućih binarnih stabla veličine n u ovisnosti o tome koliko je unutarnjih čvorova koji su lijeva djeca daje Eulerovsku distribuciji.*

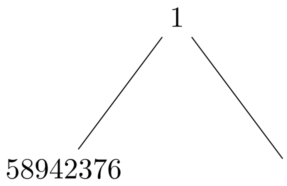
Dokaz. Za $n = 3$ imamo sljedeća stabla čija unutarnja lijeva djeca su istaknuta.



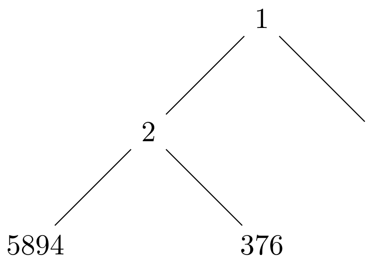
Prikaz stabla za $n = 3$

Postoji bijekcija koja permutacije preslikava na rastuća binarna stabla. Koristi se sljedeća rekurzivna procedura: za bilo koju permutaciju, odredimo njezin minimum i podijelimo permutaciju u podriječi, w^l i w^d, koje se sastoje od (moguće praznih) riječi lijevo i desno od minimuma. Možemo primijeniti istu podjelu i na riječi w^l i w^d, a i nastaviti dalje dok svi listovi stabla nisu označeni praznim riječima. Pokažimo to na primjeru.

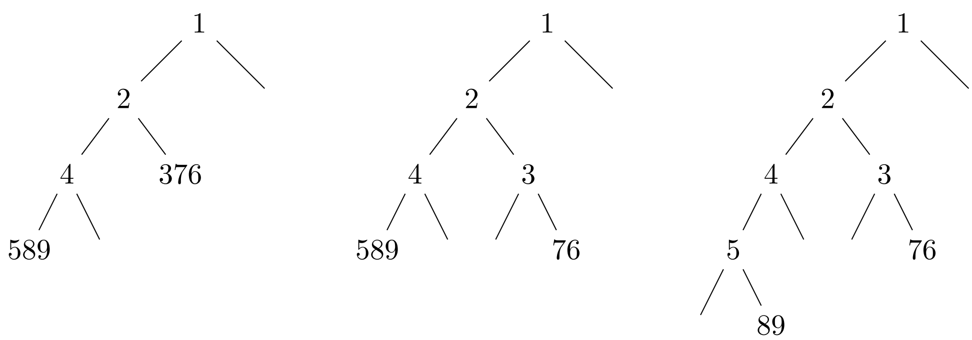
Neka je $w = 589423761$. Ovu riječ podijelimo na $w^l = 58942376$ i w^d koja je prazna riječ, a ta podjela je prikazana pomoću sljedećeg stabla.

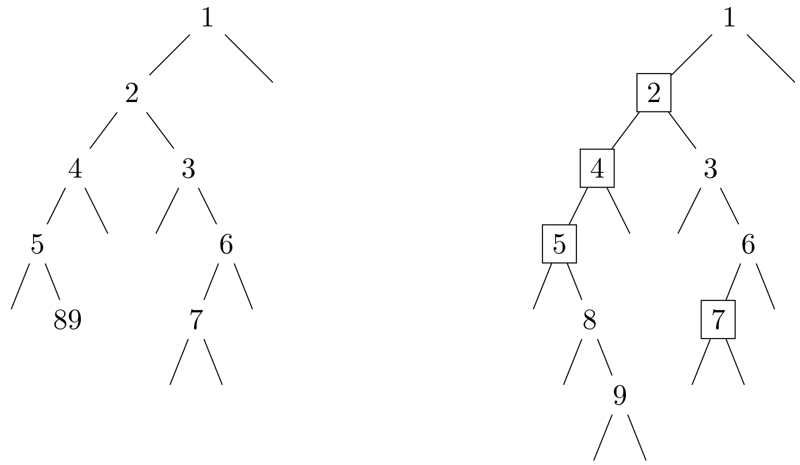


Neka je $v = w^l$, odnosno $v = 58942376$. Primijenimo sada istu dekompoziciju na riječ v. Njezin minimalni element je broj 2 i nalazimo $v^l = 5894$ kao riječ lijevo od 2 i $v^d = 376$ kao riječ desno od 2 te u ovom koraku dobivamo sljedeće stablo.



Preostali koraci slijede analogno te dobivamo redom stabla.





Rastav $w = w^l 1 w^d$ pokazuje da je

$$\mathrm{pad}(w) = \begin{cases} \mathrm{pad}(w^l) + \mathrm{pad}(w^d) + 1 & \text{ako } w^l \text{ nije prazna} \\ \mathrm{pad}(w^l) + \mathrm{pad}(w^d) & \text{ako je } w^l \text{ prazna.} \end{cases}$$

Nadalje, ako $c(w)$ označava broj lijeve unutarnje djece stabla za permutaciju w, tada imamo istu rekurzivnu relaciju

$$c(w) = \begin{cases} c(w^l) + c(w^d) + 1 & \text{ako } w^l \text{ nije prazna} \\ c(w^l) + c(w^d) & \text{ako je } w^l \text{ prazna.} \end{cases}$$

Dakle, kako se $c(w)$ i $\mathrm{pad}(w)$ podudaraju za male w, broj unutarnje lijeve djece stabla za w jednak je broju padova od w, te brojanjem rastućih binarnih stabla prema unutarnjoj lijevoj djeci dovodi do Eulerovske distribucije. $\square$

2.2 Eulerovski polinom

U ovom dijelu poglavlja o Eulerovskim brojevima definirat ćemo funkciju izvodnicu za Eulerovske brojeve i dokazati linearnu rekurziju za takve polinome.

Definicija 2.14. *Za fiksni* $n \in \mathbb{N}$, *Eulerovski polinom je funkcija izvodnica niza Eulerovskih brojeva* $\left(\left\langle {n \atop k} \right\rangle\right)_{k\geq 0}$

$$S_n(t) = \sum_{w\in S_n} t^{\mathrm{pad}(w)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k. \tag{2.5}$$

Pokažimo u sljedećem primjeru prvih nekoliko Eulerovskih polinoma.

Primjer 2.15. *Eulerovski polinomi za* $n = 1, 2, \ldots, 5$ *su*

$S_1(t) = 1$
$S_2(t) = 1 + t$
$S_3(t) = 1 + 4t + t^2$
$S_4(t) = 1 + 11t + 11t^2 + t^3$
$S_5(t) = 1 + 26t + 66t^2 + 26t^3 + t^5.$

Navedimo kako se dogovorno uzima da je $S_0(t) = 1$.

Kao i za Eulerovske brojeve tako i za Eulerovski polinom postoji rekurzivna formula, a u njoj se pojavljuju i derivirani polinomi.

Teorem 2.16. *Za svaki* $n \geq 0$ *vrijedi*

$$S_{n+1}(t) = (1 + nt)S_n(t) + t(1 - t)S_n^{'}(t). \tag{2.6}$$

Dokaz. Znamo da je Eulerovski polinom oblika $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k$, a iz toga jednostavno dolazimo do derivacije po t, tj. $S_n^{'}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k-1}$. Nadalje pomnožimo li Eulerovski polinom s $1 + nt$ dobivamo

$$\begin{aligned}
(1 + nt)S_n(t) &= (1 + nt)\sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k + \sum_{k=0}^{n-1} n\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k + \sum_{k=1}^{n} n\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^k.
\end{aligned}$$

Pomnožimo li derivaciju tog polinoma s $t - t^2$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
t(1-t)S_n'(t) &= (t-t^2)\sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k} - \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k} - \sum_{k=2}^{n} (k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k} - \sum_{k=1}^{n} (k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^{k}.
\end{aligned}
$$

Zbrojimo li prethodne dvije jednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
&(1+nt)S_n(t) + t(1-t)S_n'(t) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k} + \sum_{k=1}^{n} n\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k} - \sum_{k=1}^{n} (k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^{k} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k}.
\end{aligned}
$$

Sada raspišemo $S_{n+1}(t)$ uz primjenu Teorema 2.6

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle t^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left((n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle \right) t^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^{k} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^{k}.
\end{aligned}
$$

Primijetimo kako u prvoj sumi za $k = 0$ imamo $\left\langle {n \atop -1} \right\rangle = 0$, odnosno dobivamo da je prvi član sume za $k = 0$ jednak 0 pa možemo promatrati sumu od $k = 1$. Slično, u drugoj sumi za $k = n$ pojavljuje se $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0$ pa je dovoljno ovu sumu promatrati do $n - 1$.

Tako smo dokazali da vrijedi

$$
S_{n+1}(t) = (1+nt)S_n(t) + t(1-t)S_n'(t). \qquad \square
$$

2.3 Carlitzov i Worpitzkyjev identitet

U ovome dijelu donosimo dva važna identiteta pomoću kojih ćemo izvesti direktnu formulu za računanje Eulerovskih brojeva. Prvi identitet koji donosimo u nastavku je Carlitzov identitet.

Propozicija 2.17. *Za svaki $n \geq 0$ vrijedi*

$$\frac{S_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0}(k+1)^n t^k. \tag{2.7}$$

Dokaz. Kombinatorni dokaz Carlitzovog identiteta dobit ćemo pomoću prebrojavanja različitih rasporeda kuglica u kutije.

Staviti n različitih kuglica, označenih s 1 do n u $k+1$ kutija možemo na $(k+1)^n$ načina, pa je za fiksni broj kuglica odgovarajuća funkcija izvodnica

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)^n t^k. \tag{2.8}$$

Posložimo kutije s lijeva na desno. Bilo koji raspored kuglica u kutijama, prikazujemo pomoću permutacije s ubačenim štapićima (vertikalnim crtama) koji predstavljaju pregrade među kutijama. Sadržaj kutije prikazujemo s lijeva na desno, a kada imamo dvije ili više kuglice u kutiji, prikazujemo ih u rastućem redoslijedu u odnosu na njihove oznake.

Na primjer, za 8 kuglica označenih brojevima od 1 do 8 koje treba staviti u 5 kutija, jedna od takvih "štapićastih permutacija" je

$$1|58|247||36.$$

Prva kutija sadrži kuglicu 1, druga kuglice 5 i 8, treća 2, 4 i 7, četvrta kutija je prazna i peta kutija sadrži kuglice 3 i 6.

Brojanje rasporeda n kuglica u $k+1$ kutija je jednako kao brojanje štapićastih permutacija sa k štapića.

Sada uzmimo neku fiksnu permutaciju w iz skupa S_n te prebrojimo sve štapićaste permutacije koje mogu od nje nastati. U svakom položaju za koji vrijedi $w_i > w_{i+1}$, odnosno postoji pad potrebno je postaviti barem jedan štapić, dok ostali razmaci među susjednim položajima u permutaciji mogu imati proizvoljno mnogo štapića. Drugim riječima, ako nema padova tada je težina razmaka

$$1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t},$$

a ako postoji pad, tada je težina razmaka jednaka

$$t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{t}{1-t}.$$

Primjerice, ako imamo permutaciju $w = 452163$ tada postoji 7 mogućih razmaka za postaviti štapić, a na 3 pozicije imamo padove. Dakle, funkcija izvodnica za štapićaste permutacije dobivene iz w je $t^3/(1-t)^7$ kao što vidimo na sljedećem prikazu.

w	5 $6 \searrow 2 \searrow 1$ $4 \searrow 3$	težina
	$\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t}$	$= \frac{t^3}{(1-t)^7}$

Tablica 2.3: Tablica težina

Općenito funkcija izvodnica glasi $\frac{t^{\mathrm{pad}(w)}}{(1-t)^{n+1}}$.

Konačno, funkcija izvodnica za staviti n označenih kuglica u k označenih kutija je

$$\sum_{k \geq 0} (k+1)^n t^k = \sum_{w \in S_n} \frac{t^{\mathrm{pad}(w)}}{(1-t)^{n+1}} = \frac{S_n(t)}{(1-t)^{n+1}}. \qquad \square$$

Nakon što smo dokazali Carlitzov identitet, iskoristimo ga u nastavku ovog poglavlja.

Podijelivši $S_n(t)$ iz Definicije 2.14 s $(1-t)^{n+1}$ dobivamo sljedeću jednakost

$$\frac{S_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \frac{t^i}{(1-t)^{n+1}},$$

te razvojem iz Propozicije 1.14 dolazimo do

$$\begin{aligned}
\frac{S_n(t)}{(1-t)^{n+1}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-n-1}{k} t^{k+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} t^{k+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \sum_{k \geq 0} \binom{k+n-i}{n} t^{k} \\
&= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \binom{k+n-i}{n} \right) t^{k}.
\end{aligned}$$

Uspoređivanjem ove formule s formulom danom u Propoziciji 2.17, dolazimo do važne jednakosti koju nazivamo Worpitzkyjev identitet.

Korolar 2.18. *Za svaki $n > 0$ vrijedi*

$$(k+1)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \binom{k+n-i}{n}. \tag{2.9}$$

Worpitzkyjev identiteta povezuje potencije s binomnim koeficijentima pa primjerice x^n možemo prikazati kao cjelobrojnu linearnu kombinaciju od

$$\left\{\binom{x}{n}, \binom{x+1}{n}, \ldots, \binom{x+n-1}{n}\right\}.$$

Primjer 2.19. *Neka je $k = 4$ i $n = 6$. Tada imamo*

$$\begin{aligned}
5^6 &= \left\langle {6 \atop 0} \right\rangle \binom{10}{6} + \left\langle {6 \atop 1} \right\rangle \binom{9}{6} + \left\langle {6 \atop 2} \right\rangle \binom{8}{6} + \left\langle {6 \atop 3} \right\rangle \binom{7}{6} + \left\langle {6 \atop 4} \right\rangle \binom{6}{6} + \left\langle {6 \atop 5} \right\rangle \binom{5}{6} \\
&= 1 \cdot 210 + 57 \cdot 84 + 302 \cdot 28 + 302 \cdot 7 + 57 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\
&= 210 + 4788 + 8456 + 2114 + 57 + 0 \\
&= 15625.
\end{aligned}$$

Uzastopnim korištenjem Worpitzkyjevog identiteta dolazimo do eksplicitne formule za Eulerovske brojeve.

$$\begin{aligned}
\left\langle {n \atop 0} \right\rangle &= 1 \\
\left\langle {n \atop 1} \right\rangle &= 2^n - (n+1) \\
\left\langle {n \atop 2} \right\rangle &= 3^n - \left\langle {n \atop 1} \right\rangle \binom{n+1}{n} - \binom{n+2}{n} \\
&= 3^n - 2^n(n+1) + (n+1)^2 - \binom{n+2}{n} \\
&= 3^n - 2^n(n+1) + \binom{n+1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Nastavljajući na ovaj način, dolazimo do sljedećeg rezultata.

Korolar 2.20. *Neka je $n \geq 1$ i $k \geq 0$ za Eulerovske brojeve tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
\left\langle {n \atop k} \right\rangle &= (k+1)^n - k^n \binom{n+1}{n} + (k-1)^n \binom{n+1}{n-1} - \cdots + (-1)^k \binom{n+1}{n+1-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k+1-i)^n \binom{n+1}{n+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k+1-i)^n \binom{n+1}{i}.
\end{aligned}$$

2.4 Eksponencijalna funkcija izvodnica

Cilj ovog odjeljka je doći do eksponencijalne funkcije izvodnice za Eulerovske polinome.

Započnimo s jednostavnim rekurzivnim načinom generiranja permutacija. Ubacujemo novi najveći broj n u permutaciju sa $n-1$ elemenata i promatramo kako to utječe na broj padova. Kako bi dobili novu permutaciju na n elemenata prvo trebamo odabrati koji podskup od $\{1,\ldots,n-1\}$ ide s lijeve strane broja n, a koji s desne strane. Na primjer odaberemo za lijevi podskup $\{1,2,4,5,7\}$ pa je desni podskup $\{3,6,8\}$. Zatim permutiramo i elemenata s lijeve strane i $n-1-i$ elemenata s desne strane zasebno, odnosno u našem primjeru permutiramo 5 elemenata iz lijevog podskupa i 3 elementa iz desnog podskupa te dobijemo na primjer permutacije $w_L = 71254$ i $w_D = 683$, a između njih ubacujemo broj 9.

Broj padova u bilo kojoj permutaciji je za jedan veći od sume broja padova s lijeve strane broja n i broja padova s desne strane od n. Kako i označava broj elemenata s lijeve strane od n, tada je

$$S_i(t)\cdot t\cdot S_{n-1-i}(t)$$

funkcija izvodnica za broj padova permutacija koje imaju iste elemente lijevo od n. Ako s desne strane od n nema ničega tada je $i=n-1$ te dobijemo samo broj padova s lijeve strane od n. Sumiramo li po svim i od 0 do $n-2$, dobivamo sljedeću kvadratnu rekurziju.

Teorem 2.21. *Za svaki $n \geq 0$,*

$$S_n(t) = S_{n-1}(t) + t\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}S_i(t)S_{n-1-i}(t). \tag{2.10}$$

Pomoću prethodne rekurzije doći ćemo do izraza za eksponencijalnu funkciju izvodnicu za Eulerovske brojeve

$$S(t,z) := \sum_{n\geq 0} S_n(t)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k \frac{z^n}{n!}. \tag{2.11}$$

Deriviramo $S(t,z)$ po varijabli z te korištenjem Teorema 2.21 dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}S(t,z) &= \sum_{n\geq 1} S_n(t)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geq 1} S_{n-1}(t)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + t\sum_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}S_i(t)S_{n-1-i}(t)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= S(t,z) + t\sum_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n-2}S_i(t)\frac{z^i}{i!}S_{n-1-i}(t)\frac{z^{n-1-i}}{(n-1-i)!} \\
&= S(t,z) + tS(t,z)(S(t,z)-1).
\end{aligned}$$

Ako stavimo $f(z) := S(t,z)$ tada prethodnu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati

$$f^{'}(z) = tf^2(z) + (1-t)f(z).$$

Riješimo tu diferencijalnu jednadžbu uz početni uvjet $f(0) = 1$. Podijelimo li jednadžbu s $tf^2(z) + (1-t)f(z)$ dobivamo sljedeći izraz

$$\frac{f^{'}(z)}{tf^2(z) + (1-t)f(z)} = 1.$$

Integriramo

$$\int \frac{f^{'}(z)}{tf^2(z) + (1-t)f(z)}dz = \int dz.$$

Napravimo zamjenu varijabli $f(z) = u$ pa je $f^{'}(z)dz = du$. Dobivamo

$$\int \frac{du}{tu^2 + (1-t)u} = z + C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Podintegralnu funkciju rastavimo na parcijalne razlomke

$$\begin{aligned}
\frac{1}{tu^2 + (1-t)u} = \frac{1}{u(tu+1-t)} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{tu+1-t} \\
&= \frac{Atu + A - At + Bu}{u(tu+1-t)} = \frac{u(At+B) + A - At}{u(tu+1-t)},
\end{aligned}$$

iz čega dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $At + B = 0$ i $A(1-t) = 1$, a njihovim rješavanjem slijedi $A = \frac{1}{1-t}$ i $B = \frac{t}{t-1}$ što uvrstimo u jednadžbu (2.12). Dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-1}\int\frac{-1}{u}du+\frac{t}{t-1}\int\frac{1}{tu+1-t}du &= z+C,\ C\in\mathbb{R}\\ -\ln(u)+\ln(tu+1-t) &= (t-1)(z+C)\\ \ln\left(\frac{tu+1-t}{u}\right) &= (t-1)(z+C)\\ t+\frac{1-t}{u} &= e^{(t-1)(z+C)}\\ \frac{t-1}{u} &= t-e^{(t-1)(z+C)}\\ u &= \frac{t-1}{t-e^{(t-1)(z+C)}},\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Kako je $u=f(z)$, vrijedi

$$f(z)=\frac{t-1}{t-e^{(t-1)(z+C)}},\ C\in\mathbb{R}.$$

S obzirom na to da je početni uvjet $f(0)=1$, uvrštavanjem u prethodnu funkciju $z=0$ dobivamo sljedeću jednadžbu

$$\frac{t-1}{t-e^{c(t-1)}}=1.$$

Odavde slijedi $e^{C(t-1)}=1$, odnosno $C=0$.

Konačno, dolazimo do rezultata do kojeg je došao i Euler što je i razlog zašto se Eulerovski brojevi zovu prema ovom velikom matematičaru.

Teorem 2.22. *Eksponencijalna funkcija izvodnica za Eulerovske brojeve je*

$$S(t,z)=\frac{t-1}{t-e^{z(t-1)}}. \tag{2.13}$$

Dokaz. Za drugi dokaz ćemo iskoristiti prethodno potpoglavlje u kojem smo iskazali i dokazali Carlitzov identitet.

Imamo sljedeće

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-t}S(t,\frac{z}{1-t}) &= \sum_{n\geq 0}\frac{S_n(t)}{(1-t)^{n+1}}\cdot\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}(k+1)^n t^k\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{k\geq 0} t^k\sum_{n\geq 0}\frac{(z(k+1))^n}{n!}\\
&= \sum_{k\geq 0} t^k e^{z(k+1)}\\
&= e^z\sum_{k\geq 0}(te^z)^k\\
&= \frac{e^z}{1-te^z}.
\end{aligned}$$

Stavimo da je $u=\frac{z}{1-t}$. Tada imamo $z=u(1-t)$ pa je

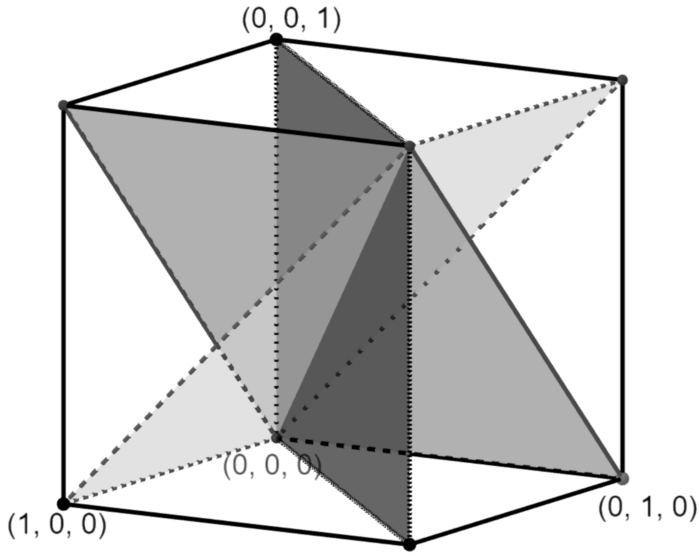
$$S(t,u)=\frac{(1-t)e^{u(1-t)}}{1-te^{u(1-t)}}=\frac{1-t}{e^{-u(1-t)}-t}=\frac{t-1}{t-e^{u(t-1)}}.$$

Konačno smo dobili traženi izraz. □

2.5 Prerezi kocke

U ovom potpoglavlju bavit ćemo se jednom zanimljivom konstrukcijom u kojoj susrećemo Eulerovske brojeve.

Promotrit ćemo najprije rezanje n-dimenzionalne kocke $[0,1]^n$ prema *pleteničastom rasporedu.* Npr., u trodimenzionalnom prostoru prikaz je na sljedećoj slici.



Slika 2.1: Rezovi kocke prema pleteničastom rasporedu

Ignorirajući preklapanja na rubovima, svako područje je simpleks oblika

$$S_w = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_{w(1)} \leq x_{w(2)} \leq \cdots \leq x_{w(n)} \leq 1 \right\}$$

gdje je w permutacija na $\{1, 2, \dots, n\}$. Prisjetimo se da je simpleks u $\mathbb{R}^n$ konveksna ljuska $n+1$ točaka $P_0, P_1, \dots, P_n$ takvih da je $\{P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_n - P_0\}$ linearno nezavisan skup.

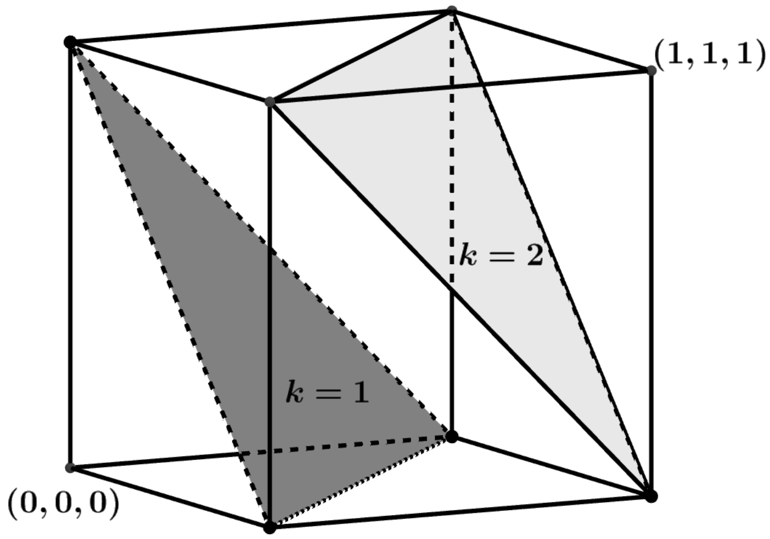
Zbog simetrije svako od tih područja ima isti volumen, a s obzirom da njihova unija ima volumen 1, imamo

$$\mathrm{vol}(S_w) = \frac{1}{n!}.$$

Sada promotrimo rezanje kocke hiperravninama koje su nivo-plohe. Za fiksni n i po volji $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, neka je

$$R_k = \{ y \in [0,1]^n : k \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq k+1 \}.$$

Za trodimenzionalni prostor prikaz takvih ploški je na sljedećoj slici.



Slika 2.2: Rezanje kocke paralelnim hiperravninama

Sljedeća propozicija nam objašnjava kako izračunati volumen tih ploški.

Propozicija 2.23. *Volumen k-te ploške n-dimenzionalne kocke dan je formulom*

$$\mathrm{vol}(R_k) = \frac{\left\langle {n \atop k} \right\rangle}{n!},$$

gdje je $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ broj permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ s k padova.

Opišimo dokaz ove propozicije koji je dao Richard Stanley.

Neka je

$$S_k = \bigcup_{\mathrm{pad}(w^{-1})=k} S_w,$$

unija točaka u konusima koji odgovaraju permutacijama s k padova. Definirat ćemo preslikavanje $\phi : S_k \to R_k$ koje je *generički* bijekcija, to jest bijekcija za sve točke kojima nikoje dvije koordinate nisu jednake (točke kojima su neke dvije koordinate jednake čine skup Lebesgueove mjere 0, pa su nebitne kod računanja volumena).

Preslikavanje je eksplicitno dano funkcijom $\phi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ gdje je

$$y_i = \begin{cases} x_{i+1} - x_i, & \text{ako je } x_i < x_{i+1} \\ 1 + x_{i+1} - x_i, & \text{ako je } x_i > x_{i+1} \end{cases}$$

pri čemu stavljamo $x_{n+1} = 1$. Ako je $x_i = x_{i+1}$ za neki i, tada ϕ ostavljamo nedefiniranim.

Pretpostavimo da je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ generička točka u S_w. Reći da je $x_i > x_{i+1}$ znači da se $i+1$ pojavljuje lijevo od i u permutaciji w, tj. $w^{-1}(i+1) < w^{-1}(i)$. Drugim riječima, i je pad od w^{-1}. Primijetimo, ako je $\mathrm{pad}(w^{-1}) = k$, tada je $\sum y_i = k + x_{n+1} - x_1 = k + 1 - x_1$. Prema tome, ϕ preslikava točke iz S_k u R_k.

Primjera radi, generičke točke u području S_{631425} zadovoljavaju

$$0 < x_6 < x_3 < x_1 < x_4 < x_2 < x_5 < 1,$$

a preslikavaju se u

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (x_2 - x_1, 1 + x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_5 - x_4, 1 + x_6 - x_5, 1 - x_6).$$

Suma koordinata tog preslikavanja je $\sum y_i = 3 - x_1$, dakle $2 < \sum y_i < 3$, kao što je očekivano, jer je $\mathrm{pad}(w^{-1}) = 2$. Primijetimo da je na S_w preslikavanje ϕ afina transformacija dana sa

$$y = \phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Determinanta linearnog dijela ove transformacije ima apsolutnu vrijednost 1, pa ϕ čuva volumen.

Preostaje pokazati da je ϕ invertibilno preslikavanje.

Za dobivanje inverza od ϕ krećemo se s desna na lijevo, iskoristivši da je $x_i = x_{i+1} - y_i$ ili $x_i = 1 + x_{i+1} - y_i$. Zbog $0 < x_i < 1$ samo jedan od ova dva prikaza za x_i može biti točan. U skladu s dogovorom je $y_n = 1 - x_n$, pa je $x_n = 1 - y_n$. Inače, kad izračunamo x_{i+1}, dobivamo

$$x_i = \begin{cases} x_{i+1} - y_i, & \text{ako je } y_i < x_{i+1} \\ 1 + x_{i+1} - y_i, & \text{ako je } y_i > x_{i+1}. \end{cases}$$

Na primjer, uzmimo

$$y = (0.3, 0.14, 0.1592, 0.6, 0.53, 0.58, 0.97).$$

Računajući koordinate jednu po jednu, dobivamo

$$\begin{aligned}
x_7 &= 1 - y_7 = 0.03\\
x_6 &= 1 + x_7 - y_6 = 0.45\\
x_5 &= 1 + x_6 - y_5 = 0.92\\
x_4 &= x_5 - y_4 = 0.32\\
x_3 &= x_4 - y_3 = 0.1608\\
x_2 &= x_3 - y_2 = 0.0208\\
x_1 &= 1 + x_2 - y_1 = 0.7208.
\end{aligned}$$

Možemo provjeriti da ove koordinate definiraju točku u području koje odgovara $w = 2734615$, a primjena funkcije ϕ vratit će x u y.

Sažetiji zapis inverznog preslikavanja dobivamo tako da računamo parcijalne sume s desna na lijevo gledajući samo razlomljeni dio, tj.

$$x_i = 1 - \{y_i + y_{i+1} + \ldots + y_n\}, \text{ gdje je } \{z\} = z - \lfloor z \rfloor.$$

Budući da x_i-ovi moraju biti generički, ostavljamo inverzno preslikavanje nedefiniranim kad god je suma nekog podskupa od $\{y_1, \ldots, y_n\}$ cijeli broj. No za generičke y_j-ove to se neće dogoditi, pa na računanje volumena takav skup mjere 0 nema utjecaja.

Ovime smo pokazali da je ϕ generički bijekcija i da čuva volumen. Time smo pokazali prethodnu propoziciju.

Poglavlje 3

Narayanini brojevi

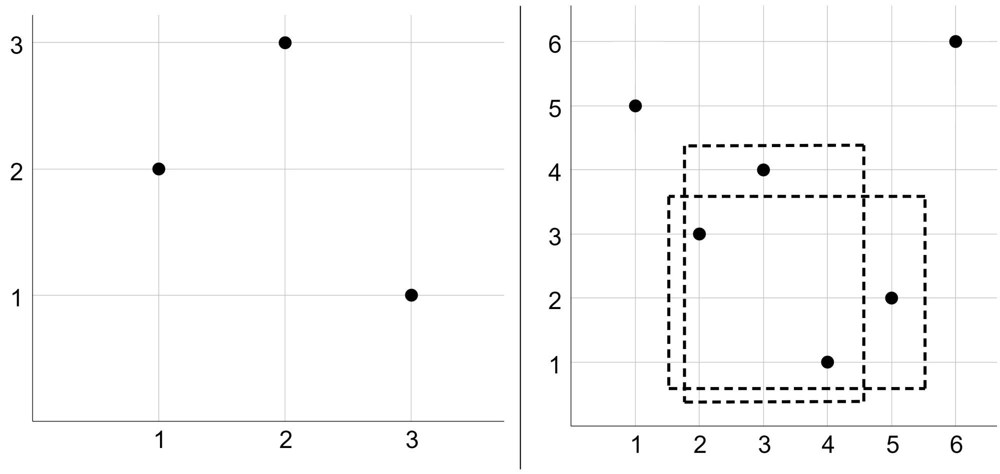
Nakon Eulerovskih brojeva u ovom radu obradit ćemo Narayanine brojeve. Na početku rada opisali smo ukratko Catalanove brojeve koji imaju široku upotrebu u kombinatorici. Tome doprinosi i poznata rekurzija za Catalanove brojeve prikazana u jednadžbi (1.10).

Sada ćemo uvesti Narayanine brojeve proučavajući permutacije u kojima se ne pojavljuje odgovarajući uzorak. Vidjet ćemo da Narayanini brojevi profinjuju Catalanove.

3.1 Permutacije koje izbjegavaju zadani uzorak

Za permutaciju w kažemo da je 231-*slobodna* ako ne postoji trojka $i < j < k$ takva da je $w_k < w_i < w_j$. Ukoliko se pojavljuje barem jedna takva trojka, kažemo da permutacija sadrži uzorak 231. Razjasnimo ovu definiciju na nekoliko primjera.

Primjer 3.1. *Proučimo permutaciju* 534126*. Prikažimo ovu permutaciju grafički.*



Tablica 3.1: Grafički prikaz permutacije 231 i permutacije 534126

Na grafičkom prikazu permutacije 534126 *iscrtkanim pravokutnicima označeni su uzorci* 231 *permutacije. Vidljivo je da se u permutaciji* 534126 *taj uzorak pojavljuje 2 puta. U slučaju kada su indeksi* $2 < 3 < 4$ *vrijedi* $w_4 < w_2 < w_3$*, a također se pojavljuje i kao* $w_5 < w_2 < w_3$*, jer je* $w_5 = 2$*,* $w_2 = 3$ *i* $w_3 = 4$.

U prethodnom primjeru dana je jedna permutacija kakvu ćemo izbjegavati u nastavku.

Do popisa 231-slobodnih permutacija možemo doći sistematskim ispisivanjem ili pomoću programske potpore. Tako dolazimo do tablice u nastavku u kojoj je ispisano nekoliko 231-slobodnih permutacija.

n\k	0	1	2	3
1	1			
2	12	21		
3	123	132 213 312	321	
4	1234	1243 1324 1423 2134 3124 4123	1432 2143 3214 4132 4213 4312	4321

Tablica 3.2: 231-slobodne permutacije n-članog skupa s k padova, gdje je $0 \leq k < n \leq 4$

Označimo sa $S_n(231)$ skup svih permutacija u S_n koje se 231-slobodne.

Pokažimo da broj 231-slobodnih permutacija zadovoljava strukturnu rekurziju jednaku onoj za Catalanove brojeve iz jednadžbe (1.10).

Propozicija 3.2. *Neka je $c_n = |S_n(231)|$ i stavimo $c_0 = 1$. Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i} \tag{3.1}$$

te je stoga $c_n = C_n$ za svaki n.

Dokaz. Pretpostavimo da je u permutacija iz $S_i(231)$ i v permutacija skupa $\{i+1, \dots, n-1\}$ koja ne sadrži uzorak 231. Svaki element permutacije u je manji od svakog elementa permutacije v. Ubacimo li broj n između permutacija u i v dobivamo permutaciju

$$w = u_1 u_2 \cdots u_i n v_{i+1} v_{i+2} \cdots v_{n-1} \in S_n. \tag{3.2}$$

koja je 231-slobodna. Imamo c_i odabira za u i c_{n-1-i} odabira za v pa sumiranjem po svim i dolazimo do

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i} \leq c_n. \tag{3.3}$$

S druge strane, pretpostavimo da je $w \in S_n$ 231-slobodna permutacija u kojoj je element $w_{i+1} = n$. Neka je $u = w_1 w_2 \cdots w_i$ riječ lijevo od n i

$v = w_{i+2}w_{i+3}\cdots w_n$ riječ s desne strane od n u permutaciji w. Jasno je da ni u, ni v ne sadrže uzorak 231. Kada bi unutar u postojao element koji je veći od nekog elementa iz v tada ta bi dva elementa zajedno s n tvorila uzorak 231. Dakle, svaki element od u mora biti manji od svakog elementa od v. Stoga je $u \in S_i(231)$ i v je permutacija skupa $\{i+1, i+2, \ldots, n-1\}$ koja ne sadrži uzorak 231. Konačno dobivamo

$$c_n \geq \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}. \tag{3.4}$$

Iz prethodnih nejednakosti (3.3) i (3.4) jasno je da vrijedi

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}. \qquad \square$$

Kako c_n zadovoljava istu rekurziju kao što je rekurzija za Catalanove brojeve i s jednakom početnom vrijednosti, to slijedi da je $c_n = C_n$.

Tako smo dobili jednu od mnogih kombinatornih karakterizacija Catalanovih brojeva.

Teorem 3.3. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$|S_n(231)| = C_n. \tag{3.5}$$

Pomoću rekurzije smo pokazali da vrijedi $|S_n(231)| = C_n$, ali ta tvrdnja može se i direktno kombinatorno dokazati tako da se pokaže ekvivalentna jednakost

$$(n+1)\,|S_n(231)| = \binom{2n}{n}. \tag{3.6}$$

Spomenimo da nema ništa posebno u uzorku 231 iz Teorema 3.3. Naime, može se konstruirati bijekcija između skupa $S_n(231)$ i skupa $S_n(u)$, gdje je $u \in \{123, 132, 213, 312, 321\}$ bilo koji uzorak duljine 3.

3.2 Definicija Narayaninih brojeva

Slično kao što smo definirali Eulerovske brojeve, profinjenjem prethodnog razmatranja definiramo Narayanine brojeve.

Definicija 3.4. *Za cijele brojeve $0 \leq k < n$, Narayanin broj označen s $N_{n,k}$ je broj permutacija u $S_n(231)$ s k padova, to jest*

$$N_{n,k} = |\{w \in S_n(231) : \mathrm{pad}(w) = k\}|. \tag{3.7}$$

Brojeći elemente iz Tablice 3.2 navedene na početku ovog poglavlja, dolazimo do Narayaninih brojeva koji su prikazani u sljedećoj tablici.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	6	1						
5	1	10	20	10	1					
6	1	15	50	50	15	1				
7	1	21	105	175	105	21	1			
8	1	28	196	490	490	196	28	1		
9	1	36	336	1176	1764	1176	336	36	1	
10	1	45	540	2520	5292	5292	2520	540	45	1

Tablica 3.3: Narayanini brojevi $N_{n,k},\ 0 \leq k < n \leq 10$

Za razliku od Eulerovskih brojeva, za Narayanine brojeve je moguće odrediti jednostavnu eksplicitnu formulu do koje dolazimo u nastavku.

Iz tablice vidimo da slično kao za Eulerovske brojeve, Narayanini brojevi imaju svojstvo simetrije.

Propozicija 3.5. *Za cijele brojeve* $0 \leq k < n$ *je*

$$N_{n,k} = N_{n,n-1-k}. \tag{3.8}$$

Dokaz. Dokaz propozicije slijedit će iz spomenute eksplicitne formule. □

3.3 Prebrojavanje Dyckovih puteva po vrhovima

Neka je $\mathrm{Dyck}(n)$ skup Dyckovih puteva duljine $2n$, tj. onih koji idu od $(0,0)$ do (n,n). *Vrh* Dyckovog puta p je točka (i,j) takva da su točke $(i,j-1)$ i $(i+1,j)$ također na putu p. Slično je *dol* puta p točka (i,j) takva da su i točke $(i-1,j)$ i $(i,j+1)$ također na p. Dakle, možemo reći da vrh slijedi nakon pomaka gore, oznaka G, a prethodi pomaku desno, oznaka D. Također, dol slijedi nakon pomaka desno, a prethodi pomaku gore. Broj vrhova Dyckovog puta p označavat ćemo $\mathrm{vrh}(p)$, a broj dolova s $\mathrm{dol}(p)$.

Propozicija 3.6. *Za* $p \in \mathrm{Dyck}(n)$ *vrijedi*

$$0 \leq \mathrm{dol}(p) = \mathrm{vrh}(p) - 1 \leq n - 1.$$

Dokaz. Ukratko, kako smo ograničeni na pomake gore i desno, a prvi korak je prema gore dok je posljednji nužno desno, iz toga slijedi da ćemo imati jedan vrh više od dola. $\square$

Teorem 3.7. *Narayanini brojevi za $0 \leq k < n$ dani su formulom*

$$N_{n,k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}. \tag{3.9}$$

U ovom potpoglavlju pokazat ćemo da je

$$|\{p \in \mathrm{Dyck}(n) : \mathrm{vrh}(p) = k+1\}| = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}. \tag{3.10}$$

U idućem ćemo uspostavimo bijekciju između skupa $\{p \in \mathrm{Dyck}(n) : \mathrm{vrh}(p) = k+1\}$ i skupa $\{w \in S_n(231) : \mathrm{pad}(w) = k\}$, tj. dokazati da je

$$|\{p \in \mathrm{Dyck}(n) : \mathrm{vrh}(p) = k+1\}| = |\{w \in S_n(231) : \mathrm{pad}(w) = k\}| = N_{n,k}$$

i time ustanoviti formulu (3.9).

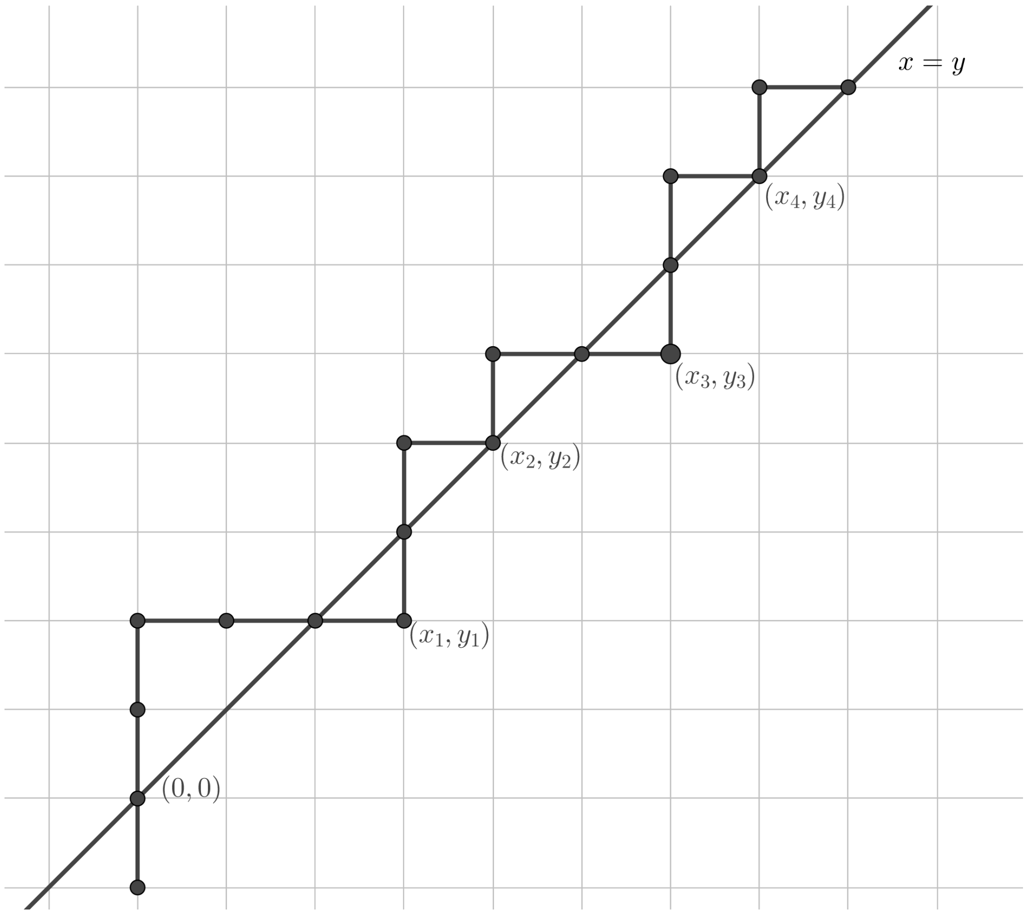
Cilj nam je pokazati da je

$$(k+1)\,|\{p \in \mathrm{Dyck}(n) : \mathrm{vrh}(p) = k+1\}| = \binom{n}{k}\binom{n-1}{k}.$$

Kako bismo to učinili , promotrit ćemo jedan skup $\mathcal{P}$ koji sadrži $\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$ puteva u cjelobrojnoj rešetki. Pokazat ćemo da se $\mathcal{P}$ može particionirati u klase ekvivalencije takve da svaka klasa ima $k+1$ elemenata i sadrži točno jedan put koji odgovara Dyckovom putu s $k+1$ vrhova.

Neka je $\mathcal{P}$ skup puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0,-1)$ do (n,n) koji započinju s pomakom gore i završavaju s pomakom desno te imaju točno $k+1$ vrhova, odnosno k dolova. Svaki takav put može se rekonstruirati iz koordinata dolova (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_k,y_k), pa imamo $\binom{n}{k}$ načina za izabrati ordinate $0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_k \leq n-1$ u takvom putu, te $\binom{n-1}{k}$ načina za izabrati apscise $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n-1$. Dobivamo da je

$$|\mathcal{P}| = \binom{n}{k}\binom{n-1}{k}. \tag{3.11}$$



Slika 3.1: Put od $(0, -1)$ do (n, n) s početnim pomakom prema gore i posljednjim pomakom desno te k dolova. U ovom slučaju $n = 8$ i $k = 4$.

S druge strane, možemo prikazati put u $\mathcal{P}$ kao slijed od $k+1$ puteva bez dolova. Na Slici 3.1 ti putevi bez dolova su GGGDDD, GGD, GDD, GGD i GD, te možemo zapisati

$$p = (GGGDDD)(GGD)(GDD) \bullet (GGD)(GD).$$

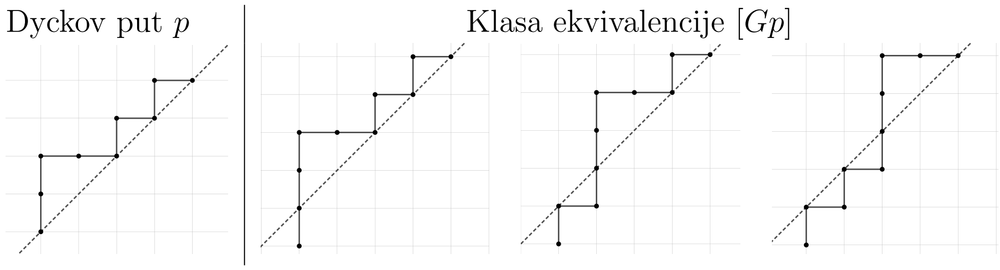
Istaknuta oznaka u prethodnom putu p je $\bullet$, a označava najdesniji dol (x_i, y_i) za koji je $y_i - x_i < 0$ minimalno, tj. najdesnija točka do koje pomaci D najviše premašuju pomake G. Ako za cijeli put p vrijedi da je do svake točke više ili jednako pomaka G nego D, tada oznaku $\bullet$ postavljamo krajnje lijevo.

Sada ćemo grupirati ove cjelobrojne puteve u klase ekvivalencije dane cikličkom permutacijom puteva bez dolova. Neka $[p]$ označava klasu od p.

Za primjer sa slike je

$$[p] = \left\{ \begin{matrix} (GGGDDD)(GGD)(GDD) \bullet (GGD)(GD) \\ (GD)(GGGDDD)(GGD)(GDD) \bullet (GGD) \\ \bullet(GGD)(GD)(GGGDDD)(GGD)(GDD) \\ (GDD) \bullet (GGD)(GD)(GGGDDD)(GGD) \\ (GGD)(GDD) \bullet (GGD)(GD)(GGGDDD) \end{matrix} \right\}.$$

Primjećujemo da se svaka $\bullet$ ciklički permutira zajedno s putevima bez dolova, a to je zato što put od oznake pa nadalje uvijek ima više pomaka G nego D čitajući s lijeva na desno. Dakle, oznaka $\bullet$ na jedinstven način određuje cikličku permutaciju od p te klasa $[p]$ mora sadržavati $k+1$ različitih puteva. Nadalje, uvijek postoji jedan put koji ima oznaku skroz lijevo. Taj put ima dolove za koje vrijedi $y_i - x_i \geq 0$ pa je to (ako zanemarimo početni pomak G) Dyckov put. Ilustrirajmo puteve koji su u istoj klasi ekvivalencije na jednoj slici.



Slika 3.2: Jedna klasa ekvivalencije i Dyckov put koji sadrži na primjeru puta za koji je $n = 4$ i $k + 1 = 3$ vrha

Možemo zaključiti da je

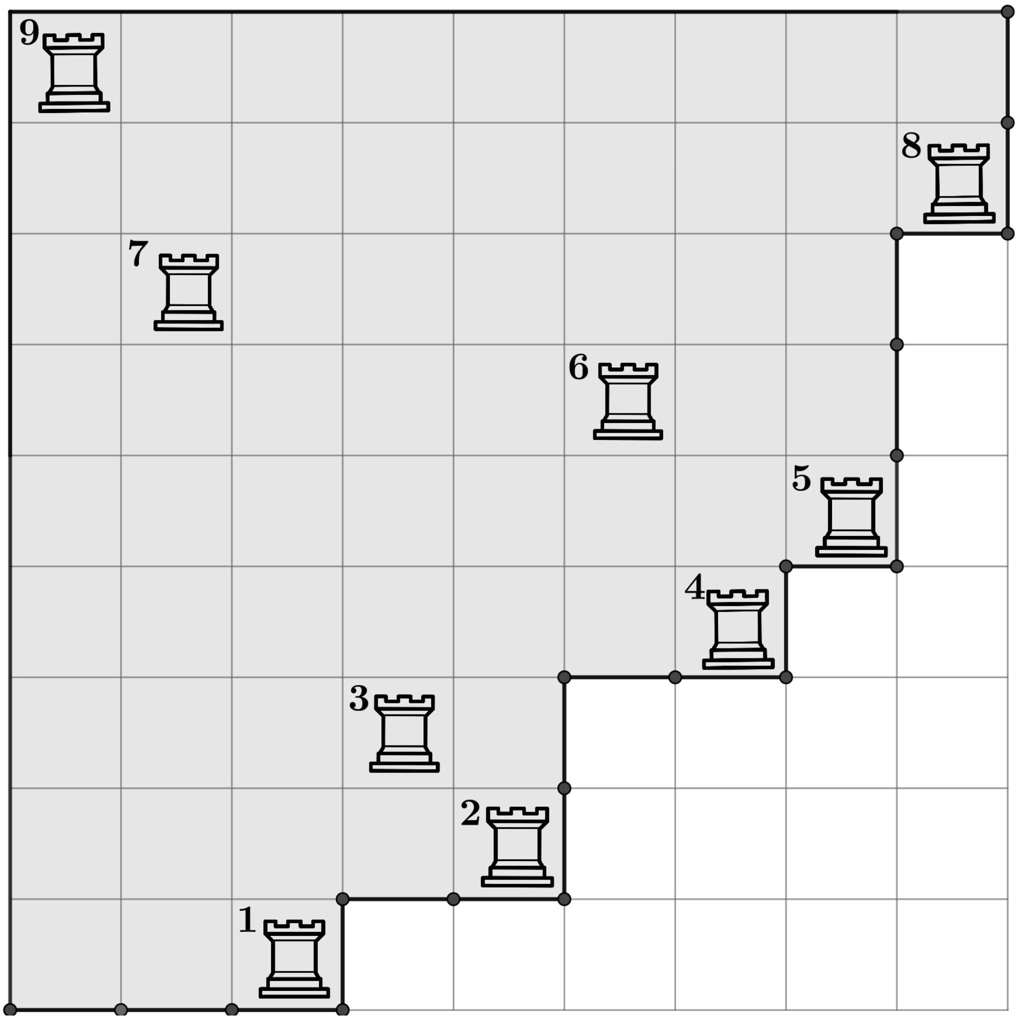
$$(k+1)\,|\{p \in \mathrm{Dyck}(n) : \mathrm{vrh}(p) = k+1\}| = |\mathcal{P}| = \binom{n}{k}\binom{n-1}{k},$$

što smo i htjeli pokazati.

3.4 Bijekcija između Dyckovih puteva i 231-slobodnih permutacija

U ovom odjeljku konstruirat ćemo bijekciju između Dyckovih puteva i 231-slobodnih permutacija koristeći šahovsku ploču i topove. U kombinatorici se često koristi šahovska ploča, a nerijetko se pojavljuju i topovi za dokazivanje pojedinih kombinatornih identiteta. Istaknimo kako ćemo mi u stvaranju ove bijekcije koristiti obične topove, tj. one koji se po šahovskoj ploči mogu kretati u 4 smjera: gore, dolje, lijevo i desno.

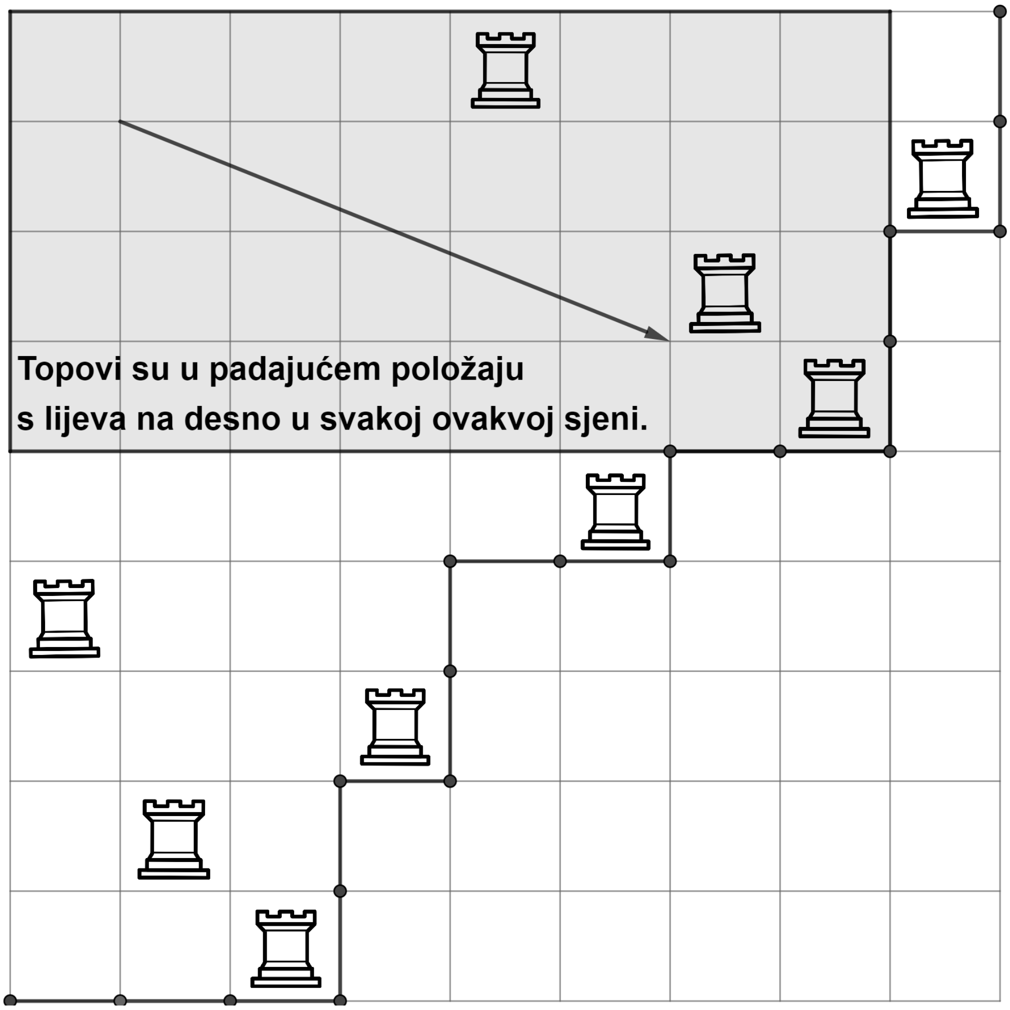
Prvo nacrtajmo permutaciju kao raspored nenapadajućih topova na šahovskoj ploči, tj. za $w_i = j$ stavimo topa u i-tom stupcu (s lijeva na desno) i j-tom redu (odozdo prema gore). Zatim zasjenimo polja koja sadrže topove i polja koja su lijevo i/ili gore od tih polja. Rub osjenčanog područja je put koji ostaje ispod pravca $y = x$, pa je zrcalna slika Dyckovog puta. Naime, kada bi za neki vrh (k, l) u tom putu imali $l > k$, to bi značilo da w treba skup $\{k+1, \ldots, n\}$ preslikati unutar skupa $\{l+1, \ldots, n\}$. No prvi skup ima $n - k$ elemenata, što je veće od $n - l$ elemenata koliko ih ima drugi, pa bismo dobili kontradikciju s injektivnošću od w. Neka je $\psi : S_n(231) \to \mathrm{Dyck}(n)$ opisano preslikavanje.



Slika 3.3: Konstrukcija Dyckovog puta iz 231-slobodne permutacije. Na slici je prikaz zrcalne slike puta pridruženog permutaciji 971326458 koja je predstavljena danim rasporedom nenapadajućih topova na šahovskoj ploči.

Prasliku puta p s obzirom na ψ konstruiramo na sljedeći način. Prvo nacrtamo zrcalnu sliku puta p i postavimo topove s desna na lijevo na najdonju nezauzetu poziciju u stupcu koja je iznad puta, kao što je prikazano na Slici 3.4.

Nije teško provjeriti da ovakvu konstrukciju možemo napraviti jer je zrcalni put od p ispod dijagonale, a može se i pokazati da je dobiveno preslikavanje zaista inverzno preslikavanju ψ.



Slika 3.4: Konstrukcija 231-slobodne permutacije iz Dyckovog puta. U ovom slučaju preslikavanjem ψ^{-1} dobivamo permutaciju 421395768.

Iz takve konstrukcije možemo vidjeti da svaki *vrh* puta p (gdje smo postavili topove u kut u ψ^{-1}) odgovara maksimalnoj padajućoj stazi $w_i > w_{i+1} > \cdots > w_j$ od $\psi^{-1}(p) = w$. Broj maksimalnih padajućih staza je $\mathrm{rast}(w)+1 = n-\mathrm{pad}(w)$ (vidi Propozicije 2.7 i 2.9) te dolazimo do sljedećeg.

Propozicija 3.8. *Za svaku $w \in S_n(231)$, bijekcija ψ zadovoljava*

$$\mathrm{pad}(w) = n - 1 - \mathrm{dol}(p) = n - \mathrm{vrh}(p). \tag{3.12}$$

Stoga, vrijedi

$$\begin{aligned} N_{n,n-1-k} &= |\{w \in S_n(231) : \mathrm{pad}(w) = n-1-k\}| \\ &= |\{p \in \mathrm{Dyck}(n) : \mathrm{vrh}(p) = \mathrm{dol}(p) + 1 = k+1\}| \,. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $N_{n,n-1-k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$, pa je

$$N_{n,k} = \frac{1}{n-1-k+1}\binom{n}{n-1-k}\binom{n-1}{n-1-k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k} = N_{n,n-1-k},$$

gdje smo iskoristili jednostavni identitet

$$\frac{1}{n-k}\binom{n}{n-k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Dakle, dokazali smo formulu za Narayanine brojeve $N_{n,k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$.

3.5 Veza Narayaninih brojeva i Pascalovog trokuta

Sada kada imamo eksplicitnu formulu za Narayanine brojeve možemo je i zapisati u drugačijem obliku.

Mi ćemo raspisati ovu formulu pomoću eksplicitne formule za binomne koeficijente

$$\begin{aligned} N_{n,k} &= \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k} \\ &= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}. \end{aligned}$$

Zamijenimo li jedinicu u nazivniku od $\frac{1}{k+1}$ s izrazom $n+1-n$ dobivamo

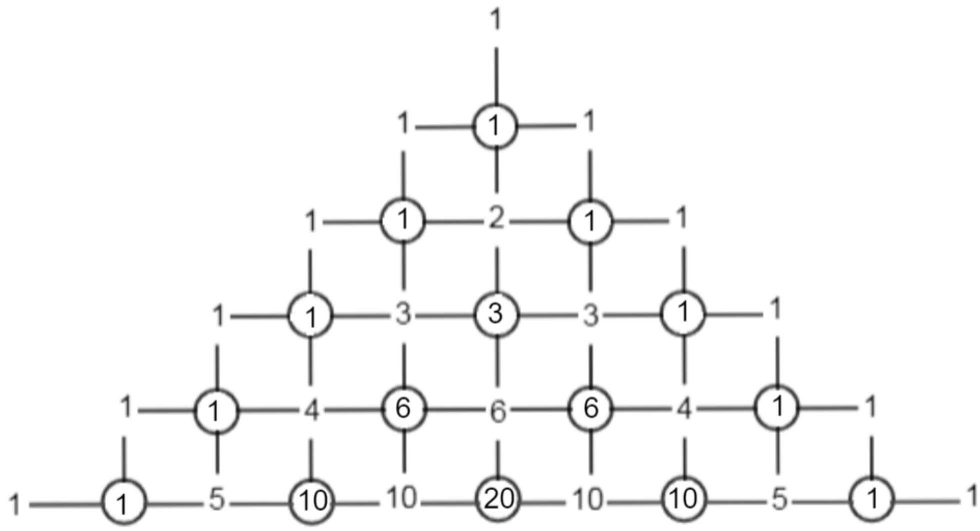
$$\begin{aligned} &\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} - \frac{n}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-1-k)!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}\binom{n-1}{k} - \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

Tako smo došli do jednog lijepog identiteta za Narayanine brojeve iskazanog u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.9. *Za Narayanin broj $N_{n,k}$ vrijedi*

$$N_{n,k} = \det\begin{bmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{bmatrix} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}. \tag{3.13}$$

Dakle, trokut Narayaninih brojeva dobivamo iz 2x2 minora u Pascalovom trokutu kako je prikazano na Slici 3.5.

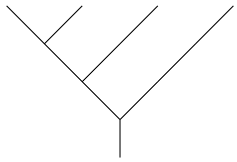
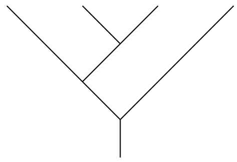
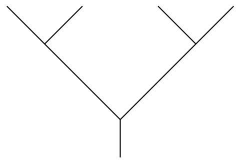
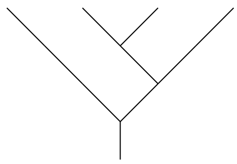
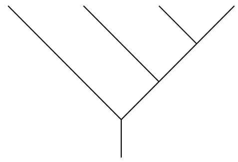


Slika 3.5: Trokut Narayaninih brojeva (zaokruženi) dobivenih pomoću determinanti iz elemenata Pascalovog trokuta

3.6 Još neki primjeri

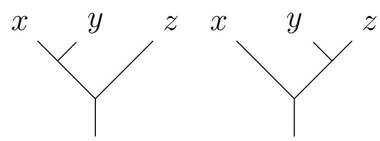
U nastavku ovog potpoglavlja promotrimo nekoliko primjera s Narayaninim brojevima.

Započnimo s primjerom u kojemu se pojavljuju binarna stabla. Planarno Binarno stablo veličine n je planarno stablo s korijenom i n unutarnjih čvorova takvo da svaki unutarnji čvor ima dvoje djece (lijevo i desno dijete). Ako ima n unutarnjih čvorova, to povlači da ima $n+1$ listova. Neka $\mathrm{PB}(n)$ označava skup planarnih binarnih stabla s n unutarnjih čvorova. Sljedeća tablica prikazuje planarna binarna stabla s $n = 3$ unutarnjih čvorova grupiranih prema broju k *lijevo-usmjerenih* listova.

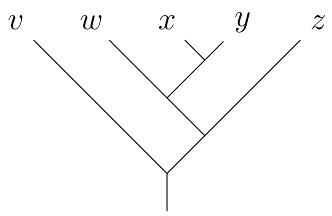
$n \diagdown k$	1	2	3
3		  	

Tablica 3.4: Binarna stabla grupirana prema broju lijevo-usmjerenih listova

Planarno binarno stablo je kombinatorna reprezentacija načina za računanje asocijativnog produkta $n+1$ elemenata. Na primjer neka je $n = 2$, a xyz dani produkt. Tada imamo samo dvije mogućnosti $((xy)z)$ i $(x(yz))$ za računanje tog produkta i one odgovaraju sljedećim stablima.

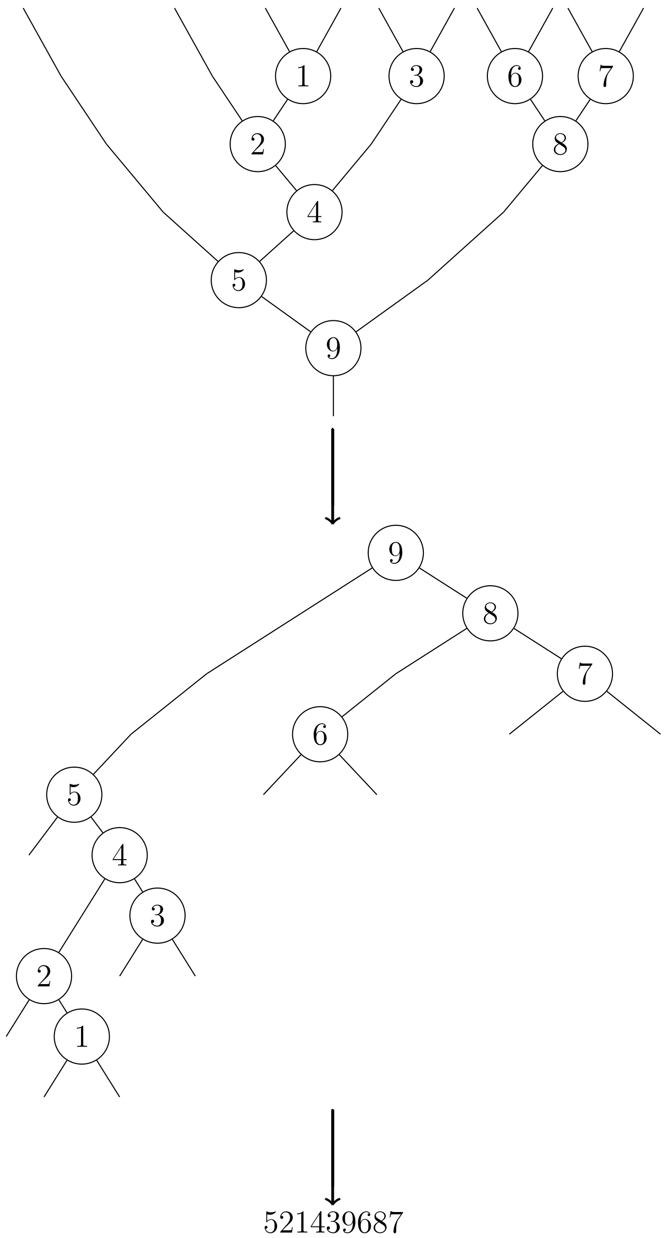


Ovdje x, y i z označavaju listove. Time smo prikazali jednu prirodnu bijekciju između evaluacija asocijativnih produkata $n+1$ elemenata i planarnih binarnih stabla s n unutarnjih čvorova. Jedan nešto veći primjer te bijekcije je



$\longleftrightarrow (v((w(xy))z)).$

Može se pokazati da planarna binarna stabla zadovoljavaju Catalanovu rekurziju, ali postoji i direktna bijekcija takvih stabala s 231-slobodnim permutacijama koje preslikavaju lijevo-usmjerene listove u padove kao što ilustrira sljedeća slika.



Slika 3.6: Bijektivno preslikavanje planarnog binarnog stabla u 231-slobodnu permutaciju

Ovu bijekciju iskazujemo i dokazujemo u propoziciji koja slijedi.

Propozicija 3.10. *Postoji bijekcija između* PB(n) *i* $S_n(231)$ *koja binarna stabla s* $k+1$ *lijevo-usmjerenih listova preslikava u 231-slobodne permutacije s* k *padova.*

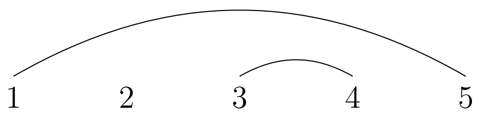
Drugim riječima Narayanini brojevi broje binarna stabla prema lijevo-usmjerenim listovima

$$N_{n,k} = |\{\tau \in \mathrm{PB}(n) : \tau \text{ ima } k+1 \text{ lijevo-usmjerenih listova}\}|. \tag{3.14}$$

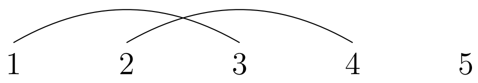
Dokaz. Promatrajući Sliku 3.6 uočavamo da je preslikavanje prikazano na toj slici neznatna modifikacija preslikavanja svih permutacija u rastuća binarna stabla iz Propozicije 2.13.

Također, lako se vidi da brojanje lijevo-usmjerenih listova odgovara brojanju desne unutarnje djece. □

Nepresijecajuća particija $\Pi = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$, je particija skupa $\{1, \ldots, n\}$ takva da ako je $\{a, c\} \subseteq R_i$ i $\{b, d\} \subseteq R_j$, gdje je $1 \leq a < b < c < d \leq n$, onda nužno vrijedi $i = j$. Drugim riječima, dva para brojeva iz različitih blokova ne mogu biti isprepleteni. Neka NC(n) označava skup svih nepresijecajućih particija od $\{1, \ldots, n\}$. Mi ćemo crtati particije kao grafove sa skupom vrhova $\{1, \ldots, n\}$, npr.

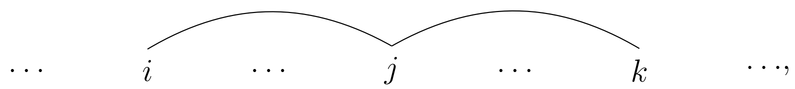


$= \{\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 4\}\} \in \mathrm{NC}(5)$,

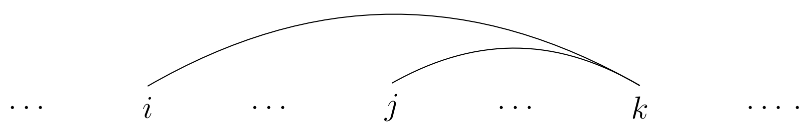


$= \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\} \notin \mathrm{NC}(5)$.

Dobro je primijetiti kako se pojam *presijecanja* očituje na ovim dijagramima. Kako bi naše slike bile jednoznačne imat ćemo samo lukove između uzastopnih elemenata u blokovima particije. Npr., ako su $i < j < k$ u istom bloku, crtat ćemo



a ne

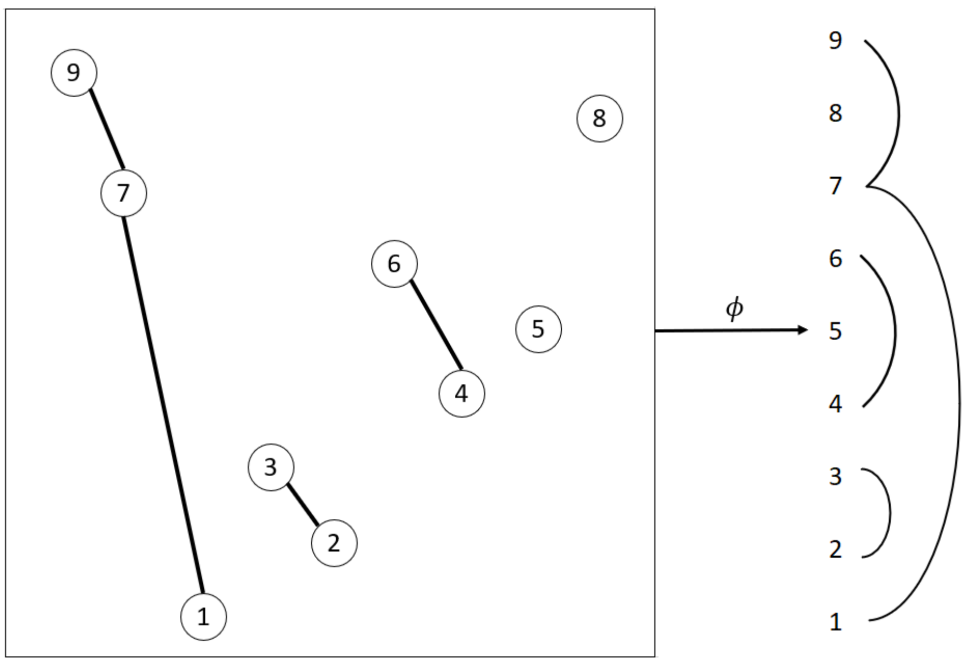


U sljedećoj tablici pokažimo jedan primjer nepresijecajućih particija n-članog skupa grupiranih prema broju blokova u particiji.

$n \diagdown k$	1	2	3
3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
		1 2 3	
		1 2 3	

Tablica 3.5: Nepresijecajuće particije za $n = 3$ elementa grupirane prema broju blokova k.

Možemo definirati bijekciju $\phi : S_n(231) \to NC(n)$ preslikavanjem padajućih staza permutacije u blokove particije.



Slika 3.7: Padajuće staze 231-slobodne permutacije daju nepresijecajuću particiju

Nadalje, vidimo da je broj padajućih staza od w, tj. broj blokova u particiji Π jednak

$$\text{rast}(w) + 1 = n - \text{pad}(w). \tag{3.15}$$

Propozicija 3.11. *Za svaki $w \in S_n(231)$, bijekcija ϕ zadovoljava*

$$\text{pad}(w) = n - |\phi(w)|. \tag{3.16}$$

Stoga,

$$|\{w \in S_n(231) : \text{pad}(w) = k\}| = |\{\Pi \in \text{NC}(n) : |\Pi| = n - k\}|. \tag{3.17}$$

Drugim riječima, Narayanini brojevi broje nepresijecajuće particije prema broju blokova

$$N_{n,k} = |\{\pi \in \text{NC}(n) : |\Pi| = n - k\}|. \tag{3.18}$$

Dokaz. Ključna stvar ovog dokaza je pokazati da je inverz preslikavanja ϕ prikazanog na Slici 3.7 dobro definiran. Preciznije, treba se uvjeriti da za danu nepresijecajuću particiju njezine blokove koji postaju padajuće staze možemo rasporediti na jedinstven način tako da izbjegnemo uzorak 231.

Neka su ti blokovi $R_1, \ldots, R_k$. Tvrdimo da ako poredamo te blokove tako da je $\min(R_1) < \min(R_2) < \ldots < \min(R_k)$, permutacija formirana spajanjem blokova u tom poretku izbjegava uzorak 231. Kada bi postojao 231 uzorak, moralo bi "2" ležati u bloku R negdje lijevo od blokova koji sadrže "3" i "1". Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su "3" i "1" u istom bloku koji nazovimo S. Kako je minimalni element bloka R manji od minimalnog elementa bloka S, mora postojati element "0" u bloku R. Odnosno, postoje neki $a, c \in R$ i $b, d \in S$ takvi da je $a < b < c < d$ što povlači da su blokovi R i S presijecajući. Kako su blokovi nepresijecajući, zaključujemo da ne postoji uzorak 231.

Ako poredamo blokove na drugi način, postoji blok R lijevo od bloka S pri čemu je $\min(S) < \min(R) < \max(S)$, ali u tom slučaju $a = \min(S)$, $b = \min(R)$ i $c = \max(S)$ formiraju uzorak 231. □

Prikažimo još jedan primjer gdje susrećemo Narayanine brojeve.

Može se pokazati da Catalanov broj C_n broji standardne Youngove tablice dimenzija $2 \times n$ (ponekad se koristi i naziv Ferrerovi dijagrami iako oni obično označavaju prikaz pomoću kružića). Youngova tablica koju ćemo mi koristiti je dvodimenzionalna matrica brojeva koji se povećavaju udesno u svakom retku i prema dolje u svakom stupcu. Standardna Youngova tablica sadrži sve različite cijele brojeve od 1 do broja polja. Na sljedećem prikazu nalazi se četrnaest Youngovih tablica dimenzija 2×4 za koje je broj polja 8.

1	2	3	4
5	6	7	8

1	2	3	5
4	6	7	8

1	2	4	5
3	6	7	8

1	2	3	6
4	5	7	8

1	3	4	5
2	6	7	8

1	2	5	6
3	4	7	8

1	2	3	7
4	5	6	8

1	2	4	6
3	5	7	8

1	3	4	6
2	5	7	8

1	3	5	6
2	4	7	8

1	2	4	7
3	5	6	8

1	3	4	7
2	5	6	8

1	2	5	7
3	4	6	8

1	3	5	7
2	4	6	8

Kako tema rada nisu Catalanovi brojevi, mi ćemo samo jednim profinjenjem opisati statistiku za Youngovu tablicu takvu da njezina distribucija daje Narayanine brojeve.

Za standardnu Youngovu tablicu s dva retka možemo napraviti Dyckov put tako da je i-ti korak prema gore ako je broj i u prvom retku tablice, a i-ti korak je udesno ukoliko je broj i u donjem retku tablice.

Tako na primjer, tablica

1	2	5	6
3	4	7	8

odgovara Dyckovom putu GGDDGGDD.

Vrh na putu dobivamo kad god se broj i pojavi u gornjem retku, a $i+1$ u donjem retku tablica. Skup svih takvih i naziva se skup padova Youngove tablice. Ti padovi odgovaraju vrhovima Dyckovih puteva, te dobivamo Narayanine brojeve prebrojavanjem dvoretčanih standardnih Youngovih tablica prema broju padova.

3.7 Funkcija izvodnica za Narayanine brojeve

Vidjet ćemo da funkcija izvodnica za Narayanine brojeve (s fiksnim n) zadovoljava profinjenu rekurziju za Catalanove brojeve.

Definicija 3.12. *Za fiksni $n \in \mathbb{N}$, Narayanin polinom definiramo sa*

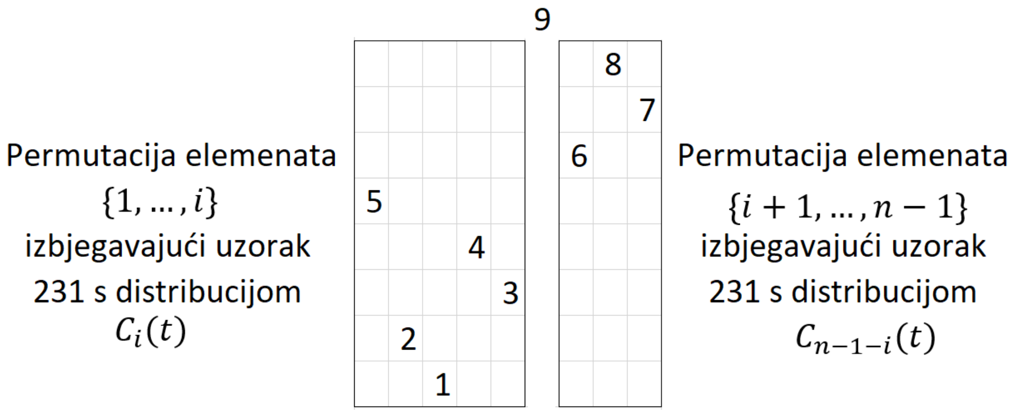
$$C_n(t) = \sum_{w \in S_n(231)} t^{\mathrm{pad}(w)} = \sum_{k=0}^{n-1} N_{n,k} t^k. \tag{3.19}$$

Stavljamo i $C_0(t) = 1$.

Prateći argumentaciju koja nas je dovela do Teorema 3.3 i pritom pazeći na padove, dobivamo rekurziju za Narayanin polinom. U dokazu za taj teorem korištena je implicitna bijekcija između elemenata $w \in S_n(231)$ i parova (u, v) gdje je $u \in S_i(231)$ za neki i te je v permutacija od $\{i+1, \ldots, n-1\}$ koja izbjegava uzorak 231. To možemo zapisati

$$w = u_1 \ldots u_i n v_1 \ldots v_{n-1-i}$$

kao na slici u nastavku.



Slika 3.8: Ideja u pozadini jednadžbe (3.21)

Kako je broj padova od w za jedan veći od sume broja padova od u i broja padova od v, dobivamo

$$\sum_{\substack{w \in S_n(231) \\ w(i+1)=n}} t^{\mathrm{pad}(w)} = tC_i(t)C_{n-1-i}(t). \tag{3.20}$$

Također, ako je $i = n-1$ tada je v prazna riječ, pa je broj padova od w jednak broju padova od u. Ovaj slučaj doprinosi sa članom $C_{n-1}(t)$ distribuciji, te zatim sumiranjem (3.20) po svim $i < n-1$ dobivamo sljedeći rezultat sličan Teoremu 2.21 za Eulerovske polinome.

Teorem 3.13. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$C_n(t) = C_{n-1}(t) + t\sum_{i=0}^{n-2} C_i(t)C_{n-1-i}(t). \tag{3.21}$$

Sada imamo rekurziju pomoću koje možemo izvesti funkciju izvodnicu za Narayanine polinome

$$C(t, z) = \sum_{n \geq 0} C_n(t)z^n. \tag{3.22}$$

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
C(t,z) &= \sum_{n\geq 0} C_n(t) z^n \\
&= C_0(t)z^0 + \sum_{n\geq 1} C_n(t) z^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \left(C_{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-2} C_i(t) C_{n-1-i}(t) \right) z^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} C_{n-1}(t) z^n + t \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-2} C_i(t) C_{n-1-i}(t) z^n \\
&= 1 + z \sum_{n\geq 1} C_{n-1}(t) z^{n-1} + tz \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-2} C_i(t) z^i C_{n-1-i}(t) z^{n-i-1} \\
&= 1 + zC(t,z) + tzC(t,z)(C(t,z) - 1).
\end{aligned}
$$

Sređivanjem ove jednadžbe dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$
tzC(t,z)^2 - (1 + z(t-1))C(t,z) + 1 = 0.
$$

Riješimo kvadratnu jednadžbu te konačno dobivamo

$$
C(t,z) = \frac{1 + z(t-1) - \sqrt{1 - 2z(t+1) + z^2(t-1)^2}}{2tz}. \tag{3.23}
$$

Primijetimo da uvrštavanjem $t = 1$ dobivamo funkciju izvodnicu (1.11) za Catalanove brojeve što odgovara činjenici da je $C_n = C_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} N_{n,k}$.

Bibliografija

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics, Second Edition, Addison-Wesley 1989.

[2] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna Matematika 1, Školska knjiga, Zagreb 2004.

[3] T. K. Petersen, Eulerian Numbers, Birkhäuser 2015.

[4] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1, Second Edition, Cambridge 2012.

[5] D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb 2001.

[6] Eulerian Number, dostupno na: `https://mathworld.wolfram.com/EulerianNumber.html` (kolovoz 2020.).

[7] Narayana number, dostupno na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Narayana_number` (kolovoz 2020.).

Sažetak

Za permutaciju $w = w_1 w_2 \dots w_n \in S_n$ kažemo da je prirodni broj i pad ako je $w_i > w_{i+1}$. Eulerovski broj označen s $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ je broj permutacija u S_n s točno k padova. Označimo li sa $S_n(231)$ permutacije iz S_n u kojima se ne pojavljuje uzorak 231, Narayanin broj je broj permutacija iz $S_n(231)$ s k padova.

Ovaj diplomski rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju navodimo neke osnovne pojmove i rezultate potrebne za razumijevanje nastavka rada. Drugo poglavlje uvodi Eulerovske brojeve koje proučavamo počevši od definicije i osnovnih svojstava. Uvode se Eulerovski polinomi te dokazuju dva važna identiteta, a poglavlje završavamo jednim geometrijskim problemom u kojemu se neočekivano pojavljuju Eulerovski brojevi.

Treće poglavlje bavi se Narayaninim brojevima koji su u bliskoj vezi s Eulerovskim brojevima. U ovom poglavlju važno mjesto imaju i Catalanovi brojevi kojima su Narayanini brojevi svojevrsno profinjenje. Prikazano je nekoliko primjera i dobivena funkcija izvodnica za Narayanine brojeve.

Summary

For any permutation $w = w_1 w_2 \dots w_n \in S_n$, we call a positive integer i a descent if $w_i > w_{i+1}$. Eulerian number denoted $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ is the number of permutations in S_n with exactly k descents. Denoting by $S_n(231)$ the set of permutations in S_n not containing the pattern 231, Narayana number $N_{n,k}$ is the number of permutations in $S_n(231)$ with k descents.

This Master's thesis consists of three chapters. The first chapter contains some introductory notions and results needed in the rest of the work. The second chapter examines Eulerian numbers starting from their definition and basic properties. We introduce the Eulerian polynomials and prove two important identities finishing this part with a problem from geometry where Eulerian numbers make an unexpected appearance.

The third chapter treats the Narayana numbers which are closely connected to Eulerian numbers. Catalan numbers also play an important role in this chapter since Narayana numbers are shown to be their refinement. Several examples where Narayana numbers appear are presented and their generating function is obtained.

Životopis

Rođen sam 13. siječnja 1996. u Zagrebu, a odrastao u Velikoj Gorici gdje sam pohađao Osnovnu školu Jurja Habdelića do 2010. godine kada nastavljam školovanje u Gimnaziji Velika Gorica gdje upisujem opći smjer koji završavam 2014. godine. Po završetku srednje škole upisujem studij matematike, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2018. završavam preddiplomski studij te nastavljam obrazovanje na diplomskom studiju matematike, nastavnički smjer na istom fakultetu. Tijekom studija sudjelovao sam u organizaciji Dana otvorenih vrata Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Večerima matematike u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva te u mnogim volonterskim akcijama u organizaciji Crvenog križa Velike Gorice i Goričkog kluba mladih.