Müntz-Szászov teorem

Budrovčan, Kristian Vedran

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristian Vedran Budrovčan

MÜNTZ–SZÁSZOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, kolovoz 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem djevojci i svim prijateljima s kojima sam provodio nezaboravne dane za vrijeme pisanja ovog diplomskog

Sadržaj

Uvod

Teorija aproksimacije je područje analize koje se, u svojoj srži, bavi sposobnosti aproksimacije funkcija sa jednostavnijim i lakše izračunljivim funkcijama. Prvo pitanje koje se postavlja u teoriji aproksimacije jest *mogućnost aproksimacije*. Je li obitelj funkcija, kojima želimo nešto aproksimirati, gusta u skupu funkcija koje želimo aproksimirati? To jest, možemo li aproksimirati bilo koju funkciju iz našeg skupa, koliko god to dobro želimo, koristeći proizvoljne funkcije iz dane familije? Prvi važni rezultati za gustoće funkcija bili su oni koje je dokazao Karl Weierstrass 1885. godine. To su gustoća algebarskih polinoma u klasi realnih neprekidnih funkcija na kompaktnom intervalu, te gustoća trigonometrijskih polinoma u klasi 2π-periodičnih realnih neprekidnih funkcija. Weierstrassovi teoremi aproksimacije dali su brojne generalizacije koje su primijenjive na druge familije funkcija.

Pitanje kojim se bavimo u ovom radu jest koji uvjet mora zadovoljavati rastući niz realnih brojeva $\Lambda = (0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots)$ tako da vektorski prostor $\Pi(\Lambda) := \text{span}\{x^{\lambda_k} : k \in \mathbb{N}_0\}$ bude gust podskup od $C[0,1]$ (skup realnih neprekidnih funkcija na segmentu $[0,1]$)? Također, postavlja se i obratno pitanje, ako imamo gustoću što onda mora vrijediti za niz Λ? Ova pitanja postavio je Sergei Bernstein 1912. godine, a odgovor na njih dao je Herman Müntz 1914. godine te je taj rezultat poznat kao Müntz-Szászov teorem. Na početku rada bavimo se dokazom Klasičnog Müntzovog teorema za rastuće nizove realnih brojeva, a nakon toga slijedi Puni Müntzov teorem koji umjesto rastućih nizova realnih brojeva razmatra proizvoljne nizove realnih brojeva. Također, nećemo se baviti aproksimacijom samo na skupu $C[0,1]$, već i na nekim drugim skupovima kao što su $L^p[0,1]$ te $C[a,b]$, za $0 < a < b$.

Poglavlje 1

Aproksimacija neprekidnih funkcija

Započinjemo s jednim od najvažnijih teorema u teoriji aproksimacije do kojeg je 1885. godine došao Karl Weierstrass.

Teorem 1.1 (Weierstrassov teorem aproksimacije)**.** *Neka je dana realna funkcija $f \in C[a,b]$ i proizvoljan $\varepsilon > 0$. Tada postoji polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ tako da vrijedi*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

za sve $x \in [a,b]$.

Za dokaz ovog teorema treba nam pomoćna tvrdnja. Najprije, za ograničenu i uniformno neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $h > 0$ definiramo

$$S_h f(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du.$$

Ova funkcija je dobro definirana jer je f ograničena te za funkciju gustoće normalne distribucije vrijedi:

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du = 1. \tag{1.1}$$

Teorem 1.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena i uniformno neprekidna funkcija. Tada $S_h f$ uniformno konvergira prema f kada $h \downarrow 0$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $|x - y| < \delta$. Pretpostavimo da $|f(x)| \leq M$ na $\mathbb{R}$. Zbog (1.1) možemo napisati

$$f(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du.$$

Neka je $h_0 > 0$ takav da vrijedi $h_0 < \frac{\varepsilon\delta\sqrt{\pi}}{2M}$. Tada je

$$
\begin{aligned}
|S_h f(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) - f(x)| e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-u|\geq\delta} |f(u) - f(x)| e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-u|\geq\delta} e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} e^{-v^2} dv \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Mh}{\delta\sqrt{\pi}} \int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} |v| e^{-v^2} dv \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4Mh}{\delta\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} v e^{-v^2} dv = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Mh}{\delta\sqrt{\pi}} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

za sve $0 < h \leq h_0$ i za sve $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Dokaz teorema 1.1. Započinjemo tako da proširimo f do ograničene uniformno neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$. Definiramo:

$$
f(x) = \begin{cases} f(a)(x - a + 1), & x \in [a-1, a\rangle \\ -f(b)(x - b - 1), & x \in \langle b, b+1] \\ 0, & x < a-1 \text{ ili } x > b+1 \end{cases} .
$$

To jest, postoji $R > 0$ tako da je $f(x) = 0$ za $|x| > R$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je M takav da vrijedi $|f(x)| \leq M$ za sve x. Tada po prethodnom teoremu postoji $h_0 > 0$ tako da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|S_{h_0} f(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je $f(u) = 0$ za $|u| > R$, možemo pisati

$$
S_{h_0} f(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{R} f(u) e^{-(\frac{u-x}{h})^2} du.
$$

Na segmentu $\left[\frac{-2R}{h_0}, \frac{2R}{h_0}\right]$ red potencija od e^{-v^2} konvergira uniformno, zato postoji N takav da je

$$
\left| \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{u-x}{h_0})^2} - \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{u-x}{h_0}\right)^{2k} \right| < \frac{\varepsilon}{4RM}
$$

za sve $|x|, |u| \leq R$, zato jer je tada $|u - x| \leq 2R$. To sada povlači

$$\left| S_{h_0} - \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{R} f(u) \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{u-x}{h_0}\right)^{2k} du \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za sve $|x| \leq R$. Stavimo

$$P(x) = \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{R} f(u) \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{u-x}{h_0}\right)^{2k} du.$$

Primjetimo da je integrand u prošloj nejednakosti (ako ga raspišemo na odgovarajući način) zapravo polinom u x stupnja $2N$ čiji su svi koeficjenti neprekidne funkcije po u. To znači da je odgovarajući integral polinom u x stupnja najviše $2N$ s konstantnim koeficijentima, to jest $P(x)$ je polinom stupnja najviše $2N$ za koji vrijedi $|S_{h_0} f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $|x| \leq R$. Odavde slijedi $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in [a, b]$. □

Važna posljedica teorema 1.1 je Stone–Weierstrassov teorem kojeg navodimo bez dokaza.

Definicija 1.3. *Podskup $A \subseteq C(X)$* separira točke *ako za proizvoljne različite točke $x, y \in X$ postoji funkcija $g \in A$ takva da vrijedi $g(x) \neq g(y)$.*

Teorem 1.4 (Stone-Weierstrassov teorem)**.** *Neka je X kompaktan skup i neka $C(X)$ označava prostor realnih neprekidnih funkcija definiranih na X. Pretpostavimo da je A podalgebra od $C(X)$. Tada je A gusta u $C(X)$, u supremum normi, ako i samo ako A separira točke i ako za svaki $x \in X$ postoji $f \in A$ koji zadovoljava $f(x) \neq 0$.*

Pitanje koje se sada prirodno postavlja jest: koje potencije polinoma su dovoljne za aproksimaciju neprekidnih funkcija iz $C[0, 1]$, ili općenitije, iz $C[a, b]$? Ovo pitanje je 1912. godine postavio Sergei Bernstein i naslutio je sljedeće: ako je dana rastuća familija realnih brojeva $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ...\}$, tada je $\mathrm{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$ gust u $C[0, 1]$ ako i samo ako je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

Bernstein je radio na tom problemu te je dokazao da je uvjet

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \log \lambda_i}{\lambda_i} = \infty$$

nužan za gustoću, te da je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k \log \lambda_k} = 0$$

dovoljno. Njegovu slutnju dokazao je Müntz 1914. godine.

Definicija 1.5. *Neka je* $\Lambda = (\lambda_i)_{k=0}^{\infty}$ *niz realnih brojeva. Vektorski prostor* $\Pi(\Lambda) := \text{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$ *naziva se* **Müntzov prostor pridružen** Λ*.*

Teorem 1.6 (Müntz-Szász)**.** *Neka je* $\Lambda = (\lambda_i)_{k=0}^{\infty}$ *,* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ *, rastući niz realnih brojeva koji zadovoljava* $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$*. Tada je* $\Pi(\Lambda) = \text{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$*, gust u* $C[0,1]$ *ako i samo ako je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty. \tag{1.2}$$

Dokaz teorema napravljen je u sljedećem poglavlju.

Poglavlje 2

Klasični Müntz-Szászov teorem

2.1 Preliminarni rezultati

Započinjemo s propozicijom koja će se često koristiti u dokazima:

Propozicija 2.1. *Neka je* (a_n) *niz realnih brojeva takav da je* $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, *i* $a_n \to 0$. *Tada*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Dokaz. Neka je m takav da je $a_n < \frac{1}{2}$ za sve $n \geq m$. Razvijanjem logaritma u red, za takve n možemo pisati:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\log(1 - a_n)}{a_n} + 1\right| &= \left|\frac{-a_n - \frac{a_n^2}{2} - \frac{a_n^3}{3} - \dots}{a_n} + 1\right| = \\ &= \left|\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} + \frac{a_n^3}{4} + \dots\right| \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = 1/2.\end{aligned}$$

Sada slijedi da za $n \geq m$ vrijedi:

$$-\frac{3}{2}a_n \leq \log(1 - a_n) < -\frac{1}{2}a_n.$$

Odavde slijedi da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - a_n)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju. Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - a_n) = \log \prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = -\infty.$$

Primijetimo da je zadnja jednakost ekvivalentna s $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)=0$ i odavde slijedi tvrdnja. $\square$

Sada prelazimo na rezultate iz teorije Hilbertovih prostora koji su potrebni za originalan dokaz teorema. Standardne rezultate iz Hilbertovih prostora nećemo dokazivati.

Teorem 2.2. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i Y zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Tada, za svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ postoji jedinstveni $y \in Y$ takav da je*

$$\inf\{\|x-z\| : z \in Y\} =: d(x,Y) = \|x-y\|.$$

Nadalje, $x - y \in Y^{\perp} = \{z \in \mathcal{H} : \langle z, w\rangle = 0 \text{ za sve } w \in Y\}$.

Primijetimo da je na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, $\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$, gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt. Također, jedinstveni $y \in Y$ iz teorema naziva se *ortogonalna projekcija od* x na Y.

Sada pokazujemo Gramov rezultat koji nam omogućava da računamo udaljenosti između elemenata Hilbertovog prostora i konačnodimenzionalnog potprostora (koji je automatski zatvoren).

Definicija 2.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka su $h_1, ..., h_r \in \mathcal{H}$. Gramova determinanta pridružena elementima $h_1, ..., h_r \in \mathcal{H}$ je*

$$G(h_1, ..., h_r) := \det \begin{pmatrix} \langle h_1, h_1\rangle & \cdots & \langle h_1, h_r\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h_r, h_1\rangle & \cdots & \langle h_r, h_r\rangle \end{pmatrix}.$$

Lema 2.4 (Gram)**.** *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, neka je $g \in \mathcal{H}$ i $V = \operatorname{span}\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je* $\dim V = n$. *Tada,*

$$d(g,V)^2 = \frac{G(f_1, ..., f_n, g)}{G(f_1, ..., f_n)}.$$

Dokaz. Prema teoremu 2.2, možemo pronaći jedinstveni $f^* \in V$ koji zadovoljava $d(g,V)^2 = \langle g - f^*, g - f^*\rangle$. Prema definiciji od V slijedi da postoje jedinstveni $c_1, .., c_n \in \mathbb{C}$ takvi da $f^* = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$. Također znamo da je $g - f^* \in V^{\perp}$, zbog čega vrijede sljedeće jednakosti:

$$\langle f_k, g - f^*\rangle = 0 \quad \text{za sve } k = 1, ..., n. \tag{2.1}$$

Nadalje, vrijedi

$$d(g,V)^2 = \langle g - f^*, g\rangle - \langle g - f^*, f^*\rangle = \langle g - f^*, g\rangle = \langle g, g\rangle - \langle f^*, g\rangle. \tag{2.2}$$

Proširimo f^* u jednakostima (2.1) i (2.2) i tako dolazimo do sljedećeg sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} c_1\langle f_1, f_1\rangle + ... + c_n\langle f_1, f_n\rangle - \langle f_1, g\rangle &= 0 \\ &\vdots \\ c_1\langle f_n, f_1\rangle + ... + c_n\langle f_n, f_n\rangle - \langle f_n, g\rangle &= 0 \\ c_1\langle f_1, g\rangle + ... + c_n\langle f_n, g\rangle + d(g,V)^2 - \langle g, g\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $(c_1, ..., c_n, 1) \neq 0$ netrivijalno rješenje sustava s $n+1$ jednadžbi:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_1\rangle x_1 + ... + \langle f_1, f_n\rangle x_n - \langle f_1, g\rangle x_{n+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle x_1 + ... + \langle f_n, f_n\rangle x_n - \langle f_n, g\rangle x_{n+1} &= 0 \\ \langle f_1, g\rangle x_1 + ... + \langle f_n, g\rangle x_n + (d(g,V)^2 - \langle g, g\rangle) x_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Zato vrijedi:

$$\det \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \cdots & \langle f_1, f_n\rangle & -\langle f_1, g\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle & \cdots & \langle f_n, f_n\rangle & -\langle f_n, g\rangle \\ \langle f_1, g\rangle & \cdots & \langle f_n, f_g\rangle & d(g,V)^2 - \langle g, g\rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Razdvajanjem posljednjeg stupca kao $(0, .., 0, d(g,V)^2)^\top - (\langle f_1, g\rangle, ..., \langle f_n, g\rangle, \langle g, g\rangle)^\top$ dobivamo:

$$\det \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \cdots & \langle f_1, f_n\rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle & \cdots & \langle f_n, f_n\rangle & 0 \\ \langle f_1, g\rangle & \cdots & \langle f_n, f_g\rangle & d(g,V)^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \cdots & \langle f_1, f_n\rangle & \langle f_1, g\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle & \cdots & \langle f_n, f_n\rangle & \langle f_n, g\rangle \\ \langle f_1, g\rangle & \cdots & \langle f_n, f_g\rangle & \langle g, g\rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Odavde, iz definicije Gramove determinante sada slijedi

$$d(g,V)^2 G(f_1, ..., f_n) = G(f_1, ..., f_n, g),$$

i time je dokaz gotov. $\square$

Promatramo prostor $L^2([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ izmjeriva} : \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty\}$, gdje dx označava Lebesgueovu mjeru. Na $L^2([0,1])$ imamo definiran skalarni produkt $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ i iz njega izvedenu normu $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$. Vrijede sljedeći teoremi:

Teorem 2.5. *Prostor $L^2([0,1])$ je Hilbertov prostor.*

Teorem 2.6. *Skup $C[0,1]$ je gust u $L^2([0,1])$.*

Na kraju, potrebna nam je lema do koje je došao Cauchy koja služi za računanje Gramovih determinanti koje se pojavljuju u dokazima.

Lema 2.7 (Cauchy)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}$ takvi da je $x_i + y_i \neq 0$ za sve i, j. Tada vrijedi:*

$$D_n := \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{1\le i,j\le n}(x_i + y_j)}.$$

Dokaz. Neka je C_n matrica čiji su elementi $a_{ij} = \frac{1}{x_i+y_j}$ (ova matrica poznata je kao Cauchyjeva matrica). Oduzmimo prvi stupac od svakog od stupaca 2 do n. Dobivamo da se, u stupcima 2 do n, a_{ij} transformira u

$$\frac{1}{x_i + y_j} - \frac{1}{x_i + y_1} = \frac{(x_i + y_1) - (x_i + y_j)}{(x_i + y_j)(x_i + y_1)} = \left(\frac{y_1 - y_j}{x_i + y_1}\right)\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right).$$

Ovakvim elementarnim transformacijama vrijednost determinante se nije promijenila. Nadalje radimo sljedeće transformacije: Izlučimo faktor $\frac{1}{x_i+y_1}$ iz svakog retka $1 \le i \le n$, a zatim izlučimo faktor $y_1 - y_j$ iz svakog stupca $2 \le j \le n$. Dobivamo:

$$D_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + y_1}\right)\left(\prod_{j=2}^{n}(y_1 - y_j)\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_1+y_2} & \frac{1}{x_1+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ 1 & \frac{1}{x_2+y_2} & \frac{1}{x_2+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

Sada oduzmimo redak 1 od svakog od redaka 2 do n. Prvi stupac sada ima sve 0 osim na prvom mjestu, a a_{ij}, za $i, j > 1$, sada izgleda ovako:

$$\frac{1}{x_i + y_j} - \frac{1}{x_1 + y_j} = \frac{(x_1 + y_j) - (x_i + y_j)}{(x_i + y_j)(x_1 + y_j)} = \left(\frac{x_1 - x_i}{x_1 + y_j}\right)\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right).$$

Ponovno, ovakvim transformacija vrijednost determinante se nije promijenila. Sada radimo sljedeće: Izlučimo faktor $x_1 - x_i$ iz svakog retka $2 \le i \le n$, a zatim izlučimo faktor $\frac{1}{x_1+y_j}$ iz svakog stupca $2 \leq j \leq n$. Dobivamo:

$$D_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + y_1}\right)\left(\prod_{j=2}^{n} \frac{1}{x_1 + y_j}\right)\left(\prod_{i=2}^{n}(x_1 - x_i)\right)\left(\prod_{j=2}^{n}(y_1 - y_j)\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ 0 & \frac{1}{x_3+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_3+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

Sređivanjem ove jednakosti dobivamo:

$$D_n = \frac{\prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)(y_i - y_1)}{\prod_{1\leq i\leq n, 2\leq j\leq n}(x_i + y_1)(x_1 + y_j)}\begin{vmatrix} \frac{1}{x_2+y_2} & \frac{1}{x_2+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \frac{1}{x_3+y_2} & \frac{1}{x_3+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_3+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

Ponovimo ovaj postupak na manjoj determinanti koju smo dobili, to radimo sve dok ne preostane samo trivijalna determinanta. Odavde slijedi rezultat. $\square$

2.2 Dokaz teorema

Ovaj odjeljak započinjemo s elementarnim dokazom dovoljnosti Müntz-Szászovog teorema. To ćemo napraviti prateći konstruktivan i kratak dokaz M. von Golitscheka (vidi [12]).

Napomena 2.8. *Sa* $\|\cdot\|_{C[0,1]}$ *ili* $\|\cdot\|_{[0,1]}$ *ćemo označavati supremum normu na* $[0,1]$.

Dokaz dovoljnosti u teoremu 1.6. Primijetimo da je dovoljno pokazati da za bilo koji $q \in \mathbb{N}\backslash\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ imamo da je x^q u zatvaraču od $\text{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. To znači da možemo aproksimirati sve polinome, pa sada po Weierstrassovom teoremu možemo aproksimirati sve neprekidne funkcije.

Ideja je definirati, za svaki q, konkretan niz aproksimacija $(P_n)_{n=0}^{\infty} \subset \Pi(\Lambda)$ i dokazati da $Q_n(x) = x^q - P_n(x)$ konvergira uniformno prema 0 na $[0,1]$. Stavimo $Q_0(x) := x^q$ i definiramo $Q_n(x)$ za $0 < x \leq 1$ i $n \geq 1$ induktivno kao

$$Q_n(x) := (\lambda_n - q)x^{\lambda_n} \int_x^1 Q_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n}dt.$$

Pokažimo da za svaki $n \geq 0$ možemo pronaći $a_{n,i} \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju

$$Q_n(x) = x^q - \sum_{i=1}^{n} a_{n,i}x^{\lambda_i}.$$

Ova tvrdnja očito vrijedi za $n = 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n > 0$. Pokažimo da vrijedi za $n + 1$. Koristeći pretpostavku možemo pisati:

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= (\lambda_{n+1} - q)x^{\lambda_{n+1}} \int_x^1 \left(t^q - \sum_{i=1}^n a_{n,i} t^{\lambda_i} \right) t^{-1-\lambda_{n+1}} dt \\
&= (\lambda_{n+1} - q)x^{\lambda_{n+1}} \left[\frac{t^{q-\lambda_{n+1}}}{q - \lambda_{n+1}} - \sum_{i=1}^n a_{n,i} \frac{t^{\lambda_i - \lambda_{n+1}}}{\lambda_i - \lambda_{n+1}} \right]_x^1 \\
&= x^q + \sum_{i=1}^n a_{n,i} x^{\lambda_i} \frac{\lambda_{n+1} - q}{\lambda_i - \lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1} - q) \left(\frac{1}{q - \lambda_{n+1}} - \sum_{i=1}^n a_{n,i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{n+1}} \right).
\end{aligned}$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Sada još samo trebamo pokazati da $\|Q_n\|_{C[0,1]}$ konvergira prema 0 kad $n \to \infty$. Vrijedi $\|Q_0\|_{C[0,1]} = 1$ i

$$\begin{aligned}
|Q_n(x)| &\leq |\lambda_n - q| \|Q_{n-1}\|_{C[0,1]} |x^{\lambda_n}| \left| \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} dt \right| \\
&= |\lambda_n - q \; \|Q_{n-1}\|_{C[0,1]} |x^{\lambda_n}| \left| \frac{x^{-\lambda_n} - 1}{\lambda_n} \right| \\
&= \left| \frac{\lambda_n - q}{\lambda_n} \right| |1 - x^{\lambda_n}| \|Q_{n-1}\|_{C[0,1]}.
\end{aligned}$$

Odavde, uzimajući supremum po $x \in [0, 1]$ i ponovljenim korištenjem gornje nejednakosti, dobivamo:

$$\|Q_n(x)\|_{C[0,1]} \leq \prod_{i=1}^n \left| 1 - \frac{q}{\lambda_i} \right|.$$

Dakle, prema propoziciji 2.1 slijedi da $\|Q_n\| \to 0$ ako vrijedi $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} = \infty$. □

Da bismo dokazali i drugi smjer teorema potrebna je sljedeća lema.

Lema 2.9. *Neka su $q, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ različiti realni brojevi strogo veći od $-1/2$. Tada, u $\| \cdot \|_2$ vrijedi:*

$$\delta := d(x^q, \mathrm{span}\{x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2q+1}} \prod_{i=0}^n \left| \frac{q - \lambda_i}{q + \lambda_i + 1} \right|.$$

Dokaz. Znamo da je $L^2([0, 1])$ Hilbertov prostor te da funkcije $x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}$ razapinju njegov konačnodimenzionalan vektorski potprostor. Zato, prema Gramovoj lemi (Lema 2.4), udaljenost koju želimo izračunati jednaka je

$$\delta = \sqrt{\frac{G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}, x^q)}{G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n})}}.$$

Primijetimo da za bilo koje $a, b > -1/2$ vrijedi:

$$\langle x^a, x^b \rangle_{L^2} = \int_0^1 x^a x^b dx = \frac{1}{a+b+1}.$$

Dakle, gornje determinante možemo napisati na sljedeći način:

$$G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_0+\lambda_0+1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_0+\lambda_n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_0+1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_n+1} \end{pmatrix}$$

i

$$G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}, x^q) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_0+\lambda_0+1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_0+\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_0+q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_0+1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_n+q+1} \\ \frac{1}{q+\lambda_0+1} & \cdots & \frac{1}{q+\lambda_n+1} & \frac{1}{q+q+1} \end{pmatrix}.$$

Vrijednosti gornjih determinanti sada izračunamo pomoću Cauchyjeve leme (Lema 2.7) sa $x_i = \lambda_{i-1}$ i $y_j = \lambda_{j-1} + 1$ te $x_{n+2} = q$ i $y_{n+2} = q + 1$:

$$G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}) = \frac{\prod_{0 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2}{\prod_{0 \le i, j \le n} (\lambda_i + \lambda_j + 1)},$$

$$G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}, x^q) = \frac{\prod_{0 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{j=0}^{n} (q - \lambda_j)^2}{(2q+1) \prod_{0 \le i, j \le n} (\lambda_i + \lambda_j + 1) \prod_{j=0}^{n} (q + \lambda_j + 1)^2}.$$

Tražena formula slijedi uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u početni izraz. $\square$

Sada prelazimo na originalni dokaz Müntz-Szászovog teorema.

Dokaz teorema 1.6. Najprije dokažimo nužnost. Prisjetimo se da za $f \in C[0,1]$ vrijedi

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \le \|f\|_{C[0,1]}.$$

Ovime vidimo da ako je neki podskup gust u $C[0,1]$, tada je on također gust i u $L^2([0,1])$. Dakle, ako je $\operatorname{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$ gust u $C[0,1]$ to implicira da je x^q u L^2-zatvaraču od $\operatorname{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$ za sve $q \in \mathbb{N} \backslash \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}_0\}$. To vrijedi ako i samo ako

$$d(x^q, \operatorname{span}\{x^{\lambda_0}, .., x^{\lambda_n}\}) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Kako je $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = \infty$, prema prethodnoj lemi to će se dogoditi ako i samo ako je

$$\limsup_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n}\left|\frac{q-\lambda_j}{q+\lambda_j+1}\right| = 0.$$

Primijetimo da za dovoljno velike j taj produkt možemo pisati (bez prvih nekoliko faktora) na sljedeći način: $\prod\left(1-\frac{2q+1}{\lambda_j+q+1}\right)$. Prema propoziciji 2.1 to će konvergirati prema 0 ako i samo ako vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2q+1}{\lambda_j+q+1} = \infty.$$

Primijetimo, ako je dan $a>0$, i ako je λ_j dovoljno velik, tada sljedeće nejednakosti vrijede trivijalno:

$$\frac{2}{\lambda_j+a} \geq \frac{1}{\lambda_j} \geq \frac{1}{\lambda_j+a}.$$

Odavde slijedi da gornji uvjet vrijedi ako i samo ako je

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j} = \infty.$$

Time je pokazan jedan smjer.
Primijetimo da smo ovime zapravo dokazali sljedeću tvrdnju:

$$\operatorname{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\} \text{ je gust u } L^2[0,1] \quad \text{ako i samo ako je} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j} = \infty. \tag{2.3}$$

Dokažimo sada dovoljnost. Za $q \geq 1$ i proizvoljan $i_0 \in \mathbb{N}$ možemo pisati

$$\begin{aligned}
\left|x^q - \sum_{i=i_0}^{n} a_i x^{\lambda_i}\right| &= \left|\int_0^x \left(qt^{q-1} - \sum_{i=i_0}^{n} a_i\lambda_i t^{\lambda_i-1}\right) dt\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|qt^{q-1} - \sum_{i=i_0}^{n} a_i\lambda_i t^{\lambda_i-1}\right| dt \\
&\leq \left[\int_0^1 \left|qt^{q-1} - \sum_{i=i_0}^{n} a_i\lambda_i t^{\lambda_i-1}\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\|qx^{q-1} - \sum_{i=i_0}^{n} a_i\lambda_i x^{\lambda_i-1}\right\|_2,
\end{aligned}$$

što vrijedi za sve $x \in [0,1]$, pri ćemu je u drugoj nejednakosti korištena Jensenova nejednakost. Dakle, zbog (2.3), slijedi da možemo aproksimirati polinome x^q u supremum normi elementima iz $\mathrm{span}\{x^{\lambda_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$ ako je

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - 1} = \infty.$$

Primijetimo da možemo izabrati i_0 tako da vrijedi $\lambda_i - 1 > 0$ za sve $i > i_0$. Također, gornja jednakost je ekvivalentna s $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$, zato što za dovoljno velike λ_i vrijedi:

$$\frac{2}{\lambda_i} \geq \frac{1}{\lambda_i - 1} \geq \frac{1}{\lambda_i}.$$

Ovime je dokaz gotov. □

Sada navodimo (bez dokaza) jedan povijesno bitan rezultat. Radi se o Szászovom teoremu koji razmatra slučaj kada su eksponenti kompleksni brojevi (vidi [24]).

Napomena 2.10. *$C([0,1],\mathbb{C}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : f$ neprekidna$\}$ je prostor neprekidnih kompleksnih funkcija definiranih na $[0,1]$.*

Teorem 2.11 (Szász, 1916). *Pretpostavimo da polinomi mogu imati kompleksne koeficijente i kompleksne eksponente. Tada za $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ stavimo $\Pi_{\mathbb{C}}(\Lambda) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x^{\lambda_k}\}_{k=0}^{\infty}$. Ako je $\lambda_0 = 0$ i $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ za sve $k > 0$, tada je $\Pi_{\mathbb{C}}(\Lambda)$ gust podskup od $C([0,1],\mathbb{C})$ kad god je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(\lambda_k)}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty. \tag{2.4}$$

Štoviše, ako vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{Re}(\lambda_k)}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty,$$

tada $\Pi_{\mathbb{C}}(\Lambda)$ nije gust podskup od $C([0,1],\mathbb{C})$. Posebno, ako vrijedi

$$\liminf_{k \to \infty} \mathrm{Re}(\lambda_k) > 0,$$

tada je $\Pi_{\mathbb{C}}(\Lambda)$ gust podskup od $C([0,1],\mathbb{C})$ ako i samo ako je zadovoljeno (2.4).

Napomena 2.12. *Primijetimo da Szászov teorem ne pokriva sve slučajeve. Na primjer, niz $\lambda_k = \frac{1}{k} + i\sqrt{k}$ zadovoljava*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(\lambda_k)}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \quad i \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{Re}(\lambda_k)}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty.$$

Za kraj ovog poglavlja slijedi nekoliko napomena i primjera.

Napomena 2.13. *Potencija* $\lambda_0 = 0$ *nam treba u Müntz-Szászovom teoremu (teorem 1.6) jer bi u suprotnom za sve* $f \in \overline{\Pi(\Lambda)}$ *vrijedilo* $f(0) = 0$ *pa ne bismo imali gustoću u* $C[0,1]$.

Primjer 2.14 (Kvadrati prirodnih brojeva)**.** *Neka je* $\Lambda = (n^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Tada* $\Pi(\Lambda)$ *nije gust u* $C[0,1]$ *jer*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Primjer 2.15 (Prosti brojevi)**.** *Neka je* $\mathbb{P}$ *skup prostih brojeva. Tada je* $\Pi(\mathbb{P} \cup \{0\})$ *gust u* $C[0,1]$. *Zaista, ako sa* p_n *označimo* n*-ti prost broj, tada vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

Poglavlje 3

Puni Müntzov teorem

Klasični Müntz-Szászov teorem naveden je samo za rastuće nizove nenegativnih realnih brojeva $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$. Zanimljivo bi bilo znati neki općenitiji rezultat, koji se bavi proizvoljnim nizovima eksponenata, ako je to moguće. Takav rezultat nazivamo **Puni Müntzov teorem**. Također, bilo bi zanimljivo znati takav rezultat ne samo za prostor $C[0,1]$ već i za $C(K)$ gdje je K kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, te za neke druge prostore funkcija kao što je na primjer $L^p[a,b]$, itd.

3.1 Puni Müntzov teorem na [0,1]

Definicija 3.1. *Za* $1 \leq p < \infty$ *definiramo* $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$. *Poistovjećujući funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0, definiramo* $L^p[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ izmjeriva}, \|f\|_p < \infty\}$. *Također, za* $p = \infty$ *definiramo* $L^\infty[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ izmjeriva}, \|f\|_{[0,1]} < \infty\}$.

Započinjemo s navođenjem glavnih rezultata ovog odjeljka.

Teorem 3.2 (Puni Müntzov teorem za $C[0,1]$)**.** *Neka je* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ *niz različitih pozitivnih realnih brojeva. Tada je* $\Pi(\Lambda \cup \{0\})$ *gust u* $C[0,1]$ *ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 1} = \infty.$$

Teorem 3.3 (Puni Müntzov teorem za $L^2[0,1]$)**.** *Neka je* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ *niz različitih realnih brojeva većih od* $-1/2$. *Tada je* $\Pi(\Lambda)$ *gust u* $L^2[0,1]$ *ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k + 1}{(2\lambda_k + 1)^2 + 1} = \infty.$$

Teorem 3.4 (Puni Müntzov teorem za $L^1[0,1]$). *Neka je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ niz različitih realnih brojeva većih od -1. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust u $L^1[0,1]$ ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k + 1}{(\lambda_k + 1)^2 + 1} = \infty.$$

Teorem 3.5 (Puni Müntzov teorem za $L^p[0,1]$). *Neka je $p \in (0, \infty)$ i neka je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ niz različitih realnih brojeva većih od $-1/p$. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust u $L^p[0,1]$ ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k + 1/p}{(\lambda_k + 1/p)^2 + 1} = \infty.$$

Puni Müntzov teorem za $C[0,1]$ naslutio je Schwartz, a prvi ga je dokazao A. R. Siegel [22] prateći ideje koje je predstavio Szász u svojem poznatom uratku iz 1916. godine [24]. Puni Müntzov teorem za $L^2[0,1]$ dokazao je Szász [23]. Puni Müntzov teorem za $L^1[0,1]$ dokazali su Borwein i Erdéyli [6] i naslutili da vrijedi slična tvrdnja za $L^p[0,1]$ (teorem 3.5). Puni Müntzov teorem za $L^p[0,1]$ za slučaj $1 < p < \infty$ dokazao je Operstein [14], slučaj $0 < p < \infty$ dokazali su Erdélyi i Johnson [11] te relativno nedavno Erdélyi [10] sa "elementarnim" dokazom.

3.1.1 Puni Müntzov teorem za $L^2[0,1]$

Dokaz teorema 3.3. Prema lemi 2.9 znamo da vrijedi

$$d(x^q, \operatorname{span}\{x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2q+1}} \prod_{i=0}^{n} \left| \frac{q - \lambda_i}{q + \lambda_i + 1} \right|.$$

Dakle, za nenegativni cijeli broj q različit od svih eksponenata λ_i vrijedi da je $x^q \in \overline{\operatorname{span}}\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\}$, gdje $\overline{\operatorname{span}}$ označava $L^2[0,1]$ zatvarač od span, ako i samo ako je

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{q - \lambda_k}{q + \lambda_k + 1} \right| \left(= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left| 1 - \frac{2q+1}{q + \lambda_k + 1} \right| \right) = 0.$$

Gornji produkt rastavimo tako da faktore grupiramo u dvije skupine ovisno o slučajevima $\lambda_k \in (-1/2, q]$ i $\lambda_k \in (q, \infty)$, to nas dovodi do sljedeće reformulacije gornjeg uvjeta:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\substack{k \le n; \\ \lambda_k \in (-1/2, q]}} \left| 1 - \frac{2q+1}{q + \lambda_k + 1} \right| \prod_{\substack{k \le n; \\ \lambda_k \in (q, \infty)}} \left| 1 - \frac{2q+1}{q + \lambda_k + 1} \right| = 0. \tag{3.1}$$

Najprije primijetimo da ako je $\lambda > q$, onda je $1 - \frac{2q+1}{q+\lambda+1} > 0$, a ako je $\lambda \in (-1/2, q]$, onda je $1 - \frac{2q+1}{q+\lambda+1} < 0$. Nadalje, vrijedi

$$\frac{2q+1}{q+\lambda+1} - 1 = 1 - \frac{2\lambda+1}{q+\lambda+1}.$$

Zato je prema propoziciji 2.1 gornji uvjet (3.1) evivalentan s

$$\sum_{\substack{k\geq 1;\\ \lambda_k\in(q,\infty)}} \frac{2q+1}{q+\lambda_k+1} = \infty \quad \text{ili} \quad \sum_{\substack{k\geq 1;\\ \lambda_k\in(-1/2,q]}} \frac{2\lambda_k+1}{q+\lambda_k+1} = \infty. \tag{3.2}$$

Primijetimo da ako je $\lambda > q$, vrijedi

$$\frac{1}{2\lambda+1} < \frac{1}{q+\lambda+1} < \frac{2}{2\lambda+1}.$$

Također, ako je $\lambda \in (-1/2, q]$, onda vrijedi

$$\frac{1}{q+\frac{1}{2}} > \frac{1}{q+\lambda+1} \geq \frac{1}{2q+1}.$$

Zato je uvjet (3.2) ekvivalentan s

$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ \lambda_k\in(q,\infty)}} \frac{1}{2\lambda_k+1} = \infty \quad \textit{ili} \quad \sum_{\substack{k\geq 1\\ \lambda_k\in(-1/2,q]}} (2\lambda_k+1) = \infty. \tag{3.3}$$

Sada primijetimo da ako je $\lambda \in (-1/2, q]$, vrijedi

$$((2q+1)^2+1)\frac{2\lambda+1}{(2\lambda+1)^2+1} \geq 2\lambda+1 \geq \frac{(2\lambda+1)}{(2\lambda+1)^2+1}.$$

Također za $\lambda > q$ vrijedi

$$\frac{1}{2\lambda+1} > \frac{2\lambda+1}{(2\lambda+1)^2+1} > \frac{1}{(2\lambda+1)}\frac{(2q+1)^2}{(1+(2q+1)^2)}.$$

Zato se konačno uvjet (3.3) može zapisati kao

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k+1}{(2\lambda_k+1)^2+1} = \infty,$$

što je i trebalo dokazati. □

3.1.2 Puni Müntzov teorem za $C[0,1]$

Da bismo dokazali teorem 3.2 potrebno je promatrati različite slučajeve, ovisno o tome koji od sljedeća četiri uvjeta zadovoljava niz (λ_k):

1. $\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k > 0$.
2. $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.
3. $(\lambda_k) = (\alpha_k) \cup (\beta_k)$, gdje $\alpha_k \to 0$ i $\beta_k \to \infty$.
4. niz (λ_k) ima gomilište u skupu $(0,\infty)$.

Dokaz teorema 3.2, uz pretpostavku $\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k > 0$. Neka je $0 < \delta \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k$. Napravimo zamjenu varijabli $x \to x^{\frac{1}{\delta}}$ i rješavamo problem za eksponente $\lambda_k^* = \lambda_k/\delta$ koji zadovoljavaju $\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^* \geq 1$. To zapravo znači da možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da vrijedi $\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \geq 1$. Kako je $\lambda_k \geq 1$ za sve k, vrijede sljedeće nejednakosti

$$\frac{4(2\lambda+1)}{(2\lambda+1)^2+1} > \frac{\lambda}{\lambda^2+1} > \frac{2\lambda+1}{(2\lambda+1)^2+1}.$$

Također, zbog istog uvjeta, vrijede i ove nejednakosti

$$\frac{2\lambda+1}{(2\lambda+1)^2+1} < \frac{2(\lambda-1)+1}{(2(\lambda-1)+1)^2+1} < \frac{4(2\lambda+1)}{(2\lambda+1)^2+1}.$$

Zato vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2+1} = \infty \quad \text{akko} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k+1}{(2\lambda_k+1)^2+1} = \infty \quad \text{akko} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\lambda_k-1)+1}{(2(\lambda_k-1)+1)^2+1} = \infty.$$

Da bismo završili dokaz prisjetimo se dviju nejednakosti dobivenih u prošlom poglavlju:

$$\left| x^q - \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\lambda_i} \right| \leq \left\| q x^{q-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x^{\lambda_i - 1} \right\|_2 \tag{3.4}$$

i

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \|f\|_{C[0,1]}. \tag{3.5}$$

Pretpostavimo sada da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2+1} = \infty, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\lambda_k-1)+1}{(2(\lambda_k-1)+1)^2+1} = \infty.$$

Prema teoremu 3.3 slijedi da je $\Pi((\lambda_k - 1)_{k=1}^{\infty})$ gust u $L^2[0,1]$. Dakle, za proizvoljan cijeli broj $q > 0$ možemo lijevu stranu u nejednakosti (3.4) učiniti proizvoljno malom, tj. možemo aproksimirati polinome x^q elementima iz $\text{span}\{x^{\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$. Stoga, prema Weierstrassovom teoremu aproksimacije, slijedi da je $\Pi((\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \cup \{0\})$ gust u $C[0,1]$.

S druge strane, ako je $\Pi((\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \cup \{0\})$ gust $C[0,1]$ tada, uzimajući u obzir da je $C[0,1]$ gust u $L^2[0,1]$ te nejednakost (3.5), imamo da je $\Pi((\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \cup \{0\})$ također gust u $L^2[0,1]$. Stoga, prema teoremu 3.3 vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k + 1}{(2\lambda_k + 1)^2 + 1} = \infty, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 1} = \infty.$$

□

Prije nego započnemo s dokazom drugog slučaja potrebno je navesti nekoliko pomoćnih tvrdnji, koje nećemo dokazivati, iz funkcionalne i kompleksne analize. Na kraju navodimo i jednu korisnu nejednakost.

Teorem 3.6 (Rieszov teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala na $C[a,b]$)**.** *Svaki ograničeni linearni funkcional f na $C[a,b]$ može se reprezentirati kao*

$$f(\phi) = \int_a^b \phi(t) d\mu(t), \tag{3.6}$$

gdje je μ neka konačna Borelova mjera s predznakom na $[a,b]$.

Teorem 3.7 (Hahn-Banach)**.** *Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ i $f \in Y^*$. Postoji $F \in X^*$ takav da je $F|_Y = f$ i $\|F\| = \|f\|$.*

Kako je naš problem gustoća određenih linearnih potprostora u Banachovom prostoru, sasvim je prirodno koristiti Hahn-Banachov teorem na sljedeći način.

Korolar 3.8. *Neka je Y zatvoren potprostor Banachovog prostora X. Tada je $Y \neq X$ ako i samo ako postoji ograničeni linearni funkcional $L \in X^*$ takav da je $L \neq 0$ i $L|_Y = 0$.*

Koristeći gornji korolar i uzimajući da je $X = C[0,1]$ i $Y = \overline{\Pi(\Lambda)}$, dobivamo da $\overline{\Pi(\Lambda)} \neq C[0,1]$ ako i samo ako postoji $L \in (C[0,1])^* \setminus \{0\}$ koji zadovoljava $L(\mathbf{1}) = 0$ i $L(x^{\lambda_k}) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Potrebno je još znati kako funkcional L izgleda. Dualni prostor prostora $C[0,1]$ karakteriziran je (prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji) na sljedeći način: $L \in (C[0,1])^*$ ako i samo ako je

$$L(f) = \int_0^1 f(t) d\mu(t) \tag{3.7}$$

za neku konačnu Borelovu mjeru s predznakom μ na $[0,1]$.

Definicija 3.9. *Neka je $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jedinični disk, i neka je*

$$H^\infty(\mathbb{D}) := \{f : f \text{ je holomorfna na } \mathbb{D} \text{ i } \|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}$$

algebra ograničenih analitičkih funkcija definiranih na $\mathbb{D}$.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, a dokaz se može pronaći u [19] (teorem 15.23, str. 311).

Teorem 3.10. *Ako je $f \in H^\infty$, i ako su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ nultočke od f na $\mathbb{D}$ te vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) = \infty$, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in \mathbb{D}$.*

Teorem 3.11 (Cauchyev integralni teorem)**.** *Neka je Ω jednostavno povezano područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna. Tada vrijedi*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

za svaku glatku petlju γ u Ω.

Teorem 3.12 (Morerin teorem)**.** *Neka je Ω jednostavno povezano područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna. Ako je f takva da vrijedi*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

za svaku glatku petlju γ u Ω, onda je f holomorfna.

Teorem 3.13 (Newmanova nejednakost)**.** *Pretpostavimo da je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ niz disjunktnih pozitivnih realnih brojeva. Tada nejednakost*

$$\|xp'(x)\|_{[0,1]} \leq 11 \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\right) \|p(x)\|_{[0,1]}$$

vrijedi za sve $p \in \Pi(\Lambda_n)$ i za sve $n \in \mathbb{N}$, gdje je $\Lambda_n := (\lambda_k)_{k=0}^{n}$.

Za dokaz prethodnog teorema pogledati [1]. Sada smo spremni dokazati drugi slučaj teorema.

Dokaz teorema 3.2, uz pretpostavku $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Pretpostavimo da je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2+1} = \infty$. Prva stvar koju primjećujemo u ovom slučaju jest da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2+1} = \infty \quad \text{ako i samo ako} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty. \tag{3.8}$$

Naime, kako postoji limes, slijedi da je niz (λ_k) ograničen, tj. postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $0 \le \lambda_k \le m$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Pa gornja ekvivalencija vrijedi zbog ovih nejednakosti:

$$\frac{\lambda}{\lambda^2+1} \le \lambda \le \frac{(m^2+1)\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Zbog komentara nakon Korolara 3.8 slijedi da $\operatorname{span}\{1, x^{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nije gust u $C[0,1]$ ako i samo ako postoji neka ne-nul, konačna Borelova mjera s predznakom μ na $[0,1]$ takva da je

$$\int_0^1 t^{\lambda_k} d\mu(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.9}$$

gdje je $\lambda_0 = 0$. Pretpostavimo da postoji neka ne-nul, konačna Borelova mjera s predznakom μ na $[0,1]$ takva da vrijedi (3.9). Stavimo

$$f(z) := \int_0^1 t^z d\mu(t).$$

Neka je $\mathbb{H}_0 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ desna kompleksna poluravnina. Pokažimo da je f dobro definirana na $\mathbb{H}_0$:

$$|f(z)| \le \int_0^1 |t^z| d|\mu|(t) = \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)} d|\mu|(t) \le \|\mu\| < \infty. \tag{3.10}$$

Neka je γ petlja klase C^1 na $\mathbb{H}_0$. Tada, zato što je $z \to t^z$ holomorfna, prema Cauchyevom integralnom teoremu (teorem 3.11) i prema Fubinijevom teoremu slijedi

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma \int_0^1 t^z d\mu(t) dz = \int_0^1 \oint_\gamma t^z dz d\mu(t) = \int_0^1 0 \, d\mu(t) = 0.$$

Stoga, prema Morerinom teoremu (teorem 3.12) možemo zaključiti da je f holomorfna na $\mathbb{H}_0$. S druge strane, u (3.10) smo pokazali da je f ograničena na $\mathbb{H}_0$. Promotrimo sada kompoziciju od f s transformacijom koja preslikava jedinični disk na desnu poluravninu:

$$g(z) := f\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Primijetimo da je $g \in H^\infty(\mathbb{D})$. To vrijedi jer je f ograničena i holomorfna na $\mathbb{H}_0$. Nadalje, kako je $f(\lambda_k) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, slijedi da je $g\left(\frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1}\right) = 0$, gdje je $\left|\frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1}\right| < 1$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Također, vrijedi sljedeća nejednakost za $\lambda < 1$:

$$\lambda < \frac{2\lambda}{\lambda + 1} = 1 - \left|\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right|.$$

Zato zbog (3.8) vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1}\right|\right) = \infty.$$

Sada prema teoremu 3.10 slijedi da je $g(z) = 0$ za sve $z \in \mathbb{D}$, a to zapravo znači da je $f(z) = 0$ kad god je $\mathrm{Re}(z) > 0$. To posebno znači da vrijedi

$$f(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sada Weierstrassov teorem aproksimacije daje

$$\int_0^1 u(t) d\mu(t) = 0$$

za sve $u \in C[0, 1]$. To je kontradikcija s time da μ nije ne-nul mjera. Dakle, $\Pi(\Lambda \cup \{0\})$ je gust u $C[0, 1]$.

Sada dokazujemo drugi smjer. Neka je $\Pi(\Lambda \cup \{0\})$ gust u $C[0, 1]$ i pretpostavimo da je $M := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$. Prema Newmanovoj nejednakosti (teorem 3.13) slijedi da

$$\|xp'(x)\|_{[0,1]} \leq 11M \|p(x)\|_{[0,1]} \tag{3.11}$$

vrijedi za sve $p \in \Pi(\Lambda)$. Neka je, na primjer, dana funkcija $f \in C[0, 1]$ zadana s $f(x) = (1 - x)^{1/2}$. Tada za proizvoljni prirodni broj m postoji $p \in \Pi(\Lambda)$ takav da je $\|p - f\|_{[0,1]} \leq 1/m^2$. Prvo primijetimo da je $\|f\|_{[0,1]} \leq 1$ pa odavde slijedi da je $\|p\|_{[0,1]} \leq \|f\|_{[0,1]} + \|p - f\|_{[0,1]} \leq 2$. Za svaki $x \in [0, 1]$ vrijede i neke trivijalne nejednakosti:

$$|p(x)| \geq |f(x)| - |p(x) - f(x)| \geq |f(x)| - \frac{1}{m^2}$$

i

$$-|p(x)| \geq -|f(x)| - |p(x) - f(x)| \geq -|f(x)| - \frac{1}{m^2}.$$

Neka su sada $x, y \in [0, 1]$ i pretpostavimo da je $|f(x)| \geq |f(y)|$. Vrijedi nejednakost:

$$|p(x) - p(y)| \geq |p(x)| - |p(y)| \geq |f(x)| - \frac{1}{m^2} - |f(y)| - \frac{1}{m^2} \geq |f(x)| - |f(y)| - \frac{2}{m^2}.$$

Zato vrijedi:

$$|p(1-1/m^2)-p(1)| \geq |f(1-1/m^2)| - |f(1)| - \frac{2}{m^2} = \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2}.$$

Prema teoremu srednje vrijednosti sada slijedi

$$\begin{aligned}|\varepsilon p'(\varepsilon)| &= \varepsilon \frac{|p(1-1/m^2)-p(1)|}{1/m^2} \geq (1-1/m^2)\frac{1/m-2/m^2}{1/m^2} \\ &= (1-1/m^2)(m-2) \geq \frac{m-2}{2}\end{aligned}$$

za neki $\varepsilon \in (1-1/m^2, 1)$. Dobivamo da mora vrijediti

$$\frac{m-2}{2} \leq \|xp'(x)\|_{[0,1]} \leq 11M\|p(x)\|_{[0,1]} \leq 22M < \infty.$$

Ovo posljednje je kontradikcija zato što je m bio proizvoljan. Dakle, mora vrijediti $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$. □

Prije dokaza sljedećeg slučaja treba navesti nekoliko pomoćnih rezultata vezanih uz Čebiševljeve sustave i polinome.

Teorem 3.14 (Ograničena Bernsteinova i Čebiševljeva nejednakost)**.** *Pretpostavimo da je $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ te da vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k < \infty$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje konstante $c_\varepsilon, c_\varepsilon^* > 0$ takve da je*

$$\|p\|_{[0,1]} \leq c_\varepsilon \|p\|_{[1-\varepsilon,1]} \tag{3.12}$$

i

$$\|p'\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq c_\varepsilon^* \|p\|_{[1-\varepsilon,1]} \leq c_\varepsilon^* \|p\|_{[0,1]}$$

za sve $p \in \Pi(\Lambda)$.

Dokaz teorema može se pronaći u [1] (Teorem 15, str. 175–184).

Definicija 3.15 (Čebiševljev sustav)**.** *Neka je A Hausdorffov prostor. Niz $(f_0, ..., f_n)$ zove se* realni *(ili* kompleksni*)* Čebiševljev sustav *ili* Haarov sustav *dimenzije $n+1$ na A ako su $f_0, ..., f_n$ realne (ili kompleksne) neprekidne funkcije na A,* span$\{f_0, ..., f_n\}$ *nad $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) je $(n+1)$-dimenzionalan potprostor od $C(A)$, i svaki element od* span$\{f_0, ..., f_n\}$ *koji ima $n+1$ različitu nultočku na A je identički jednak nula.*

Propozicija 3.16. *Neka je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ niz različitih nenegativnih realnih brojeva, gdje je $\lambda_0 = 0$. Niz $(x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ..., x^{\lambda_n})$ je Čebiševljev sustav na svakom $A \subset [0, \infty)$ koji sadrži barem $n+1$ točku.*

Dokaz prethodne propozicije može se pronaći u [6, str. 93–96].

Definicija 3.17 (Markovljev sustav). *Kažemo da je* $(f_0, ..., f_n)$ Markovljev sustav *na Hausdorffovom prostoru* A *ako je* $f_i \in C(A)$ *za svaki* $0 \leq i \leq n$, *i ako je* $\{f_0, ..., f_m\}$ *Čebiševljev sustav za sve* $m = 0, 1, ..., n$. *(n može ići u* $+\infty$, *tada takav sustav zovemo* beskonačan Markovljev sustav *na A).*

Napomena 3.18. *Primijetimo da iz prethodne propozicije i definicije slijedi da je niz* $(x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ..., x^{\lambda_n})$ *zapravo Markovljev sustav.*

Teorem 3.19 (Egzistencija Čebiševljevih polinoma). *Neka je* A *kompaktan podskup od* $[0, \infty)$ *koji sadrži barem* $n+1$ *točku. Tada postoji jedinstven (proširen) Čebiševljev polinom*

$$T_n := T_n\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n; A\}$$

za $\Pi((\lambda_k)_{k=0}^n)$ *na* A *definiran sa*

$$T_n(x) = c\left(x^{\lambda_n} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{\lambda_i}\right),$$

gdje su brojevi $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *odabrani tako da minimiziraju*

$$\left\| x^{\lambda_n} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{\lambda_i} \right\|_A$$

i gdje je $c \in \mathbb{R}$ *normirajuća konstanta odabrana tako da vrijedi* $\|T_n\|_A = 1$, *a predznak od* c *je određen sa* $T_n(\max A) > 0$.

Teorem 3.20 (Alternirajuće svojstvo Čebiševljevih polinoma). *Čebiševljev polinom*

$$T_n := T_n\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n; A\} \in \Pi((\lambda_k)_{k=0}^n)$$

jedinstveno je karakteriziran postojanjem alternirajućeg skupa

$$\{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \subset A$$

za koji vrijedi

$$T_n(x_j) = (-1)^{n-j} = (-1)^{n-j}\|T_n\|_A, \quad j = 0, 1, ..., n.$$

Dokazi prethodna dva teorema mogu se pronaći u [6, str. 93, 114–115].

Teorem 3.21. *Neka je* $(x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ..., x^{\lambda_n})$ *Markovljev sustav na* $[a,b]$, $0 \leq a < b$, *s odgovarajućim pridruženim Čebiševljevim polinomima*

$$T_m := T_m\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m; [a,b]\}, \quad m = 0,1,...,n.$$

Tada su, za $m = 1,...,n$, *nultočke od* T_m *i* T_{m-1}, *strogo isprepletene (točno jedna nultočka od* T_{m-1} *se nalazi strogo između svake dvije uzastopne nultočke od* T_m*).*

Za dokaz prethodnog teorema pogledati [6, teorem 3.3.3., str. 116].

Dokaz teorema 3.2, uz pretpostavku $(\lambda_k) = (\alpha_k) \cup (\beta_k)$, *gdje* $\alpha_k \to 0$ *i* $\beta_k \to \infty$. Prvo primijetimo da vrijedi sljedeća nejednakost ako je $\lambda \geq 1$:

$$\frac{1}{\lambda} > \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \geq \frac{1}{2\lambda}.$$

A ako je $0 < \lambda < 1$ vrijedi

$$\frac{2\lambda}{\lambda^2+1} > \lambda > \frac{\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Zato u ovom slučaju vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2+1} = \infty \quad \text{ako i samo ako} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} = \infty. \tag{3.13}$$

Pretpostavimo da vrijedi (3.13), tada je zadovoljen barem jedan od uvjeta $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ ili $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} = \infty$. To jest, postoji podniz od (λ_k) za kojeg je zadovoljeno (3.13) te jedno od $\inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k > 0$ ili $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Dakle, prema nekom od prethodna dva slučaja slijedi da je $\Pi(\Lambda)$ gust u $C[0,1]$.

Pokažimo sada drugi smjer. Pretpostavimo da je $\Pi(\Lambda)$ gust u $C[0,1]$ te da vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} < \infty$. Koristimo sljedeću notaciju

$$\begin{aligned}
T_{n,\alpha} &:= T_n\{1, x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n} : [0,1]\}, \\
T_{n,\beta} &:= T_n\{1, x^{\beta_1}, ..., x^{\beta_n} : [0,1]\}, \\
T_{2n,\alpha,\beta} &:= T_n\{1, x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n}, x^{\beta_1}, ..., x^{\beta_n} : [0,1]\}, \\
T_{n+k,\alpha,\beta_k} &:= T_n\{1, x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n}, x^{\beta_1}, ..., x^{\beta_k} : [0,1]\}.
\end{aligned}$$

Iz Newmmanove nejednakosti (teorem 3.13) slijedi

$$\|xT'_{n,\alpha}(x)\|_{[0,1]} \leq 11 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right) \|T_{n,\alpha}(x)\|_{[0,1]} =: c_\alpha < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, iz prethodne nejednakosti slijedi da za $x \in [\varepsilon, 1)$ vrijedi

$$|xT'_{n,\alpha}(x)| \leq c_\alpha, \quad \text{tj.} \quad |T'_{n,\alpha}(x)| \leq \frac{c_\alpha}{x} \leq \frac{c_\alpha}{\varepsilon}. \tag{3.14}$$

Neka su $a < b$ dvije uzastopne točke iz alternirajućeg skupa od $T_{n,\alpha}$. Prema teoremu srednje vrijednosti postoji $d \in (a, b)$ takav da vrijedi

$$|T'_{n,\alpha}(d)| = \frac{|T_{n,\alpha}(b) - T_{n,\alpha}(a)|}{|b-a|} = \frac{2}{|b-a|}.$$

Ako su $a, b \in [\varepsilon, 1)$, prema (3.14) mora vrijediti

$$|b-a| = \frac{2}{|T'_{n,\alpha}(d)|} \geq \frac{2\varepsilon}{c_\alpha}.$$

Vidimo da je udaljenost između dvije uzastopne alternirajuće točke na $[\varepsilon, 1)$ veća od neke konstante. Kako Čebiševljev polinom ima n nultočki i svaka se nalazi između dvije alternirajuće točke, iz prethodne nejednakosti slijedi da $T_{n,\alpha}$ ima ograničen broj nultočki u skupu $[\varepsilon, 1)$. Zapravo, dobili smo da postoji konstanta $k_1(\varepsilon)$ koja ovisi ε i nizu $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ (ne ovisi o n) takva da $T_{n,\alpha}$ ima najviše $k_1(\varepsilon)$ nultočki u $[\varepsilon, 1)$ i barem $n - k_1(\varepsilon)$ nultočki u $[0, \varepsilon)$. Nadalje, iz ograničene Bernsteinove nejednakosti (teorem 3.14) slijedi da vrijedi

$$\|T'_{n,\beta}\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq c^*_\varepsilon \|T_{n,\beta}\|_{[0,1]} = c^*_\varepsilon < \infty.$$

Slično kao ranije, koristeći teorem srednje vrijednosti, dobijemo da za dvije uzastopne alternirajuće točke $a, b \in [0, 1-\varepsilon]$ od $T_{n,\beta}$ vrijedi

$$|b-a| = \frac{2}{|T'_{n,\beta}(d)|} \geq \frac{2}{c_\alpha}.$$

Dakle, postoji konstanta $k_2(\varepsilon)$ koja ovisi o ε i nizu $(\beta_k)_{k=1}^\infty$ (ne ovisi o n) takva da $T_{n,\beta}$ ima najviše $k_2(\varepsilon)$ nultočki u $[0, 1-\varepsilon)$ i barem $n - k_2(\varepsilon)$ nultočki u $[1-\varepsilon, 1)$. Sada primijetimo da je $(1, x^{\alpha_k}, x^{\beta_k})_{k=1}^n$ Markovljev sustav koji je produžetak oba sustava $(1, x^{\alpha_k})_{k=1}^n$ i $(1, x^{\beta_k})_{k=1}^n$. Teorem 3.21 daje da za nultočke $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ od $T_{n,\alpha}$ i nultočke $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1}$ od T_{n+1,α,β_1} vrijedi

$$y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < y_n < x_n < y_{n+1}.$$

Slična nejednakost vrijedi za svaki susjedni par polinoma od $T_{n,\alpha}$ do $T_{2n,\alpha,\beta}$ (jedino se povećava broj nultočki). Gornja nejednakost povlači da je $y_j < x_i$ za sve $j \leq i$. Odavde slijedi da ako je T_{n+k,α,β_k} imao j nultočki u skupu $[0, \varepsilon)$, onda $T_{n+k+1,\alpha,\beta_{k+1}}$

ima barem j nultočki u $[0, \varepsilon)$. Induktivnim argumentom sada slijedi da $T_{2n,\alpha,\beta}$ ima barem $n - k_1(\varepsilon)$ nultočki na skupu $[0, \varepsilon]$. Na analogan način, promatrajući polinome od $T_{n,\beta}$ do $T_{2n,\alpha,\beta}$, zaključujemo da $T_{2n,\alpha,\beta}$ ima barem $n - k_2(\varepsilon)$ nultočki na skupu $[1-\varepsilon, 1)$. Dakle, zaključujemo da postoji konstanta $k(\varepsilon)$ koja ovisi o ε i nizu $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ (ne ovisi o n) takva da $T_{2n,\alpha,\beta}$ ima najviše $k(\varepsilon)$ nultočki na intervalu $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Neka je $k = k(1/4)$ i uzmimo skup točaka

$$\frac{1}{4} < t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} < \frac{3}{4}.$$

Uzmimo također funkciju $f \in C[0,1]$ takvu da je $f(x) = 0$ za sve $x \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$ dok je

$$f(t_i) = 2 \cdot (-1)^i, \quad i = 0, 1, ..., k+1.$$

Zbog gustoće od $\Pi(\Lambda)$ u $C[0,1]$ znamo da postoji polinom $p \in \Pi(\Lambda)$ takav da je

$$\|f - p\|_{[0,1]} < 1.$$

Tada $p - T_{2n,\alpha,\beta}$ ima barem $2n+1$ nultočku na intervalu $(0,1)$. Zaista, u točkama t_i vrijedi da je $(p - T_{2n,\alpha,\beta})(t_i) > 0$ za parne i, a $(p - T_{2n,\alpha,\beta})(t_i) < 0$ za neparne. To daje barem $k+1$ nultočki na intervalu $(1/4, 3/4)$. Dok na intervalu $[0, 1/4] \cup [3/4, 1]$ polinom $T_{2n,\alpha,\beta}$ ima barem $n - k$ nultočki. Ovo je kontradikcija s činjenicom da je $p - T_{2n,\alpha,\beta} \in \text{span}\{1, x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n}, x^{\beta_1}, ..., x^{\beta_n}\}$ za dovoljno velike n (u tom slučaju, zato što je $(1, x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n}, x^{\beta_1}, ..., x^{\beta_n})$ Čebiševljev sustav, $p - T_{2n,\alpha,\beta}$ može imati najviše $2n$ nultočki). Dakle mora vrijediti barem jedno od $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ ili $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} = \infty$. □

Dokaz teorema 3.2 kad (λ_k) *ima gomilište u skupu* $(0, \infty)$. Neka je $c > 0$ neko gomilište. Tada za $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno članova niza u skupu $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, pretpostavimo još $c - \varepsilon > 0$. Neka je $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ podniz koji čitav pripada skupu $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, tada za njega vrijedi $\inf_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k > 0$. Također, za svaki α_k vrijedi

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + 1} > \frac{c - \varepsilon}{(c + \varepsilon)^2 + 1} = \text{const}.$$

Odavde slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + 1} = \infty.$$

Prema prvom slučaju teorema slijedi da je $\Pi((\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}})$ gust skup u $C[0,1]$. Tada je očito i $\Pi(\Lambda)$ gust skup u $C[0,1]$. □

Primjer 3.22 (Ograničen niz brojeva). *Pretpostavimo da je* $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$, *rastući i ograničen niz nenegativnih realnih brojeva. Tada taj niz ima gomilište u skupu* $(0, \infty)$ *i prema dokazu iznad slijedi da je* $\Pi(\Lambda)$ *gust skup u* $C[0,1]$.

3.1.3 Puni Müntzov teorem za $L^1[0,1]$

Prije dokaza teorema 3.4 treba navesti propoziciju koja će se koristiti u dokazu.

Propozicija 3.23. *Prostori* $(L^1[0,1])^*$ *i* $L^\infty[0,1]$ *su izometrički izomorfni.*

Dokaz teorema 3.4. Pretpostavimo da je $\Pi(\Lambda)$ gust u $L^1[0,1]$. Neka je m neki fiksni nenegativni cijeli broj i neka je $\varepsilon > 0$. Odaberemo neki $p \in \Pi(\Lambda)$ takav da vrijedi

$$\int_0^1 |x^m - p(x)|dx < \varepsilon.$$

Neka je

$$q(x) := \int_0^x p(t)dt \in \operatorname{span}\{x^{\lambda_0+1}, x^{\lambda_1+1}, x^{\lambda_2+1}, ...\}.$$

Tada za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi

$$\left|\frac{x^{m+1}}{m+1} - q(x)\right| = \left|\int_0^x (t^m - p(t))dt\right| \leq \int_0^1 |t^m - p(t)|dt < \varepsilon.$$

Dobili smo da je $x^{m+1} \in \overline{\operatorname{span}}\{x^{\lambda_0+1}, x^{\lambda_1+1}, ...\}$. Prema Weierstrassovom teoremu aproksimacije slijedi da je $\operatorname{span}\{1, x^{\lambda_0+1}, x^{\lambda_1+1}, ...\}$ gust u $C[0,1]$. Prema teoremu 3.2 slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k + 1}{(\lambda_k+1)^2 + 1} = \infty.$$

Dokažimo sada drugi smjer. Pretpostavimo da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k + 1}{(\lambda_k+1)^2 + 1} = \infty.$$

Koristeći propoziciju 3.23 te prema Hahn-Banachovom teoremu i Rieszovom teoremu o reprezentaciji funkcionala slijedi da $\Pi(\Lambda)$ nije gust u $L^1[0,1]$ ako i samo ako postoji $0 \neq h \in L^\infty[0,1]$ koji zadovoljava

$$\int_0^1 t^{\lambda_k} h(t)dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Pretpostavimo da postoji neki $0 \neq h \in L^\infty[0,1]$ takav da vrijedi (3.15). Neka je

$$f(z) := \int_0^1 t^z h(t)dt.$$

Slično kao u dokazu slučaja $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0$ teorema 3.2 dobije se da je f ograničena funkcija koja je holomorfna na skupu $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\}$. Promotrimo sada kompoziciju od f s transformacijom koja preslikava jedinični disk na skup $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\}$:

$$g(z) := f\left(\frac{1+z}{1-z} - 1\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Primijetimo da je $g \in H^\infty(\mathbb{D})$. To vrijedi jer je f ograničena i holomorfna na skupu $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\}$. Kako je $f(\lambda_k) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, slijedi da je $g\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2}\right) = 0$, gdje je $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2}\right| < 1$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Za $\lambda \geq 0$ vrijedi $1 - \left|\frac{\lambda}{\lambda+2}\right| = \frac{2}{\lambda+2}$, pa zato vrijedi nejednakost

$$\frac{\lambda+1}{(\lambda+1)^2+1} \leq \frac{2}{\lambda+2}.$$

Za $\lambda \in (-1, 0)$ vrijedi $1 - \left|\frac{\lambda}{\lambda+2}\right| = \frac{2\lambda+2}{\lambda+2}$. Zato vrijedi nejednakost

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda+1}{(\lambda+1)^2+1} < 2 \cdot \frac{2\lambda+2}{\lambda+2} \\
\iff \quad & \lambda^2 + 3\lambda + 2 < 4(\lambda+1)^3 + 4\lambda + 4 \\
\iff \quad & 0 < \underbrace{4(\lambda+1)^3}_{>0} + \underbrace{(-\lambda^2+\lambda+2)}_{>0}.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2}\right|\right) = \infty.$$

Sada prema teoremu 3.10 slijedi da je $g(z) = 0$ za sve $z \in \mathbb{D}$, a to zapravo znači da je $f(z) = 0$ kad god je $\mathrm{Re}(z) > -1$. To posebno znači da vrijedi

$$f(n) = \int_0^1 t^n h(t)dt = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sada Weierstrassov teorem aproksimacije daje

$$\int_0^1 u(t)h(t)dt = 0$$

za svaki $u \in C[0,1]$, a to je kontradikcija s time da je $h \neq 0$. Dakle, $\Pi(\Lambda)$ je gust u $L^1[0,1]$. $\square$

3.1.4 Puni Müntzov teorem za $L^p[0,1]$

Prije dokaza teorema 3.5 dokazujemo lemu koja se koristi u dokazu.

Lema 3.24. *Neka je* $(\mu_i)_{i=0}^{\infty}$ *niz različitih pozitivnih realnih brojeva takav da je* $\operatorname{span}\{x^{\mu_i-1/r}\}_{i=0}^{\infty}$ *gust u* $L^r[0,1]$. *Tada je* $\operatorname{span}\{x^{\mu_i-1/s}\}_{i=0}^{\infty}$ *gust u* $L^s[0,1]$ *za svaki* $s>r$. *Također,* $\operatorname{span}\{1,x^{\mu_0},x^{\mu_1},...\}$ *je gust u* $C[0,1]$.

Dokaz. Neka je J ograničeni linearni operator s normiranog prostora X na normirani prostor Y takav da je $J(X)$ gust u Y. Ako je $A\subset X$ gust u X, tada je $J(A)$ gust u Y. Neka je $X=L^r[0,1]$, $Y=L^s[0,1]$, $1\le r<s<\infty$, $A=\operatorname{span}\{x^{\mu_i-1/r}\}_{i=0}^{\infty}$, i neka je $J:L^r[0,1]\to L^s[0,1]$ definiran sa

$$(J\phi)(x)=x^{-(1/r'+1/s)}\int_0^x\phi(t)dt,\quad x\in[0,1],\quad \phi\in L^r[0,1],$$

gdje je $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Ograničenost operatora J slijedi iz odgovarajuće nejednakosti Hardyjevog tipa (pogledati [15, teorem 5.9]). Vrijedi sljedeće

$$J(x^\lambda)=x^{-(1/r'+1/s)}\int_0^x t^\lambda dt=\frac{x^{\lambda+1/r-1/s}}{\lambda+1},\quad \text{kada je } \lambda>-1. \tag{3.16}$$

Neka je $\psi_n(x)=(n+1/r'+1/s)x^{n+1/s-1/r}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Očito je $\psi_n\in L^r[0,1]$, zato što je $r\cdot(n+1/s-1/r)>-1$. Stoga vrijedi

$$(J\psi_n)(x)=(n+1/r'+1/s)x^{-(1/r'+1/s)}\int_0^x t^{n+1/s-1/r}dt=x^n. \tag{3.17}$$

Najprije napomenimo da teorem 2.6 vrijedi i za prostore $L^p[0,1]$, $1\le p<\infty$, to jest, prostor $C[0,1]$ je gust u $L^p[0,1]$. Zato zbog nejednakosti (3.17) prema Weierstrassovom teoremu aproksimacije (teorem 1.1) i prema teoremu 2.6 slijedi da je $J(X)$ gust u Y. Nadalje, primijetimo da iz nejednakosti (3.16), ako uvrstimo $\lambda_i=\mu_i-1/r$, slijedi da je $J(A)=\operatorname{span}\{x^{\mu_i-1/s}\}_{i=0}^{\infty}$. Dakle, prema komentaru na početku dokaza slijedi da je $J(A)$ gust u Y kad god je A gust u X. Za drugi dio leme, promotrimo operator $J:L^r[0,1]\to L^s[0,1]$ definiran sa

$$(J\phi)(x)=x^{-1/r'}\int_0^x\phi(t)dt,\quad x\in(0,1],\quad (J\phi)(0)=0,$$

gdje je $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Ograničenost operatora slijedi kao i u prvom dijelu dokaza. Vrijedi sljedeće

$$J(x^\lambda)=x^{-1/r'}\int_0^x t^\lambda dt=\frac{x^{\lambda+1/r}}{\lambda+1},\quad \text{kada je } \lambda>-1. \tag{3.18}$$

Neka je $\psi_n(x) = (n + 1/r')x^{n-1/r}$, $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo, $\psi_n \in L^r[0,1]$, zato što je $r \cdot (n - 1/r) > -1$, dakle vrijedi

$$(J\psi_n)(x) = (n + 1/r')x^{-1/r'} \int_0^x t^{n-1/r} dt = x^n. \tag{3.19}$$

Prema nejednakosti (3.18), ako uvrstimo $\lambda_i = \mu_i - 1/r$ slijedi da je $J(A) = \text{span}\{x^{\mu_i}\}_{i=0}^{\infty}$. Zbog nejednakosti (3.19) prema Weierstrassovom teoremu aproksimacije (teorem 1.1) slijedi da je $\text{span}\{1, x^{\mu_0}, x^{\mu_1}, ...\}$ gust u $C[0,1]$. $\square$

Teorem 3.5 dokazujemo za $1 < p < \infty$.

Dokaz teorema 3.5. Neka je $1 < p < \infty$ i neka je $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ niz različitih realnih brojeva većih od $-1/p$ koji zadovoljavaju uvjet

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i + 1/p}{(\lambda_i + 1/p)^2 + 1} = \infty.$$

Tada je $\{v_i = \lambda_i - 1/p'\}_{i=0}^{\infty}$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, niz različitih realnih brojeva većih od -1 koji zadovoljava uvjet

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{v_i + 1}{(v_i + 1)^2 + 1} = \infty.$$

Prema teoremu 3.4, skup $\text{span}\{x^{v_i}\}_{i=0}^{\infty} = \text{span}\{x^{\mu_i - 1}\}_{i=0}^{\infty}$, $\mu_i = v_i + 1 = \lambda_i + 1/p$, je gust u $L^1[0,1]$. Prema lemi 3.24 sa $r = 1 < p = s$ sada slijedi da je $\text{span}\{x^{\mu_i - 1/p}\}_{i=0}^{\infty} = \text{span}\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^{\infty}$ gust u $L^p[0,1]$.

Obratno, pretpostavimo da je $\text{span}\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^{\infty}$ gust u $L^p[0,1]$. Označimo $\mu_i = \lambda_i + 1/p$. Tada je $\text{span}\{x^{\mu_i - 1/p}\}_{i=0}^{\infty} = \text{span}\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^{\infty}$ gust u $L^p[0,1]$, zato prema lemi 3.24 slijedi da je $\text{span}\{1, x^{\mu_i}\}_{i=0}^{\infty}$ gust u $C[0,1]$. Teorem 3.2 sada daje da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i + 1/p}{(\lambda_i + 1/p)^2 + 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu_i}{\mu_i^2 + 1} = \infty.$$

Ovime je dokaz gotov. $\square$

3.2 Puni Müntzov teorem dalje od ishodišta

Neka je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ niz različitih nenegativnih realnih brojeva. Proširenje Punog Müntzovog teorema na segmente oblika $[a,b]$, $0 < a < b$, nije trivijalan zadatak. Naime, linearna zamjena varijable $x = bt$ omogućava da proširimo Puni Müntzov teorem na interval $[0,b]$. To jest, trivijalno vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.25 (Puni Müntzov teorem za $C[0,b]$, $b > 0$)**.** *Neka je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ niz različitih pozitivnih realnih brojeva. Tada je $\Pi(\Lambda \cup \{0\})$ gust u $C[0,b]$, $b > 0$ ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 1} = \infty. \tag{3.20}$$

Pretpostavimo sada da je $\Pi(\Lambda \cup \{0\})$ gust u $C[0,b]$, i neka je dana funkcija $f \in C[a,b]$, sa $0 < a < b$. Funkciju f možemo neprekidno proširiti do funkcije $\overline{f} \in C[0,b]$ koja iščezava u ishodištu. Funkcija $\overline{f}$ se sada može uniformno aproksimirati na intervalu $[0,b]$ elementima iz $\Pi(\Lambda)$, dakle f pripada zatvaraču od $\Pi(\Lambda)$ na $[a,b]$. Dakle, ako je zadovoljen Müntzov uvjet (3.20), tada je $\Pi(\Lambda)$ gust u $C[a,b]$. Zahtjevniji dio je dokazati da je neki oblik Müntzovog uvjeta nužan za intervale dalje od ishodišta. To su prvi puta dokazali Clarkson i Erdős za posebni slučaj nenegativnih cjelobrojnih eksponenata, to jest pokazali su sljedeći teorem (vidi [9]).

Teorem 3.26. *Neka je $\Lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, i neka su $0 < a < b$. Tada je skup $\Pi(\Lambda)$ gust u $C[a,b]$ ako i samo ako je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

Njihov rad nastavio je L. Schwartz [21] koji je pokazao Puni Müntzov teorem za intervale dalje od ishodišta i za proizvoljne nizove eksponenata. Kako su monomi x^{λ} neprekidne funkcije na $[a,b]$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, ima se smisla pitati koji su nužni i dovoljni uvjeti na proizvoljan niz realnih brojeva $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ takvi da je $\Pi(\Lambda)$ gust potprostor od $C[a,b]$. Naime, on je dokazao sljedeći rezultat.

Teorem 3.27 (Puni Müntzov teorem dalje od ishodišta)**.** *Neka je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ niz različitih realnih brojeva, i neka je $0 < a < b$. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust u $C[a,b]$ ako i samo ako je*

$$\sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty.$$

Napravit ćemo samo skicu dokaza prethodnog teorema.

Skica dokaza. Dokaz je podijeljen na četiri slučaja od kojih jedino zadnji neće biti dokazan, za njega je dana samo skica.

1. **slučaj**: $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ ima neko gomilište $\lambda \neq 0$.
   Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda > 0$. U suprotnom, pogledajmo preslikavanje $S : C[a,b] \to C[a,b]$ dano sa $S(f)(x) = x^{-\lambda+1} f(x)$.

Primijetimo da je S bijektivan, to jest, postoji inverz dan formulom $S^{-1}(f)(x) = x^{\lambda-1}f(x)$. Također S i S^{-1} su ograničeni, na primjer za S vrijedi $\|S(f)\|_{[a,b]} = \|x^{-\lambda+1}f(x)\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]} \cdot b^{-\lambda+1}$. Dakle, S je izomorfizam Banachovih prostora što znači da preslikava guste potprostore u guste potprostore i obratno. Primijetimo da u ovom slučaju, zato što je $\lambda > 0$, vrijede sljedeće dvije jednakosti $\sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty$, te $\sum_{\lambda_k > 0} \frac{\lambda_k}{(\lambda_k)^2+1} = \infty$. Dakle, ovaj slučaj slijedi iz Punog Müntzovog teorema za $C[0,b]$. To jest, $\Pi(\Lambda)$ je gust u $C[a,b]$.

2. **slučaj**: 0 je gomilište od $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$.
Primijetimo da vrijedi $\sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty$. Ovaj slučaj lagano se svodi na prethodni. Prvo promotrimo niz $(\lambda_k + 1)_{k=0}^{\infty}$ koji spada u prvi slučaj, odavde slijedi da je $\Pi((\lambda_k + 1)_{k=0}^{\infty})$ gust u $C[a,b]$. Promotrimo sada izomorfizam Banachovih prostora $T : C[a,b] \to C[a,b]$ dan formulom $T(f)(x) = x^{-1}f(x)$. Odavde slijedi da je $\Pi((\lambda_k)_{k=0}^{\infty})$ gust u $C[a,b]$ jer vrijedi $T(\Pi((\lambda_k + 1)_{k=0}^{\infty})) = \Pi((\lambda_k)_{k=0}^{\infty})$.

3. **slučaj**: $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ nema gomilište i vrijedi $\sum_{\lambda_k>0} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$ ili $\sum_{\lambda_k<0} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty$.
Neka vrijedi $\sum_{\lambda_k>0} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$. Kako nema gomilišta, postoji najviše konačno mnogo λ_k u intervalu $[0,1]$, pa nejednakost $\frac{2\lambda_k}{\lambda_k^2+1} \geq \frac{1}{\lambda_k}$ daje $\sum_{\lambda_k>0} \frac{\lambda_k}{(\lambda_k)^2+1} = \infty$. Tvrdnja slijedi iz Punog Müntzovog teorema za $C[0,b]$. Pretpostavimo sada da $\sum_{\lambda_k<0} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty$ i $\sum_{\lambda_k>0} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, tada koristimo zamjenu varijabli $t = \frac{1}{x}$ i promatramo preslikavanje $S : C[a,b] \to C[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$ dano s $S(f)(x) = f(\frac{1}{x})$. S je izometrija, to jest vrijedi $\|S(f)\|_{[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]} = \|f\|_{[a,b]}$. Iz prethodnog slijedi da je $\Pi((\lambda_k)_{k=0}^{\infty})$ gust u $C[a,b]$ ako i samo ako je $S(\Pi((\lambda_k)_{k=0}^{\infty})) = \Pi((-\lambda_k)_{k=0}^{\infty})$ gust u $C[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$, što nas ponovno vraća na slučaj $\sum_{\lambda_k>0} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$.

4. **slučaj**: $\sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$.
Najprije preuredimo niz $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ kao $(\lambda_k^*)_{k=-\infty}^{\infty} = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$, tako da vrijedi $\lambda_k^* < \lambda_{k+1}^*$ za sve $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k^* < 0$ za $k < 0$ i $\lambda_k^* > 0$ za $k > 0$. Kako red $\sum_{k>0} \frac{1}{\lambda_k^*}$ konvergira i niz $(\lambda_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ je monoton, slijedi da $\lim_{k\to\infty} \lambda_k^*/k = \infty$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\lambda_k^* > 2k$ za sve $k \geq m$, i definirajmo niz $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:
$$\gamma_k := \begin{cases} \min\{\lambda_k^*, k\}, & \text{za } k \in \{1,2,...,m\}, \\ \frac{1}{2}\lambda_k^* + k, & \text{za } k > m. \end{cases}$$
Na sličan način pomoću niza $(\lambda_k^*)_{k<0}$ definiramo niz $(\gamma_k)_{k<0}$. Ovako smo dobili niz $\Gamma := (\gamma_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ za koji vrijedi $\inf_{k\in\mathbb{Z}}(\gamma_k - \gamma_{k-1}) > 0$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\gamma_k|} < \infty$, $\gamma_k < \gamma_{k+1}$, $|\gamma_k| \leq |\lambda_k^*|$ za sve $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma_k < 0$ za $k < 0$ i $\gamma_k > 0$ za $k > 0$. Sada preostaje pokazati da vrijedi $\overline{\Pi(\Gamma)} = \overline{\Pi(\Lambda)}$ te da $\Pi(\Gamma)$ nije gust u $C[a,b]$. Za dokaz zadnje tvrdnje pogledati [1, str. 175–188] ili [6, str. 176–184]. $\square$

3.3 Müntzov teorem za izmjerive skupove

U ovom odjeljku samo navodimo glavne rezultate Müntzovog teorema za izmjerive skupove. Pretpostavimo u nastavku da je $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ niz takav da je $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, te neka je $A \subset [0, \infty)$ skup pozitivne Lebesgueove mjere. Sljedećih nekoliko teorema posljedica su Ograničene Bernsteinove i Čebiševljeve nejednakosti (teorem 3.14) te govore o gustoći skupa $\Pi(\Lambda)$ u skupu $C(A)$. Dokazali su ih Borwein i Erdélyi ([4]).

Teorem 3.28. *Neka je $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, i neka je $A \subset [0, \infty)$ skup pozitivne Lebesgueove mjere te pretpostavimo da vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty.$$

Tada $\Pi(\Lambda)$ nije gust u $C(A)$.

Prethodni teorem posljedica je poopćene nejednakosti (3.12) i detaljan dokaz može se pronaći u [4, teorem 6.1.].

Teorem 3.29. *Neka je $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, i neka je $A \subset [0, \infty)$ kompaktan skup pozitivne Lebesgueove mjere. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust u $C(A)$ ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A \subset [0, 1]$. Neka je $f \in C(A)$. Prema Tietzeovom teoremu postoji funkcija $\overline{f} \in C[0, 1]$ takva da je $\overline{f}(x) = f(x)$ za sve $x \in A$. Prema teoremu 1.6 slijedi da postoji niz $(p_i)_{i=1}^{\infty} \subset \Pi(\Lambda)$ takav da vrijedi

$$\lim_{i\to\infty} \|\overline{f} - p_i\|_{[0,1]} = 0.$$

Odavde slijedi

$$\lim_{i\to\infty} \|f - p_i\|_A = 0.$$

Ovime smo pokazali jedan smjer. Pretpostavimo sada da je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$. Tada prema teoremu 3.28 slijedi da $\Pi(\Lambda)$ nije gust u $C(A)$. □

Prije iskaza još jednog teorema potrebna je sljedeća definicija.

Definicija 3.30. *Definiramo normu*

$$\|p\|_{L^q_w(A)} := \left(\int_A |p|^q w\right)^{\frac{1}{q}},$$

gdje je p izmjeriva funkcija definirana na izmjerivom skupu $A \in [0, \infty)$, w je nenegativna izmjeriva težinska funkcija definirana na A, i $q \in (0, \infty)$. Poistovjećujući funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0, definiramo $L^q_w(A) := \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ izmjeriva}, \|f\|_{L^q_w(A)} < \infty\}$.

Teorem 3.31. *Neka je $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$. Pretpostavimo da je $A \subset [0, 1]$ skup pozitivne Lebesgueove mjere, w neka nenegativna integrabilna težinska funkcija na A za koju vrijedi $\int_A w > 0$, i neka je $q \in (0, \infty)$. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust podskup od $L^q_w(A)$ ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$$

Za dokaz prethodnog teorema pogledati [4, teorem 6.5.]. Za kraj navodimo teoreme koji su poopćenje prethodnih rezultata, to jest pretpostavljamo da je Λ proizvoljan niz realnih brojeva. Do njih su također došli Borwein i Erdélyi i mogu se pronaći u [5, teorem 3.4. i teorem 3.7.].

Teorem 3.32. *Neka je $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ niz različitih realnih brojeva, i neka je $A \subset (0, \infty)$ kompaktan skup pozitivne Lebesgueove mjere. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust u $C(A)$ ako i samo ako je*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \lambda_k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty.$$

Teorem 3.33. *Neka je $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ niz različitih realnih brojeva. Pretpostavimo da je $A \subset (0, \infty)$ ograničen skup pozitivne Lebesgueove mjere, takav da je $\inf A > 0$, neka je w neka nenegativna integrabilna težinska funkcija na A za koju vrijedi $\int_A w > 0$, i neka je $q \in (0, \infty)$. Tada je $\Pi(\Lambda)$ gust podskup od $L^q_w(A)$ ako i samo ako je*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \lambda_k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty.$$

Bibliografija

[1] J. M. Almira, *Müntz Type Theorems I*, Surveys in Approximation Theory **3** (2007), 152–194.

[2] D. Bakić, *Normirani prostori*, skripta, dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_17_18.pdf` (kolovoz 2020.).

[3] D. Bolón, C. Constantino, C. Corbalán, F. J. González, D. Nieves, A. Quero, *The Müntz-Szász Theorem and some extensions*, dostupno na: `https://www.uv.es/functanalys/encuentros/2018/Files/Charlas/Taller2Miana.pdf` (kolovoz 2020.).

[4] P. Borwein, T. Erdélyi, *Generalizations of Müntz Theorem via a Remez-type inequality for Müntz spaces*, Journal of the American Mathematical Society **10** (1997), 327–349.

[5] P. Borwein, T. Erdélyi, *Müntz's Theorem on Compact Subsets of Positive Measure*, Monograph and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 212, Dekker, New York, 1998, 115–131.

[6] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequaliteis*, Springer, New York, 1995, 91–226.

[7] P. Borwein, T. Erdélyi, *The Full Müntz Theorem in* $C[0,1]$ *and* $L^1[0,1]$, Journal of the London Mathematical Society **54** (1996), 102–110.

[8] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1996, 193–198.

[9] J. A. Clarkson, P. Erdős, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J. **10** (1943), 5–11.

[10] T. Erdélyi, *The "Full Müntz Theorem" revisited*, Constr. Approx. **21** (2005), 319–335.

[11] T. Erdélyi, W. B. Johnson, *The Full Müntz Theorem in $L^p[0,1]$ for $0 < p < \infty$*, J. Anal. Math. **84** (2001), 145–172.

[12] M. V. Golitschek, *A short proof of Müntz's Theorem*, Journal of Approximation Theory **39** (1983), 394–395.

[13] A. F. Moragues, *What is... The Müntz-Szász Theorem?*, dostupno na: https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/What%20is%202018%20Muntz%20Szasz%20Theorem.pdf (kolovoz 2020.).

[14] V. Operstein, *Full Müntz Theorem in $L^p[0,1]$*, Journal of Approximation Theory **18** (1976), 360–362.

[15] B. Opic, A. Kufner, *Hardy-type Inequalities*, Longman Scientific & Technical, New York, 1990.

[16] A. Pinkus, *Density in approximation theory*, Surveys in Approximation Theory **1** (2005), 1–45.

[17] ProofWiki, *Morera's Theorem*, dostupno na: https://proofwiki.org/wiki/Morera%27s_Theorem (kolovoz 2020.).

[18] ProofWiki, *Value of Cauchy Determinant*, dostupno na: https://proofwiki.org/wiki/Value_of_Cauchy_Determinant (kolovoz 2020.).

[19] W. Rudin, *Real and Complex Analysis, 3rd ed.*, McGraw-Hill, New-York, 1987, 310–312.

[20] A. R. Schep, *Weierstrass' Proof of The Weierstrass Approximation Theorem*, dostupno na: https://people.math.sc.edu/schep/weierstrass.pdf (kolovoz 2020.).

[21] L. Schwartz, *Étude des Sommes D'Exponentielles*, Hermann, Paris, 1959.

[22] A. R. Siegel, *On the Müntz-Szász Theorem for $C[0,1]$*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1976), 161–166.

[23] O. Szász, *On closed sets of rational functions*, Ann. Mat. Pura. Appl. **34** (1953), 195–218.

[24] O. Szász, *Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen*, Math. Ann. **77** (1916), 482–496.

Sažetak

Na početku rada napravljen je dokaz Weierstrassovog teorema aproksimacije koji kaže da je prostor algebarskih polinoma gust u $C[0,1]$.

Drugo poglavlje posvećeno je dokazu glavnog rezultata u radu, a to je Müntz-Szászov teorem koji karakterizira skupove potencija $\Pi(\Lambda) = \text{span}\{x^{\lambda_k} : k \in \mathbb{N}_0,\ 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots\}$ koji razapinju gust skup u prostoru neprekidnih funkcija na segmentu $[0,1]$.

U trećem poglavlju napravljen je općenitiji slučaj teorema pod nazivom Puni Müntzov teorem. Ovdje nas također zanima gustoća skupa $\Pi(\Lambda)$ u nekom prostoru funkcija, ali razlika u odnosu na početni teorem je što ovdje nije dan rastući niz realnih brojeva, već radimo s proizvoljnim nizovima realnih brojeva. Veći dio poglavlja zauzimaju dokazi Punog Müntzovog teorema za prostore funkcija $C[0,1]$ i $L^p[0,1]$, za $0 < p < \infty$. Nakon toga razmotren je Puni Müntzov teorem za $C[a,b]$, gdje su $0 < a < b$, a na samom kraju navedeni su neki rezultati Punog Müntzovog teorema za $C(A)$, gdje je $A \subset [0,\infty)$ neki skup pozitivne Lebesgueove mjere.

Summary

At the beginning of this thesis, we prove the Weierstrass Approximation Theorem which says that the space of algebraic polynomials is dense in $C[0,1]$.

The second chapter is devoted to the proof of the main result in this thesis, which is the Müntz-Szász Theorem that characterizes sets of powers $\Pi(\Lambda) := \operatorname{span}\{x^{\lambda_k} : k \in \mathbb{N}_0,\ 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots\}$ that span a dense subset in the space of continuous functions on the segment $[0,1]$.

In the third chapter we consider a more general case of the theorem called Full Müntz Theorem. Here we are also interested in the density of the set $\Pi(\Lambda)$ in some space of functions, but the difference from the initial theorem is that here we aren't given an increasing sequence of real numbers, but instead we are working with arbitrary sequences of real numbers. Most of the chapter is taken up by the proof of the Full Müntz Theorem for spaces of functions $C[0,1]$ and $L^p[0,1]$, for $0 < p < \infty$. After that, the Full Müntz Theorem for $C[a,b]$, where $0 < a < b$, is examined, and at the very end a few results of the Full Müntz Theorem for $C(A)$ are listed, where $A \subset [0,\infty)$ is a set of positive Lebesgue measure.

Životopis

Rođen sam 29.04.1996. u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole upisujem XV. gimnaziju u Zagrebu. Matematiku volim odmalena te sudjelujem na natjecanjima iz matematike od 4. razreda osnovne škole s odličnim rezultatima. Najuspješniji natjecateljski rezultat u srednjoj školi su dvije srebrne medalje na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi (MEMO).

2015. godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2018. godine na istom fakultetu upisujem diplomski studij Matematička statistika. Za vrijeme studiranja držao sam demonstrature iz Linearne algebre *I* i *II*, Integrala funkcija više varijabli, te Običnih diferencijalnih jednadžbi. U XV. gimnaziji držao sam redovnu grupu dodatne matematike kroz prve četiri godine studija. Bio sam član udruge *Mladi nadareni matematičari - Marin Getaldić* kroz koju sam sudjelovao kao mentor u pripremi učenika za natjecanja iz matematike. Redoviti sam primatelj Stipendije grada Zagreba od 2014. godine.