Rotacijski skupovi preslikavanja na minimalnim podskupovima torusa

Pupić, Josip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Pupić

ROTACIJSKI SKUPOVI PRESLIKAVANJA NA MINIMALNIM PODSKUPOVIMA TORUSA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sonja Štimac

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mome didu Stipi

Sadržaj

Uvod

Centralni pojam ovog rada je pojam *rotacijskog skupa*. Začetci ovog pojma leže u jednostavnijem pojmu *rotacijskog broja*, kojeg u [6] uvodi Poincaré, 1885. godine, autor niza temeljnih pojmova teorije dinamičkih sustava. Radi se o pojmu koji opisuje gibanje točaka pod iteracijama nekog homeomorfizma kružnice, odnosno njegovog *podizanja*, prirodno pridruženog preslikavanja na $\mathbb{R}$ promatranom homeomorfizmu. Intuitivno, rotacijski broj predstavlja "prosječni pomak" točke prilikom jedne iteracije našeg homeomorfizma. Generalizaciju na neprekidna preslikavanja stupnja 1 na kružnici proveli su Newhouse, Palis i Takens u [4], 1979. godine. U tom slučaju dolazimo do *rotacijskog intervala*. Oba koncepta pokazala su se korisnima pa se prirodno nametnula potreba za proširenjem pojma na više-dimenzionalne slučajeve. Nakon definicije i upoznavanja svojstava rotacijskih skupova neprekidnih preslikavanja na m-dimenzionalnom torusu, fokusiramo se na podslučaj homeomorfizama na dvodimenzionalnom torusu. Ondje najprije proširujemo pojam rotacijskog skupa preslikavanja do pojma rotacijskog skupa preslikavanja na podskupu torusa, a zatim se posvećujemo pronalaženju rotacijskih skupova sa nekim zanimljivim svojstvima. U tu svrhu, orijentiramo se na posebnu klasu podskupova torusa, takozvane *minimalne* skupove. Važnu ulogu u pronalaženju traženih rotacijskih skupova odigrava simbolička dinamika, odnosno prebacivanje komplektnog razmatranja preslikavanja dinamike na torusu u jezik nizova simbola.

Rad je strukturiran u tri poglavlja. U prvom poglavlju obrađujemo jednodimenzionalni slučaj. Preciznije, uvodimo pojam homeomorfizma na kružnici te njegovog podizanja, obrađujući uglavnom [7]. Nakon razmatranja nekih osnovnih svojstava tih preslikavanja, definiramo pojam rotacijskog broja i razmatramo neka njegova svojstva. Pritom primijećujemo razlike u dinamici, ovisno o tome je li rotacijski broj racionalan ili iracionalan broj. Racionalni slučaj pokazuje se puno jednostavnijim i većina razmatranja vezana je uz iracionalni slučaj. Glavni rezultat prvog poglavlja je *Denjoyev teorem* koji, uz neke pretpostavke na promatrani homeomorfizam, zaključuje da je dinamika tog preslikavanja jednaka dinamici rotacije za iracionalni rotacijski broj promatranog homeomorfizma.

U drugom poglavlju, nudimo nekoliko mogućih proširenja pojma rotacijskog broja na pojam rotacijskog skupa u višedimenzionalnom slučaju te biramo onaj s kojim ćemo dalje raditi. Zatim pokazujemo niz svojstava rotacijskog skupa neprekidnog preslikavanja u

$\mathbb{R}^m$, među kojima su najvažnija zatvorenost i povezanost. Naposljetku, fokusiramo se na podslučaj homeomorfizama na dvodimenzionalnom torusu, odnosno njihovih podizanja, gdje pokazujemo da vrijede nešto jača svojstva, među kojima je najvažnije konveksnost rotacijskog skupa.

U trećem poglavlju ostajemo pri promatranju homeomorfizama na dvodimenzionalnom torusu i proširujemo pojam rotacijskog skupa podizanja F na rotacijski skup preslikavanja F na nekom podskupu torusa. Cilj poglavlja je pronalazak zanimljivih rotacijskih skupova; konkretno pokazujemo da postoji minimalan skup čiji rotacijski skup separira ravninu $\mathbb{R}^2$ na dva nepovezana dijela. U tu svrhu koristimo simboličku dinamiku. Pokazujemo da se gibanje točaka pod iteracijama podizanja F može simbolički reprezentirati nizovima znakova $0, 1, .., N$. Stvaranjem adektvatne podloge za poistovjećivanje simboličkih i dinamičkih rotacijskih skupova, problem traženja željenog rotacijskog skupa svodimo na problem konstrukcije niza znakova s nekim karakteristikama, čiju konstrukciju potom i provodimo.

Ovim putem htio bih se zahvaliti mentorici Sonji Štimac na iznimno zanimljivom prijedlogu teme i cjelokupnoj pomoći u izradi rada. Ovaj rad me potaknuo na daljnje obrazovanje u matematici i na tome sam vrlo zahvalan. Također, htio bih zahvaliti svojoj osnovnoškolskoj profesorici Mirjani Ivandi, koja me uvela u matematička natjecanja i sa mnom postigla moje prve veće uspjehe, koji su me naveli na ostanak u svijetu matematike.

Poglavlje 1

Rotacijski brojevi homeomorfizama na kružnici

1.1 Homeomorfizam, podizanje, rotacijski broj

Definicija 1.1.1. *Neka su X, Y topološki prostori te neka je dano preslikavanje $f : X \to Y$. Preslikavanje f je* ***homeomorfizam*** *ako je f neprekidna bijekcija takva da je i f^{-1} neprekidna.*

Definicija 1.1.2. *Funkciju $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ danu s $\pi(x) = x$ (mod 1) nazivamo* ***kanonska projekcija****.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam. Kažemo da T* ***čuva orijentaciju*** *ako postoji rastući homeomorfizam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takav da je $\pi \circ g = T \circ \pi$. Pritom g označavamo s $\hat{T}$ i nazivamo* ***podizanje****.*

Primjer 1.1.4. *Za homeomorfizam T zadan s $T(x) = (x + \alpha)$ (mod 1), pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$, preslikavanje $\hat{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dano s $\hat{T}(x) = x + \alpha + k$ je podizanje od T. Naime, vrijedi*

$$\pi(\hat{T}(x)) = \pi(x + \alpha + k) = (x + \alpha + k) \text{ (mod 1)} = (x + \alpha) \text{ (mod 1)},$$

$$T(\pi(x)) = \pi(x) + \alpha \text{ (mod 1)} = (x + \alpha) \text{ (mod 1)}$$

Ovaj primjer pokazuje i da za proizvoljan homeomorfizam, njegovo podizanje nije jedinstveno.

Lema 1.1.5.

1. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam. Ako je $\hat{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ njegovo podizanje, onda je svako drugo njegovo podizanje $\hat{T}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika $\hat{T}'(x) = \hat{T}(x) + k$, za neki $k \in \mathbb{Z}$ i za sve $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $|x - y| \leq k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, vrijedi i $|\hat{T}(x) - \hat{T}(y)| \leq k$. Iteriranjem onda slijedi $|\hat{T}^n(x) - \hat{T}^n(y)| \leq k$, za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. 1. S obzirom da su $\hat{T}$ i $\hat{T}'$ podizanja od T, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\pi(\hat{T}(x)) = T(\pi(x)) = \pi(\hat{T}'(x))$$

odnosno $\hat{T}(x) \equiv \hat{T}'(x) \pmod 1$. Stoga, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ je $\hat{T}(x) = \hat{T}'(x) + k_x$, pri čemu je $k_x \in \mathbb{Z}$. Pretpostavimo sada da postoje $x < y \in \mathbb{R}$ takvi da je $k_x \neq k_y$. Definirajmo $a_0 = x, b_0 = y$. Primijetimo da je zbog početne pretpostavke, $k_{\frac{x+y}{2}} \neq k_x$ ili $k_{\frac{x+y}{2}} \neq k_y$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $k_{\frac{x+y}{2}} \neq k_x$. Sada definirajmo $a_1 = a_0 = x$ i $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{x+y}{2}$. Induktivno ovako definiramo segmente $I_n := [a_n, b_n]$. Po Cantorovom teoremu, s obzirom da je $(I_n)_n$ padajući niz segmenata čija širina teži u 0, postoji jedinstvena $c \in \mathbb{R}$ takva da je $c = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. S obzirom da su $\hat{T}$ i $\hat{T}'$ podizanja, posebno su i neprekidne funkcije pa postoje ε_1 i ε_2 takvi da

$$|x - c| < \varepsilon_1 \Rightarrow |\hat{T}(x) - \hat{T}(c)| < \frac{1}{2},$$

$$|x - c| < \varepsilon_2 \Rightarrow |\hat{T}'(x) - \hat{T}'(c)| < \frac{1}{2}.$$

Uzmemo li $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, vrijedi

$$\begin{aligned} |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |k_x - k_c| &= |\hat{T}'(x) - \hat{T}(x) - \hat{T}'(c) + \hat{T}(c)| \\ &\leq |\hat{T}'(x) - \hat{T}'(c)| + |\hat{T}(x) - \hat{T}(c)| \\ &< 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Međutim, s obzirom da su k_x i k_c cijeli brojevi te su udaljeni za manje od 1, lako zaključujemo da je $k_x = k_c$ za sve x na ε-okolini od c. Nadalje, s obzirom da se c nalazi u svakom I_n, a njihove širine teže u 0, očito postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $b_n - a_n < \varepsilon$, odakle pak slijedi $|a_n - c| < \varepsilon$ te $|b_n - c| < \varepsilon$. Dakle, dobivamo $k_{a_n} = k_c = k_{b_n}$ što je kontradikcija s definicijom segmenata I_n (po definiciji njihovi rubovi a_n, b_n imaju različite pridružene vrijednosti k_{a_n}, k_{b_n}). Dakle, početna pretpostavka je pogrešna, odnosno $k_x = k_y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, odakle je $\hat{T}' = \hat{T} + k$, za neki $k \in \mathbb{Z}$.

2. Pretpostavimo suprotno, odnosno da su $x < y \in \mathbb{R}$ takvi da je $|x - y| = y - x \leq k$ i $|\hat{T}(x) - \hat{T}(y)| > k$. S obzirom da je $\hat{T}$ rastuća funkcija, vrijedi i $\hat{T}(y) > \hat{T}(x)$. Nadalje, neka su u, v realni brojevi koji zadovoljavaju $\hat{T}(u) = \hat{T}(v)+1$ (za proizvoljan v ovakav u svakako postoji jer je $\hat{T}$ surjekcija). Tada je

$$T(\pi(u)) = \pi(\hat{T}(u)) = \pi(\hat{T}(v) + 1) = \pi(\hat{T}(v)) = T(\pi(v)).$$

S obzirom da je T injekcija, vrijedi $\pi(u) = \pi(v)$, odnosno u i v se razlikuju za neki cijeli broj. Budući da je funkcija $\hat{T}$ rastuća i vrijedi $\hat{T}(u) > \hat{T}(v)$, dobivamo i $u > v$, što daje $u \geq v + 1$. Funkcija $\hat{T}$ je neprekidna pa je slika od $R = [x, y]$ segment $S = [\hat{T}(x), \hat{T}(y)]$. Primijetimo da je $\hat{T}(x) + i \in S$ za svaki $0 \leq i \leq k$. Stoga, pošto je $\hat{T}$ surjekcija, postoje $u_0 = x, u_1, ..., u_k$ takvi da je $\hat{T}(u_i) = \hat{T}(x) + i$. Po dokazanoj tvrdnji sada imamo

$$u_k \geq u_{k-1} + 1 \geq ... \geq u_1 + (k-1) \geq x + k.$$

Međutim, po pretpostavci je širina segmenta R manja ili jednaka k pa očito mora biti jednaka i pritom je $u_k = y$. Posljedično bi trebalo biti $\hat{T}(u_k) = \hat{T}(y)$ no to je kontradikcija s obzirom da je $\hat{T}(u_k) - \hat{T}(x) = k$ i $\hat{T}(y) - \hat{T}(x) > k$.
Induktivno, uvrštavanjem $T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)$ umjesto x, y u dobivenu relaciju dobivamo i $|T^n(x) - T^n(y)| \leq k$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

□

Napomena 1.1.6.

- *Slično dobivamo i drugu ogradu, odnosno ako su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $|x - y| \geq k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda vrijedi i $|\hat{T}(x) - \hat{T}(y)| \geq k$. Naime, vrijedi*

$$\pi(\hat{T}(z)) = T(\pi(z)) = T(\pi(z+1)) = \pi(\hat{T}(z+1))$$

što znači da se $\hat{T}(z)$ i $\hat{T}(z+1)$ razlikuju za cijeli broj, a budući da je $\hat{T}$ rastuća, to znači da je $\hat{T}(z+1) \geq \hat{T}(z) + 1$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x < y$. Tada je

$$\hat{T}(y) \geq \hat{T}(x+k) \geq \hat{T}(x+k-1) + 1 \geq ... \geq \hat{T}(x) + k$$

- *Posebno, u kombinaciji s drugim dijelom prethodne leme zaključujemo da za $x, y \in \mathbb{R}$ te $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$y - x = k \quad \Rightarrow \quad \hat{T}(y) - \hat{T}(x) = k$$

Definicija 1.1.7. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam. Definiramo* ***rotacijski broj*** *od T kao*

$$\rho(T) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\hat{T}^n(x)}{n} \text{ (mod 1)}.$$

Napomena 1.1.8.

- *$\rho(T)$ je neovisan o izboru $x \in \mathbb{R}$. Naime, za sve $x, y \in \mathbb{R}$ postoji $k \in \mathbb{Z}^+$ takav da je $|x - y| \leq k$. Po lemi 1.1.5 je tada $|\hat{T}^n(x) - \hat{T}^n(y)| \leq k$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pa je*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|\hat{T}^n(x) - \hat{T}^n(y)|}{n} < \limsup_{n \to +\infty} \frac{k}{n} = 0$$

iz čega lako slijedi

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\hat{T}^n(x)}{n} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\hat{T}^n(y)}{n} \text{ (mod 1)}.$$

- $\rho(T)$ *je neovisan i o izboru podizanja. Naime, također po lemi 1.1.5 imamo* $\hat{T}'(x) = \hat{T}(x) + k$*. Pretpostavimo sada da za neki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\hat{T}'^n(x) = \hat{T}^n(x) + nk$*. Sada imamo*

$$\begin{aligned}\hat{T}'^{n+1}(x) &= \hat{T}'(\hat{T}'^n(x)) = \hat{T}'(\hat{T}^n(x) + nk)\\ &\overset{(*)}{=} \hat{T}'(\hat{T}^n(x)) + nk = \hat{T}(\hat{T}^n(x)) + k + nk\\ &= \hat{T}^{n+1}(x) + (n+1)k\end{aligned}$$

pri čemu jednakost $(*)$ *vrijedi zbog 2. točke napomene 1.1.6. Dakle, indukcijom smo pokazali da je* $\hat{T}'^n(x) = \hat{T}^n(x) + nk$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$ *pa je*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{T}'^n(x)}{n} \text{ (mod 1)} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{T}^n(x) + nk}{n} \text{ (mod 1)}\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{T}^n(x)}{n} + k \text{ (mod 1)}\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{T}^n(x)}{n} \text{ (mod 1)}\end{aligned}$$

Primjer 1.1.9. *Neka je* $R_\rho : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *definiran s* $R_\rho(x) = (x + \rho)$ *(mod 1), pri čemu je* $\rho \in [0, 1)$*. Primijetimo da je* $\hat{R}_\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirano s* $x \mapsto x + \rho$ *podizanje od* R_ρ *pa su sva podizanja tog preslikavanja dana s* $\hat{R}_\rho(x) = x + \rho + k$*,* $k \in \mathbb{Z}$*. Slijedi*

$$\rho(R_\rho) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\hat{R}_\rho(x)}{n} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{x + n\rho}{n} = \rho \text{ (mod 1)}.$$

Preslikavanje R_ρ *zove se* ***rotacija****.*

Propozicija 1.1.10.

1. *Za svaki* $n \geq 1$ *vrijedi* $\rho(T^n) = n\rho(T)$ *(mod 1).*
2. *Ako* T *ima periodičnu točku, odnosno ako postoje* $c \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $T^n(c) = c$*, onda je* $\rho(T)$ *racionalan.*
3. *Ako* $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *nema periodičnih točaka, onda je* $\rho(T)$ *iracionalan.*
4. *U definiciji rotacijskog broja, umjesto* lim sup *možemo pisati* lim*, odnosno dobro je definirano*

$$\rho(T) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\hat{T}^n(x)}{n} \text{ (mod 1)}$$

.

Dokaz. 1. Primijetimo da vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\pi(\hat{T}^n(x)) &= \pi(\hat{T}(\hat{T}^{n-1}(x))) = T(\pi(\hat{T}^{n-1}(x))) \\ &= T(\pi(\hat{T}(\hat{T}^{n-2}(x)))) = T^2(\pi(\hat{T}^{n-2}(x))) \\ &= ... = T^n(\pi(x))\end{aligned}$$

S obzirom da je $\hat{T}^n$ neprekidna bijekcija kao kompozicija takvih funkcija (induktivan zaključak), iz prethodne jednakosti zaključujemo da je ta funkcija podizanje od T^n. Nadalje vrijedi

$$\rho(T^n) = \limsup_{m\to+\infty} \frac{(\hat{T}^n)^m(x)}{m} \pmod 1 = \limsup_{m\to+\infty} \frac{(\hat{T}^{mn})(x)}{mn} \cdot n \pmod 1 = n\rho(T)$$

2. Neka su $c \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $T^n(c+\mathbb{Z}) = c+\mathbb{Z}$. Tada je $\pi(\hat{T}^n(c)) = T^n(\pi(c)) = T^n(c+\mathbb{Z}) = c+\mathbb{Z}$, odnosno $\hat{T}^n(c) - c = k$, za neki $k \in \mathbb{Z}$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $k \geq 0$. Po napomeni 1.1.6, zaključujemo da je $\hat{T}^{n+m}(c) - \hat{T}^m(c) = k$ za sve $m \in \mathbb{N}$. Za proizvoljne $p, r \in \mathbb{N}_{\not{}}$ takve da je $r \leq n-1$ vrijedi

$$\begin{aligned}\hat{T}^{pn+r}(c) &= \hat{T}^{pn}(\hat{T}^r(c)) \\ &= (\hat{T}^{pn}(\hat{T}^r(c)) - \hat{T}^{(p-1)n}(\hat{T}^r(c))) + (\hat{T}^{(p-1)n}(\hat{T}^r(c)) - \hat{T}^{(p-2)n}(\hat{T}^r(c))) + ... \\ &\quad ... + (\hat{T}^{2n}(\hat{T}^r(c)) - \hat{T}^n(\hat{T}^r(c))) + (\hat{T}^n(\hat{T}^r(c)) - \hat{T}^r(c)) + \hat{T}^r(c) \\ &= pk + \hat{T}^r(c)\end{aligned}$$

Sada slijedi

$$\rho(T) = \limsup_{p\to\infty} \frac{\hat{T}^{pn+r}(x)}{pn+r} = \limsup_{p\to\infty} \frac{pk + \hat{T}^r(x)}{pn+r} = \frac{k}{n} \pmod 1 \tag{1.1}$$

3. Pretpostavimo suprotno, tj neka je $\rho(T) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Po prvom dijelu propozicije zaključujemo da za $S := T^q$ vrijedi

$$\rho(S) = \rho(T^q) = q \cdot \rho(T) = q \cdot \frac{p}{q} = p = 0 \pmod 1$$

K tome, kako T nema periodičnih točaka, znamo da ni S nema fiksnih točaka. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ je

$$S(\pi(x)) \neq x + \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \pi(\hat{S}(x)) \neq x + \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \hat{S}(x) \neq x$$

Zbog neprekidnosti od $\hat{S}$ to znači da je $\hat{S}(x) - x$ konstantnog predznaka pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\hat{S}(x) > x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sada razlikujemo 2 slučaja:

(a) Pretpostavimo najprije da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\hat{S}^k(0) > 1$. Neka je k najmanji takav prirodan broj. Primijetimo da možemo odabrati podizanje $\hat{S}$ takvo da je $\hat{S}(0) \in [0, 1)$. Stoga, jasno je da je $k \geq 2$ te da je $\hat{S}^k \in [1, 2)$. To naime slijedi jednostavnom primjenom leme 1.1.5. S obzirom da su $0, \hat{S}^{k-1}(0) \in [0, 1)$ očito je $|\hat{S}^{k-1}(0) - 0| < 1$ pa je i $|\hat{S}^k(0) - \hat{S}(0)| < 1$. Već smo rekli da je $\hat{S}(0) \in (0, 1)$, a budući da je $\hat{S}$ rastuća funkcija, zaključujemo da je $\hat{S}^k(0) \in (1, 2)$. Nadalje, neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Primjenom napomene 1.1.6, redom na parove $(0, \hat{S}^k(0))$, $(\hat{S}^k(0), \hat{S}^{2k}(0))$,...,$(\hat{S}^{(m-2)k}(0), \hat{S}^{(m-1)k}(0))$ dobivamo da je $|\hat{S}^{ik}(0) - \hat{S}^{(i-1)k}(0)| > 1$ za svaki $i \in \{1, ..., m\}$, što pak povlači $\hat{S}^{mk}(0) > m$. Stoga slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{S}^n(0)}{n} \geq \limsup_{m\to\infty} \frac{\hat{S}^{mk}(0)}{mk} \geq \limsup_{m\to\infty} \frac{m}{mk} = \frac{1}{k}$$

S druge strane, pretpostavimo prvo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\hat{S}^n(0) < n - 1$. Tada je, ponovno primjenom leme 1.1.5 jasno da je $\hat{S}^{pn}(0) < p(n - 1)$ za svaki $p \in \mathbb{N}$. Posebno, svaki $l \in \mathbb{N}$ možemo jedinstveno zapisati kao $l = pn + r$ pri čemu je $0 \leq r < n$ pa dobivamo

$$\hat{S}^l(0) = \hat{S}^r(\hat{S}^{pn}(0)) < \hat{S}^r(p(n - 1)) < p(n - 1) + r$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi uzastopnom primjenom leme 1.1.5 na parove $(0, \hat{S}(0))$, $(\hat{S}(0), \hat{S}^2(0))$,...,$(\hat{S}^{r-2}(0), \hat{S}^{r-1}(0))$. Primijetimo da tada, analogno kao u drugom dijelu propozicije, slijedi

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\hat{S}^l(0)}{l} \leq \frac{n-1}{n}$$

Međutim, to je kontradikcija s obzirom da ne može istovremeno biti $\rho(S) = 0 \pmod 1$ i $\frac{1}{k} \leq \rho(S) \leq \frac{n-1}{n} \pmod 1$. Dakle, pretpostavka da postoji spomenuti $n \in \mathbb{N}$ je pogrešna pa mora biti $\hat{S}^n(0) \in (n - 1, n)$, s obzirom da već znamo da je $\hat{S}^n(0) < n$. Međutim, to u kombinaciji s činjenicom da je $\hat{S}^n(0) - \hat{S}^{n-1}(0) < 1$, daje nam zaključak da je niz $(S^n(0))_n$ padajuć u $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Jasno je i da je taj niz odozdo strogo ograničen nulom, jer znamo da S nema periodičnih točaka pa ne smije postojati iteracija od S koja 0 preslikava u 0. Dakle, niz je i konvergentan prema nekom limesu L, a neprekidnost funkcije S daje nam $S(L) = L$. No, to je dakako kontradikcija s činjenicom da S nema periodičnih, pa ni fiksnih točaka.

(b) Ako pak ne postoji k kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da je $\hat{S}^k(0) < 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$. No, tada je $(\hat{S}^n(0))_n$ rastuć, odozgo ograničen niz pa konvergira prema nekom limesu z. Zbog neprekidnosti funkcije $\hat{S}$ slijedi $\hat{S}(z) = z$ što znači da je z fiksna točka preslikava $\hat{S}$, a onda i $z + \mathbb{Z}$ fiksna točka preslikavanja S što nas ponovo dovodi u kontradikciju. Zaključujemo da je nemoguće da je rotacijski broj od T racionalan, odnosno da je $\rho(T)$ iracionalan.

4. Ako T ima periodičnu točku, onda imamo točku $x \in \mathbb{R}$ takvu da je $\hat{T}^n(x) - x = k$. Korištenjem zapisa kao u (1.1), budući da $\frac{\hat{T}^r(x)}{pn+r} \to 0$ kada $p \to \infty$, lako slijedi da je

$$\rho(T) = \limsup_{p\to\infty} \frac{\hat{T}^{pn}(x)}{pn + r} = \lim_{p\to\infty} \frac{pk}{pn + r} = \frac{k}{n}$$

Pretpostavimo sada da T nema periodičnih točaka. Po uzoru na 3. dio propozicije, zaključujemo da za svaki $n \geq 1$, postoji $k_n \in \mathbb{Z}$ takav da je $\hat{T}^n(x) - x \in (k_n, k_n + 1)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Posebno $|\hat{T}^n(0) - k_n| < 1$ što povlači

$$\left|\frac{\hat{T}^n(0)}{n} - \frac{k_n}{n}\right| < \frac{1}{n} \tag{1.2}$$

Radi preglednosti, uvedimo oznaku $x_k = \hat{T}^{nk}(0)$, za $k \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $m \geq 1$ imamo

$$\begin{aligned}\hat{T}^{nm}(0) &= (\hat{T}^{nm}(0) - \hat{T}^{n(m-1)}(0)) + (\hat{T}^{n(m-1)}(0) - \hat{T}^{n(m-2)}(0)) + ...\\ &\quad ... + (\hat{T}^{2n}(0) - \hat{T}^{n}(0)) + \hat{T}^{n}(0)\\ &= (\hat{T}^n(x_{m-1}) - x_{m-1}) + (\hat{T}^n(x_{m-2}) - x_{m-2}) + (\hat{T}^n(x_1) - x_1) + (\hat{T}^n(0) - 0).\end{aligned}$$

S obzirom da je $\hat{T}^n(x) - x \in (k_n,\ k_n + 1)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, dobivamo da je $\hat{T}^{nm}(0) \in (mk_n,\ m(k_n + 1))$. Posebno je $|\hat{T}^{nm}(0) - mk_n| < m$ iz čega slijedi

$$\left|\frac{\hat{T}^{nm}(0)}{nm} - \frac{k_n}{n}\right| < \frac{1}{n}. \tag{1.3}$$

Sada slijedi

$$\begin{aligned}\left|\frac{\hat{T}^m(0)}{m} - \frac{\hat{T}^n(0)}{n}\right| &\overset{(*)}{\leq} \left|\frac{\hat{T}^m(0)}{m} - \frac{k_m}{m}\right| + \left|\frac{k_m}{m} - \frac{\hat{T}^{mn}(0)}{mn}\right| + \left|\frac{\hat{T}^{mn}(0)}{mn} - \frac{k_n}{n}\right| + \left|\frac{k_n}{n} - \frac{\hat{T}^n(0)}{n}\right|\\ &\overset{(1.1)+(1.2)}{\leq} \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{m} + \frac{2}{n},\end{aligned}$$

pri čemu $(*)$ vrijedi zbog nejednakosti trokuta. Pokazali smo da je niz $\left(\frac{\hat{T}^n(0)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev pa je, zbog potpunosti od $\mathbb{R}$, on i konvergentan. Stoga je dobro definirano

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{T}^n(x)}{n} \pmod 1.$$

□

Definicija 1.1.11. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam. Uvodimo oznake za sljedeća 2 skupa:*

$$\Omega := \{n\rho(T) + m : n, m \in \mathbb{Z}\} \quad i \quad \Lambda := \{\hat{T}^n(0) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Lema 1.1.12. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam takav da je $\rho(T)$ iracionalan.*

1. *Neka su $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ te $x, y \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$\hat{T}^{n_1}(x) + m_1 < \hat{T}^{n_2}(x) + m_2 \ \Rightarrow\ \hat{T}^{n_1}(y) + m_1 < \hat{T}^{n_2}(y) + m_2.$$

2. *Ako je $\hat{T}$ podizanje takvo da je $\hat{T}(0) > 0$, bijekcija $n\rho(T) + m \mapsto \hat{T}^n(0) + m$ između Ω i Λ čuva prirodni uređaj.*

Dokaz. Slučaj kada je $n_1 = n_2$ je trivijalan pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $n_1 > n_2$.

1. Pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $\hat{T}^{n_1}(x) + m_1 < \hat{T}^{n_2}(x) + m_2$ i $\hat{T}^{n_1}(y) + m_1 \geq \hat{T}^{n_2}(y) + m_2$. Tada zbog neprekidnosti funkcije $t \mapsto \hat{T}^{n_1}(t) + m_1 - \hat{T}^{n_2}(t) - m_2$ i Bolzano-Weierstrassovog teorema zaključujemo da postoji $z \in [x, y]$ takav da je $\hat{T}^{n_1}(z) + m_1 = \hat{T}^{n_2}(z) + m_2$. Stoga postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$\begin{aligned} \hat{T}^{n_1}(z) = \hat{T}^{n_2}(z) + k \ &\Rightarrow\ \pi(\hat{T}^{n_1}(z)) = \pi(\hat{T}^{n_2}(z)) \Rightarrow\ T^{n_1}(\pi(z)) = T^{n_2}(\pi(z)) \\ &\Rightarrow\ T^{n_1-n_2}(z + \mathbb{Z}) = z + \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   No, tada je $z+\mathbb{Z}$ periodična točka preslikavanja T pa po propoziciji 1.1.10 $\rho(T)$ mora biti racionalan što je kontradikcija.

2. Pretpostavimo da je $\hat{T}^{n_1}(0) + m_1 < \hat{T}^{n_2}(0) + m_2$ i pokažimo da je tada $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$. Pretpostavku možemo zapisati i kao $\hat{T}^{n_1-n_2}(\hat{T}^{n_2}(0)) + m_1 < \hat{T}^{n_2}(0) + m_2$. Korištenjem prvog dijela leme uz $x = \hat{T}^{n_2}(0)$ i $y = 0$ dobivamo

$$\hat{T}^{n_1-n_2}(0) + m_1 < \hat{T}^0(0) + m_2 \quad \text{odnosno} \quad \hat{T}^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1.$$

   Ponovnom primjenom prvog dijela propozicije, ovaj put za $x = \hat{T}^{n_1-n_2}(0)$ i $y = 0$ dobivamo

$$\hat{T}^{2(n_1-n_2)}(0) - \hat{T}^{n_1-n_2}(0) = \hat{T}^{n_1-n_2}(\hat{T}^{n_1-n_2}(0)) - \hat{T}^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1.$$

   Stoga je

$$\hat{T}^{2(n_1-n_2)}(0) = \hat{T}^{2(n_1-n_2)}(0) - \hat{T}^{n_1-n_2}(0) + \hat{T}^{n_1-n_2}(0) - 0 < 2(m_2 - m_1).$$

Indukcijom se sada lako pokaže $\hat{T}^{N(n_1-n_2)} < N(m_2 - m_1)$. Sada je

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{T}^n(0)}{n}\right) (\mathrm{mod}\ 1) = \left(\lim_{N\to\infty}\frac{\hat{T}^{N(n_1-n_2)}(0)}{N(n_1-n_2)}\right) (\mathrm{mod}\ 1)\\ &\le \lim_{N\to\infty}\frac{\hat{T}^{N(n_1-n_2)}(0)}{N(n_1-n_2)} \le \lim_{N\to\infty}\frac{N(m_2-m_1)}{N(n_1-n_2)}\\ &= \frac{m_2-m_1}{n_1-n_2}.\end{aligned}$$

Gornja nejednakost je zapravo stroga s obzirom da je $\rho(T)$ iracionalan. Sada pak lako slijedi $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$ što je i trebalo pokazati.

□

Korolar 1.1.13. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam s iracionalnim rotacijskim brojem ρ. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, orbite od x pod T i pod rotacijom R_ρ imaju isti uređaj.*

Dokaz. Po lemi 1.1.12(*ii*) vrijedi

$$\hat{T}^{n_1}(0) + m_1 < \hat{T}^{n_2}(0) + m_2 \quad\Rightarrow\quad n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2. \tag{1.4}$$

Međutim, s obzirom da je s $x \mapsto x + \rho$ zadano podizanje od R_ρ, uvrštavanjem $m_1 = n_2 = 0$ dobivamo

$$\hat{T}^{n_1}(0) < m_2 \quad\Rightarrow\quad \hat{R}_\rho^{n_1}(0) < m_2.$$

Neka je $n \in \mathbb{Z}$ proizvoljan i neka je $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $\hat{T}^n(0) \in [m, m+1)$. Očito je tada $\hat{R}_\rho^n(0) < m + 1$. Nadalje, korištenjem relacije (1.4) za $n_2 = n$, $m_1 = m$, $m_2 = n_1 = 0$ dobivamo

$$m < \hat{T}^n(0) \quad\Rightarrow\quad m < \hat{R}_\rho^n(0)$$

pa je onda i $\hat{R}_\rho^n(0) \in [m, m+1)$. Naime, uključivanje lijevog ruba je u redu s obzirom da, zbog iracionalnosti broja ρ, $\hat{R}_\rho^n(0)$ nije cijeli broj ni za koji $n \in \mathbb{N}$. Sada, pretpostavimo da je $T^{n_1}(0) < T^{n_2}(0)$. Tada vrijedi

$$\pi(\hat{T}^{n_1}(0)) = T^{n_1}(\pi(0)) < T^{n_2}(\pi(0)) = \pi(\hat{T}^{n_2}(0)).$$

Iz tog razloga postoje $k, m \in \mathbb{Z}$ takvi da je $\hat{T}^{n_1}(0), \hat{T}^{n_2}(0) + k \in [m, m+1)$ te vrijedi $\hat{T}^{n_1}(0) > \hat{T}^{n_2}(0) + k$. Po prethodnim tvrdnjama zaključujemo $\hat{R}_\rho^{n_1}(0) < \hat{R}_\rho^{n_2}(0) + k$ te $\hat{R}_\rho^{n_1}(0), \hat{R}_\rho^{n_2}(0) + k \in [m, m+1)$, odakle pak slijedi $R_\rho^{n_1}(0) < R_\rho^{n_2}(0)$ što je i trebalo pokazati. □

1.2 Denjoyev teorem

Definicija 1.2.1. *Na topološkom prostoru X, homeomorfizam $f : X \to X$ je* ***minimalan*** *ako X ne sadrži niti jedan pravi ($\neq X, \neq \emptyset$) zatvoren f-invarijantan podskup.*

Definicija 1.2.2. *Funkcije $f : X \to X$ i $g : Y \to Y$ na topološkim prostorima X, Y su* ***topološki konjugirane*** *ako postoji homeomorfizam $h : X \to Y$ takav da je $h \circ f = g \circ h$. Tada je f* ***topološki konjugat*** *od g i obratno, a homeomorfizam h se zove* ***topološka konjugacija****.*

Podsjetimo, za homeomorfizam $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, skup $\{n\rho(T) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ označavamo s Ω.

Lema 1.2.3. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam s iracionalnim rotacijskim brojem ρ. Tada je Ω gust u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Pokažimo da $n\rho \pmod 1$ može biti proizvoljno malen. Kada bismo to pokazali, vrijedilo bi da svaki $x \in \mathbb{R}$ možemo aproksimirati proizvoljno dobro brojevima oblika $n\rho + m$ pri čemu su $n, m \in \mathbb{Z}$, odnosno mogli bismo stvoriti niz elemenata iz Ω koji konvergira prema x pa bi zaista vrijedilo da je taj skup gust u $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada suprotno, tj da je $\varepsilon := \inf\{n\rho \pmod 1 : n \in \mathbb{Z}\} > 0$. Jasno je da je $\varepsilon < \frac{1}{2}$, jer iz $n\rho > \frac{1}{2}$ slijedi $-n\rho < \frac{1}{2}$, budući da je $n\rho + (-n\rho) = 0$. Iz svojstva infimuma, jasno je da postoje $0 < a < \varepsilon$ i $m \in \mathbb{Z}$ takvi da je $m\rho = a + \varepsilon \pmod 1$. Promotrimo nakratko $a + \varepsilon$ kao element skupa $\mathbb{R}$, a ne kao element skupa $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k(a + \varepsilon) < 1$ i $(k + 1)(a + \varepsilon) \geq 1$. Vratimo se sada na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Tada je ili

$$-km\rho = 1 - km\rho < \frac{a + \varepsilon}{2} < \varepsilon \pmod 1$$

ili

$$(k + 1)m\rho = (k + 1)m\rho - 1 < \frac{a + \varepsilon}{2} < \varepsilon \pmod 1.$$

U svakom slučaju, našli smo $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $n\rho \pmod 1 < \varepsilon$ što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle $n\rho \pmod 1$ zaista može biti proizvoljno malen i po prethodnoj argumentaciji je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 1.2.4. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ minimalan homeomorfizam koji čuva orijentaciju, s iracionalnim rotacijskim brojem ρ. Tada je T topološki konjugiran rotaciji $R_\rho : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Dokaz. Primijetimo da je skup $S = \{T^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$ T-invarijantan. Budući da je T minimalan, $\overline{S}$ ne smije biti pravi podskup od $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pa je S gust u $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. S obzirom da je $T^n(0) = \pi(\hat{T}^n(0))$, slijedi da je $\Lambda = \{\hat{T}^n(0) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ gust u $\mathbb{R}$. Po lemi 1.1.12(*ii*) znamo da preslikavanje $\phi : \Lambda \to \Omega$ dano s $\phi(\hat{T}^n(0) + m) = n\rho + m$ čuva uređaj. S obzirom na gustoću ovih skupova u $\mathbb{R}$, ϕ možemo po neprekidnosti proširiti do homeomorfizma. Naime, za svaku točku $x \in \mathbb{R}\backslash\Lambda$ znamo da postoji rastući niz $(x_n)_n$ u Λ koji konvergira prema x i definiramo $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n)$. Ovaj limes zaista postoji jer je $(\phi(x_n))_n$ rastući niz (jer ϕ čuva uređaj) koji je odozgo ograničen nekim $\phi(y)$ pri čemu je $y \in \Lambda$ i $y > x$. Nadalje, ova funkcija je dobro definirana jer uzimanjem 2 različita rastuća niza koji konvergiraju prema x nikako ne možemo dobiti različite limese što lako slijedi iz činjenice da ϕ čuva uređaj (između ta 2 limesa bi postojao neki element jednog od nizova i tu bi došlo do kontradikcije). Dakle, ϕ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Nadalje, injektivnost od ϕ je jednostavna posljedica monotonosti. Pokažimo još surjektivnost. Neka je sada $y \in \mathbb{R}\backslash\Omega$, s obzirom da je za elemente iz Ω jasno da postoji element iz Λ koji se u njih preslikava. Zbog gustoće Ω u $\mathbb{R}$, postoji rastući niz $(y_n)_n$ u Ω koji konvergira prema y, a postoje i x_n u Λ takvi da je $\phi(x_n) = y_n$. Budući da ϕ čuva uređaj između Λ i Ω, $(x_n)_n$ je također rastući niz. On je i ograničen odozgo, npr. s nekim $z \in \Lambda$ takvim da je $\phi(z) = w$ za neki $w \in \Omega$ takav da je $w > y$. Dakle, $(x_n)_n$ je konvergentan niz i neka je x njegov limes. Po definiciji proširenja funkcije ϕ na $\mathbb{R}$ je jasno da je $\phi(x) = y$. Sada znamo da je ϕ neprekidna bijekcija, a neprekidnost inverza također jednostavno slijedi, pa je $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfizam. Za sve $n, m \in \mathbb{Z}$ je $|(\hat{T}^n(0) + m) - \hat{T}^n(0)| = |m|$ pa po napomeni 1.1.6 vrijedi

$$\hat{T}(\hat{T}^n(0) + m) = \hat{T}(\hat{T}^n(0)) + m \quad\Rightarrow\quad \phi(\hat{T}(\hat{T}^n(0) + m)) = \phi(\hat{T}^{n+1}(0) + m) = (n + 1)\rho + m$$

K tome, primijetimo da vrijedi i

$$\hat{R}_\rho(\phi(\hat{T}^n(0) + m)) = \hat{R}_\rho(n\rho + m) = (n + 1)\rho + m$$

Stoga, zaključujemo da je $\phi \circ \hat{T} = \hat{R}_\rho \circ \phi$.

Nadalje, po konstrukciji funkcije ϕ vidimo da je $\phi(x + 1) = \phi(x) + 1$. Naime, ako je $x = \hat{T}^n(0) + m$ za neke $n, m \in \mathbb{Z}$, onda je

$$\phi(x + 1) = \phi(\hat{T}^n(0) + m + 1) = n\rho + (m + 1) = (n\rho + m) + 1 = \phi(\hat{T}^n(0) + m) + 1 = \phi(x) + 1$$

Inače, postoje nizovi cijelih brojeva $(n_k)_k$ i $(m_k)_k$ takvi da je $x = \lim_{k\to\infty}(\hat{T}^{n_k}(0) + m_k)$. Tada je $\phi(x) = \lim_{k\to\infty}(n_k\rho + m_k)$. Slijedi

$$\phi(x + 1) = \lim_{k\to\infty}(n_k\rho + m_k + 1) = \lim_{k\to\infty}(n_k\rho + m_k) + 1 = \phi(x) + 1$$

Dakle, homeomorfizam $\Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definiran s $\Phi(x+\mathbb{Z}) = \phi(x)+\mathbb{Z}$ je dobro definiran. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\phi \circ \hat{T} = \hat{R}_\rho \circ \phi &\Rightarrow \pi \circ \phi \circ \hat{T} = \pi \circ \hat{R}_\rho \circ \phi \\
&\Rightarrow \Phi \circ \pi \circ \hat{T} = R_\rho \circ \pi \circ \phi \\
&\Rightarrow \Phi \circ T \circ \pi = R_\rho \circ \Phi \circ \pi \\
&\Rightarrow \Phi \circ T = R_\rho \circ \Phi
\end{aligned}$$

Dakle, našli smo homeomorfizam takav da su T i R_ρ topološki konjugirana preslikavanja. $\square$

Definicija 1.2.5. *Za C^1 funkciju $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ možemo promatrati njezinu* ***derivaciju*** *$T' : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definiranu sa*

$$T'(c) = \lim_{x \to c} \frac{T(x + \mathbb{Z}) - T(c + \mathbb{Z})}{(x - c)(mod 1)}$$

Definicija 1.2.6. *Za funkciju $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definiramo* ***varijaciju*** *s*

$$Var(f) = \sup\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$$

Kažemo da funkcija f ima ***ograničenu varijaciju*** *ako je $Var(f)$ konačna.*

Teorem 1.2.7 (Denjoy)**.** *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ C^1-homeomorfizam koji čuva orijentaciju, s iracionalnim rotacijskim brojem ρ i derivacijom s ograničenom varijacijom. Tada je T topološki konjugirana rotaciji $R_\rho : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Denjoyev teorem glavni je rezultat ove cjeline. On daje dovoljne uvjete da homeomorfizam bude konjugat rotacije. Sada navodimo i dokazujemo dvije leme koje će nam pomoći u dokazu tog teorema.

Lema 1.2.8. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam s iracionalnim rotacijskim brojem ρ. Pretpostavimo da postoje konstanta $C > 0$ i niz $(q_n)_n$ u $\mathbb{Z}$ takvi da $q_n \to \infty$ i da preslikavanja $T^{q_n} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zadovoljavaju*

$$|(T^{q_n})'(x)| \cdot |(T^{-q_n})'(x)| \geq C.$$

Tada je T minimalan.

Dokaz. Pretpostavimo da T nije minimalan. Tada postoji pravi zatvoreni T-invarijantan podskup od $X := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Posebno, za neki x iz tog podskupa je i $T^n(x)$ iz tog podskupa za sve $n \in \mathbb{Z}$. Stoga zapravo postoji neki $x \in X$ takav da je

$$Y := \overline{\cup_{n \in \mathbb{Z}} \{T^n(x)\}} \neq X.$$

Odaberimo neki maksimalan interval $I_0 \subset X \backslash Y$ i pokažimo da su i $I_n := T^{-n}(I_0) \subset X \backslash Y$ različiti maksimalni intervali (interval I je maksimalan u skupu S ako ne postoji neki interval u skupu S koji sadrži I). Budući da je I_0 maksimalan, vrijedi $I_0 = (a, b)$, pri čemu su $a, b \in Y$. Iz T-invarijantnosti skupa Y lako se vidi da je $I_n \subset X \backslash Y$ i da su $T^{-n}(a), T^{-n}(b) \in Y$ za sve $n \in \mathbb{Z}$, odnosno da je svaki interval I_n maksimalan. Nadalje, vrijedi

$$I_n \cap I_m \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad I_n = I_m$$

Naime, pretpostavimo da se intervali ne poklapaju u potpunosti. Tada je neki od rubova jednog intervala sadržan u unutrašnjosti drugoga. S obzirom da su rubovi iz Y, a unutrašnjosti iz $X\backslash Y$, to je nemoguće. Stoga posebno vrijedi i $T^{-n}(a) = T^{-m}(a)$ jer zbog monotonosti od T ne može biti $T^{-n}(a) = T^{-m}(b)$ i $T^{-n}(b) = T^{-m}(a)$. Međutim, ukoliko je $m \neq n$, dobivamo da je a periodična točka preslikavanja T što je kontradikcija s činjenicom da je $\rho(T)$ iracionalan. Dakle, intervali I_n moraju biti disjunktni.

Zbog disjunktnosti slijedi
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |I_n| \leq 1$$
s obzirom da su svi $I_n \subset (0,1)$ pa posebno imamo $|I_n| \to 0$ kada $n \to \infty$. S obzirom da je
$$|I_{q_n}| = \int_{I_0} |(T^{-q_n})'(x)| dx$$
slijedi
$$\begin{aligned}
|I_{q_n}| + |I_{-q_n}| &= \int_{I_0} \left(|(T^{-q_n})'(x)| + |(T^{q_n})'(x)|\right) dx \\
&\overset{A-G^1}{\geq} \int_{I_0} 2\left(|(T^{-q_n})'(x)| \cdot |(T^{q_n})'(x)|\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\geq 2 \int_{I_0} C^{\frac{1}{2}} dx = 2C^{\frac{1}{2}} |I_0|
\end{aligned}$$
Međutim, ovo je kontradikcija s činjenicom $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |I_n| \leq 1$ pa T zaista mora biti minimalan. □

Lema 1.2.9. *Neka je $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfizam s iracionalnim rotacijskim brojem, $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $x_n = T^n(x)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Tada postoji rastući niz $(q_n)_n$ u $\mathbb{N}$ takav da $q_n \to \infty$ i da su intervali $(x_0, x_{q_n}), (x_1, x_{q_n+1}), ..., (x_{q_n}, x_{2q_n})$ u parovima disjunktni.*

Dokaz. Po korolaru 1.1.13 znamo da je poredak u $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ točaka orbite pod djelovanjem T jednak poretku točaka orbite pod djelovanjem R_ρ pa lemu dokazujemo upravo za $T = R_\rho$. Želimo odabrati niz $(q_n)_n$ tako da uvijek biramo sljedeći najbliži dolazak niza $R_\rho^n x$ točki x. Formalno, neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$, q_n takav da je $|R_\rho^{q_n}(x) - x| = \inf\{|R_\rho^j(x) - x| : 1 \leq j \leq q_n\}$. Ovakav odabir niza $(q_n)_n$ je moguć budući da, kao u dokazu leme 1.2.3, zaključujemo da je skup $\{R_\rho^n(x) : x \in \mathbb{N}\}$ gust u $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, promotrimo sada interval (x_i, x_{q_n+i}) za neki $0 \leq i \leq q_n$ (slučaj (x_{q_n+i}, x_i) je analogan) te pretpostavimo da postoji $x_r \in (x_i, x_{q_n+i})$ takav da je $0 \leq r \leq 2q_n$. Promotrimo sada dva slučaja:

[1] aritmetičko-geometrijska nejednakost

1. Neka je $r < i$. Tada vrijedi

$$x_0 = R_\rho^{-r}(x_r) \in R_\rho^{-r}((x_i, x_{q_n+i})) = (x_{(i-r)}, x_{q_n+(i-r)}).$$

   Posebno, tada slijedi

$$|x_{(i-r)} - x_0| < |x_{q_n+(i-r)} - x_{(i-r)}| = |R_\rho^{-(i-r)}(x_{q_n+(i-r)}) - R_\rho^{-(i-r)}(x_{(i-r)})| = |x_{q_n} - x_0|.$$

   Međutim, $0 < i - r < q_n$ pa je gornja tvrdnja kontradiktorna definiciji q_n.

2. Neka je sada $r > i$. Tada je

$$x_{(r-i)} = R_\rho^{-i}(x_r) \in R_\rho^{-i}((x_i, x_{q_n+i})) = (x_0, x_{q_n}).$$

   Po definiciji od q_n nužno mora biti $r - i > q_n$. No tada je

$$x_{(r-i)-q_n} = R_\rho^{-q_n}(x_{(r-i)}) \in R_\rho^{-q_n}((x_0, x_{q_n})) = (x_{-q_n}, x_0).$$

   Tada, slično kao u prijašnjem slučaju slijedi

$$|x_{(r-i)-q_n} - x_0| < |x_{-q_n} - x_0| = |R_\rho^{q_n}(x_{-q_n}) - R_\rho^{q_n}(x_0)| = |x_0 - x_{q_n}|.$$

   S obzirom da je $0 < (r - i) - q_n < q_n$, opet dolazimo do kontradikcije s definicijom od q_n.

Dakle, pretpostavka o postojanju x_r s navedenim svojstvom je pogrešna pa niz $(q_n)_n$ zaista zadovoljava potrebna svojstva i tvrdnja leme je dokazana. □

Korolar 1.2.10. *Niz $(q_n)_n$ iz prethodne leme, zadovoljava promatrano svojstvo za svaki $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Dokaz. Dokaz prethodne leme proveden je za rotaciju s parametrom ρ. Posebno svojstvo tog preslikavanja je da čuva udaljenost. Iz toga lako zaključujemo da se za neki drugi početni $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \neq x$, pripadni intervali $(y_0, y_{q_n}), (y_1, y_{q_n+1}), ..., (y_{q_n}, y_{2q_n})$ mogu dobiti translacijom intervala $(x_0, x_{q_n}), (x_1, x_{q_n+1}), ..., (x_{q_n}, x_{2q_n})$ za $y - x \pmod 1$, i to za svaki $n \in \mathbb{N}$. S obzirom da translacija ne mijenja svojstvo disjunktnosti spomenutih intervala, jasno je kako je $(q_n)_n$ niz s traženim svojstvom za svaku početnu točku. Ponovnim korištenjem korolara 1.1.13, zaključujemo da to vrijedi i za bilo koji homeomorfizam T s iracionalnim rotacijskim brojem. □

Navedimo još i dvije tehničke napomene koje ćemo koristiti u samom dokazu.

Napomena 1.2.11. *1. Pokažimo indukcijom da je* $|(T^n)'(y)| = \prod_{i=0}^{n-1} |T'(T^i(y))|$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Baza* $n = 1$ *je očita; pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki* $n \in \mathbb{N}$ *te ju dokažimo i za* $n + 1$. *Vrijedi*

$$|(T^{n+1})'(y)| = |(T \circ T^n)'(y)| = |T'(T^n(y)) \cdot (T^n)'(y)| = \prod_{i=0}^{n} |T'(T^i(y))|.$$

2. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$(T^k)'(x) = \frac{1}{(T^{-k})'(T^k(x))}.$$

Naime, to slijedi iz niza jednakosti

$$1 = (id)'(x) = (T^{-k} \circ T^k)'(x) = (T^{-k})'(T^k(x)) \cdot (T^k)'(x).$$

Sada smo napokon spremni za dokaz Denjoyevog teorema.

Dokaz. Neka je $x = x_0 = 0$. Iz leme 1.2.9 dobivamo niz $(q_n)_n$ takav da su intervali (x_i, x_{q_n+i}) u parovima disjunktni, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te za svaki $0 \leq i \leq n$. Vidimo da je $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ popločan intervalima oblika (x_i, x_{q_n+i}) između kojih se nalaze intervali oblika (x_i, x_{q_n+j}) ili (x_{q_n+i}, x_j) pri čemu je $i \neq j$ i $0 \leq i, j \leq q_n$. Na kraju se nalazi interval oblika $(x_i, 1)$ ili $(x_{q_n+i}, 1)$, za neki $0 \leq i \leq q_n$. Iz tog razloga, jer uzimamo samo dio tih intervala kojima smo popločali $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ možemo zaključiti

$$\begin{aligned}
Var(\log|T'|) &= \sup\left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \Big| \log|T'(x_{i+1})| - \log|T'(x_i)| \Big| : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1 \right\} \\
&\geq \sum_{i=0}^{q_n} \Big| \log|T'(x_{i+1})| - \log|T'(x_i)| \Big| \\
&\overset{(1)}{\geq} \Big| \sum_{i=0}^{q_n} \log|T'(x_i)| - \sum_{i=0}^{q_n} \log|T'(x_{q_n+i})| \Big| \\
&= \left| \log \frac{\prod_{i=0}^{q_n-1} |T'(T^i x_0)|}{\prod_{i=0}^{q_n-1} |T'(T^i x_{q_n+1})|} \right| \\
&\overset{1.1.23.(a)}{=} \left| \log \frac{|(T^{q_n})'(x_0)|}{|(T^{q_n})'(x_{q_n+1})|} \right| \\
&\overset{1.1.23.(b)}{=} \left| \log \frac{1}{|(T^{q_n})'(x_{q_n+1})| \cdot |(T^{-q_n})'(x_{q_n+1})|} \right| \\
&= \Big| - \log|(T^{q_n})'(x_{q_n+1}) \cdot (T^{-q_n})'(x_{q_n+1})| \Big| \\
&= \Big| \log|(T^{q_n})'(x_{q_n+1}) \cdot (T^{-q_n})'(x_{q_n+1})| \Big|.
\end{aligned}$$

Pritom (1) vrijedi zbog nejednakosti trokuta.

Međutim, po korolaru 1.2.10, znamo da niz (q_n) ima isto svojstvo za svaki početni x iz $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pa za proizvoljan $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vrijedi

$$Var(\log|T'|) \geq \left|\log|(T^{q_n})'(T^{q_n+1}(x)) \cdot (T^{-q_n})'(T^{q_n+1}(x))|\right|.$$

Iz bijektivnosti preslikavanja T^{q_n+1} i proizvoljnosti od x, zaključujemo da je

$$Var(\log|T'|) \geq \left|\log|(T^{q_n})'(x) \cdot (T^{-q_n})'(x)|\right|$$

za svaki $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo sada $C := Var(\log|T'|) \geq 0$. Tada je posebno

$$-C \leq \log|(T^{q_n})'(x) \cdot (T^{-q_n})'(x)| \quad \Rightarrow \quad e^{-C} \leq |(T^{q_n})'(x)| \cdot |(T^{-q_n})'(x)|.$$

Dakle, našli smo pozitivnu konstantu i rastući niz $(q_n)_n$ takve da je gornja nejednakost zadovoljena za sve $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Stoga, pozivanjem na lemu 1.2.8 zaključujemo da je preslikavanje T minimalno. Preostaje samo pozvati se na propoziciju 1.2.4 iz koje zaključujemo da je preslikavanje T toplološki konjugat rotacije ρ.

□

Dosad smo se bavili pojmom rotacijskog broja homeomorfizama na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Za kraj poglavlja, proširujemo taj pojam na veću klasu funkcija.

Definicija 1.2.12. *Neka je $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ neprekidno preslikavanje stupnja 1 te neka je $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neko njegovo podizanje. Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo* ***rotacijski broj*** *kao*

$$\rho(\hat{f}, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{f}^n(x) - x}{n}.$$

Zatim, definiramo ***rotacijski skup*** *kao*

$$\rho(\hat{f}) = \{\rho(\hat{f}, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Napomena 1.2.13. *Primijetimo da sada rotacijski broj definiramo u ovisnosti o odabranom podizanju $\hat{f}$ i točki x, s obzirom da nemamo rezultat o neovisnosti o izboru x i $\hat{f}$ kao što smo imali u slučaju kada je f homeomorfizam.*

Sljedeći teorem govori o mogućem obliku ovako definiranog rotacijskog skupa.

Teorem 1.2.14. *[1, Teorem] Neka je $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ neprekidno preslikavanje stupnja 1 i $\hat{f}$ pripadno podizanje. Onda je $\rho(\hat{f})$ točka ili ograničen zatvoren interval.*

Zbog prethodnog teorema, ovako definiran rotacijski skup ćemo dalje nazivati **rotacijski interval**.

Poglavlje 2

Rotacijski skupovi preslikavanja u višedimenzionalnim torusima

2.1 Poopćenje pojma rotacijskog broja

Definicija 2.1.1. ***m-dimenzionalni torus*** *je prostor* $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$.

Definicija 2.1.2. *Neka su* X, Y *topološki prostori i* $f, g : X \to Y$ *neprekidna preslikavanja. Za preslikavanja* f *i* g *kažemo da su* ***homotopna*** *ako postoji neprekidno preslikavanje* $H : X \times [0, 1] \to Y$ *takvo da je*

$$H(x, 0) = f(x) \quad i \quad H(x, 1) = g(x).$$

Preslikavanje H *se zove* ***homotopija*** *između* f *i* g.

Definicija 2.1.3. *S* $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{T}^m$ *ćemo označavati standardnu projekciju.*

Definicija 2.1.4.

- *Klasu svih podizanja svih neprekidnih preslikavanja na* $\mathbb{T}^m$ *homotopnih identiteti, označavati ćemo sa* $\mathscr{C}_m$.
- *Klasu svih podizanja svih homeomorfizama na* $\mathbb{T}^m$ *homotopnih identiteti, označavati ćemo sa* $\mathscr{H}_m$.

Napomena 2.1.5.

- *Elementi klase* $\mathscr{C}_m$ *su upravo ona neprekidna preslikavanja* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *za koja je* $F(x + k) = F(x) + k$*, za sve* $k \in \mathbb{Z}^m$.
- *Elementi klase* $\mathscr{H}_m$ *su upravo homeomorfizmi iz* $\mathscr{C}_m$.
- *Za* $F \in \mathscr{C}_m$*,* $n \in \mathbb{N}$ *i* $k \in \mathbb{Z}^m$ *indukcijom po* n *lako pokazujemo* $F^n(x + k) = F^n(x) + k$.
- *Prostore* $\mathscr{C}_m$ *i* $\mathscr{H}_m$ *promatramo uz topologiju uniformne konvergencije.*

Očiti način proširenja pojma rotacijskog broja na višedimenzionalni slučaj bio bi sljedeći. Neka je $F \in \mathscr{C}_m$ preslikavanje te neka je $x \in \mathbb{R}^m$ proizvoljna. Tada s $\rho(F, x)$ označimo skup limesa svih konvergentnih podnizova niza

$$\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)_n.$$

Tada bismo definirali **točkovni rotacijski skup** kao

$$\rho_p(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} \rho(F, x).$$

Međutim, radi nekih ljepših svojstava koja ćemo vidjeti kasnije, definiramo pojam rotacijskog skupa malo drugačije. Pokazat ćemo da je ova definicija također proširenje jednodimenzionalnog slučaja.

Definicija 2.1.6. *Neka je $F \in \mathscr{C}_m$. Sa $\rho(F)$ označimo skup limesa svih konvergentnih nizova oblika*

$$\left(\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right)_{i=1}^{\infty}, \quad x_i \in \mathbb{R}^m, \; n_i \to \infty.$$

Skup $\rho(F)$ nazivamo ***rotacijski skup od F****.*

Napomena 2.1.7. *Primijetimo da je $\rho_p(F) \subseteq \rho(F)$. Naime, ako je $x_i = x$ za sve i, dobivamo upravo sve limese iz definicije točkovnog rotacijskog skupa.*

Navedimo sada korisnu karakterizaciju ovako definiranog rotacijskog skupa.

Propozicija 2.1.8. *Za $k \in \mathbb{N}$, neka je*

$$K_k(F) = \left\{\frac{F^k(x) - x}{k} : x \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

Tada vrijedi

$$\rho(F) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k \geq n} K_k(F)}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Neka je $L \in \rho(F)$. Dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoje $x_i \in \mathbb{R}^m$ te $n_i \in \mathbb{N}$ takvi da $n_i \to \infty$ za koje vrijedi $L = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan te neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_0$ vrijedi $n_i \geq n$. Uvedimo oznaku $a_i = \frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Tada je niz $(a_i)_{i=i_0}^{\infty}$ podniz početnog niza pa je i on kovergentan s limesom L. Nadalje, za svaki $i \geq i_0$ je $a_i \in K_{n_i}(F) \subseteq \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)} =: S_n$. Dakle, $(a_i)_{i=i_0}^{\infty}$ je konvergentan niz u zatvorenom skupu S_n pa je i njegov limes $L \in S_n$. Zbog proizvoljnosti izbora $n \in \mathbb{N}$, jasno je da vrijedi $\rho(F) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)}$.

Pokažimo sada i suprotnu inkluziju. Neka je $L \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)} = \bigcap_{n\geq 1} S_n$. Skupovi S_n su zatvoreni pa u svakom od njih postoji konvergentan niz s limesom L. Označimo te nizove s

$$\left(\frac{F^{n_{i,m}}(x_{i,m}) - x_{i,m}}{n_{i,m}}\right)_{i=1}^{\infty} \subset S_m.$$

Za svaki $m \in \mathbb{N}$, neka je k_m jednak nekom indeksu $n_{i,m}$ za kojeg vrijedi

$$\left\|\frac{F^{n_{i,m}}(x_{i,m}) - x_{i,m}}{n_{i,m}} - L\right\| < \frac{1}{m}, \;\; n_{i,m} > m.$$

Uvedemo li i oznaku x_m za taj pripadni $x_{i,m}$, dobivamo niz

$$\left(\frac{F^{k_m}(x_m) - x_m}{k_m}\right)_m$$

koji konvergira prema L te vrijedi $k_m \to \infty$ pa je po definiciji jasno da je $L \in \rho(F)$, odnosno $\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)} \subseteq \rho(F)$. Sada su pokazane obje inkluzije pa slijedi jednakost ovih dvaju skupova. □

Napomena 2.1.9. *Skupovi $K_k(F)$ su kompaktni. Naime, zbog $F^k(x + l) = F^k(x) + l$, vrijedi i $F^k(x) - x = F^k(x + l) - (x + l)$, za sve $l \in \mathbb{Z}^m$. Stoga je*

$$K_k(F) = \left\{\frac{F^k(x) - x}{k} : x \in \mathbb{R}^m\right\} = \left\{\frac{F^k(x) - x}{k} : x \in [0, 1]^m\right\}.$$

S obzirom da je $[0, 1]^m$ kompaktan skup, a funkcija $x \mapsto \frac{F^k(x)-x}{k}$ neprekidna, zaključujemo da je $K_k(F)$ kompaktan kao slika kompaktnog skupa po neprekidnoj funkciji.

Pokažimo sada da je ovakva definicija rotacijskog skupa proširenje pojma rotacijskog intervala. Za to će nam biti potrebna sljedeća lema.

Lema 2.1.10. *Neka je $F \in \mathscr{C}_m$. Za racionalan broj $\frac{l}{k}$ vrijedi $\frac{l}{k} > b$ ako i samo ako je $F^k(x) - x < l$, za svaki $x \in \mathbb{R}^m$. Analogno, vrijedi $\frac{l}{k} < a$ ako i samo ako je $F^k(x) - x > l$, za svaki $x \in \mathbb{R}^m$.*

Dokaz. Dokazujemo samo prvu tvrdnju, druga slijedi analogno.

Neka je $F^k(x) - x < l$, za sve $x \in \mathbb{R}^m$. Svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo zapisati kao $n = m_n k + r_n$, pri čemu su $m_n, r_n \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $0 \leq r_n < k$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{(F^n(x) - F^{m_n k}(x)) + (F^{m_n k}(x) - F^{(m_n-1)k}(x)) + ... + (F^k(x) - x)}{n} \\
&\overset{(1)}{<} \limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - F^{m_n k}(x) + m_n l}{n} \\
&\overset{(2)}{=} \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{F^{r_n}(y) - y}{n} + \frac{m_n l}{m_n k + r_n} \right) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{F^{r_n}(y) - y}{n} + \frac{m_n l}{m_n k} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{F^{r_n}(y) - y}{n} + \frac{l}{k}.
\end{aligned}$$

U (1) smo koristili pretpostavku $F^k(x) - x < l$ za $x = F^{ak}(x)$, $a = 0, ..., m_n - 1$, a u (2) smo koristili supstituciju $y = F^{m_n k}(x)$.

S obzirom da je $r_n \in \{0, ..., k-1\}$, primijetimo da $F^{r_n}(y) - y$ postiže samo konačno mnogo različitih vrijednosti. S obzirom da da nazivnik $n \to \infty$, jasno je da je limes superiror u posljednjem izrazu jednak 0. Dakle, dobili smo da za svaki $x \in \mathbb{R}^m$ vrijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} < \frac{l}{k}$$

pa je svaki element rotacijskog intervala manji od $\frac{l}{k}$, što posebno implicira $b \leq \frac{l}{k}$.

Dokažimo sada implikaciju u drugom smjeru, odnosno pretpostavimo da je $b < \frac{l}{k}$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, odnosno da postoji $x_0 \in \mathbb{R}^m$ takav da je $F^k(x) - x \geq k$. Raspisujemo slično kao u prošlom dijelu dokaza, koristeći iste oznake:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{(F^n(x_0) - F^{m_n k}(x_0)) + ... + (F^k(x_0) - x_0)}{n} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(F^{r_n}(y) - y) + m_n l}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(F^{r_n}(y) - y)}{n} + \frac{m_n l}{m_n k + r_n} \right) \\
&\overset{(3)}{\geq} \limsup_{n\to\infty} \frac{(F^{r_n}(y) - y)}{n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{m_n l}{(m_n + 1)k} \\
&= \frac{l}{k}.
\end{aligned}$$

U (3) smijemo razdvojiti limes superior na zbroj 2, jer za prvi od ta 2 od ranije znamo da je jednak 0. Za drugi pak vrijedi da je jednak $\frac{l}{k}$ jer za $n \to \infty$ vrijedi i $m_n \to \infty$.

S obzirom da se promatrani limes superior nalazi u rotacijskom intervalu, dobili smo da je $b \geq \frac{l}{k}$, što je upravo kontradikcija s pretpostavkom. $\square$

Propozicija 2.1.11. *Neka je $F \in \mathscr{C}_1$ te neka je $[a, b]$ pripadni rotacijski interval, pri čemu je $a \leq b$. Tada vrijedi $\rho(F) = [a, b]$.*

Dokaz. Primijetimo da je rotacijski interval sadržan u točkovnom rotacijskom skupu od F. Naime, u $[a, b]$ se nalaze limesi superiori svih nizova $(\frac{F^n(x)-x}{n})_n$, $x \in \mathbb{R}$. S druge strane, u $\rho_p(F)$ se nalaze limesi svih kovergentnih podnizova svih nizova $(\frac{F^n(x)-x}{n})_n$, među kojima su dakako i limesi superiori. Dakle, vrijedi $[a, b] \subseteq \rho_p(F) \subseteq \rho(F)$.

Pokažimo sada i drugu inkluziju. Znamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $b < \frac{l}{k} \leq b + \frac{1}{k}$. Prema lemi 2.1.10, $\frac{l}{k} > b$ povlači $F^k(x) - x < l$ za sve $x \in \mathbb{R}$ pa vrijedi

$$\frac{F^k(x) - x}{k} < \frac{l}{k} \geq b + \frac{1}{k}, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}$$

Iz definicije skupa $K_k(F)$ zaključujemo da to zapravo znači da je $\sup K_k(F) \leq b + \frac{1}{k}$. Nadalje, iz toga slijedi da za svaki $k \geq n$ vrijedi $\sup K_k(F) \leq b + \frac{1}{n}$ odakle pak zaključujemo

$$\sup \overline{\bigcup_{k \geq n} K_k(F)} \leq b + \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

S obzirom da je $\rho(F) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k \geq n} K_k(F)}$, onda (2.2) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ što ujedno implicira i $\sup \rho(F) \leq b$. Korištenjem analogne tvrdnje leme 2.1.10, sličnim razmatranjem dolazimo do ograde $\inf \rho(F) \geq a$. Stoga napokon zaključujemo $\rho(F) \subseteq [a, b]$, čime je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Opća svojstva rotacijskog skupa

Krenimo sa svojstvom koje je jednostavna posljedica pokazane karakterizacije rotacijskog skupa preslikavanja F.

Propozicija 2.1.12. *$\rho(F)$ je zatvoren.*

Dokaz. Po relaciji (2.1) iz propozicije 2.1.8 vidimo da je $\rho(F)$ presjek zatvorenih skupova, pa je zato i sam zatvoren. $\square$

Definicija 2.1.13. *Za $A \subseteq \mathbb{R}^m$ sa $\mathrm{Conv}(A)$ označavamo **konveksnu ljusku** od A, odnosno najmanji konveksan skup koji sadrži A. Udaljenost skupa A od točke x označavamo $d(x, A)$. Za skup A i $\varepsilon > 0$ definiramo*

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, A) < \varepsilon\} \quad i \quad \overline{B}(A, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

Propozicija 2.1.14. *Neka su $F \in \mathscr{C}_m$, $p \in \mathbb{Z}^m$ i $q \in \mathbb{N}$. Tada*

(a1) $\rho(F^q - p) = q\rho(F) - p$,

(a2) $\rho(F^q - p, x) = q\rho(F, x) - p$,

(a3) $\rho_p(F^q - p) = q\rho_p(F) - p$.

Posebno, za $F \in \mathscr{H}_m$ vrijedi

(b) $\rho(F^{-1}) = -\rho(F)$.

Dokaz. (a1) Neka je $v \in \rho(F^q - p)$. Tada postoje nizovi $(n_i)_i$ u $\mathbb{N}$ i $(x_i)_i$ u $\mathbb{R}^m$ takvi da $n_i \to \infty$ i

$$\lim_{i\to\infty} \frac{(F^q - p)^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v.$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}(F^q - p)^{n_i}(x_i) &= (F^q - p)^{n_i-1}(F^q(x_i) - p)\\ &= (F^q - p)^{n_i-2}(F^q(F^q(x_i) - p) - p)\\ &= (F^q - p)^{n_i-2}(F^{2q}(x_i) - p - p) = \ldots = F^{n_iq}(x_i) - n_ip.\end{aligned}$$

Zato je

$$v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_iq}(x_i) - n_ip - x_i}{n_i} = q \cdot \frac{F^{qn_i}(x_i) - x_i}{qn_i} - p,$$

odakle je jasno da je $\frac{v+p}{q} \in \rho(F)$, odnosno $v \in q\rho(F) - p$. Time smo pokazali da je $\rho(F^q - p) \subseteq q\rho(F) - p$.

Za suprotnu inkluziju, neka je $v \in \rho(F)$. Tada postoje nizovi $(n_i)_i$ u $\mathbb{N}$ i $(x_i)_i$ u $\mathbb{R}^m$ takvi da $n_i \to \infty$ i

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v.$$

Sada tvrdimo da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $z \in \mathbb{R}^m$ i za sve $r \in \{0, ..., q-1\}$ vrijedi $\|F^r(z) - z\| \leq M$. Naime, za svaki $z \in \mathbb{R}^m$ postoji jedinstveni $s \in \mathbb{Z}^m$ takav da je $z \in [s, s+1)$. Vrijedi

$$F(z) - z = F(s + (z - s)) - z = F(z - s) + s - z = F(z - s) - (z - s)$$

pri čemu je $z - s \in [0, 1]^m$. Dakle, slika cijelog $\mathbb{R}^m$ po neprekidnoj funkciji $x \mapsto F(x) - x$ je ista kao slika kompakta $[0, 1]^m$, a ta slika je kompaktna. Stoga, zaista postoji traženi M.

Uvedimo sada oznake $r_i = n_i - k_i q$, uz $r_i \in \{0, ..., q-1\}$ i $z_i = F^{qk_i}(x_i)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} - \frac{F^{qk_i}(x_i) - x_i}{qk_i}\right\| &\leq \left\|\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{qk_i}\right\| + \left\|\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{qk_i} - \frac{z_i - x_i}{qk_i}\right\| \\ &= \left\|\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right\| \cdot \left\|1 - \frac{n_i}{qk_i}\right\| + \|F^{r_i}(z_i) - z_i\| \cdot \frac{1}{qk_i} \\ &= \left\|\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right\| \cdot \frac{r_i}{qk_i} + \|F^{r_i}(z_i) - z_i\| \cdot \frac{1}{qk_i}.\end{aligned}$$

Znamo da $\left\|\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right\| \to \|v\|$, jer je funkcija $x \mapsto \|x\|$ neprekidna. Nadalje, imamo ogradu $\|F^{r_i}(z_i) - z_i\| \leq M$, a s obzirom da $\frac{1}{qk_i}, \frac{r_i}{qk_i} < \frac{1}{k_i} \to 0$, zaključujemo da niz $\frac{F^{qk_i}(x_i) - x_i}{qk_i}$ konvergira prema istom limesu v. Stoga,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{(F^q)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} = qv \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \to \infty} \frac{(F^q - p)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} = qv - p$$

čime smo dobili da je $qv - p \in \rho(F^q - p)$, a samim time i drugu inkluziju.

(a2) Tvrdnja slijedi provođenjem prethodnog dokaza pri čemu koristimo $x_i = x$, za sve $i \in \mathbb{N}$.

(a3) Po *(a2)* znamo da je $\rho(F^q - p, x) = q\rho(F, x) - p$, za sve $x \in \mathbb{R}^m$. Stoga imamo

$$\begin{aligned}\rho_p(F^q - p) &= \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} \rho(F^q - p, x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} (q\rho(F, x) - p) = q \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} \rho(F, x) - p \\ &= q\rho_p(F) - p.\end{aligned}$$

(b) Primijetimo da je, uz oznaku $y_i = F^{n_i}(x_i)$,

$$\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = -\frac{(F^{-1})^{n_i}(y_i) - y_i}{n_i}.$$

Ako je $v \in \rho(F^{-1})$, onda postoje nizovi $(y_i)_i$ u $\mathbb{R}^m$ i $(n_i)_i$ u $\mathbb{N}$ takvi da $n_i \to \infty$ i

$$v = \lim_{i \to \infty} \frac{(F^{-1})^{n_i}(y_i) - y_i}{n_i} = -\lim_{i \to \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}.$$

Stoga je $-v \in \rho(F)$, tj $v \in -\rho(F)$, pa je $\rho(F^{-1}) \subseteq -\rho(F)$.

Suprotno, ako je $v \in \rho(F)$ onda postoje nizovi $(x_i)_i$ u $\mathbb{R}^m$ i $(n_i)_i$ u $\mathbb{N}$ takvi da $n_i \to \infty$ i

$$-v = \lim_{i \to \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = -\lim_{i \to \infty} \frac{(F^{-1}(y_i) - y_i}{n_i}.$$

Stoga, $v \in \rho(F^{-1})$ odakle lako slijedi jednakost $\rho(F^{-1}) = -\rho(F)$.

□

Lema 2.1.15. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^m$ kompaktan skup. Tada je* $\mathrm{Conv}(A)$ *zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Po Caratheodoryjevom teoremu, svaki element kovekse ljuske skupa $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je konveksna kombinacija $m+1$ elemenata iz tog skupa. Iz tog razloga, $\mathrm{Conv}(A)$ je slika preslikavanja $G : A^{m+1} \times \Delta_m \to \mathbb{R}^m$ definiranog s

$$G(a_0, ..., a_m; t_0, ..., t_m) = \sum_{i=0}^{m} t_i a_i$$

pri čemu je $\Delta_m = \{(t_0, ..., t_m) : t_j \geq 0, t_0, ..., t_m = 1\}$. Očito je skup Δ_m kompaktan, a znamo i da je A kompaktan pa je domena preslikavanja G kompaktan skup. Također, očito je G neprekidna funkcija pa ona slika kompaktan skup u kompaktan skup. Dakle, A, to jest slika funkcije G je kompaktan skup. □

Lema 2.1.16. *Ako je $F \in \mathscr{C}_m$, onda je $\rho(F) \subseteq$* $\mathrm{Conv}(K_n(F))$ *za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $z \in \rho(F)$ proizvoljan. Tada postoje nizovi $(n_i)_i$ u $\mathbb{N}$ i $(x_i)_i$ u $\mathbb{R}^m$ takvi da $n_i \to \infty$ i

$$z = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}.$$

Za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni zapis $n_i = m_i k + r_i$, pri čemu je $0 \leq r_i < k$ i vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} &= \frac{\left(F^k(F^{n_i-k}(x_i)) - F^{n_i-k}(x_i)\right) + ... + \left(F^k(F^{n_i-m_ik}(x_i)) - F^{n_i-m_ik}(x_i)\right)}{n_i} \\ &+ \frac{F^{n_i-m_ik}(x_i) - x_i}{n_i} \\ &= \frac{m_ik}{n_i} \cdot \frac{c_1 + ... + c_{m_i}}{m_i} + \frac{F^{r_i}(x_i) - x_i}{n_i}\end{aligned}$$

pri čemu je $c_j = \frac{F^k(F^{n_i-jk}(x_i)) - F^{n_i-jk}(x_i)}{k}$, za sve $j = 1, ..., m_i$. Primijetimo da je svaki $c_j \in K_k(F)$, a $\frac{c_1+...+c_{m_i}}{m_i}$ je konveksna kombinacija elemenata iz $K_k(F)$ pa se nalazi u $\mathrm{Conv}(K_k(F))$.

Pretpostavimo sada da $z \notin \mathrm{Conv}(K_k(F))$. S obzirom da je $\mathrm{Conv}(K_k(F))$ zatvoren skup, mora biti $d(z, \mathrm{Conv}(K_k(F))) = \varepsilon > 0$. Kako je z limes niza $(\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i})_i$, postoji $i_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_1$ vrijedi

$$\left\| z - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right\| = \left\| z - \left(\frac{m_ik}{n_i} \cdot \frac{c_1 + ... + c_{m_i}}{m_i} + \frac{F^{r_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nadalje, s obzirom da je $0 \leq r_i < k$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, postoji konstanta $M_1 > 0$ takva da je $\|F^{r_i}(x_i) - x_i\| < M_1$ za svaki i. Iz tog razloga, imamo $i_2 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_2$ vrijedi

$$\left\| \frac{F^{r_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

K tome, po lemi 2.1.15 znamo da je skup $\mathrm{Conv}(K_k(F))$ kompaktan pa postoji konstanta $M_2 > 0$ takva da je $\left\|\frac{c_1+\ldots+c_{m_i}}{m_i}\right\| < M_2$ za svaki i. Stoga, s obzirom da $\frac{n_i-m_ik}{n_i} \to 0$, onda postoji $i_3 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $i \geq i_3$ vrijedi

$$\frac{n_i - m_ik}{n_i}\left\|\frac{c_1 + \ldots + c_{m_i}}{m_i}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada za sve $i \geq \max\{i_1, i_2, i_3\}$, imamo

$$\begin{aligned}
\left\|z - \frac{c1 + \ldots + c_{m_i}}{m_i}\right\| &\leq \left\|z - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right\| + \left\|\frac{c_1 + \ldots + c_{m_i}}{m_i} - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \left\|\frac{c_1 + \ldots + c_{m_i}}{m_i} - \left(\frac{m_ik}{n_i} \cdot \frac{c_1 + \ldots + c_{m_i}}{m_i} + \frac{F^{r_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right)\right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{n_i - m_ik}{n_i}\left\|\frac{c_1 + \ldots + c_{m_i}}{m_i}\right\| + \frac{1}{n_i}\|F^{r_i}(x_i) - x_i\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, našli smo element skupa $\mathrm{Conv}(K_k(F))$ koji je od z udaljen za manje od ε što je kontradikcija s pretpostavkom, odnosno $z \in \mathrm{Conv}(K_k(F))$, a samim time i $\rho(F) \subseteq \mathrm{Conv}(K_k(F))$ zbog proizvoljnosti izbora elementa z. □

Sada smo spremni dokazati drugo važno svojstvo rotacijskog skupa preslikavanja F.

Teorem 2.1.17. *Za preslikavanje $F \in \mathscr{C}_m$, rotacijski skup $\rho(F)$ je povezan.*

Dokaz. Po lemi 2.1.16 znamo $\rho(F) \subseteq \mathrm{Conv}(K_1(F))$. S obzirom da je $\rho(F)$ zatvoren, a $\mathrm{Conv}(K_1(F))$ kompaktan skup, zaključujemo da je i $\rho(F)$ kompaktan.

Pretpostavimo sada da $\rho(F)$ nije povezan. Tada postoje disjunktni skupovi $A, B \subseteq \rho(F)$ zatvoreni u $\rho(F)$, takvi da je $\rho(F) = A \cup B$. A i B su onda također kompaktni, kao zatvoreni podskupovi kompaktnog skupa. Neka je $d(A, B) = \varepsilon > 0$. Naime, jasno je da je $d(A, B) \neq 0$ jer u suprotnom postoji zajedničko gomilište tih dvaju skupova, a s obzirom da su oni kompaktni, ono bi se nalazilo u njihovom presjeku, što je nemoguće jer su A i B disjunktni. Definirajmo skupove

$$U = \bigcup_{x\in A} K(x, \frac{\varepsilon}{3}) \quad i \quad V = \bigcup_{y\in B} K(y, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Jasno je da su skupovi U, V otvoreni te da vrijedi

$$\overline{U} = \bigcup_{x\in A} \overline{K}(x, \frac{\varepsilon}{3}), \quad \overline{V} = \bigcup_{y\in B} \overline{K}(y, \frac{\varepsilon}{3}), \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Neka je $\delta = d(\overline{U}, \overline{V})$. Neka je $v \in A$ i $w \in B$. Tada postoje nizovi $(n_i)_i$, $(k_j)_j$ u $\mathbb{N}$ i $(x_i)_i$, $(y_j)_j$ takvi da $n_i \to \infty$, $k_j \to \infty$ te

$$v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, \qquad w = \lim_{j\to\infty} \frac{F^{k_j}(y_j) - y_j}{k_j}.$$

Kako je $K_1(F)$ kompaktan, postoji konstanta $M \in \mathbb{R}$ takva da je $\|F(t) - t\| \leq M$ za sve $t \in \mathbb{R}^m$. Neka je $z \in \mathbb{R}^m$ proizvoljan i stavimo $t = F^n(z)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^n(z) - z}{n}\right\| &= \left\|\frac{F(t) - z}{n+1} - \frac{t - z}{n}\right\| \\
&\leq \left\|\frac{F(t) - z}{n+1} - \frac{F(t) - z}{n}\right\| + \left\|\frac{F(t) - z}{n} - \frac{t - z}{n}\right\| \\
&= \|F(t) - z\|(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + \|F(t) - t\| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{n}\Big(\left\|\frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1}\right\| + M\Big).
\end{aligned}$$

Vrijedi $\|F^{n+1}(z) - z\| \leq \|F^{n+1}(z) - F^n(z)\| + ... + \|F(z) - z\| \leq (n+1)M$ pa je

$$\left\|\frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^n(z) - z}{n}\right\| \leq \frac{2M}{n}.$$

Znamo da je $\rho(F) \subseteq U \cup V$ te je $U \cup V$ otvoren pa postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq N$ vrijedi $\frac{F^n(z)-z}{n} \in U \cup V$, za sve $z \in \mathbb{R}^m$. U suprotnom, postojao bi neki niz $(\frac{F^{n_i}(z_i)-z_i}{n_i})_i$ u $(U \cup V)^C$. No, kako je $(U \cup V)^C$ zatvoren skup, on sadrži limese svih konvergentnih podskupova svih nizova unutar $(U \cup V)^C$, pa tako i promatranog. Međutim, po definiciji skupa $\rho(F)$, ti se limesi nalaze i u njemu, a kako su $\rho(F)$ i $(U \cup V)^C$ disjunktni, dolazimo do kontradikcije.

Odaberimo sada $i \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvima

$$\frac{2M}{n_i} < \delta, \quad n_i \geq N, \quad \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \in U.$$

Odaberimo još i $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$k_j \geq n_i \quad i \quad \frac{F^{k_j}(y_j) - y_j}{k_j} \in V.$$

Zbog

$$\left\|\frac{F^{n+1}(x_i) - x_i}{n+1} - \frac{F^n(x_i) - x_i}{n}\right\| \leq \frac{2M}{n} \leq \frac{2M}{n_i} < \delta = d(\overline{U}, \overline{V})$$

za sve $n \geq n_i$, dobivamo da je $\frac{F^n(x_i)-x_i}{n} \in U$ za sve $n \geq n_i$. Stoga je i $\frac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j} \in U$. Promotrimo sada segment $[x_i, y_j]$. Njega neprekidna funkcija $\frac{F^{k_j}-id}{k_j}$ preslikava u krivulju od $\frac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j} \in U$ do $\frac{F^{k_j}(y_j)-y_j}{k_j} \in V$. Međutim, onda postoji $t \in [x_i, y_j]$ takav da je $\frac{F^{k_j}(t)-t}{k_j}$ na toj krivulji, a nije ni u U ni u V što je kontradikcija s tvrdnjom $\frac{F^n(z)-z}{n} \in U \cup V$ za sve $z \in \mathbb{R}^m$ i za sve $n \geq N$.

Dakle, početna hipoteza je pogrešna, to jest $\rho(F)$ je povezan.

□

Napomena 2.1.18. *Primijetimo da je $K_n(F) \subset \mathrm{Conv}(K_1(F))$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Naime, neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i $\frac{F^n(x)-x}{n}$ neki element od $K_n(F)$. Vrijedi*

$$\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{(F^n(x)-F^{n-1}(x)) + (F^{n-1}(x)-F^{n-2}(x)) + ... + (F(x)-x)}{n}.$$

Primijetimo da je $F^{k+1}(x)-F^k(x) = F(F^k(x))-F^k(x) \in K_1(F)$ za svaki $0 \leq k \leq n-1$. Dakle, $\frac{F^n(x)-x}{n}$ smo zapisali kao konveksnu kombinaciju elemenata iz $K_1(F)$ pa zbog proizvoljnosti odabira tog elementa slijedi tvrdnja.

Iz dokazanoga sada slijedi:

Korolar 2.1.19. *[3, Korolar 2.6] Za $F \in \mathscr{C}_m$ vrijedi $\mathrm{Conv}(\rho(F)) = \mathrm{Conv}(\rho_p(F))$.*

Lema 2.1.20. *Za svaki $F \in \mathscr{C}_m$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $K_n(F) \subset B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $F \in \mathscr{C}_m$ i $\varepsilon > 0$ te nizovi $(n_i)_i$ u $\mathbb{N}$ i $v_i \in K_{n_i}(F)$ takvi da $n_i \to \infty$ i $v_i \notin B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(v_i)_i$ konvergentan niz, jer inače možemo raditi s njegovim konvergentim podnizom. Takav postoji s obzirom da po prethodnoj napomeni možemo zaključiti da je je $(v_i)_i$ zapravo i niz u skupu $\mathrm{Conv}(K_1(F))$, koji je kompaktan pa svaki niz u njemu ima konvergentan podniz. Po definiciji, limes niza $(v_i)_i$ mora pripadati skupu $\rho(F)$. No, skup $\mathbb{R}^m \backslash B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$ je zatvoren pa se limes niza $(v_i)_i$ mora nalaziti i u tom skupu. S obzirom da je $\rho(F) \subseteq \mathrm{Conv}(\rho(F)) \subset B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$, dolazimo do kontradikcije. □

Lema 2.1.21. *Neka je $F \in \mathscr{C}_m$. Tada je skup $B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$ konveksan za svaki $\varepsilon > 0$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$ i $\lambda \in (0,1)$ proizvoljni. Očito postoje $a, b \in \mathrm{Conv}(\rho(F))$ takvi da je $d(a,x) = \varepsilon_1 < \varepsilon$ i $d(b,y) = \varepsilon_2 < \varepsilon$. Nadalje, $\lambda a + (1-\lambda)b \in$

$\mathrm{Conv}(\rho(F))$ jer je taj skup konveksan. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
(d(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda a + (1-\lambda)b)^2 &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i - \lambda a_i - (1-\lambda)b_i)^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - b_i)^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)(y_i - b_i) \\
&\overset{(1)}{\leq} \lambda^2 \varepsilon_1^2 + (1-\lambda)^2 \varepsilon_2^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}((x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2) \\
&= \lambda^2 \varepsilon_1^2 + (1-\lambda)^2 \varepsilon_2^2 + \lambda(1-\lambda)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \\
&\leq \lambda^2 \varepsilon^2 + (1-\lambda)^2 \varepsilon^2 + 2\lambda(1-\lambda)\varepsilon^2 \\
&= (\lambda + (1-\lambda))^2 \varepsilon^2 = \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

U gornjem raspisu smo u (1) koristili aritmetičko-geometrijsku nejednakost. Dakle, $\lambda x + (1-\lambda)y$ je iz $B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$ pa je taj skup zaista konveksan. □

Propozicija 2.1.22. *Ako je $F \in \mathscr{C}_m$, onda je* $\mathrm{Conv}(\rho(F)) = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F))$.

Dokaz. Inkluzija $\mathrm{Conv}(\rho(F)) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F))$ lako slijedi iz leme 2.1.16. Naime, iz nje vidimo da skup $\bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F))$ sadrži $\rho(F)$, a očito je i kako je taj skup konveksan kao presjek konveksnih skupova. Sada tvrdnja slijedi jer je $\mathrm{Conv}(\rho(F))$ po definiciji upravo najmanji konveksan skup koji sadrži $\rho(F)$.

S druge strane, po lemi 2.1.20, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{Conv}(K_n(F)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$. To vrijedi jer je, po prethodnoj lemi, skup na desnoj strani konveksan skup koji sadrži $K_n(F)$, a skup na lijevoj strani je upravo najmanji takav. Stoga je jasno $\bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$. S obzirom da to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, slijedi i preostala inkluzija, a time i kompletna tvrdnja. □

Napomena 2.1.23. *Metrika na $\mathscr{C}_m$ s kojom radimo (u sljedećem teoremu) je funkcija $d : \mathscr{C}_m \times \mathscr{C}_m \to \mathbb{R}$ dana s $d(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|f(x) - g(x)\|$.*

Teorem 2.1.24. *Funkcija $\mathrm{Conv}(\rho(\cdot)) : \mathscr{C}_m \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ je odozgo senineprekidna, odnosno za svaki $F \in \mathscr{C}_m$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina V od F u $\mathscr{C}_m$ takva da za svaku $G \in V$ vrijedi*

$$\mathrm{Conv}(\rho(G)) \subset B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon).$$

Dokaz. Za proizvoljne $F \in \mathscr{C}_m$ i $\varepsilon > 0$ po lemi 2.1.20 postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{Conv}(K_n(F)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \frac{\varepsilon}{2})$. Također, postoji okolina V od F u $\mathscr{C}_m$ takva da za sve $G \in V$ vrijedi

$$\mathrm{Conv}(K_n(G)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(K_n(F)), \frac{\varepsilon}{2}). \tag{2.3}$$

Tu ćemo tvrdnju pokazati na kraju dokaza. Odavde je sad jasno

$$\mathrm{Conv}(K_n(G)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon).$$

Nadalje, po lemi 2.1.16 vidimo da je $\rho(G) \subseteq \mathrm{Conv}(K_n(G))$, pa s obzirom da je $B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon)$ konveksan skup koji sadrži $\rho(G)$, a $\mathrm{Conv}(\rho(G))$ je najmanji konveksan skup s tim svojstvom, zaključujemo

$$\mathrm{Conv}(\rho(G)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \varepsilon).$$

Pokažimo još tvrdnju (2.3). Budući da se za skup $B(\mathrm{Conv}(K_n(F)), \varepsilon)$ slično kao u lemi 2.1.21 pokaže da je konveksan, biti će dovoljno pokazati da postoji okolina V od F u $\mathscr{C}_m$ takva da za svaku $G \in V$ vrijedi

$$K_n(G) \subseteq B(\mathrm{Conv}(K_n(F)), \frac{\varepsilon}{2}),$$

a tu tvrdnju pokazujemo matematičkom indukcijom. Za bazu $n = 1$, jednostavno možemo odabrati okolinu V od F u $\mathscr{C}_m$ takvu da je $d(G, F) < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaku $G \in V$. Tada za proizvoljan $G(x) - x \in K_1(G)$ vrijedi $\|(G(x) - x) - (F(x) - x)\| = \|G(x) - F(x)\| \leq d(G, F) < \frac{\varepsilon}{2}$, pa je $K_1(G) \subseteq B(\mathrm{Conv}(K_1(F)), \frac{\varepsilon}{2})$, jer je $F(x) - x \in K_1(F)$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i pokažimo ju za $n+1$. Za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^m$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{G^{n+1}(x) - x}{n+1} - \frac{F^{n+1}(x) - x}{n+1} \right\| &= \frac{1}{n+1} \|G^{n+1}(x) - F^{n+1}(x)\| \\
&= \frac{1}{n+1} \|G^n(G(x)) - G^n(F(x)) + G^n(F(x)) - F^n(F(x))\| \\
&\leq \frac{1}{n} \|G^n(G(x)) - G^n(F(x))\| + \frac{1}{n} \|G^n(F(x)) - F^n(F(x))\|.
\end{aligned}$$

Drugi član na desnoj strani posljednje nejednakosti možemo zapisati kao

$$\frac{1}{n} \|G^n(F(x)) - F(x) + F(x) - F^n(F(x))\| = \left\| \frac{G^n(F(x)) - F(x)}{n} - \frac{F^n(F(x)) - F(x)}{n} \right\|.$$

Po pretpostavci indukcije znamo da za $\varepsilon_1 = \frac{n\varepsilon}{4}$ postoji okolina V_1 od F u $\mathscr{C}_m$ takva da za sve $G \in V_1$ vrijedi

$$K_n(G) \subseteq B(\mathrm{Conv}(K_n(F)), \varepsilon_1),$$

a samim time i $\frac{1}{n} \|G^n(F(x)) - F^n(F(x))\| < \frac{1}{n} \cdot \frac{n\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$.

Prvi član na desnoj strani posljednje nejednakosti možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \|G^n(G(x)) - G^n(F(x))\| &= \left\| \frac{G^n(G(x)) - G(x)}{n} - \frac{G^n(F(x)) - F(x)}{n} + \frac{G(x) - F(x)}{n} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{G^n(G(x)) - G(x)}{n} - \frac{G^n(F(x)) - F(x)}{n} \right\| + \frac{1}{n} \|G(x) - F(x)\|.
\end{aligned}$$

Zbog argumentacije u dokazu napomene 2.1.9 možemo pretpostaviti da je $x \in [0,1]^m$ te zaključujemo da je funkcija $\frac{G^k - id}{k}$ uniformno neprekidna, kao neprekidna funkcija na kompaktnoj domeni, i to za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada za $\frac{\varepsilon}{8}$ postoji $\delta > 0$ takav da $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \left\|\frac{G^n(x)-x}{n} - \frac{G^n(y)-y}{n}\right\| < \frac{\varepsilon}{8}$. Nadalje, po bazi indukcije, znamo da za $\varepsilon_2 = \min\{\delta, \frac{n\varepsilon}{8}\}$ postoji okolina V_2 od F u $\mathscr{C}_m$ takva da za sve $G \in V_2$ vrijedi $\|G(x) - F(x)\| < \varepsilon_2$. Dakle, za sve $G \in V_2$ onda vrijedi

$$\frac{1}{n}\|G^n(G(x)) - G^n(F(x))\| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Korištenjem dobivenih nejednakosti sada slijedi

$$\left\|\frac{G^{n+1}(x)-x}{n+1} - \frac{F^{n+1}(x)-x}{n+1}\right\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

čime je dokazan korak indukcije, a samim time i jedina preostala tvrdnja teorema. □

Napomena 2.1.25. *Za svaki $x \in \mathbb{R}^m$, skup $\{F \in \mathscr{C}_m : x \in \mathrm{Conv}(\rho(F))\}$ je zatvoren.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je S, komplement promatranog skupa, otvoren. Primijetimo da je

$$S = \{F \in \mathscr{C}_m : x \notin \mathrm{Conv}(\rho(F))\}.$$

Neka je $F \in S$ proizvoljan. Po lemi 2.1.15, skup $\mathrm{Conv}(\rho(F))$ je zatvoren pa je $d(x, \mathrm{Conv}(\rho(F)) = \varepsilon > 0$. Po teoremu 2.1.24 postoji okolina V od F u $\mathscr{C}_m$ takva da je za svaki $G \in V$

$$\mathrm{Conv}(\rho(G)) \subseteq B(\mathrm{Conv}(\rho(F)), \frac{\varepsilon}{2}).$$

Stoga, za proizvoljan $y \in \mathrm{Conv}(\rho(G))$ vrijedi $d(y, \mathrm{Conv}(\rho(F))) < \frac{\varepsilon}{2}$, odakle pak slijedi

$$d(x,y) > d(x, \mathrm{Conv}(\rho(F))) - d(y, \mathrm{Conv}(\rho(G))) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stoga, $d(x, \mathrm{Conv}(\rho(G))) > 0$ iz čega jasno zaključujemo $x \notin \mathrm{Conv}(\rho(G))$, odnosno $G \in S$ pa je $V \subseteq S$ i tvrdnja dokazana. □

2.2 Svojstva rotacijskog skupa od $F \in \mathscr{H}_2$

U slučaju da pojačamo zahtjeve za preslikavanje F, odnosno konkretno promatramo $F \in \mathscr{H}_2$, možemo pokazati još jača svojstva rotacijskog skupa $\rho(F)$, ponajprije njegovu konveksnost.

Definicija 2.2.1. *Za $a, b \in \mathbb{R}^2$, s ab ćemo označavati otvoreni interval između a i b, dok ćemo sa $\overline{ab}$ označavati zatvoreni segment između a i b.*

Definicija 2.2.2. *Neprekidno preslikavanje γ iz $I = [0, 1]$ u $\mathbb{R}^2$ zovemo* ***krivulja****. Kažemo da krivulja* ***jednostavna*** *ako ne siječe sama sebe, odnosno ako ne postoje $0 \le s < t \le 1$ takvi da je $\gamma(s) = \gamma(t)$. Kažemo da je krivulja γ* ***zatvorena*** *ako je $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Napomena 2.2.3. *Iz kompleksne analize znamo da za zatvorenu krivulju γ i za proizvoljnu točku ravnine z imamo definiran* ***indeks*** *$ind_z(\gamma)$ krivulje γ u odnosu na točku z. Nama nije važna formalna definicija indeksa već samo poznata činjenica da je indeks uvijek cijeli broj i da je njegova interpretacija zapravo broj obilazaka ili namotaja krivulje γ oko točke z. Posebno, ako z nije u području omeđenom s γ, vrijedi $ind_z(\gamma) = 0$, a u slučaju da je γ jednostavna krivulja i z unutar omeđenog skupa, onda može biti točno jedan obilazak krivulje γ oko točke z pa je $ind_z(\gamma) = \pm 1$, ovisno o smjeru "namatanja".*

Lema 2.2.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^2$ i $a \neq b$. Neka je T translacija za vektor v. Neka je γ jednostavna krivulja koja spaja a i b i ne siječe $\overline{ab}$. Pretpostavimo da γ ne siječe $T(\gamma)$. Onda $T(a)$ nije element otvorenog skupa D omeđenog s $\overline{ab} \cup \gamma$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a = 0$. Budući da γ ne siječe $T(\gamma) = \gamma + v$, jednadžba $\gamma(s) = \gamma(t) + v$ nema riješenja $(s, t) \in I^2$. Promotrimo funkciju $\Psi : I^2 \to \mathbb{R}^2$ danu s $\Psi(s, t) = \gamma(s) - \gamma(t)$. Onda očito $v \notin \Psi(I^2)$.

Definirajmo sada zatvorenu krivulju α danu s

$$\alpha(t) = \begin{cases} (3t, 0) & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ (1, 3t - 1) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ (3 - 3t, 3 - 3t) & t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Uvrštavanjem vidimo da je $\Psi(\alpha)$ krivulja koja je spoj krivulja γ i $b - \gamma$, što ćemo označavati s $\gamma * (b - \gamma)$. Neka je $\beta(t) = tb, t \in I$. Slika od β je očito $\overline{ab}$. Onda je $\Psi(\alpha)$ zapravo spoj dvije zatvorene krivulje, $\delta = \gamma * \beta^{-1}$ i $\varepsilon = \beta * (b - \gamma)$. Krivulja δ je spoj krivulja γ i β^{-1}, a ne γ i β jer slika od β ide od a prema b kada t ide od 0 prema 1, a ondje ide u suprotnom smjeru.

Po pretpostavci, δ je jednostavna krivulja i skup D je omeđen upravo s δ. Pretpostavimo da je $T(a) = T(0) = v \in D$. Tada je $ind_v(\delta) = \pm 1$. Primijetimo da je ε centralno simetrična krivulji δ u odnosu na točku $\frac{1}{2}b$, odnosno dobivena je rotacijom δ za $180°$ i zadržan je time zadan smjer obilaska. Iz tog razloga, ako je $v \in D$ onda je $b - v$ u području omeđenom s krivuljom ε i $ind_v(\delta) = ind_{b-v}(\varepsilon)$. S obzirom da je, u slučaju jednostavne zatvorene krivulje, svaka točka unutar područja omeđenog krivuljom ima jednak indeks, možemo zaključiti sljedeće

$$ind_v(\varepsilon) = \begin{cases} ind_v(\delta) & \text{ako } b - v \in D, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

U svakom slučaju, vrijedi

$$ind_v(\Psi(\alpha)) = ind_v(\delta) + ind_v(\varepsilon) \neq 0$$

što znači da se v nalazi unutar područja omeđenog zatvorenom krivuljom $\Psi(\alpha)$. Zato je v slika neke točke trokuta ograničenog zatvorenom krivuljom α, po funkciji Ψ, što je kontradikcija jer od ranije znamo da $v \notin \Psi(I^2)$. Dakle, $T(a) = v \notin D$. □

Lema 2.2.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^2$ i $a \neq b$. Neka je γ jednostavna krivulja koja spaja a i b i ne siječe ab. Pretpostavimo da je $\pi(\gamma)$ jednostavna krivulja. Tada*

(a) $\pi(a) \notin \pi(D)$*, pri čemu je D područje ograničeno s* $ab \cup \gamma$

(b) $\overline{ab} \subseteq \overline{B}(\gamma, \sqrt{2})$

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je $\pi(a) \in \pi(D)$. Onda postoji $c \in D$ takav da vektor $c - a$ ima cjelobrojne koordinate. Očito $c \neq a$ jer $a \notin D$ s obzirom da je D otvoren skup omeđen s ab i γ. Pretpostavimo da se γ i $T(\gamma)$ sijeku u nekoj točki d. Tada se točke d i $d - (c - a)$ nalaze na γ i vrijedi $\pi(d) = \pi(d - (c - a))$ pa krivulja $\pi(\gamma)$ nije jednostavna, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, $\gamma \cap T(\gamma) = \emptyset$ pa su zadovoljene pretpostavke leme 2.2.4 i vrijedi $T(a) = c \notin D$, čime dolazimo u kontradikciju s početnom pretpostavkom i slijedi $\pi(a) \notin \pi(D)$.

(b) Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da ab nije ni horizontalan ni vertikalan interval. Za dokazati tvrdnju, dovoljno je pokazati za svaki otvoren kvadrat sa stranicom duljine 1 i vrhovima u skupu $a + \mathbb{Z}^2$, ako on siječe ab, da onda siječe i γ. Naime, za svaku točku $c \in \overline{ab}$ postoji kvadrat među promatranima, takav da njegov zatvarač sadrži c. Ako taj kvadrat siječe i γ, onda je c od γ udaljena najviše za $\sqrt{2}$, što je duljina dijagonale kvadrata.

Pokažimo sada tu tvrdnju. Neka proizvoljan kvadrat iz skupa promatranih kvadrata siječe ab. Onda zbog otvorenosti kvadrata on nužno siječe i skup D, no po (a) dijelu znamo da vrhovi kvadrata ne pripadaju skupu D. Neka je $d \in D$ neka unutarnja točka kvadrata i povežimo ju segmentima sa sva 4 vrha kvadrata. Za svaki od tih segmenata vrijedi da mu je jedan rub unutar skupa D, a drugi izvan pa svaki od njih siječe rub skupa D, odnosno krivulju $\gamma \cup \overline{ab}$. Jasno je da ne mogu sva 4 sijeći $\overline{ab}$ pa barem 1 siječe γ, odnosno postoji točka na krivulji γ unutar promatranog kvadrata, čime je tvrdnja dokazana.

□

Lema 2.2.6. *Za $G \in \mathscr{H}_2$ vrijedi* $\mathrm{Conv}(G(I^2)) \subseteq \overline{B}(G(I^2), \sqrt{2})$.

Dokaz. Očito je $G(I^2) \subseteq \overline{B}(G(I^2), \sqrt{2})$. Neka je $x \in \mathrm{Conv}(G(I^2))\backslash G(I^2)$. Skup $G(I^2)$ je kompaktan i povezan kao slika kompaktnog, povezanog skupa I^2 po neprekidnom preslikavanju G. Neka je A skup svih θ s jedinične kružnice S^1, takvih da polupravac $\{x+t\theta : t \geq 0\}$ siječe $G(I^2)$. Primijetimo da je A upravo skup svih $\theta \in S^1$ takvih da postoji $y \in G(I^2)$ za koji je

$$x + \|y - x\|\theta = y \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{y - x}{\|y - x\|}.$$

Zato je A slika skupa $G(I^2)$ po preslikavanju $y \mapsto \frac{y-x}{\|y-x\|}$ koje je očito neprekidno pa je zato A kompaktan, povezan skup.

Budući da je $x \in \mathrm{Conv}(G(I^2))$, skup A sadrži zatvorenu polukružnicu. Naime, pretpostavimo li suprotno, mora postojati pravac p kroz x koji ne siječe $G(I^2)$. Kako je $G(I^2)$ zatvoren, $d(x, G(I^2)) = \varepsilon > 0$ pa možemo povući pravac r paralelan s p udaljen od x i od $G(I^2)$ za $\frac{\varepsilon}{2}$. Sada je x u jednoj poluravnini određenoj pravcem r dok je cijeli $G(I^2)$ u drugoj, a njoj se onda moraju nalaziti i sve konveksne kombinacije elemenata od $G(I^2)$, odnosno cijeli $\mathrm{Conv}(G(I^2))$ što je kontradikcija s $x \in \mathrm{Conv}(G(I^2))$.

Stoga, postoje $a, b \in G(I^2)$ takvi da $x \in ab \not\subseteq G(I^2)$. Neka je $a = G(y)$ i $b = G(z)$ za $y, z \in I^2$. Budući da je G homeomorfizam, očito je $\gamma = G(\overline{yz})$ jednostavna krivulja i zadovoljava uvjete leme 2.2.5 (tj $\pi(\gamma)$ je jednostavna krivulja) osim u slučaju $\pi(y) = \pi(z)$. Tada, u svakoj okolini od b postoji $b' = G(z') \neq b$ takav da $ab' \not\subseteq G(I^2)$, jer je $G(I^2) = \overline{Int(G(I^2))}$, što ćemo pokazati na samom kraju dokaza. U tom slučaju biramo b', z', x' umjesto b, z, x pri čemu je $x' \in ab'$ najbliža točki x, od svih točaka na tom intervalu. Po lemi 2.2.5(b) znamo da x (ili x') pripada skupu $B(G(I^2), \sqrt{2})$. Budući da je b' izabran proizvoljno blizu b, onda je i x' proizvoljno blizu x te u svakom slučaju vrijedi $x \in \overline{B}(G(I^2), \sqrt{2})$.

Pokažimo još $G(I^2) = \overline{Int(G(I^2))}$. Naime, očito je $\overline{Int(G(I^2))} \subseteq G(I^2)$, jer je $G(I^2)$ neki zatvoren skup koji sadrži $Int(G(I^2))$ pa je svakako i nadskup njegovog zatvarača, odnosno najmanjeg zatvorenog skupa koji ga sadrži. S druge strane, neka je $x \in G(I^2)$ proizvoljan. Tada postoji $t \in I^2$ takav da je $G(t) = x$. I^2 je kompaktan skup pa sadrži sva svoja gomilišta, a budući da je i povezan, postoji niz $(t_n)_n \in Int(I^2)$ takav da $t_n \to t$. Kao homeomorfizam, G je neprekidna funkcija pa onda i $G(t_n) \to G(t)$. S obzirom da je $t_n \in Int(I^2)$, postoji otvorena okolina U od t_n sadržana u I_2. Onda je $G(U) = (G^{-1})^{-1}(U)$ okolina od $G(t_n)$ koja je sadržana u $G(I^2)$, a pritom je i otvorena kao praslika otvorenog skupa U po neprekidnoj funkciji G^{-1}. Dakle, $(G(t_n))_n$ je niz u $Int(G(I^2))$ koji konvergira prema $G(t)$ pa je to gomilište interiora od $G(I^2)$ odakle slijedi druga inluzija. $\square$

Napomena 2.2.7. *Za neprazne skupove $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ definiramo* ***Hausdorffovu metriku*** *sa*

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} d(x, y), \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} d(x, y)\}.$$

Teorem 2.2.8. *Neka je $F \in \mathscr{H}_2$. Tada vrijedi* *(a)* $\rho(F) = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F))$.

(b) $\rho(F)$ *je konveksan.*

(c) *Za svaki* $v \in \rho(F)$ *postoji niz* $(x_n)_n$ *u* $\mathbb{R}^2$ *takav da je* $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x_n)-x_n}{n} = v$.

(d) $K_n(F)$ *konvergiraju prema* $\rho(F)$ *u Hausdorffovoj metrici.*

Dokaz. Po lemi 2.1.16 znamo

$$\rho(F) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F)). \tag{2.4}$$

Primijetimo da vrijedi

$$K_n(F) = \left\{\frac{F^n(x)-x}{n} : x \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\frac{F^n(x)-x}{n} : x \in I^2\right\} \subseteq \overline{B}\left(\frac{F^n(I^2)}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right), \tag{2.5}$$

jer za proizvoljan $x \in I^2$ vrijedi

$$d\left(\frac{F^n(x)-x}{n}, \frac{F^n(x)}{n}\right) = \left\|\frac{F^n(x)-x}{n} - \frac{F^n(x)}{n}\right\| = \left\|\frac{x}{n}\right\| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Nadalje, primjetimo da za proizvoljne $x, y \in I^2$ i $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\left\|\frac{\lambda F^n(x) + (1-\lambda)F^n(y)}{n} - \left(\lambda\frac{F^n(x)-x}{n} + (1-\lambda)\frac{F^n(y)-y}{n}\right)\right\| = \left\|\frac{\lambda x + (1-\lambda)y}{n}\right\|,$$

a budući da je I^2 konveksan skup, vrijedi $\frac{\lambda x+(1-\lambda)y}{n} \in I^2$. Stoga, zaključujemo

$$\mathrm{Conv}(K_n(F)) \subseteq \overline{B}\left(\frac{\mathrm{Conv}(F^n(I^2))}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right). \tag{2.6}$$

Po lemi 2.2.6 je

$$\frac{\mathrm{Conv}(F(I^2))}{n} \subseteq \overline{B}\left(\frac{F^n(I^2)}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right). \tag{2.7}$$

Iz argumentacije za relaciju (2.5) isto tako zaključujemo

$$\frac{F^n(I^2)}{n} \subseteq \overline{B}\left(K_n(F), \frac{\sqrt{2}}{n}\right). \tag{2.8}$$

Iz relacija (2.6), (2.7) i (2.8) slijedi

$$\mathrm{Conv}(K_n(F)) \subseteq \overline{B}\left(K_n(F), \frac{3\sqrt{2}}{n}\right). \tag{2.9}$$

Ako je $v \in \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F))$, onda po (2.9) postoji niz $(x_n)_n$ takav da za svaki n vrijedi

$$\left\| \frac{F^n(x_n) - x_n}{n} - v \right\| \leq \frac{3\sqrt{2}}{n}$$

pa zato slijedi

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x_n) - x_n}{n}. \tag{2.10}$$

Stoga, dobili smo da je $v \in \rho(F)$ pa iz proizvoljnosti izbora v zaključujemo $\bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Conv}(K_n(F)) \subseteq \rho(F)$ što u kombinaciji s (2.4) dokazuje tvrdnju pod (a). Sada znamo da (2.10) vrijedi za svaki $v \in \rho(F)$ pa je to dokaz za (c). Tvrdnja (b) slijedi direktno iz (a) jer je presjek konveksnih skupova konveksan.

Preostaje pokazati (d). Neka je $\varepsilon > 0$. Iz relacije (2.9) i leme 2.1.16 zaključujemo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\rho(F) \subseteq B(K_n(F), \varepsilon)$. S druge strane, iz (b) i leme 2.1.20 znamo da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_1$ vrijedi $K_n(F) \subseteq B(\rho(F), \varepsilon)$. Odavde tvrdnja očito slijedi.

□

Korolar 2.2.9. *Neka je $F \in \mathscr{H}_2$. Tada je $\rho(F) = \mathrm{Conv}(\rho_p(F))$.*

Dokaz. Iz korolara **??** znamo $\mathrm{Conv}(\rho(F)) = \mathrm{Conv}(\rho_p(F))$. S druge strane, po (b) dijelu prethodnog teorema znamo da je $\rho(F)$ konveksan pa je $\mathrm{Conv}(\rho(F)) = \rho(F)$ pa je tvrdnja dokazana. □

Korolar 2.2.10. *Funkcija $\rho : \mathscr{H}_2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ je odozgo semineprekidna.*

Dokaz. Slijedi iz teorema 2.1.24 jer znamo da je $\mathrm{Conv}(\rho(\cdot))$ odozgo semineprekidna funkcija, a po teoremu 2.2.8(b) je $\mathrm{Conv}(\rho(F)) = \rho(F)$ za sve $F \in \mathscr{H}_2$, odnosno $\mathrm{Conv}(\rho(\cdot))$ i $\rho(\cdot)$ su iste funkcije. □

Korolar 2.2.11. *Za svaki $x \in \mathbb{R}^2$, skup $\{F \in \mathscr{H}_2 : x \in \rho(F)\}$ je zatvoren.*

Dokaz. Slijedi iz napomene 2.1.25 i teorema 2.2.8(b) poput prethodnih korolara. □

Poglavlje 3

Rotacijski skup koji separira ravninu

3.1 Minimalni podskupovi torusa

U ovom poglavlju iznosimo neke rezultate iz [2].

Definicija 3.1.1. *Skup svih homeomorfizama na $\mathbb{T}^2$ homotopnih identiteti, označavat ćemo s $Homeo_0(\mathbb{T}^2)$.*

Definicija 3.1.2. *Za $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, pripadno podizanje $F \in \mathscr{H}_2$ i proizvoljan skup $M \subseteq \mathbb{T}^2$,* ***rotacijski skup od F na M*** *je definiran kao*

$$\rho_M(F) = \{\rho \in \mathbb{R}^2 \big| \exists\, n_i \nearrow \infty, z_i \in \pi^{-1}(M) : \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(z_i) - z_i}{n_i} = \rho\}. \tag{3.1}$$

U slučaju $M = \mathbb{T}^2$, skup $\rho_{\mathbb{T}^2}(F)$ je zapravo $\rho(F)$ i to je rotacijski skup od F, pa je ovaj pojam rotacijskog skupa preslikavanja na nekom skupu zaista proširenje pojma rotacijskog skupa nekog preslikavanja.

Definicija 3.1.3. *Neka je $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ i $M \subseteq \mathbb{T}^2$. Kažemo da je M* ***minimalan*** *za f ako je neprazan, zatvoren, invarijantan za f te ako nema nijedan pravi podskup koji također zadovoljava ta 3 svojstva.*

Definicija 3.1.4. *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$* ***separira ravninu*** *$\mathbb{R}^2$ ako skup $\mathbb{R}^2 \setminus S$ nije povezan.*

Slijedi rezultat koji će biti centralni rezultat razmatranja ovog rada.

Teorem 3.1.5. *Postoji $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ s podizanjem F takav da za neki minimalan skup M, pridruženi $\rho_M(F)$ separira ravninu.*

Za potrebe konstrukcije takvog minimalnog skupa, koristit ćemo simboličku dinamiku.

3.2 Rotacijske potkove i simboličko računanje rotacijskih skupova

Definicija 3.2.1. *Skup $R \subset \mathbb{T}^2$ je **(topološki) pravokutnik** ako je homeomorfan kvadratu* $[0, 1]^2$.

Definicija 3.2.2. *Neka je $C \subseteq \mathbb{T}^2$ zatvoren invarijantan skup za $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$. Familija $\mathcal{R} = \{R_0, ..., R_N\}$ u parovima disjunktnih pravokutnika je **particija** od C ako je $C \subseteq \cup_{i=0}^{N} R_i$. Tada definiramo skup $\Sigma := \{0, ..., N\}^{\mathbb{Z}}$ i označimo sa $\mathcal{S}$ skup svih dvostranih nizova $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ za koje postoji $x \in C$ takav da je $f^i(x) \in R_{\omega_i}, \forall i \in \mathbb{Z}$.*

U ovom poglavlju, uvijek ćemo objekte iz prethodne definicije označavati istim oznakama pa nećemo u iskazu svih tvrdnji iznova napominjati što one označavaju. Kasnije u poglavlju ćemo za funkciju f i skup C uvesti još neka dodatna svojstva.

Poznato je da je funkcija $d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ dana s

$$d(\omega, \omega') = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|\omega_i - \omega'_i|}{(N + 1)^{|i|}}$$

metrika na Σ. Nadalje, standardno je definiran pomak $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tako da je $\sigma(\omega) = \omega'$, pri čemu je $\omega'_i = \omega_{i+1}$, za sve $i \in \mathbb{Z}$. Sada možemo istaknuti neka lijepa svojstva skupa $\mathcal{S}$.

Propozicija 3.2.3. *$\mathcal{S}$ je kompaktan i invarijantan na pomak σ.*

Dokaz. Ograničenost od $\mathcal{S}$ je jasna, s obzirom da su u metrici d svaka 2 elementa od Σ, pa tako i od $\mathcal{S}$ udaljena za manje od $2N + 2$. Invarijantnost na pomak je također očita. Naime, ako je $\omega \in \mathcal{S}$ i x pripadni element iz skupa C, onda zaključujemo da elementu $\sigma(\omega)$ možemo pridružiti točku $f(x)$, koja je zaista u C jer je taj skup invarijantan za f. Preostaje pokazati zatvorenost. Neka je $(\omega^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{S}$ koji konvergira prema ω te neka su $x_i \in C$ pridruženi nizovima $\omega^{(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. S obzirom da je C ograničen skup, niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$, koji konvergira prema nekom $x \in C$. Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da $f^m(x) \notin R_{\omega_m}$. Budući da je f^m neprekidna funkcija, znamo da niz $f^m(x_{i_k})$ konvergira prema $f(x)$. Uz to, budući da $(\omega^{(i_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema ω, znamo da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $\omega_m^{(i_k)} = \omega_m$. To pak znači da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $f^m(x_{i_k}) \in R_{\omega_m}$, a s obzirom da su pravokutnici u $\mathcal{R}$ disjunktni, mora vrijediti $f^m(x) \in R_{\omega_m}$. Dakle, dobili smo kontradikciju pa je $f^m(x) \in R_{\omega_m}$, za sve $m \in \mathbb{N}$, a posljedično i $\omega \in \mathcal{S}$, odakle slijedi zatvorenost skupa $\mathcal{S}$. □

Definicija 3.2.4. *Skup $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je **topološki krug** ako je homeomorfan jediničnom krugu u $\mathbb{R}^2$. Slično, skup $D' \subseteq \mathbb{T}^2$ nazivamo topološkim krugom ako je homeomorfan otvorenom jediničnom krugu.*

Definicija 3.2.5. *Ako vrijedi $\mathcal{S} = \Sigma$, onda skup C zovemo* ***potkova*** *i kažemo da je ona* ***rotacijska*** *ako vrijedi*

1. *postoji ograničen topološki krug $D \subseteq \mathbb{R}^2$ takav da je $\pi(D) \subseteq \mathbb{T}^2$ topološki krug i $\cup_{i=0}^{N} R_i \subseteq \pi(D)$*
2. *za svaki $i = 0, ..., N$ postoji jedinstven cjelobrojni vektor v_i takav da, ako je $z \in D \cap \pi^{-1}(C)$ i $\pi(z) \in R_i$, onda je $F(z) \in D + v_i$.*

Dakle, u rotacijskoj potkovi simboličko kodiranje određuje u koju se kopiju od D u $\mathbb{R}^2$ preslikava točka pod djelovanjem podizanja F. Odsada nadalje, s C ćemo uvijek označavati rotacijsku potkovu, s D pripadni topološki krug iz prvog definicijskog svojstva, a s $v_0, ..., v_N$ vektore iz drugog definicijskog svojstva rotacijske potkove.

Definicija 3.2.6. *Neka je $w = w_1...w_m$ konačna riječ, $|w| = m$ dužina riječi w i definirajmo funkciju ψ na skupu svih konačnih riječi sa $\psi(w) = \sum_{j=1}^{m} v_{w_j}$. Nadalje, za zatvoren, σ-invarijantan skup $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ definiramo* ***simbolički rotacijski skup od $\mathcal{M}$*** *kao*

$$\rho_{\mathcal{M}} = \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(w^{(n)})}{|w^{(n)}|} : w^{(n)} \text{ je podriječ nekog } \omega \in \mathcal{M} \text{ i } |w^{(n)}| \geq n \right\}. \tag{3.2}$$

Prema [2], u slučaju kada je C rotacijska potkova, za svaki niz $\omega \in \mathcal{S} = \Sigma$ postoji jedinstven $x \in C$ takav da je $f^i(x) \in R_{\omega_i}$, za svaki $i \in \mathbb{Z}$. Stoga, preslikavanje $h_{\mathcal{R}} : \mathcal{S} \to C$, koje svakom ω pridružuje pripadni x je konjugacija od σ i f_C.

Napomena 3.2.7. *Uvedimo sljedeće 2 oznake*

- *Za niz $\omega \in \Sigma$ uvedimo oznaku $\omega_{[1,n]} := \omega_1\omega_2...\omega_n$.*
- *Otvoreni krug u $\mathbb{R}^2$ radijusa r sa središtem u x ćemo označavati sa $B_r(x)$.*

Sljedeća lema daje ključnu ogradu koja dozvoljava identifikaciju simboličkih rotacijskih skupova i dinamičkih rotacijskih skupova.

Lema 3.2.8. *Neka je $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ i $C \subseteq \mathbb{T}^2$ rotacijska potkova za f. Tada postoji $r > 0$ takav da za svaki $z \in C$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$F^{n+1}(z') - z' \in B_r(\psi(h_{\mathcal{R}}^{-1}(z)_{[1,n]}))$$

Pritom je $z' \in \mathbb{R}^2$ takav da je $\pi(z') = z$.

Dokaz. C je rotacijska potkova pa označimo s $D \subseteq \mathbb{R}^2$ njezin pripadni topološki disk iz definicije rotacijske potkove. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z' \in D$. Naime, neka je $z'' \in D$ takav da je $\pi(z'') = z$. Tada je $z' = z'' + u_0$, pri čemu je

u_0 neki cjelobrojan vektor u $\mathbb{R}^2$. Budući da je, $F^{n+1}(z'') - z'' = F^{n+1}(z' + u_0) - (z' + u_o) = (F^{n+1}(z') + u_0) - (z' + u_0) = F^{n+1}(z') - z'$, dokaz tvrdnje za $z' \in D$ ujedno dokazuje tvrdnju za sve $z' \in \mathbb{R}^2$ sa svojstvom $\pi(z') = z$.

Neka je $h_{\mathcal{R}}^{-1}(z) = \omega$. Tada je $z \in R_{\omega_0}$. Indukcijom ćemo pokazati da je $F^k(z') - \sum_{i=0}^{k-1} v_{\omega_i} \in D$. Naime, iz definicije rotacijske potkove direktno zaključujemo da je $F(z') \in D + v_{\omega_0}$, odnosno $F(z') - v_{\omega_0} \in D$, čime je pokazana baza indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$ i pokažimo ju za $k + 1$. Budući da je $F^k(z') - \sum_{i=0}^{k-1} v_{\omega_i} \in D$, a vrijedi i $\pi(F^k(z') - \sum_{i=0}^{k-1} v_{\omega_i}) = \pi(F^k(z')) = f^k(\pi(z')) = f^k(z) \in R_{\omega_k}$, po defnciji rotacije potkove dobivamo $F(F^k(z') - \sum_{i=0}^{k-1} v_{\omega_i}) \in D + v_{\omega_k}$, odnosno $F^{k+1}(z') - \sum_{i=0}^{k} v_{\omega_i} \in D$, čime je dokazan korak indukcije.

Primijenimo li dokazanu tvrdnju na proizvoljan $n+1 \in \mathbb{N}$ dobivamo $F^{n+1}(z') - \sum_{i=0}^{n} v_{\omega_i} \in D$. Dakle, znamo da su za proizvoljan $z \in C$ i $n \in \mathbb{N}$, elementi z' i $(F^{n+1}(z') - \sum_{i=1}^{n} v_{\omega_i})) - v_{\omega_0}$ sadržani u skupu D. Budući da je $v_{\omega_0} \in V := \{v_0, ..., v_N\}$, odabirom $r = max\{\|v\| : v \in V\} + diam(D)$ našli smo konstantu neovisnu od n i z za koju možemo zaključiti da je

$$d(F^{n+1}(z') - \sum_{i=1}^{n} v_{\omega_i}, z') < r$$

odakle pak slijedi $F^{n+1}(z') - z' \in B_r(\psi(h_{\mathcal{R}}^{-1}(z)_{[1,n]}))$. □

Iz ove leme dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.2.9. *Neka je $\mathcal{M}$ zatvoren, σ-invarijantan podskup od $\mathcal{S}$. Vrijedi $\rho_{\mathcal{M}} = \rho_{h_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})}(F)$.*

Dokaz. Korolar slijedi direktno iz ograde dobivene prethodnom lemom. To ćemo demonstrirati argumentom u jednom smjeru, dok je u drugom stvar potpuno analogna. Neka je $\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(\omega^{(n)})}{|\omega^{(n)}|} \in \rho_{\mathcal{M}}$. Nizu čiji limes ovdje promatramo pridružit ćemo niz iz $\rho_{h_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})}(F)$ koji konvergira u istu vrijednost. Naime, neka je $\omega^{(i)}$ podriječ od $\omega \in \mathcal{M}$ i $|\omega^{(i)}| = m$. Kako je $\mathcal{M}$ σ-invarijantan, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\sigma^k(\omega) \in \mathcal{M}$ i $\sigma^k(\omega)_{[1,m]} = \omega^{(i)}$. Neka je $h_{\mathcal{R}}(\sigma^k(\omega)) = z$ i $z_i \in \pi^{-1}(z)$. Uz to, odaberimo $n_i = m + 1$. Sada smo i-tom elementu promatranog niza pridružili i-ti element nekog niza koji se nalazi u $\rho_{h_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})}(F)$ i njegova je vrijednost

$$\frac{F^{n_i}(z_i) - z_i}{n_i} = \frac{\psi(\omega^{(i)})}{m} \cdot \frac{m}{m+1} + \frac{y_i}{m+1}$$

pri čemu je $\|y_i\| < r$ za neki $r > 0$ i to za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kako je $m \geq i$ onda je jasno da promatranjem limesa ovog niza, drugi pribrojnik na desnoj strani teži u 0, dok je limes lijevih pribrojnika očito jednak limesu početnog niza. Analogno bismo i u suprotnom smjeru napravili pridruživanje nizova koje očito slijedi iz prethodne leme pa je tvrdnja dokazana. □

Definicija 3.2.10. *Niz $\omega \in \Sigma$ je* ***skoro periodičan*** *ako se svaka konačna podriječ ponavlja beskonačno mnogo puta i vrijeme između dva pojavljivanja je uniformno ograničeno.*

U [2] je sljedeća lema navedena kao poznata činjenica. Ovdje ćemo pokazati samo implikaciju koja nam treba u ovom radu, da je $\overline{O_\sigma(\omega)}$ minimalan skup ako je ω skoro periodičan.

Lema 3.2.11. *Niz $\omega \in \Sigma$ je strogo periodičan ako i samo ako je $\overline{O_\sigma(\omega)}$ minimalan skup. U tom slučaju je skup $\overline{O_\sigma(\omega)}$ upravo skup svih onih nizova $\beta \in \Sigma$ koji imaju iste podriječi kao ω.*

Dokaz. Neka je ω skoro periodičan niz. $\overline{O_\sigma(\omega)}$ je očito neprazan skup jer orbita od ω sadrži i sam niz ω. Zatvorenost je također trivijalno svojstvo ovog skupa, budući da je on po definiciji zatvarač nekog skupa. Ako je $\alpha \in O_\sigma(\omega)$, onda je očito i $\sigma(\alpha) \in O_\sigma(\omega)$. Ako je pak $\alpha \in \overline{O_\sigma(\omega)} \setminus O_\sigma(\omega)$, onda postoji niz $(\alpha^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ u $O_\sigma(\omega)$ koji konvergira u α. U tom slučaju, $\omega(\alpha)$ je limes niza $(\omega(\alpha^{(i)}))_{i\in\mathbb{N}}$, a očito je da se taj niz također nalazi u orbiti od ω pa je i $\omega(\alpha)$ gomilište skupa $O_\sigma(\omega)$ i samim time element skupa $\overline{O_\sigma(\omega)}$. Time je dokazana i invarijantnost za pomak ω.

Preostaje pokazati da ne postoji pravi podskup od $\overline{O_\sigma(\omega)}$ koji zadovoljava gornja 3 svojstva. Primijetimo da je za to dovoljno pokazati da takav pravi podskup P mora sadržavati ω. Naime, u tom slučaju, iz invarijantnosti skupa P na pomak ω, dobili bismo i da je cijela orbita od ω sadržana u P, a zbog zatvorenosti od P onda i njezin zatvarač. S obzirom da je P neprazan, on mora sadržavati neki α za kojeg ćemo odmah pretpostaviti da nije iz orbite od ω. Taj α je onda limes nekog niza $(\alpha^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ iz orbite od ω. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je m_n broj takav da se u svakih m_n uzastopnih slova bilo koje riječi iz $O_\sigma(\omega)$ mora barem 1 pojaviti podriječ $\omega_{[-n,n]}$. Brojevi m_n su dobro definirani jer je ω skoro periodičan pa je uniformno ograničeno vrijeme između pojavljivanja svake konačne podriječi od ω. Budući da niz $(\alpha^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira prema α, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ postoji $i_n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_n$ vrijedi $\alpha_{[1,m_n]} = \alpha^{(i)}_{[1,m_n]}$. Međutim, budući da je $\alpha^{(i)}_{[1,m_n]} \in O_\sigma(\omega)$, podriječ $\alpha_{[1,m_n]}$ sadrži podriječ $\omega_{[-n,n]}$ te postoji $k_n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sigma^{k_n}(\alpha)_{[-n,n]} = \omega_{[-n,n]}$. K tome, zbog invarijantnosti skupa P na pomak σ, znamo da je $\sigma^{k_n}(\alpha) \in P$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada smo našli niz $(\sigma^{k_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ u P koji konvergira prema ω pa zbog zatvorenosti od P zaključujemo $\omega \in P$. Dakle, zaista ne postoji pravi podskup od $\overline{O_\sigma(\omega)}$ s tražena 3 svojstva pa je $\overline{O_\sigma(\omega)}$ minimalan.

Nadalje, neka je $T(\omega)$ skup svih nizova iz Σ koji imaju iste podriječi kao ω i pokažimo da je $T(\omega) = \overline{O_\sigma(\omega)}$. Neka je $\alpha \in \overline{O_\sigma(\omega)}$ i pretpostavimo da sadrži neku podriječ koju ω ne sadrži. Bez smanjenja općenitosti, neka je ta podriječ $\alpha_{[1,k]}$. Očito nije $\alpha \in O_\sigma(\omega)$ pa je α limes nekog niza iz orbite od ω. Međutim, iz svojstva limesa je jasno da onda postoji element tog niza, odnosno neki $\beta \in O_\sigma(\omega)$ koji se s α poklapa barem u podriječi

$\alpha_{[1,k]}$. Međutim, ako β sadrži tu podriječ, mora ju sadržavati i ω što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, dobili smo $\overline{O_\sigma(\omega)} \subseteq T(\omega)$.

Suprotno, neka je $\alpha \in T(\omega)$. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{[-n,n]}$ je neka podriječ od ω pa postoji $\alpha^{(n)} \in O_\sigma(\omega)$ takav da je $\alpha^{(n)}_{[-n,n]} = \alpha_{[-n,n]}$. Time smo dobili niz $(\alpha^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ u orbiti od ω koji konvergira prema nizu α pa je α gomilište skupa $O_\sigma(\omega)$ te smo pokazali $T(\omega) \subseteq \overline{O_\sigma(\omega)}$. Time je i posljednja tvrdnja dokazana. □

Sada imamo sve potrebno za dokaz sljedeće propozicije.

Propozicija 3.2.12. *Za skoro periodičan niz $\omega \in \Sigma$, skup $\mathcal{M} = \overline{O_f(h_\mathcal{R}(\omega))}$ je minimalan s obzirom na f i vrijedi*

$$\rho_\mathcal{M}(F) = \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(\omega^{(n)})}{|\omega^{(n)}|} \,\middle|\, \omega^{(n)} \textit{ je podriječ od } \omega,\ |\omega^{(n)}| \geq n \right\}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Pokažimo najprije da je $\mathcal{M} = h_\mathcal{R}(\overline{O_\sigma(\omega)})$. Neka je $y \in \mathcal{M}$. Tada postoji niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $O_f(h_\mathcal{R}(\omega))$ koji konvergira prema y. Neka je $h_\mathcal{R}(\omega) = x$ i neka su $n_i \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x_i = f^{n_i}(x)$. Jasno je kako je onda $h_\mathcal{R}^{-1}(x_i) = \sigma^{n_i}(\omega)$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. S obzirom da je $h_\mathcal{R}$ homeomorfizam, zaključujemo da niz $(\sigma^{n_i}(\omega))_{i\in\mathbb{N}}$ u $O_\sigma(\omega)$ konvergira prema $h_\mathcal{R}^{-1}(y)$ pa je $h_\mathcal{R}^{-1}(y) \in \overline{O_\sigma(\omega)}$. Naposlijetku dobivamo

$$y = h_\mathcal{R}(h_\mathcal{R}^{-1}(y)) \in h_\mathcal{R}(\overline{O_\sigma(\omega)}).$$

Time smo pokazali $\mathcal{M} \subseteq h_\mathcal{R}(\overline{O_\sigma(\omega)})$, a analogno se pokazuje i suprotna inkluzija. Sada tvrdnja da je $\mathcal{M}$ minimalan skup slijedi trivijalno, budući da je skup $\overline{O_\sigma(\omega)}$ minimalan, a $h_\mathcal{R}$ homeomorfizam.

Po korolaru 3.2.9 znamo da je $\rho_\mathcal{M}(F) = \rho_{h_\mathcal{R}(\overline{O_\sigma(\omega)})}(F) = \rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}}$. Po definiciji je

$$\rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}} = \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(\omega^{(n)})}{|\omega^{(n)}|} \,\middle|\, \omega^{(n)} \text{ je podriječ nekog } \alpha \in \overline{O_\sigma(\omega)},\ |\omega^{(n)}| \geq n \right\}.$$

Međutim, u lemi 3.2.11 smo vidjeli da je $\overline{O_\sigma(\omega)}$ sastavljen točno od onih nizova koji sadrže iste podriječi kao ω. Iz tog razloga, vidimo da upravo vrijedi tražena tvrdnja, budući da je $\omega^{(n)}$ podriječ nekog $\alpha \in \overline{O_\sigma(\omega)}$ ako i samo ako je podriječ od ω. □

Konstrukciju skoro periodičnih nizova jednostavnije je provesti u prostoru jednostranih nizova. U tu svrhu definiramo $\Sigma^+ = \{0, 1, ..., N\}^\mathbb{N}$, a sljedeća lema garantira da je dovoljno promatrati samo jednostrane nizove.

Lema 3.2.13. *Neka je $\omega^+ \in \Sigma^+$ skoro periodičan i $\omega \in \Sigma$ neki niz čija se desna strana poklapa s ω^+. Tada je $\overline{O_\sigma(\omega)}$ minimalan skup i jednak je skupu nizova koji imaju upravo iste konačne podriječi kao ω^+.*

Definicija 3.2.14. *Niz $\omega^+ \in \Sigma^+$ ($\omega \in \Sigma$) je* ***Toeplitzov niz*** *ako je aperiodičan niz i ako za svaki $j \in \mathbb{N}$ ($j \in \mathbb{Z}$) postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $\omega^+_{j+np} = \omega^+_j$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ ($\omega_{j+np} = \omega_j$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$).*

Napomena 3.2.15. *Jasno je da je svaki Toeplitzov niz ujedno i skoro periodičan. Naime, za njegovu proizvoljnu podriječ, promotrimo najmanji zajednički višekratnik perioda svakog od elemenata te podriječi i očito je to onda period pojavljivanja promatrane podriječi.*

3.3 Realizacija rotacijskih skupova Toeplitzovim nizovima

U ovoj sekciji, neka je $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ za kojeg postoji rotacijska potkova C s pripadnim vektorima $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$. Dakle, postoje topološki krug $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i particija $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, R_2\}$ od C takvi da je $\cup_{i=0}^2 R_i \subseteq \pi(D)$ i $F(\pi^{-1}(R_i) \cap D) \subseteq D + v_i$ za $i = 0,1,2$. Sada ćemo definirati generalnu blokovsku strukturu koja induktivnom konstrukcijom stvara Toeplitzove nizove.

Generalna blokovska struktura

Neka su $a_1, b \in \mathbb{N}$ te neka je $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takvih da je d_{n+1} višekratnik od d_n za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, s $[k,l]$ ćemo označavati skup svih prirodnih brojeva i takvih da je $k \leq i \leq l$ te ćemo koristiti analogne oznake i u slučaju otvorenih, odnosno poluzatvorenih intervala. Generalnu blokovsku strukturu definiramo rekurzivno sljedećim jednakostima

$$(S1)\ a_{n+1} = (bd_n + 1)a_n$$
$$(S2)\ \mathcal{A}_n = [1, a_n] + d_n a_n \mathbb{N}$$
$$(S3)\ \mathcal{B}_n = \cup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$$
$$(S4)\ C_n = \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n-1}$$

Maksimalne segmente u $\mathcal{A}_n$ nazivamo **blokovi razine *n*** ili ***n*-blokovi**. Ako takav blok nije jednak početnom bloku $[1, a_n]$, nazivamo ga **ponovljeni blok**.

Lema 3.3.1. *Vrijede sljedeće tvrdnje*

(F1) Za proizvoljne $k < k'$, svaki k'-blok počinje i završava k-blokom.

(F2) Ako su dva bloka razina k i k' disjunktni i vrijedi $k \leq k'$, onda je duljina intervala između tih blokova barem $(d_k - 1)a_k$.

(F3) Asimptotska gustoća od $\mathcal{B}_n$ je najviše $\delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}$.

(F4) Ako je J interval cijelih brojeva čija je duljina višekratnik od $a_n d_n$, onda je $\frac{1}{|J|}|J \cap \mathcal{B}_n| \leq \delta_n$. Posljedično, za dani $M \in \mathbb{N}$ i proizvoljan interval J' duljine barem $\frac{a_n d_n}{M}$ vrijedi $\frac{1}{|J'|}|J' \cap \mathcal{B}_n| \leq M\delta_n$. Ovdje je $|J|$ oznaka za kardinalitet skupa $J \subseteq \mathbb{N}$.

(F5) Ako je niz $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ odabran tako da za sve $n \in \mathbb{N}$, $j \in [1, a_n]$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\omega_{j+ka_n d_n} = \omega_j$, onda je ω Toeplitzov niz.

Dokaz. Primijetimo odmah da uz $d_n | d_{n+1}$, znamo i da $a_n | a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

(F1) Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je svaki maksimalan segment u $\mathcal{A}_n$ oblika $[1 + cd_n a_n, a_n + cd_n a_n]$. Stoga, treba samo pokazati da za svaki $c \in \mathbb{N}$ postoje c_1 i c_2 takvi da je $1 + cd_{k'} a_{k'} = 1 + c_1 d_k a_k$ i $a_{k'} + cd_{k'} a_{k'} = a_k + c_2 d_k a_k$. Vrijedi

$$1 + cd_{k'} a_{k'} = 1 + c\frac{d_{k'}}{d_k} d_k \frac{a_{k'}}{a_k} a_k = 1 + \left(\frac{cd_{k'} a_{k'}}{d_k a_k}\right) d_k a_k$$

pri čemu je očito broj u zagradi prirodan, budući da $d_k | d_{k'}$ te $a_k | a_{k'}$. S druge strane, vrijedi

$$a_{k'} + cd_{k'} a_{k'} = a_k + (a_{k'} - a_k) + cd_{k'} a_{k'}$$

Primijetimo da već znamo da $d_k a_k | cd_{k'} a_{k'}$ pa nam preostaje dokazati $d_k a_k | a_{k'} - a_k$. Indukcijom ćemo pokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $n' \in \mathbb{N}$, takve da je $n' > n$ vrijedi $d_n a_n | a_{n'} - a_n$. Za bazu odaberimo $n' = n + 1$. Tvrdnja je tada očita budući da je $a_{n+1} - a_n = (bd_n + 1)a_n - a_n = bd_n a_n$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n' > n$ i pokažimo ju za $n' + 1$. Vrijedi

$$a_{n'+1} - a_n = (bd_{n'} + 1)a_{n'} - a_n = bd_{n'} a_{n'} + (a_{n'} - a_n)$$

Po pretpostavci indukcije znamo $d_n a_n | a_{n'} - a_n$, a uz to znamo da $d_n | d_{n'}$ te $a_n | a_{n'}$ odakle zaključujemo $a_n d_n | bd_{n'} a_{n'}$, čime je tvrdnja dokazana.

(F2) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je k-blok prije k'-bloka. No, po $(F1)$ slijedi da k'-blok započinje nekim k-blokom. K tome, iz definicije $\mathcal{A}_k$ je jasno da je udaljenost među 2 uzastopna k-bloka upravo $d_k a_k - a_k = (d_k - 1)a_k$.

(F3) Asimptotska gustoća od $\mathcal{B}_n$ je

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\mathcal{B}_n \cap [1, k]|}{k} \leq \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathcal{A}_i \cap [1, k]|}{k}.$$

Po definiciji skupa $\mathcal{A}_i$ je jasno da svaki segment duljine $d_i a_i$ sadrži točno a_i elemenata iz $\mathcal{A}_i$. Za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ i $1 \leq i \leq n$, neka je $m_i = \lfloor \frac{k}{d_i a_i} \rfloor$. Sada je

$$\frac{m_i + 1}{m_i d_i} = \frac{(m_i + 1)a_i}{m_i a_i d_i} \leq \frac{|\mathcal{A}_i \cap [1, k]|}{k} \leq \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)a_i d_i} = \frac{m_i}{(m_i + 1)d_i},$$

a budući da $m_i \to \infty$ kada $k \to \infty$, i to za sve $1 \le i \le n$, dobivamo da je asimptotska gustoća od $\mathcal{B}_n$ najviše

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \delta_n.$$

(F4) Skup J možemo podijeliti u c podsegmenata od kojih je svaki dužine $a_n d_n$, za neki $c \in \mathbb{N}$. Iz definicije skupova $\mathcal{A}_k$, jasno je da za $1 \le k \le n$, svaki od spomenutih podsegmenata od J sadrži točno $\frac{a_n d_n}{a_k d_k} \cdot ak = \frac{a_n d_n}{d_k}$ elemenata iz $\mathcal{A}_k$. Kako za proizvoljne k_1 i k_2, skupovi $\mathcal{A}_{k_1}$ i $\mathcal{A}_{k_2}$ nisu nužno disjunktni, zaključujemo

$$\frac{1}{|J|}|J \cap \mathcal{B}_n| \le \frac{1}{ca_n d_n} \sum_{k=1}^{n} |J \cap \mathcal{A}_k| = \frac{1}{ca_n d_n} \cdot c \sum_{k=1}^{n} \frac{a_n d_n}{d_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} = \delta_n$$

Za drugu tvrdnju, neka su $n, M \in \mathbb{N}$ i $|J'| \ge \frac{a_n d_n}{M}$. Trebamo pokazati $|J' \cap \mathcal{B}_n| \le M\delta_n |J'|$. Primijetimo da je svakako $|J' \cap \mathcal{B}_n| \le |J \cap \mathcal{B}_n|$ pri čemu je $J' \subseteq J$ i $|J| = a_n d_n$. No, za ovakav segment J, iz već dokazanog prvog dijela tvrdnje zaključujemo $|J \cap \mathcal{B}_n| \le a_n d_n \delta_n$. Sada tvrdnja lako slijedi budući da znamo $M|J'| \ge M\frac{a_n d_n}{M} = a_n d_n$.

(F5) Iz definicije niza $(a_n)_n$ je jasno da divergira u ∞ pa za svaki $j \in \mathbb{N}$ postoji $n_j \in \mathbb{N}$ takav da je $j \in [1, a_{n_j}]$. To znači da za $p_j := a_{n_j} d_{n_j}$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\omega_{j+ka_{n_j}d_{n_j}} = \omega_j$ pa je po definiciji jasno da je niz ω Toeplitzov.

□

Definirajmo još i $\delta_\infty := \lim_{n\to\infty} \delta_n = \sup_{n\to\infty} \delta_n$.

3.4 Konstrukcija rotacijskog skupa koji separira ravninu

Cilj ove sekcije je za homeomorfizam f specificiran na početku sekcije 3.3 naći minimalan skup, čiji rotacijski skup separira ravninu. Samim time dokazat ćemo teorem 3.1.5, što smo i rekli da je ključni dio ovog poglavlja. Za konstrukciju takvog skupa, bit će nam potrebna generalna blokovska struktura sa sljedeća 2 svojstva:

(a) niz $(d_n)_{n\mathbb{N}}$ biramo tako da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ brojevi d_n i $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ parni te je pritom $\delta_\infty \le \frac{1}{32}$,

(b) biramo prirodne brojeve $K \ge 33$ i $L \ge 64$ te odabiremo $a_1 = b = (3L+4)K$.

Napomena 3.4.1. *Zbog odabira b vidimo da je $a_{n+1} \ge 16a_n d_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odatle posebno slijedi*

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j d_j \le \frac{a_n d_n}{4}, \tag{3.4}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, što se trivijalno pokazuje indukcijom.

Sada ćemo induktivno konstruirati niz $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na skupovima $\mathcal{A}_n$, koji će zadovoljavati svojstva iz leme 3.3.1(F5). Pretpostavimo da je ω_j definiran za sve $j \in [1, a_n]$, a samim time i na cijelom $\mathcal{A}_n$, budući da je $\omega_j = \omega_{j+kd_na_n}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i za svaki $j \in [1, a_n]$. Dodefinirajmo sada ω na $[1, a_{n+1}]$, a posljedično i na $\mathcal{A}_{n+1}$. Neka su

$$p_n = (L+1)Kd_na_n - a_nd_n + 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_jd_j}{2}$$
$$q_n = (L+1)Kd_na_n + a_nd_n + a_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_jd_j}{2}$$

Podijelimo sada $[1, a_{n+1}]$ na 7 intervala:

$$\begin{aligned}
I_1^0 &= [1, (LKd_n + 1)a_n] \\
I_1^1 &= [(LKd_n + 1)a_n + 1, p_n - 1] \\
I_1^2 &= [p_n, q_n] \\
I_2^1 &= [q_n + 1, (L+2)Kd_na_n] \\
I_2^0 &= [(L+2)Kd_na_n + 1, ((2L+2)Kd_n + 1)a_n] \\
I_2^2 &= [((2L+2)Kd_n + 1)a_n + 1, (2L+4)Kd_na_n] \\
I_3^0 &= [(2L+4)Kd_na_n + 1, a_{n+1}]
\end{aligned}$$

Dodatno, definirajmo $I^* = I_1^1 \cup I_1^2 \cup I_2^1$.

Lema 3.4.2. *Za ovako definirane intervale $I_i^j : i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ te I_3^0 vrijede sljedeće tvrdnje:*

(PQ1) Intervali I_1^0, I_2^0 i I_3^0 su duljine $(LKd_n + 1)a_n$ te sva 3 počinju i završavaju n-blokovima, a samim time i k- blokovima za svaki $k \leq n$.

(PQ2) Intervali I^* i I_2^2 su duljine $(2Kd_n - 1)a_n$.

(PQ3) Duljine intervala I_1^1 i I_2^1 su između $(K-1)a_nd_n$ i Ka_nd_n.

(PQ4) Duljina intervala I_1^2 je između a_nd_n i $a_nd_n + a_n$.

(PQ5) Interval I_1^2 je koncentričan oko nekog n-bloka B_n.

(PQ6) Udaljenost od p_n i q_n do proizvoljnog k-bloka, za svaki $k \leq n$ je barem $\frac{a_kd_k}{4}$.

Dokaz. Tvrdnje o duljinama intervala $I_1^0, I_2^0, I_3^0, I_2^2$ te I^* su trivijalne i slijede promatranjem razlike između lijevog i desnog ruba intervala pa ih nećemo posebno raspisivati.

(PQ1) Primijetimo da je svaki n-blok oblika $[1 + ca_n d_n,\ a_n + ca_n d_n]$, uz $c \in \mathbb{N}$. Budući da su početci intervala I_1^0, I_2^0, I_3^0 redom brojevi 1, $(L+2)Kd_n a_n + 1$, $(2L+4)Kd_n a_n + 1$, a njihovi pripadni krajevi su redom $(LKd_n + 1)a_n = a_n + LKd_n a_n$, $((2L+2)Kd_n + 1)a_n = a_n + (2L+2)Kd_n a_n$ i $a_{n+1} = a_n + bd_n a_n$, zaključujemo da sva 3 intervala stvarno počinju i završavaju n-blokovima.

(PQ2) Tvrdnja trivijalno slijedi.

(PQ3) Vrijedi

$$\begin{aligned}|I_1^1| &= (p_n - 1) - (LKd_n + 1)a_n \\ &= (L+1)Ka_n d_n - a_n d_n + 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j d_j}{2} - 1 - LKa_n d_n - a_n \\ &= Ka_n d_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j d_j}{2} - \frac{a_n d_n}{2} - a_n\end{aligned}$$

Koristeći (3.4) zaključujemo da je $0 \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j d_j}{2} \leq \frac{a_n d_n}{8}$ iz čega je jasno da je $(K-1)a_n d_n \leq |I_1^1| \leq Ka_n d_n$. Slično vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}|I_2^1| &= (L+2)Kd_n a_n - q_n = (L+2)Kd_n a_n - (L+1)Kd_n a_n - a_n + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j d_j}{2} - a_n d_n \\ &= Ka_n d_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j d_j}{2} - \frac{a_n d_n}{2} - a_n = |I_1^1|,\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi.

(PQ4) Odredimo duljinu od I_1^2.

$$\begin{aligned}|I_1^2| = q_n - p_n + 1 &= ((L+1)Kd_n a_n + a_n d_n + a_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j d_j}{2}) \\ &\quad - ((L+1)Kd_n a_n - a_n d_n + 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j d_j}{2}) + 1 = a_n d_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j d_j + a_n\end{aligned}$$

Očito je $|I_1^2| \leq a_n d_n + a_n$, ali i druga nejednakost jednostavno slijedi budući da induktivno lako dokazujemo $a_n \geq \sum_{j=1}^{n-1} a_j d_j$.

(PQ5) Znamo da je interval I^* duljine $2Ka_n d_n - a_n$. Nadalje, znamo da njemu susjedni intervali I_1^0 i I_2^0 počinju i završavaju n-blokovima. Dakle, prvih točno $a_n d_n - a_n$

elemenata od I^* je izvan svakog n-bloka, a nakon njih počinje neki n-blok. Bez tih početnih elemenata, I^* sadrži $(2Ka_nd_n - a_n) - (a_nd_n - a_n) = (2K-1)a_nd_n$ elemenata. Budući da se n-blokovi javljaju jednom u svakih a_nd_n elemenata, zaključujemo da I^* sadrži točno $2K-1$ n-blokova, a kako se neposredno prije i poslije intervala I^* nalaze n-blokovi, zaključujemo da je on koncentričan oko nekog n-bloka. Sada se ta tvrdnja lako prenosi i na interval I_1^2 zato što su intervali I_1^1 i I_2^1 jednakih duljina, kao što je dokazano u (PQ3).

(PQ6) Tvrdnju dokazujemo za p_n, a za q_n slijedi analogno. Primijetimo da u $(L+1)Ka_nd_n - a_nd_n + 1$ započinje neki n-blok. S obzirom da je $a_nd_n = (bd_{n-1}+1)a_{n-1}d_{n-1}c$, pri čemu je $c = \frac{d_n}{d_{n-1}}$ paran, zaključujemo da $a_{n-1}d_{n-1}\Big|\frac{a_nd_n}{2}$ pa u $(L+1)Ka_nd_n - a_nd_n + 1 + \frac{a_nd_n}{2}$ započinje neki $(n-1)$-blok. Analogno zaključujemo da u $(L+1)Ka_nd_n - a_nd_n + 1 + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_jd_j}{2}$ započinje neki k-blok, pri čemu je $k \leq n$. Udaljenost od p_n do tog bloka, koji se cijeli nalazi slijeva od p_n je

$$((L+1)Ka_nd_n - a_nd_n + 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_jd_j}{2}) - ((L+1)Ka_nd_n - a_nd_n + a_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_jd_j}{2}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{a_jd_j}{2} - a_k + 1 = \frac{a_kd_k}{2} + (\sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_jd_j}{2} - a_k + 1) > \frac{a_kd_k}{4}$$

□

Definirajmo skupove

$$I^0 = I_1^0 \cup I_2^0 \cup I_3^0, \qquad I^1 = I_1^1 \cup I_2^1, \qquad I^2 = I_1^2 \cup I_2^2.$$

Sada smo spremni proširiti definiciju niza ω na sljedeći način:

$$\omega_j = \begin{cases} 0 & \text{ako } j \in I^0 \setminus \mathcal{B}_n \\ 1 & \text{ako } j \in I^1 \setminus \mathcal{B}_n \\ 2 & \text{ako } j \in I^2 \setminus \mathcal{B}_n. \end{cases}$$

Sada smo definirali ω_j za sve $j \in [1, a_{n+1}] \setminus \mathcal{B}_n$, a definiciju proširujemo na $\mathcal{A}_{n+1}$ tako da je $\omega_{j+ka_{n+1}d_{n+1}} = \omega_j$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i za sve $j \in [1, a_{n+1}]$. Induktivno dolazimo do definicije niza $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ koji prati opisanu generalnu blokovsku strukturu i Toeplitzov je, prema lemi 3.3.1(F5). Jasno je da je ovakva induktivna definicija dobro definirana, budući da vrijedi $a_kd_k|\, a_{k'}d_{k'}$ za svaki par prirodnih brojeva $k \leq k'$.

Sjetimo se da je $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ te da je za svaki interval $J \subseteq \mathbb{N}$, $\rho(J) = \frac{\psi(J)}{|J|}$, uz $\psi(J) = \sum_{j\in J} v_{\omega_j}$.

Lema 3.4.3. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\rho([1, a_{n+1}]) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan i $J = [1, a_{n+1}]$. Primijetimo da je

$$\{j \in J : \omega_j \neq 0\} \subseteq (J \cap \mathcal{B}_n) \cup I^1 \cup I^2$$

Po lemi 3.3.1(F4), vrijedi $|J \cap \mathcal{B}_n| \leq d_\infty a_{n+1} \leq \frac{1}{16} a_{n+1}$. Nadalje, pokažimo da je $|I^1 \cup I^2| \leq \frac{1}{16} a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} |I^1 \cup I^2| = |I*| + |I_2^2| &\overset{(PQ2)}{=} 2 \cdot (2Kd_n - 1)a_n = 4Ka_nd_n - 2a_n < \frac{3L+4}{3L} \cdot 4Ka_nd_n \\ &< \frac{4(3L+4)Kd_na_n + 4a_n}{3L} = \frac{4(bd_n+1)a_n}{3L} = \frac{4a_{n+1}}{3L} < \frac{1}{16} a_{n+1} \end{aligned}$$

Stoga je $|\{j \in J : \omega_j \neq 0\}| \leq \frac{1}{16} a_{n+1} + \frac{1}{16} a_{n+1} = \frac{1}{8} a_{n+1}$. Neka je a broj elemenata $j \in J$ takvih da je $\omega_j = 1$, a b broj onih $j \in J$ za koje je $\omega_j = 2$. Dakle, imamo $a + b \leq \frac{1}{8} a_{n+1}$. Zaključujemo da vrijedi

$$\rho(J) = \frac{\psi(J)}{|J|} = \frac{(a, b)}{a_{n+1}}$$

Sada tvrdnja slijedi budući da je

$$\sqrt{\frac{a^2}{a_{n+1}^2} + \frac{b^2}{a_{n+1}^2}} \leq \frac{a+b}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{8}$$

□

Navedimo sada jednu pomoćnu lemu, potrebnu za daljnje rezultate.

Lema 3.4.4. *Neka su A i B dva disjunktna intervala u $\mathbb{N}$, za koje postoji $r > 0$ takav da vrijedi $\rho(A), \rho(B) \in B_r(v_0)$. Tada je $\rho(A \cup B) \in B_r(v_0)$.*

Dokaz. Primijetimo da vrijedi

$$\rho(A \cup B) = \frac{\sum_{j \in A \cup B} \psi(j)}{|A \cup B|} = \frac{\sum_{j \in A} \psi(j)}{|A| + |B|} + \frac{\sum_{j \in B} \psi(j)}{|A| + |B|} = \frac{|A|}{|A| + |B|} \rho(A) + \frac{|B|}{|A| + |B|} \rho(B)$$

Dakle, $\rho(A \cup B)$ je konveksna kombinacija elemenata $\rho(A)$ i $\rho(B)$ koji se nalaze u konveksnom skupu $B_r(v_0)$, pa je tvrdnja dokazana. □

Napomena 3.4.5. *Za interval $J \subseteq \mathbb{N}$ uvodimo oznake $a_J = |\{j \in J : \omega_j = 1\}|$ i $b_J = |\{j \in J : \omega_j = 2\}|$.*

Lema 3.4.6. *Pretpostavimo da je $J = [1, m]$ ili $J = [m, a_{n+1}]$ za neke $n \in \mathbb{N}_0$ i $m \in (1, a_{n+1})$. Tada je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Baza je jednostavna za dokazati, budući da interval $[1, a_1]$ možemo podijeliti na 7 podintervala, tako da za svakog od njih vrijedi da je ω_j konstantan po svim j iz promatranog podintervala, i to tako da je

$$I_1^0 = [1, LK], \qquad I_2^0 = [(L+2)K+1, (2L+2)K], \qquad I_3^0 = [(2L+4)K+1, (3L+4)K],$$
$$I_1^1 = [LK+1, LK+K-1], \qquad I_2^1 = [LK+K+2, (L+2)K],$$
$$I_1^2 = [LK+K, LK+K+1], \qquad I_2^2 = [(2L+2)K+1, (2L+4)K].$$

Ako je $m \in I_1^0$, tvrdnja je očita jer je $\rho(J) = v_0$. Inače, tvrdnja slijedi zato što je $|I^*| = 2K = \frac{2}{L}|I_1^0| < \frac{1}{8}|I_1^0|$, a posljedično je i $|I_2^2 \cup I^*| < \frac{1}{8}|I_1^0 \cup I_2^0|$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n-1 \in \mathbb{N}_0$ i pokažimo ju za n. Neka je $m \in (1, a_{n+1})$ i neka je $J = [1, m]$. Dokazivat ćemo samo ovaj slučaj, a dokaz za $J = [m, a_{n+1}]$ slijedi sličnom argumentacijom. Promotrimo nekoliko slučajeva.

1. Neka je $m \in I_1^0$. U tom slučaju, neka je $J \cap \mathcal{B}_n = B_1 \cup ... \cup B_j \cup B'$, pri čemu je $B' = B_{j+1} \cap J$ te su $B_1, ..., B_{j+1}$ puni blokovi reda $\leq n$. Po lemi 3.4.3 je $\rho(B_i) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$ za svaki $i = 1, ..., j$, jer je, pod pretpostavkom da je B_i k-blok, iz definicije niza ω očito $\rho(B_i) = \rho([1, a_k])$. Po pretpostavci indukcije je $\rho(B') \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$, zato što je B' podskup oblika $[1 + ca_{k'}d_{k'}, m' + ca_{k'}d_{k'}]$ k'-bloka B_{j+1}, a onda je $\rho(B') = \rho([1, m'])$, što se po pretpostavci indukcije nalazi u kugli $B_{\frac{1}{8}}(v_0)$, budući da je $k' \leq n$. Stoga je $\rho(J \cap \mathcal{B}_n) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$, po lemi 3.4.4. Nadalje, vrijedi $J \setminus \mathcal{B}_n \subseteq I_1^0 \setminus \mathcal{B}_n \subseteq I^0 \setminus \mathcal{B}_n$ pa za svaki $j \in J \setminus \mathcal{B}_n$ vrijedi $\omega_j = 0$, odnosno $\rho(J \setminus \mathcal{B}_n) = v_0$. Konačno, zaključujemo da je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$.

2. Neka je $m \in I^*$. Po lemi 3.3.1(F4), iz $|I_1^0| \geq a_n d_n$ slijedi $|I_1^0 \cap \mathcal{B}_n| \leq \delta_n |I_1^0| \leq \delta_\infty |I_1^0| < \frac{1}{16}|I_1^0|$. Budući da za svaki $j \in I_1^0 \setminus \mathcal{B}_n$ po konstrukciji vrijedi $\omega_j = 0$, zaključujemo da je $a_{I_1^0} + b_{I_1^0} < \frac{1}{16}|I_1^0|$. Nadalje, primijetimo da je

$$|J \cap I^*| \leq |I^*| = (2Kd_n - 1)a_n \leq \frac{2}{L}(LKd_n + 1)a_n < \frac{1}{16}|I_1^0|.$$

Iz tog je razloga očito $a_{J \cap I^*} + b_{J \cap I^*} < \frac{1}{16}|I_1^0|$. Sada primijetimo da je zbog $J = (J \cap I^*) \cup I_1^0$

$$d(\rho(J), v_0) = \sqrt{\frac{(a_{I_1^0} + a_{J\cap I^*})^2 + (b_{I_1^0} + b_{J\cap I^*})^2}{|J|^2}} \leq \frac{a_{I_1^0} + a_{J\cap I^*} + b_{I_1^0} + b_{J\cap I^*}}{|I_1^0|}$$
$$< \frac{\frac{1}{16}|I_1^0| \cdot 2}{|I_1^0|} = \frac{1}{8},$$

čime je tvrdnja dokazana.

3. Neka je $m \in I_2^0$. Po lemi 3.3.1(F4) je $|J \cap \mathcal{B}_n| \leq d_\infty |J| < \frac{1}{16}|J|$. Zato možemo zaključiti $a_{J\cap\mathcal{B}_n} + b_{J\cap\mathcal{B}_n} < \frac{1}{16}|J|$. Nadalje, primijetimo da je $J \setminus \mathcal{B}_n = (I_1^0 \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I^* \setminus \mathcal{B}_n) \cup ((I_2^0 \cap J) \setminus \mathcal{B}_n) =: S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Iz konstrukcije je jasno da je $\omega_j = 0$, za svaki $j \in S_1 \cup S_3$. K tome, vrijedi $|I^* \setminus \mathcal{B}_n| \leq |I^*| < \frac{1}{16}|I_1^0| < \frac{1}{16}|J|$. Iz toga pak slijedi $a_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + b_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} < \frac{1}{16}|J|$. Sada zaključujemo

$$\begin{aligned}\rho(J) &= \frac{\sum_{j\in S_1}\psi(j) + \sum_{j\in S_2}\psi(j) + \sum_{j\in S_3}\psi(j) + \sum_{j\in J\cap\mathcal{B}_n}\psi(j)}{|J|} \\ &= \frac{(a_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + a_{J\cap\mathcal{B}_n}, b_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + b_{J\cap\mathcal{B}_n})}{|J|},\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}d(\rho(J), v_0) = \sqrt{\frac{(a_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + a_{J\cap\mathcal{B}_n})^2 + b_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + (b_{J\cap\mathcal{B}_n})^2}{|J|^2}} &\leq \frac{a_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + a_{J\cap\mathcal{B}_n} + b_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + b_{J\cap\mathcal{B}_n}}{|J|} \\ < \frac{\frac{1}{16}|J|\cdot 2}{|J|} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

4. Neka je $m \in I_2^2$. S obzirom da je $|I_2^2| = |I^*|$, kao u 2. slučaju zaključujemo $|J \cap I_2^2| \leq \frac{1}{16}|I_1^0| < \frac{1}{16}|J|$. Uz to, koristeći lemu 3.3.1(F4), dobivamo $|(I_1^0 \cup I^* \cup I_2^0) \cap \mathcal{B}_n| \leq \frac{1}{16}|I_1^0 \cup I^* \cup I_2^0| < \frac{1}{16}|J|$. Iz dobivenih dviju nejednakosti možemo zaključiti $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$, kao u prethodnim slučajevima.

5. Neka je $m \in I_3^0$. Ponovnim korištenjem leme 3.3.1(F4), dobivamo $|J \cap \mathcal{B}_n| \leq \frac{1}{16}|J|$. Nadalje, vrijedi

$$J \setminus \mathcal{B}_n = (I_1^0 \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I^* \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I_2^0 \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I_2^2 \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I_3^0 \setminus \mathcal{B}_n) =: S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$$

Iz definicije je jasno da je $\omega_j = 0$, za svaki $j \in S_1 \cup S_3 \cup S_5$. Uz to, vrijede sljedeće ograde

$$|I^* \setminus \mathcal{B}_n| < \frac{1}{16}|I_1^0| \qquad \text{i analogno} \qquad |I_2^2 \setminus \mathcal{B}_n| < \frac{1}{16}|I_2^0|.$$

Zato dobivamo

$$(a_{I^*\setminus\mathcal{B}_n} + b_{I^*\setminus\mathcal{B}_n}) + (a_{I_2^2\setminus\mathcal{B}_n} + b_{I_2^2\setminus\mathcal{B}_n}) < \frac{1}{16}(|I_1^0| + |I_2^2|) < \frac{1}{16}|J|.$$

Dobivene nejednakosti su dovoljne da, po uzoru na prethodne slučajeve, zaključimo $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$.

□

Lema 3.4.7. *Pretpostavimo da je $J \subseteq I^i_j$ interval duljine barem $\frac{a_n d_n}{2}$, uz $i = 0, 1, 2$ i $j = 0, 1$, ili $(i, j) = (0, 3)$. Tada vrijedi $\rho(J) \subseteq B_{\frac{1}{16}}(v_i)$.*

Dokaz. Koristeći lemu 3.3.1(F4) uz $J' = J$ i $M = 2$, dobije se $\frac{|J \cap \mathcal{B}_n|}{|J|} \leq M\delta_\infty \leq \frac{1}{16}$. S obzirom da se sve pozicije ω_j za $j \in (J \setminus \mathcal{B}_n)$ u $(n+1)$-tom koraku konstrukcije popune s i, tvrdnja očito slijedi. □

Poseban slučaj $J = I^i_j$ nam donosi sljedeći trivijalan korolar prethodne leme.

Korolar 3.4.8. *Za $i = 0, 1, 2$ i $j = 1, 2$ ili $(i, j) = (0, 3)$ vrijedi $\rho(I^i_j) \subseteq B_{\frac{1}{16}}(v_i)$.*

Lema 3.4.9. *Neka su $J \subseteq I \subset \mathbb{N}$ intervali i pretpostavimo da J ima 1 zajednički rub s I. Vrijede tvrdnje:*

1. *Ako je $I = I^0_j$, za $j = 1, 2, 3$, onda je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$.*
2. *Ako je $I = I^1_j$, za $j = 1, 2$, onda je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_1)$.*
3. *Ako je $I = I^2_j$, za $j = 1, 2$, onda je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_2)$.*
4. *Ako je $I = I^*$, onda je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_1)$.*

Dokaz. (a) Po konstrukciji niza ω, jasno je da su simboli jednako raspoređeni po intervalima I^0_1, I^0_2 i I^0_3. Naime, po lemi 3.4.2(PQ1) znamo da su ovi intervali iste duljine, kao i da sva tri počinju n-blokom pa je simbolička konfiguracija po k-blokovima, za $k \geq n$ jednaka. S druge strane, iz konstrukcije je jasno da je $\omega_j = 0$ za svaki $j \in (I^0_1 \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I^0_2 \setminus \mathcal{B}_n) \cup (I^0_3 \setminus \mathcal{B}_n)$, pa su simboli zaista jednako raspoređeni na cijelim intervalima. Ako $J \subseteq I^0_1$ počinje s 1 ili ako $J \subseteq I^0_3$ završava s a_{n+1}, tvrdnja slijedi po lemi 3.4.4. Jednaka simbolička konfiguracija po intervalima sada garantira da ovi rezultati vrijede za sva 3 promatrana intervala.

(b) i (c) Ključna je opservacija da su za sve promatrane intervale, oba njihova ruba udaljena barem $\frac{a_k d_k}{4}$ od svakog k-bloka unutar tih intervala. Za p_n i q_n to već znamo iz dokaza leme 3.4.2(PQ6), dok za rubove intervala I^1_1, I^1_2 i I^2_2 to vrijedi jer su im susjedni intervali I^0_j za koje znamo da počinju i završavaju n-blokovima. Stoga, najbliži k-blok, za svaki $k \geq n$, je od promatranih rubova udaljen barem za $(d_k - 1)a_k \geq \frac{a_k d_k}{4}$.

Dokazi svih slučajeva u ovim tvrdnjama su slični pa provodimo samo jedan od njih, onaj kada je $I = I^2_1$ i $J = [p_n, l]$. Ako J ne siječe nijedan blok razine $k \leq n$, onda je po konstrukciji $\rho(J) = v_2 \in B_{\frac{1}{8}}(v_2)$. U suprotnom, neka je $m \leq n$ najveći broj za kojeg postoji m-blok B sa svojstvom $J \cap B \neq \emptyset$. Tada znamo da je $|J| \geq \frac{a_k d_k}{4}$ pa po lemi 3.3.1(F4) zaključujemo

$$\frac{|J \cap \mathcal{B}_n|}{|J|} \leq 4\delta_\infty \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_2).$$

Ostali slučajevi dokazuju se analogno.

(d) Ako je $J \subseteq I_1^1$ ili $J \subseteq I_2^1$, tvrdnja je dokazana u (b). U suprotnom, neka je $j \in \{1, 2\}$ za kojeg je $I_j^1 \subseteq J$. Po korolaru 3.4.8 znamo da je $B(I_j^1) \in B_{\frac{1}{16}}(v_1)$. Pretpostavimo najprije da je $|JI_r^1| \geq \frac{a_n d_n}{2}$, pri čemu je $r \neq j$. Po lemi 3.4.7 onda znamo da je $\rho(J \cap I_r^1) \in B_{\frac{1}{16}}(v_1)$, a k tome je

$$\frac{|I_1^2|}{|I_j^1|} \leq \frac{a_n d_n + a_n}{(K-1)a_n d_n} \leq \frac{\frac{3}{2} a_n d_n}{32 a_n d_n} \leq \frac{1}{16},$$

pa tvrdnja vrijedi. U suprotnom, ako je $|I_r^1| \leq \frac{a_n d_n}{2}$, primijećujemo

$$\frac{|I_1^2| + |I_r^1|}{|I_j^1|} \leq \frac{a_n d_n + a_n + \frac{a_n d_n}{2}}{(K-1)a_n d_n} \leq \frac{2 a_n d_n}{32 a_n d_n} = \frac{1}{16},$$

pa tvrdnja i u ovom slučaju vrijedi.

□

Propozicija 3.4.10. *Neka je $T = \{\lambda v_i + (1-\lambda) v_j : i, j \in \{0, 1, 2\}, \lambda \in [0, 1]\}$ i $S = B_{\frac{1}{8}}(T)$. Tada je $\rho(J) \in S$, za svaki interval $J = [a, b] \subset \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji takav da je J podskup nekoj $(n+1)$-bloka. Dodatno, budući da je struktura simbola ista u svim $(n+1)$-blokovima, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $J \subseteq [1, a_{n+1}]$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Baza, odnosno slučaj $n = 1$, se dokazuje jednostavno. Primijetimo da se $[1, a_1]$ može podijeliti na 7 podintervala tako da za svaki od njih vrijedi da je ω_j konstantan za sve j u promatranom podintervalu. Stoga, ako je $J \cap I_j^i \neq \emptyset$ za neke i, j, onda je $\rho(J \cap I_j^i) = v_i$. Zato je $\rho(J)$ konveksna kombinacija elemenata nekog podskupa od $\{v_0, v_1, v_2\}$ pa je jasno da je $\rho(J) \in S$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n-1 \in \mathbb{N}$ i pokažimo ju za n. Promotrimo nekoliko slucajeva.

1. Pretpostavimo da J siječe i I^* i I_2^2. Tada je $I_2^0 \subseteq J$, a po korolaru 3.4.8 znamo $\rho(I_2^0) \in B_{\frac{1}{16}}(v_0)$. To zapravo znači $\sqrt{a_{I_2^0}^2 + b_{I_2^0}^2} < \frac{1}{16}|I_2^0|$. Nadalje, primijetimo da je

$$\frac{|J \cap (I^* \cup I_2^2)|}{|I_2^0|} \leq \frac{|I^* \cup I_2^2|}{|I_2^0|} = \frac{2 \cdot (2Kd_n - 1)a_n}{(LKd_n - 1)a_n} < \frac{4}{L} \leq \frac{1}{16},$$

odnosno, uvedemo li oznaku $H := J \cap (I^* \cup I_2^2)$, možemo zaključiti $a_H + b_H \leq \frac{1}{16}|I_2^0|$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
d(\rho(J \cap (I^* \cup I_2^0 \cup I_2^2)), v_0) = d(\rho(I_2^0 \cup H), v_0) &= \frac{\sqrt{(a_{I_2^0} + a_H)^2 + (b_{I_2^0} + b_H)^2)}}{|I_2^0 \cup H|} \\
&< \frac{\sqrt{(a_{I_2^0} + a_H)^2 + (b_{I_2^0} + b_H)^2)}}{|I_2^0|} \overset{(*)}{\leq} \frac{\sqrt{a_{I_2^0}^2 + b_{I_2^0}^2} + (a_H + b_H)}{|I_2^0|} \\
&< \frac{\frac{1}{16}|I_2^0| \cdot 2}{|I_2^0|} = \frac{1}{8}|I_2^0|,
\end{aligned}$$

pa zaključujemo $\rho(J \cap (I^* \cup I_2^0 \cup I_2^2)) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$. Ako J siječe i I_1^0 ili I_3^0, možemo definirati $J' = J \cap I_1^0$ te $J'' = J \cap I_3^0$. Sada po lemi 3.4.9(a) zaključujemo $\rho(J'), \rho(J'') \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$. Napokon, koristeći lemu 3.4.4 možemo zaključiti da je $\rho(J) \in B_{\frac{1}{8}}(v_0) \subseteq S$.

2. Pretpostavimo da J siječe točno dva od pet intervala: $I_1^0, I^*, I_2^0, I_2^2, I_3^0$. Svi slučajevi su slični pa provodimo dokaz samo za slučaj kada J siječe I_1^0 i I^*. Neka je $J' = J \cap I_1^0$ i $J'' = J \cap I^*$. Tada je po lemi 3.4.9(a), $\rho(J') \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$, dok je $\rho(J'') \in B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ po lemi 3.4.9(d). Posljedično, $\rho(J)$ je konveksna kombinacija vektora iz $B_{\frac{1}{8}}(v_0)$ i $B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ pa pripada skupu S.

3. Pretpostavimo da J siječe I_1^0, I^* i I_2^0, ali ne i ostale intervale. Neka je $J' = J \cap I_1^0$ i $J'' = J \cap I_2^0$. Tada su $\rho(J')$ i $\rho(J'')$ u skupu $B_{\frac{1}{8}}(v_0)$ po lemi 3.4.9(a), dok je $\rho(I^*) \in B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ po lemi 3.4.9(d). Zato je $\rho(J)$ konveksna kombinacija vektora iz $B_{\frac{1}{8}}(v_0)$ i $B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ pa se nalazi u S.

   Analagno se dokazuje i slučaj kada J siječe I_2^0, I_2^2 i I_3^0, ali ne i ostale intervale.

4. Pretpostavimo da $J \subseteq I^*$ siječe barem dva od intervala I_1^1, I_1^2, I_2^1. Neka je $J = J' \cup J'' \cup J'''$, uz $J' = J \cap I_1^1$, $J'' = J \cap I_1^2$ i $J''' = J \cap I_2^1$. Onda su $\rho(J')$ i $\rho(J''')$ u skupu $B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ po lemi 3.4.9(b), a $\rho(J'') \in B_{\frac{1}{8}}(v_2)$ prema lemi 3.4.9(c). Ponovno zaključujemo da je $\rho(J) \in S$ kao konveksna kombinacija elemenata iz $B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ i $B_{\frac{1}{8}}(v_2)$.

5. Konačno, pretpostavimo da je $J \subseteq I_j^i$, pri čemu je I_j^i jedan od 7 promatranih intervala. Tada je
$$J \cap \mathcal{B}_n = B' \cup B_1 \cup ... \cup B_m \cup B'',$$
   uz $B' = J \cap B_0$ i $B'' = J \cap B_{m+1}$, pri čemu su B_l, $l = 0, 1, ..., m+1$, maksimalni blokovi u $\mathcal{B}_n$ koji sijeku J, poredani uzlazno. Kako J nije sadržan u samo jednom k-bloku, za neki $k \leq n$. zbog izbora broja n, pomoću leme 3.4.3 i leme 3.4.6 da su $\rho(B'), \rho(B_1), ..., \rho(B_m), \rho(B'') \in B_{\frac{1}{8}}(v_0)$, a posljedično je i $\rho(J \cap \mathcal{B}_n) \in B_{\frac{1}{8}}$ po lemi

3.4.4. Istovremeno, po definiji je jasno da je $\rho(J \setminus \mathcal{B}_n) = v_i$ pa je $\rho(J) \in S$ kao konveksna kombinacija elemenata iz $B_{\frac{1}{8}}(v_0)$ i $B_{\frac{1}{8}}(v_i)$.

□

Propozicija 3.4.11. *Skup $\rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}}$ separira ravninu.*

Dokaz. Primijetimo da vrijedi

$$\rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq k} T_n},$$

pri čemu je $T_n = \{\rho(J) \big| J \subseteq \mathbb{N}$ konačan i $|J| = n\}$. Zaista, neka je $\alpha \in \rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}}$. Tada je $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(w^{(n)})}{|w^{(n)}|}$, pri čemu je $w^{(n)}$ neka podriječ od ω, takva da je $|w^{(n)}| \geq n$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za svaki $n \geq k$ vrijedi i $|w^{(n)}| \geq k$. Nadalje, svaka podriječ $w^{(n)}$ ima pripadni interval $J_n \subseteq \mathbb{N}$ duljine $|w^{(n)}|$ pa je za svaki $n \geq k$

$$\frac{\psi(|w^{(n)}|)}{|w^{(n)}|} = \frac{\psi(J_n)}{|J_n|} = \rho(J_n) \in T_{|w^{(n)}|} \subseteq \bigcup_{n\geq k} T_n.$$

Iz svojstva limesa, zaključujemo da je $\alpha \in \overline{\cup_{n\geq k} T_n}$, a zbog proizvoljnosti izbora k je

$$\rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}} \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq k} T_n}.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $\alpha \in \cap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\cup_{n\geq k} T_n}$. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $\alpha \in \overline{\cup_{n\geq k} T_n}$ pa za svaki k postoji niz $(\alpha_i^{(k)})_{i\in\mathbb{N}}$ u $\cup_{n\geq k} T_n$ takav da $\alpha_i^{(k)} \to \alpha$. Sada za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo $\beta_k = \alpha_{i_k}^{(k)}$, pri čemu je $i_k \geq k$ i $|\beta_k - \alpha| < \frac{1}{k}$. Dakle, niz $(\beta_k)_k$ konvergira prema α, a pritom postoje intervali $J_k \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je $|J_k| \geq k$ i vrijedi

$$\beta_k = \rho(J_k) = \frac{\psi(J_k)}{|J_k|} = \frac{\psi(|w^{(k)}|)}{|w^{(k)}|},$$

pri čemu su $w^{(k)}$ podriječi od ω pridružene intervalima J_k. Sada je jasno da je $\alpha \in \rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}}$, pa zaista vrijedi jednakost promatranih dvaju skupova.

Za $0 \leq i < j \leq 2$, neka je $T_{ij} = \{\lambda v_i + (1-\lambda) v_j : \lambda \in [0,1]\}$ te neka je $S_{ij} = B_{\frac{1}{8}}(T_{ij})$. Za $n \in \mathbb{N}$, neka je $J_1 = I_1^2 = [p_n, q_n]$ i biramo $J_2 \subseteq I_2^2$ koji je jednake duljine kao J_1 i koncentričan je oko nekog n-bloka. Po lemi 3.4.2(PQ5) znamo da to vrijedi i za J_1 pa je konfiguracija blokova unutar J_1 i J_2 jednaka. Kako su, po konstrukciji, prazne pozicije (odnosno one koje nisu u $\mathcal{B}_n$) u oba intervala popunjene sa znamenkama 2, mora vrijediti $\rho(J_1) = \rho(J_2) \in B_{\frac{1}{8}}(v_2)$. Naime, po lemi 3.4.9(c) znamo da to vrijedi za $\rho(J_1)$, a za $\rho(J_2)$ svojstvo slijedi zbog jednakosti konfiguracija blokova u J_1 i J_2. Neka je $M_n \in \mathbb{N}$ takav da je $J_2 = J_1 + M_n = \{j + M_n \big| j \in J_1\}$ i neka je $\rho_i^n = \rho(J_1 + i)$, za $i = 0, 1, ..., M_n$. Po propoziciji 3.4.10 znamo da je $\rho_i^n \in S$, za svaki i. Također, po definiciji je jasno da je udaljenost između ρ_i^n i ρ_{i+1}^n manja od $\frac{2}{|J_1|}$. Štoviše, kako i raste od 0 prema M_n, interval $J_1 + i$ napušta I_1^2 i ulazi u I_2^1, zatim prelazi u I_2^0 i naposljetku u I_2^2 dok se ne zaustavi u $J_2 = J_1 + M_n$. S obzirom da je $|J_1| \geq \frac{a_n d_n}{2}$ po lemi 3.4.2(PQ4), možemo koristiti lemu 3.4.7 da zaključimo kako je $\rho(J_1 + i) \in B_{\frac{1}{8}}(v_k)$ kada je $J_1 + i \subseteq I_j^k$ za neke j, k. Inače, ako $J_1 + i$ siječe barem dva od sedam podintervala iz dekompozicije, možemo koristiti neke dvije tvrdnje iz leme 3.4.9 uz već korišten argument konveksne kombinacije, kako bismo pokazali pripadnost nekom S_{ij}. Ovakvom argumentacijom dolazimo do zaključka da vektori ρ_i^n krenu iz $B_{\frac{1}{8}}(v_2)$, zatim prelaze u $B_{\frac{1}{8}}(v_1)$ bez napuštanja skupa S_{12}, pa prelaze u $B_{\frac{1}{8}}(v_0)$ ne napuštajući skup S_{01}, da bi se naposljetku vratili u $B_{\frac{1}{8}}(v_2)$ bez napuštanja skupa S_{02}.

U [5] je pokazano da je za minimalan skup M, njegov rotacijski skup $\rho_M(F)$ povezan i kompaktan. S obzirom da je konstruirani niz ω Toeplitzov, zaključujemo da je $\rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}}$ kompaktan i povezan skup. Preostaje nam još pokazati da separira ravninu. Iz definicije brojeva ρ_i^n jasno je $U_n := \{\rho_0^n, ..., \rho_{M_n}^n\} \subseteq T_n$ pa je

$$\limsup_{n\to\infty} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} U_k \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} T_k \subseteq \rho_{\overline{O_\sigma(\omega)}}$$

S obzirom da za $n \to \infty$ vrijedi $M_n \to \infty$ i $|J_1| \to \infty$, po ranijoj argumentaciji zaključujemo da se, kada $n \to \infty$, udaljenost među točkama ρ_i^n i ρ_{i+1}^n teži u 0 i da točke ρ_i^n naprave petlju kroz skup S. Zato zaključujemo i da naš kontinuum radi petlju kroz skup S pa zaista separira ravninu $\mathbb{R}^2$. $\square$

Bibliografija

[1] Ryuichi Ito, *Rotation sets are closed*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **89** (1981), 107–111.

[2] Tobias Jäger, Alejandro Passeggi i Sonja Štimac, *Rotation sets and almost periodic sequences*, Mathematische Zeitschrift **284** (2016), 271–284.

[3] Michał Misiurewicz i Krystyna Ziemian, *Rotation Sets for Maps of Tori*, Journal of the London Mathematical Society **40** (1989), 490–506.

[4] Sheldon Newhouse, Jacob Palis i Floris Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **57** (1983), 5–71.

[5] Alejandro Passeggi, *Rational Polygons as Rotation Sets of Generic Homeomorphisms of the Two-Torus*, Journal of the London Mathematical Society **89** (2012), 235–254.

[6] Henri Poincaré, *Oeuvres Complètes, Vol. 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[7] Mark Pollicott i Michiko Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1998.

Sažetak

U ovom radu promatramo pojam rotacijskog skupa i neka njegova zanimljiva svojstva. Začetci ovog pojma leže u jednostavnijem pojmu rotacijskog broja, kojeg uvodi Poincaré. Radi se o pojmu koji opisuje gibanje točaka pod iteracijama nekog homeomorfizma kružnice, odnosno njegovog podizanja, prirodno pridruženog preslikavanja na $\mathbb{R}$ promatranom homeomorfizmu. Intuitivno, rotacijski broj predstavlja "prosječni pomak" točke prilikom jedne iteracije našeg homeomorfizma. Taj pojam najprije generaliziramo do pojma rotacijskog skupa neprekidnih preslikavanja na višedimenzionalnom torusu, a potom se fokusiramo na slučaj rotacijskog skupa homeomorfizma na minimalnom podskupu dvodimenzionalnom torusu i konstuiramo primjer rotacijskog skupa koji separira ravninu, koristeći se metodama simboličke dinamike. Rad je strukturiran u tri poglavlja. U prvom poglavlju obrađujemo jednodimenzionalni slučaj, odnosno rotacijske brojeve homeomorfizama kružnice. Glavni rezultat prvog poglavlja je *Denjoyev teorem* koji, uz neke pretpostavke na promatrani homeomorfizam, zaključuje da je dinamika tog preslikavanja jednaka dinamici rotacije za iracionalni rotacijski broj promatranog homeomorfizma. U drugom poglavlju, proširujemo pojam rotacijskog broja na pojam rotacijskog skupa u višedimenzionalnom slučaju te pokazujemo niz svojstava rotacijskog skupa neprekidnog preslikavanja u $\mathbb{R}^m$, među kojima su najvažnija zatvorenost i povezanost. Naposljetku, fokusiramo se na podslučaj homeomorfizama na dvodimenzionalnom torusu, odnosno njihovih podizanja, gdje pokazujemo da vrijede nešto jača svojstva, među kojima je najvažnije konveksnost rotacijskog skupa. U trećem poglavlju ostajemo pri promatranju homeomorfizama na dvodimenzionalnom torusu i proširujemo pojam rotacijskog skupa podizanja F na rotacijski skup preslikavanja F na nekom podskupu torusa. Zatim pokazujemo da se gibanje točaka pod iteracijama podizanja F može simbolički reprezentirati nizovima znakova $0, 1, .., N$. Stvaranjem adektvatne podloge za poistovjećivanje simboličkih i dinamičkih rotacijskih skupova, problem traženja rotacijskog skupa sa željenim svojstvima svodimo na problem konstrukcije niza znakova s nekim karakteristikama, čiju konstrukciju potom i provodimo.

Summary

In this paper we observe the notion of the rotational set and some of its interesting properties. Roots of this notion lie in the simpler notion of the rotational number, which was introduced by Poincaré. The notion describes the motion of points iterated by some homeomorphism of a circle, or its lift, which is a mapping in $\mathbb{R}$ naturally associated with the observed homeomorphism. Intuitively, the rotational number represents the "average shift" of a point under a single iteration of our homeomorphism. That notion is firstly generalized to the notion of the rotational set of the continuous mapping in a higher-dimensional torus, after which we focus on the case of a rotational set of a homeomorphism on a minimal subset of the two-dimensional torus and construct an example of a plane-separating rotational set, using the methods of symbolical dynamics. The paper is organized into three chapters. In the first chapter we go over the one-dimensional case, i.e. the rotational number of the homeomorphism of a circle. The main result of the first chapter is Denjoy's Theorem, which, along with some assumptions on the observed homeomophism, concludes that the dynamics of that mapping equals the dynamics of a rotation R_ρ, for the irrational rotational number ρ of the observed homeomorphism. In the second chapter, we expand the notion of the rotational number to the notion of the rotational set in the multi-dimensional case and we show some of the properties of the rotational set of a continuous mapping in $\mathbb{R}^m$, most important of which are being closed and connected. Finally, we focus on the case of a homeomorphism on a two-dimensional torus and its lift, where we show some more powerful properties, most importantly that the rotational set is convex. In the third chapter, we continue observing the homeomorphisms on a two-dimensional torus and we expand the notion of the rotational set of mapping F to the notion of the rotational set of mapping F on some subset of the torus. Further, we show that the motion of the points being iterated by the lift F can be symbolically represented by sequences of symbols $0, 1, ..., N$. By creating the appropriate frame for identification of symbolical and dynamical rotational sets, we transform the problem of constructing the rotational set with required properties to the problem of construction of a sequence of symbols with some characteristics, whose construction we then perform.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu 27. listopada 1996. Osnovnu školu pohađao sam u OŠ Jure Kaštelana na Savici, u Zagrebu. Tijekom viših razreda osnovne škole krenuo sam sudjelovati na natjecanjima iz matematike, a kao najveći osnovnoškolski uspjeh ističe se 3. nagrada u osmom razredu, na državnom natjecanju u Opatiji.

Srednju školu pohađao sam u zagrebačkoj XV. gimnaziji, popularno MIOC-u. Uz izvrstan prosjek, nastavljam se posvećenije baviti natjecanjima iz matematike gdje postižem brojne uspjehe, među kojima se ističe 1. mjesto, A kategorija, u trećem razredu, na državnom natjecanju u Šibeniku, sudjelovanje na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi u Veszpremu 2013. godine te dvije brončane medalje sa Srednjoeuropske matematičke olimpijade u Dresdenu 2014. godine.

Nakon završetka srednje škole, obrazovanje nastavljam na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu. Ondje završavam najprije preddiplomski studij matematike, smjer istraživački, a potom 2018. godine upisujem diplomski studij Matematička statistika. U pet godina provedenih na fakultetu, osvajam 3 brončane medalje na International Mathematical Competition-u u Blagoevgradu, uz 2 sudjelovanja na međunarodnom matematičkom natjecanju Vojtech Jarnik u Ostravi. Uz postizanje izvrsnog uspjeha na fakultetu i osvajanje dviju nagrada za jednog od najboljih studenata generacije, u slobodno vrijeme ostajem uključen u srednjoškolska matematička natjecanja u ulozi mentora, a zatim i potpredsjednika udruge Mladi nadaredni matematičari "Marin Getaldić", te kao mentor u XV. gimnaziji.