Soboljevljevi prostori i direktna metoda varijacijskog računa

Rukavina, Borja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Borja Rukavina

SOBOLJEVLJEVI PROSTORI I DIREKTNA METODA VARIJACIJSKOG RAČUNA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Mnoge rubne zadaće parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se mogu ekvivalentno zapisati kao minimizacijske zadaće, koje proučava teorija varijacijskog računa. Ta grana matematike je opširno i još uvijek veoma aktivno područje, a mi ćemo se u ovom radu baviti direktnom metodom varijacijskog računa. To je standardan postupak kojim se pokazuje postojanje minimizatora. Metoda je nekonstruktivna, a polazi od proizvoljnog minimizirajućeg niza te se uz odgovarajuće rezultate kompaktnosti i neprekidnosti pokazuje da je svako gomilište minimizirajućeg niza minimum.

U ovom radu će se dati pregled osnovnih svojstava Soboljevljevih prostora i važnih rezultata varijacijskog računa na apstraktnim refleksivnim Banachovim prostorima. Potom će se direktnom metodom pokazati dobra postavljenost nehomogene Dirichletove, Neumannove i mješovite zadaće za Laplaceov operator, te za još neke zadaće od interesa.

U prvom poglavlju ćemo definirati distribucije i pokazati neka njihova svojstva. Uvest ćemo konvergenciju na prostoru distribucija i motivirati uvođenje deriviranja na tom prostoru. Zatim ćemo definirati Soboljevljeve prostore i pokazati da su oni potpuni. Dokazat ćemo Poincaréovu nejednakost koja je neophodna za varijacijski pristup rješavanju rubnih problema. Potom ćemo pokazati egzistenciju operatora proširenja što je polazna točka dokaza mnogih rezultata u teoriji Soboljevljevih prostora. Uvodimo i operator traga koji daje značenje rubnim uvjetima u tim prostorima. Poglavlje završavamo kratkim pregledom nekih potrebnih rezultata iz topologije, s naglaskom na slabu konvergenciju.

U drugom poglavlju predstavljamo apstraktni problem te dajemo poveznicu s konveksnim minimizacijskim problemom. Potom opisujemo ideju direktne metode varijacijskog računa, demonstriramo je na primjeru Dirichletovog integrala, te dajemo općeniti rezultat. Dokazat ćemo Lax-Milgramovu lemu, što je poznati rezultat egzistencije rješenja spomenutog apstraktnog problema.

U trećem, posljednjem poglavlju primjenjujemo navedene rezultate na konkretne rubne probleme.

Poglavlje 1

Teorija distribucija i Soboljevljevi prostori

U ovom poglavlju ćemo predstaviti osnovne ideje i tehnike teorije distribucija. Za naše potrebe će biti važan pojam slabe derivacije integrabilne funkcije u čijim ćemo terminima definirati Soboljevljeve prostore. U literaturi su definicije i oznake većinski usuglašene, dok se pristup dokazivanju tvrdnji može značajno razlikovati. U ovom radu uglavnom pratimo [3].

1.1 Distribucije

Neka je u realna neprekidna funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Tada je poznata njezina vrijednost u svakoj točki domene, to jest imamo pridruživanje $x \mapsto u(x)$. U primjeni nas često više zanima težinski prosjek funkcije, a ne vrijednost u nekoj točki. Zato je korisno promatrati pridruživanje oblika

$$\varphi \longmapsto \int_\Omega u\varphi dx, \tag{1.1}$$

gdje φ pripada nekoj dovoljno velikoj klasi funkcija K. Na ovaj način funkcija u definira funkcional na K. Ako je ta klasa funkcija dovoljno široka, u je u potpunosti određena preslikavanjem (1.1). Dobar odabir takve klase će se pokazati skup tzv. *test funkcija* ili *probnih funkcija* na Ω definiranih kao

$$\mathcal{D}(\Omega) := \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \text{supp}(u) \text{ je kompaktan skup u } \Omega\right\}.$$

Podsjetimo se da je nosač funkcije u definiran sa $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$, tj. kao najmanji zatvoren skup na kojem je funkcija u različita od nule. Dakle, test funkcije su jednake nuli izvan nekog ograničenog područja u Ω. Klasičan primjer test funkcije na $\mathbb{R}^N$ je

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Vrijedi $\mathrm{supp}(\rho) = \overline{K(0,1)}$, te sada jednostavno možemo definirati test funkcije s nosačem sadržanim u proizvoljnoj kugli u $\mathbb{R}^N$. To znači da je $\mathcal{D}(\Omega)$ neprazan skup za svaki otvoreni skup Ω, te kako za proizvoljne funkcije $f, g \in \mathcal{D}(\Omega)$ vrijedi

$$supp(f+g) \subseteq supp(f) \cup supp(g) \subseteq \Omega,$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ je vektorski prostor. Ako je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tada su i sve njene parcijalne derivacije iz $\mathcal{D}(\Omega)$. Također, jasno je da je produkt test funkcije na Ω i beskonačno diferencijabilne funkcije opet test funkcija na Ω.

Prirodna topologija na $\mathcal{D}(\Omega)$, uz koju je taj prostor potpun, je lokalno konveksna topologija strogog induktivnog limesa. Iako ta topologija nije metrizabilna [9, poglavlje 6], ipak zadovoljava Heine-Borelovo svojstvo, tj. može se zadati konvergencijom nizova. Koristimo standardnu notaciju

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}},$$

pri čemu je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ i $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da niz test funkcija (φ_n) konvergira u $\mathcal{D}(\Omega)$ k test funkciji φ ako postoji kompaktan skup K u Ω takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi* $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq K$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$ *te*

$$\left(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N\right) \qquad D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi \textit{ uniformno na } K.$$

Kraće pišemo $\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi$.

Općenito za linearan funkcional T na $\mathcal{D}(\Omega)$ kažemo da je distribucija na Ω ako je nizovno neprekidan na $\mathcal{D}(\Omega)$ u smislu spomenute topologije. Preciznije, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 1.1.2. *Neka je T linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$. Kažemo da je T distribucija na Ω ako za svaki niz $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ vrijedi*

$$\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Prostor distribucija je topološki dual od $\mathcal{D}(\Omega)$ i označavamo ga s $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Kako je T posebno linearan operator, zapravo je dovoljno pokazati samo nizovnu neprekidnost u nuli. Sada dajemo važnu karakterizaciju distribucija.

Propozicija 1.1.3. *Neka je T linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$. T je distribucija na Ω ako i samo ako za svaki kompaktan skup K u Ω postoje $m \in \mathbb{N}_0$ i $C > 0$ takvi da za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vrijedi*

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}. \tag{1.3}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je T linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$ takav da vrijedi (1.3). Neka je (φ_n) niz test funkcija takav da $\varphi_n \longrightarrow 0$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ te K kompaktan skup kao u definiciji 1.1.1. Tada postoje $m \in \mathbb{N}_0$ i $C > 0$ takvi da

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty(K)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Po definiciji konvergencije u $\mathcal{D}(\Omega)$ desna strana teži nuli kada $n \longrightarrow +\infty$ pa je T distribucija.

Kako bi pokazali drugi smjer pretpostavit ćemo suprotno. Neka je T distribucija takva da postoji kompaktan skup $K \subset \Omega$ te niz $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ za kojeg vrijedi

$$\varphi_n \neq 0, \quad \mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq K \quad \text{i} \quad |\langle T, \varphi_n \rangle| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty(K)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Označimo sada $c_n := \left(n \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty(K)} \right)^{-1}$ i promotrimo niz $w_n := c_n \varphi_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$w_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad supp(w_n) \subseteq K, \quad D^\beta w_n = c_n D^\beta \varphi_n \quad \text{za}\, \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Posebno za $n \geq |\beta|$ imamo

$$\|D^\beta w_n\|_{L^\infty(K)} = \frac{\|D^\beta \varphi_n\|_{L^\infty(K)}}{n \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty(K)}} \leq \frac{1}{n}.$$

Pokazali smo da za svaki $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ imamo $D^\beta w_n \to 0$ uniformno na K, dakle $w_n \longrightarrow 0$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Kako smo pretpostavili da je T distribucija nužno vrijedi $\langle T, w_n \rangle \longrightarrow 0$. S druge strane zbog linearnosti T iz (1.4) slijedi $|\langle T, w_n \rangle| > 1$ što je očito kontradikcija.

□

Ako postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da ne ovisi o odabiru kompakta K, tj. m je takav da nejednakost (1.3) vrijedi za sve kompakte K, kažemo da je distribucija konačnog reda. Ako je m najmanji takav, onda kažemo da je distribucija reda m.

Sada uvodimo konvergenciju niza u prostoru distribucija, koja je zapravo slaba* konvergencija u dualu prostora $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definicija 1.1.4. *Kažemo da niz $(T_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ konvergira k $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako*

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \qquad \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Sljedeći rezultat je od velike važnosti za teoriju varijacijskog računa i navodimo ga bez dokaza (vidi [6]).

Teorem 1.1.5. *(osnovna lema varijacijskog računa)*
Neka je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \qquad \int_\Omega f \varphi dx = 0.$$

Tada je $f = 0$ s.s. na Ω.

Sjetimo se da se prostor $L^1_{loc}(\Omega)$ sastoji od svih izmjerivih funkcija f takvih da za svaki kompaktan skup K sadržan u Ω vrijedi $\int_K |f| dx < +\infty$. Teorem 1.1.5 nam zapravo govori da su lokalno integrabilne funkcije jedinstveno određene djelovanjem funkcionala $\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f \varphi dx$ na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$. Neka je $K \subset \Omega$ kompaktan skup i $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ takva da $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$. Tada za $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ vrijedi

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_K f \varphi dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(K)} \int_K |f| \, dx < +\infty,$$

dakle T_f je distribucija reda 0. Također, preslikavanje

$$L^1_{loc}(\Omega) \ni f \longmapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

je injektivno.

Uočimo da kad $u_n \longrightarrow u$ u $L^p(\Omega)$, tada i $T_{u_n} \longrightarrow T_u$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\left| \langle T_{u_n}, \varphi \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle \right| \leq \int_\Omega |(u_n - u)\varphi| dx \leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Dakle L^p konvergencija je jača od distribucijske.

Kada je u dovoljno glatka funkcija na Ω, za $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nam formula parcijalne integracije daje

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi dx = - \int_\Omega \partial_i u \varphi dx.$$

Time je motivirana sljedeća definicija:

Definicija 1.1.6. *Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Kažemo da je $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ slaba derivacija po $i \in \{1, 2, ..., N\}$ funkcije u ako*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dalje ćemo koristiti oznaku $\partial_i u = v_i$. Kažemo da je u slabo diferencijabilna ako postoje sve slabe derivacije $\partial_i u, i = 1, 2, ..., N$.

Napomenimo da oznaka $\partial_i u$ ima smisla jer ako slaba derivacija postoji, tada je ona po teoremu 1.1.5 jedinstvena. Može se pokazati da kada je funkcija klase C^1, pojmovi slabe i klasične derivacije se podudaraju; direktna posljedica formule parcijalne integracije i osnovne leme varijacijskog računa. Uočimo da je u ovako definiranim slabim derivacijama ključna činjenica da su test funkcije jednake nuli na $\partial\Omega$. Pojam slabe derivacije se analogno poopćuje na derivacije višeg reda.

Primijetimo da slaba derivacija funkcije $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ opet definira distribuciju te vrijedi

$$\langle T_{\partial_i u}, \varphi \rangle = -\langle T_u, \partial_i \varphi \rangle,$$

tj. smislena je sljedeća definicija derivacije distribucije.

Definicija 1.1.7. *Neka je T distribucija na Ω. Za $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ definiramo $D^\alpha T$ kao*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \tag{1.5}$$

Ako je (φ_n) niz test funkcija koji konvergira k nuli u $\mathcal{D}(\Omega)$, tada je i $((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi_n)$ niz test funkcija koji konvergira k nuli u $\mathcal{D}(\Omega)$. Dakle, iz (1.5) vidimo da $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle \longrightarrow 0$ kada $\varphi \longrightarrow 0$, tj. $D^\alpha T$ je distribucija za svaki $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Također, preslikavanje $T \mapsto D^\alpha T$ je (nizovno) neprekidno. Naime, neka $T_n \longrightarrow T$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, tada računamo

$$\langle D^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, D^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vidimo da za $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ vrijedi $\partial_i T_u = T_{\partial_i u}$ ako slaba derivacija postoji, tj. derivacija distribucije određene $L^1_{loc}(\Omega)$ funkcijom je jednaka distribuciji određenoj slabom derivacijom te funkcije. U nastavku uglavnom nećemo praviti razliku između funkcije te distribucije koju ona definira.

Primjer 1.1.8. *(Heavisideova funkcija)*
Pokazat ćemo da Heavisideova funkcija $H(x) = \chi_{\langle 0, +\infty \rangle}$ nema slabu derivaciju na $\mathbb{R}$. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, računamo

$$-\int_{\mathbb{R}} H \varphi' dx = -\int_0^{+\infty} \varphi' dx = \varphi(0).$$

Pretpostavimo da postoji $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ takva da

$$\int_{\mathbb{R}} v\varphi dx = \varphi(0). \tag{1.6}$$

Tada posebno vrijedi

$$\int_0^{+\infty} v\varphi dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\langle 0, +\infty\rangle),$$

iz čega primjenom osnovne leme varijacijskog računa zaključujemo $v = 0$ s.s. na $\langle 0, +\infty\rangle$. Analogna tvrdnja se dobiva za interval $\langle -\infty, 0\rangle$ pa zaključujemo $v = 0$ s.s. na $\mathbb{R}$. No tada iz (1.6) zaključujemo da za proizvoljnu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vrijedi $\varphi(0) = 0$, što očito ne vrijedi (npr. funkcija definirana u (1.2)). Dakle H nema slabu derivaciju, ali smo našli njezinu distribucijsku derivaciju definiranu s

$$\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ta distribucija se često naziva Diracova delta funkcija, te kako je $|\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ona stvarno jest distribucija i to reda 0.

Primijetimo da smo u prethodnom primjeru ujedno i pokazali da ne postoji L^1_{loc} funkcija koja određuje Diracovu distribuciju, tj. postoje distribucije koje se ne mogu reprezentirati L^1_{loc} funkcijama. Ipak, pojam slabe derivacije je dovoljan za definiranje Soboljevljevih prostora.

1.2 Soboljevljevi prostori

Osim ako ne bude naglašeno drugačije, dalje pretpostavljamo da je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^N$ te da su sve funkcije realne.

Definicija i osnovni rezultati

Definicija 1.2.1. *Za $p \in [1, +\infty]$ Soboljevljev prostor $W^{1,p}(\Omega)$ definiramo kao*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega)\}.$$

U gornjoj definiciji koristimo skraćenu oznaku $\nabla u \in L^p(\Omega)$ umjesto $\partial_i u \in L^p(\Omega), i = 1, 2, ..., N$. Također uvodimo oznake

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{i=1,2,\dots,N} \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Na prostoru $W^{1,p}(\Omega)$ je dobro definirana norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, +\infty\rangle, \\ \max\left\{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}, & p = +\infty. \end{cases}$$

Pokazat ćemo da je $W^{1,p}(\Omega)$ uz ovako definiranu normu potpun, tj. Banachov za $p \in [1, +\infty]$. Neka je (u_n) Cauchyev niz u $W^{1,p}(\Omega)$. Iz definicije norme na tom prostoru vidimo da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$
$$\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

dakle nizovi $(u_n), (\nabla u_n)$ su Cauchyevi u Banachovom prostoru $L^p(\Omega)$. Zato postoje $u, U \in L^p(\Omega)$ takvi da

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{u } L^p(\Omega),$$
$$\nabla u_n \longrightarrow U \quad \text{u } L^p(\Omega).$$

Želimo još pokazati $\nabla u = U$ u slabom smislu. Gornja konvergencija vrijedi i u distribucijskom smislu, a kako je deriviranje distribucija neprekidno imamo

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sada tvrdnja slijedi iz jedinstvenosti limesa na prostoru distribucija.

Poseban slučaj je $p = 2$, tada se prostor $W^{1,2}(\Omega)$ često označava s $H^1(\Omega)$. Notacija H^1 se koristi kako bi se naglasilo da je taj prostor Hilbertov, tj. ako promatramo samo realne funkcije (što je slučaj u ovom radu) $H^1(\Omega)$ je potpun uz skalarni produkt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Analogno se definiraju prostori $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ kao

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m\}.$$

Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $p \in [1, +\infty]$ je Soboljevljev prostor $W^{m,p}(\Omega)$ Banachov s normom

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, +\infty\rangle, \\ \max_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = +\infty. \end{cases}$$

Posebno je separabilan za $p \in [1, +\infty\rangle$ te refleksivan za $p \in \langle 1, +\infty\rangle$ [1, Teorem 3.6]. Kada je $p = 2$, prostor $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ je Hilbertov uz skalarni produkt

$$\langle u, v\rangle := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u \cdot D^\alpha v dx.$$

Kako je prostor test funkcija na Ω sadržan u svakom prostoru $W^{m,p}(\Omega)$, prirodno je razmotriti njegov zatvarač u $W^{m,p}(\Omega)$. Definiramo

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Od posebne važnosti će nam biti prostor $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$, za kojeg ćemo pokazati da je jednak prostoru svih funkcija iz $W^{1,2}(\Omega)$ koje su jednake nuli na $\partial\Omega$. Za sada još nije jasno što znači da je $W^{1,2}(\Omega)$ funkcija jednaka nuli na rubu domene. Naime, L^p funkcije nisu jedinstveno određene na skupu mjere nula, a rub otvorenih skupova je obično Lebesgueove mjere nula. Za to nam je potrebna teorija traga koju ćemo razviti kasnije. Kada je $p \neq +\infty$, može se pokazati da vrijedi $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, tj. da je $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ gust potprostor od $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ (vidi [3, Teorem 5.1.3]). Navodimo još jedan važan rezultat.

Teorem 1.2.2. *Neka je $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, te neka je $\tilde{u}$ proširenje nulom funkcije u na $\mathbb{R}^N$. Tada je $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ te je linearno preslikavanje $p : W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ definirano s $p(u) = \tilde{u}$ izometrija.*

Dokaz. Neka je $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Znamo da je tada $v = 0$ van nekog ograničenog područja u Ω pa za svaki $x \in \partial\Omega$ postoji neka okolina točke x na kojoj je $v = 0$. Zato funkcija $\tilde{v}$ definirana s

$$\tilde{v} := \begin{cases} v & \text{na } \Omega, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

pripada $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, tj. $p(v) = \tilde{v}$ je dobro definirano preslikavanje s $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Kako vrijedi

$$||\tilde{v}||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = ||v||_{W^{m,p}(\Omega)}, \quad v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

p je linearna izometrija s $\mathcal{D}(\Omega)$ u $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Za $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ postoji niz $(u_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ takav da $u_n \longrightarrow u$ u $W^{m,p}(\Omega)$. Za $n, k \in \mathbb{N}$ rijedi

$$||p(u_n) - p(u_k)||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = ||p(u_n - u_k)||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = ||u_n - u_k||_{W^{m,p}(\Omega)},$$

iz čega vidimo daje niz $(p(u_n))$ Cauchyev u $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Jer je $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ potpun, dobro je definirano proširenje

$$p(u) := \lim_{n\to+\infty} p(u_n),$$

te je ovako zadano preslikavanje $p : W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ očito linearna izometrija. Još je preostalo pokazati da vrijedi $p(u) = \tilde{u}$. To se vidi iz sljedećeg računa:

$$\begin{aligned}\|p(u) - \tilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq \|p(u) - \tilde{u}_n\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} + \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|p(u) - p(u_n)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} + \|u - u_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

□

Poincaréova nejednakost

Sada navodimo nejednakost koja će biti ključna u varijacijskom pristupu rješavanja rubnih problema.

Teorem 1.2.3. *(Poincaréova nejednakost)*
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen u nekom smjeru. Tada za $p \in [1, +\infty\rangle$ postoji konstanta $C = C(p, \Omega)$ takva da

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Podsjetimo da je skup Ω ograničen u smjeru $d \in \mathbb{R}^N$ ako leži između dvije ravnine s normalom d. Najmanju konstantu C takvu da vrijedi Poincaréova nejednakost nazivamo *Poincaréova konstanta*.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da Ω leži u pruzi $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, d]$. Uzmimo $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ i proširimo ju nulom na $\mathbb{R}^N$ do funkcije $\tilde{u}$. Pišemo $x = (x', x_N)$, gdje je $x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1})$. Uočimo da vrijedi $\tilde{u}(x', 0) = 0$. Sada koristimo činjenicu da je $\tilde{u}(x', \cdot)$ realna i neprekidno diferencijabilna funkcija:

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(x', x_N)| &= |\tilde{u}(x', x_N) - \tilde{u}(x', 0)| \\ &= \left| \int_0^{x_N} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(x', y) dy \right| \\ &\leq x_N^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(x', y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili Hölderovu nejednakost. Sada dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}(x)|^p dx &= \int_0^d \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x', x_N)|^p dx' dx_N \\ &\leq \int_0^d x_N^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(z) \right|^p dz dx_N \\ &= \frac{d^{\frac{p}{p'}+1}}{\frac{p}{p'} + 1} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(z) \right|^p dz.\end{aligned}$$

Trivijalno vrijedi ocjena $\left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}\right|^p \leq \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right|^p$. Ako uočimo da vrijedi $1 + \frac{p}{p'} = p$ te da su $\tilde{u}$ i sve njene derivacije jednake nuli izvan Ω, imamo

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq \frac{d^p}{p} \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx,$$

to jest

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq \frac{d}{p^{\frac{1}{p}}} ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Tvrdnja sada slijedi iz gustoće test funkcija u $W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Kako će nam dalje uglavnom biti potrebno samo naći nekakvu ocjenu, a ne i naći najbolju ocjenu dosta ćemo slobodno koristiti oznaku C (to jest nećemo raditi razliku između $C, C^p, \frac{1}{C}, ...$). Poincaréova nejednakost ne vrijedi na $W^{1,p}(\Omega)$. Na primjer, nejednakost ne vrijedi za konstantne funkcije različite od nula, dok je u prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$ upravo nul-funkcija jedina konstanta. Može se pokazati da je uz dovoljnu glatkoću ruba domene Ω to jedini potrebni uvjet za nejednakost tog oblika.

Koristimo standardnu notaciju

$$\mathbb{R}_+^N = \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\right\},$$

$$\mathbb{R}^{N-1} = \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\right\},$$

$$K(0,1) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\right\}.$$

Definicija 1.2.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ otvoren skup. Kažemo da je Ω skup klase C^1 ako za svaku točku $x \in \partial\Omega$ postoji otvorena okolina U_x i C^1-difeomorfizam $\varphi_x : K(0,1) \longrightarrow U_x$ takav da*

$$\varphi_x\Big(K(0,1)^+\Big) = U_x \cap \Omega,$$
$$\varphi_x\Big(K(0,1)_0\Big) = U_x \cap \partial\Omega,$$

pri čemu je $K(0,1)^+ := K(0,1) \cap \mathbb{R}_+^N$, $K(0,1)_0 := K(0,1) \cap \mathbb{R}^{N-1}$.

Dokaz sljedećeg rezultata se može naći u [3, Teorem 5.4.3].

Teorem 1.2.5. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren, povezan, ograničen i klase C^1, te neka je V vektorski potprostor od $W^{1,p}(\Omega)$ takav da je jedina konstantna funkcija u V jednaka nuli. Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad u \in V.$$

Dobar odabir takvog prostora V je skup svih $u \in W^{1,p}(\Omega)$ takvih da $\int_\Omega u dx = 0$. Lako se provjeri da on zadovoljava uvjet u prethodnom teoremu. Također za svaki $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vrijedi $u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx \in V$ pa imamo sljedeći korolar:

Korolar 1.2.6. *(Poincaré-Wirtinger nejednakost)*
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren, povezan, ograničen i klase C^1. Tada postoji $C > 0$ takav da

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Operatori proširenja

Dokaz teorema 1.2.5 koristi Rellich-Kondrašov teorem, koji kaže da je kanonsko ulaganje $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompaktno. Ključan korak u pokazivanju te tvrdnje je pretpostavka da postoji operator proširenja za $W^{1,p}(\Omega)$. Već smo pokazali kako $W_0^{1,p}(\Omega)$ funkcije možemo proširiti nulom do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ funkcija. Kako bi mogli naći operator proširenja za $W^{1,p}(\Omega)$ funkcije čija vrijednost na $\partial\Omega$ nije poznata, bit će nužne pretpostavke glatkoće na rub domene. Najprije razmatramo slučaj $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Teorem 1.2.7. *Operator $P : W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dobiven kao proširenje po parnosti na $\mathbb{R}^N$:*

$$(Pu)(x', x_N) := \begin{cases} u(x', x_N), & x_N > 0, \\ u(x', -x_N), & x_N < 0, \end{cases}$$

je linearan i neprekidan. Posebno vrijedi

$$||Pu||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2||u||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)},$$
$$||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 2||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, želimo izračunati $\partial_i(Pu)$. Za $i = 1, 2, ..., N-1$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle \partial_i(Pu), \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^N} Pu\partial_i\varphi dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^{+\infty} u(x', x_N)\partial_i\varphi(x', x_N)dx_N + \int_{-\infty}^0 u(x', -x_N)\partial_i\varphi(x', x_N)dx_N \right) dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^{+\infty} u(x', x_N)\partial_i\varphi(x', x_N)dx_N + \int_0^{+\infty} u(x', x_N)\partial_i\varphi(x', -x_N)dx_N \right) dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\Big(\partial_i\varphi(x', x_N) + \partial_i\varphi(x', -x_N)\Big)dx.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Želimo iskoristiti pretpostavku da je $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, tj. da u ima slabu derivaciju na $\mathbb{R}^N_+$. Funkcija $\phi(x', x_N) := \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$ općenito ne pripada $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ pa uvodimo funkciju reza $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ takvu da je rastuća i

$$\eta(t) := \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Takva η se može dobiti kao konvolucija karakteristične funkcije na $\langle \frac{3}{4}, +\infty \rangle$ i standardnog izglađivača ρ_ε, za dovoljno mali ε. Pomoću te funkcije definiramo u $C^\infty(\mathbb{R})$ niz $\eta_k(t) = \eta(kt), k \in \mathbb{N}$. Primijetimo da vrijedi $\eta_k(t) = 0$ za $t < \frac{1}{2k}$ te da je $(\eta_k\phi)(x) := \eta_k(x_N)\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Kako u ima slabu derivaciju na $\mathbb{R}^N_+$ vrijedi

$$-\int_{\mathbb{R}^N_+} u\partial_i(\eta_k\phi)dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} (\partial_i u)\eta_k\phi dx. \tag{1.8}$$

Jer η_k ovisi samo o x_N varijabli, za $i = 1, ..., N-1$ imamo $\partial_i(\eta_k\phi) = \eta_k\partial_i\phi$. Tada nam Lebesqueov teorem o dominiranoj konvergenciji kada $k \longrightarrow +\infty$ daje

$$-\int_{\mathbb{R}^N_+} u\partial_i\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} (\partial_i u)\phi dx.$$

Sada možemo nastaviti jednakosti u (1.7):

$$\begin{aligned}
\langle \partial_i(Pu), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_i u(x)\Big(\varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\partial_i u(x', x_N) + \partial_i u(x', -x_N)\Big)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} P(\partial_i u)\varphi dx.
\end{aligned}$$

Posebno $P(\partial_i u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ jer $\partial_i u \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$, dakle slaba derivacija po i-toj varijabli funkcije Pu na $\mathbb{R}^N$ postoji i jednaka je $P(\partial_i u)$, $i = 1, 2, ..., N-1$. Sada ćemo pokazati da postoji i slaba derivacija po N te da je ona jednaka

$$\partial_N(Pu) = \begin{cases} u(x', x_N), & x_N > 0, \\ -u(x', -x_N), & x_N < 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Funkcija definirana s (1.9) je sigurno iz $L^p(\mathbb{R}^N)$. Sličnim računom kao i ranije zaključujemo

$$\begin{aligned} \langle \partial_N(Pu), \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^N} Pu \partial_N \varphi dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\Big((\partial_N\varphi)(x', x_N) + (\partial_N\varphi)(x', -x_N)\Big)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\Big(\partial_N\varphi(x', x_N) - \partial_N(\varphi(x', -x_N))\Big)dx. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Uvedimo oznaku $\psi(x', x_N) := \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$. Uočimo da vrijedi $\psi(x', 0) = \varphi(x', 0) - \varphi(x', 0) = 0$. Neka je $R > 0$ takav da $\text{supp}(\varphi) \subseteq K(0, R)$, tada je i $\text{supp}(\psi) \subseteq K(0, R)$. Lagrangeov teorem srednje vrijednosti nam daje ocjenu

$$|\psi(x', x_N)| = |\psi(x', x_N) - \psi(x', 0)| \leq |\partial_N\psi(x', \tilde{x}_N)||x_N - 0| \leq M|x_N|,$$

gdje je $M = 2\|\partial_N\varphi\|_{L^\infty}$. Kao i ranije je $\eta_k\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N_+} (\partial_N u)\eta_k\psi dx &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\partial_N(\eta_k\psi)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\partial_N\psi dx - \int_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k'\psi dx. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Pogledajmo zadnji integral. Kako je $\eta_k'(x_N) = k\eta'(kx_N)$ te $\eta'(kx_N) = 0$ za $x_N > \frac{1}{k}$ imamo ocjenu

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)k\eta'(kx_N)\psi(x', x_N)dx\right| &\leq kM \sup_{t\in[0,1]} \eta'(t) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{\frac{1}{k}} |u(x)|x_N dx_N dx' \\ &\leq M \sup_{t\in[0,1]} \eta'(t) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{\frac{1}{k}} |u| dx_N dx'. \end{aligned}$$

Kako je $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \frac{1}{k}]$ padajući niz skupova, desna strana gornje nejednakosti teži k nuli kada $k \to +\infty$ pa vrijedi

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k'\psi dx = 0.$$

Sada opet Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji iz (1.11) dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (\partial_N u)\psi dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\partial_N \psi dx,$$

tj. kad se vratimo u (1.10) imamo

$$\begin{aligned}\langle \partial_N(Pu), \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_N u(x)\Big(\varphi(x', x_N) - \varphi(x', x_N)\Big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_N u(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N_-} \partial_N u(x', -x_N)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je upravo (1.9) slaba derivacija po N funkcije Pu. Sada se lako izračuna:

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 2^{\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} \leq 2\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)},$$

$$\|\nabla(Pu)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{i=1}^N \|P(\partial_i u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^N 2\|\partial_i u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

□

Teorem 1.2.8. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup klase C^1. Tada postoji operator proširenja $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ koji je linearan i neprekidan. Posebno postoji konstanta $C = C(p, \Omega)$ takva da za svaki $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vrijedi*

(i) $Pu|_\Omega = u$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dokaz. Kako je Ω otvoren skup klase C^1, skup svih otvorenih okolina iz definicije 1.2.4 svih točaka na $\partial\Omega$ čini otvoren pokrivač od $\partial\Omega$. Kako je Ω ograničen, skup $\partial\Omega$ je kompaktan pa posebno postoji konačan potpokrivač $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ te C^1 difeomorfizmi $\varphi_i : K(0, 1) \longrightarrow U_i, i = 1, 2, .., k$ kao u definiciji 1.2.4. Uzmimo još U_0 otvoren skup takav da $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^k U_i$ i $\bar{U}_0 \subset \Omega$. Koristit ćemo particiju jedinice (vidi [9, Teorem 6.20]) tog pokrivača kompaktnog skupa $\bar{\Omega}$: postoje funkcije $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_k$ takve da $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i), i = 0, 1, ..., k$ i $\sum_{i=0}^k \psi_i = 1$ na Ω. Neka je $u \in W^{1,p}(\Omega)$ proizvoljan. Vrijedi

$$u = \left(\sum_{i=0}^k \psi_i\right) u = \sum_{i=0}^k \psi_i u.$$

Da bismo proširili u na $\mathbb{R}^N$, najprije ćemo proširiti funkcije $u_i := \psi_i u, i = 0, 1, ..., k$. Kako je u_0 identički jednaka nuli van nekog zatvorenog područja u Ω, za $i = 0$ možemo prirodno proširiti funkciju nulom:

$$\tilde{u}_0 = \begin{cases} u_0 & \text{na } \Omega, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Neka je $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Kako je ψ_0 posebno test funkcija na Ω, tada je i $\phi\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ i vrijedi formula $\partial_j(\phi\psi_0) = (\partial_j\phi)\psi_0 + \phi(\partial_j\psi_0)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \langle \partial_j \tilde{u}_0, \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}_0 \partial_j \phi dx &= -\int_\Omega \psi_0 u \partial_j \phi dx \\ &= -\int_\Omega \partial_j(\phi\psi_0) u dx + \int_\Omega \phi(\partial_j\psi_0) u dx \\ &= \int_\Omega \psi_0 (\partial_j u) \phi dx + \int_\Omega (\partial_j \psi_0) u \phi dx. \end{aligned}$$

Za funkciju $\psi_0 \widetilde{\partial_j u} + \partial_j \psi_0 \tilde{u}_0$ se lako provjeri da se nalazi u $L^p(\mathbb{R}^N)$, te nam gornji račun daje da je ona slaba derivacija po j funkcije $\tilde{u}_0$. Dakle, $\tilde{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Funkcije $u_i, i = 1, 2, .., k$ nećemo direktno proširivati jer njihov nosač nije sadržan u Ω, već ćemo proširivati funkcije oblika $u_i \circ \varphi_i$. Za $i = 1, 2, ..., k$ definiramo

$$v_i = \begin{cases} u_i \circ \varphi_i & \text{na } K(0,1)^+, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N \backslash (K(0,1)^+. \end{cases}$$

Prisjetimo se da za svaki $i = 1, 2, ..., k$ vrijedi $\varphi_i(K(0, 1)^+) = U_i \cap \Omega$. Ovako definirana v_i pripada $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, pa ju kao u teoremu 1.2.7 možemo prošiti do $Pv_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Kako smo proširili funkciju po parnosti, nosač Pv_i je sadržan u $K(0, 1)$, a tada je nosač funkcije $Pv_i \circ \varphi_i^{-1}$ sadržan u Ω_i. Za $i = 1, 2, ..., k$ definiramo

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} Pv_i \circ \varphi_i^{-1} & \text{na } \Omega_i, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N \backslash \Omega_i, \end{cases}$$

što je opet $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ funkcija. Sada definiramo operator proširenja sa

$$Pu = \sum_{i=0}^{k} \tilde{u}_i.$$

Očito je P linearan i $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Vrijedi $Pu|_\Omega = \sum_{i=0}^{k} u_i = u$, dakle tvrdnja (*i*) je ispunjena, dok se (*ii*) i (*iii*) lako provjere.

$\square$

Sada iz teorema 1.2.8 i činjenice da je $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ gust u $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ direktno slijedi sljedeći važan rezultat.

Korolar 1.2.9. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup klase C^1 i neka je $p \in [1, +\infty\rangle$. Tada je $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) := \left\{u|_{\Omega} : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\right\}$ gust u $W^{1,p}(\Omega)$.*

Trag

Sada ćemo dati značenje rubnom uvjetu $u = g$ na $\partial\Omega$. Općenito to nije moguće za L^p funkcije jer je obično $\partial\Omega$ skup mjere nula, ali pokazat ćemo da se preslikavanje $u \longrightarrow u|_{\Omega}$ definirano na $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ može proširiti na $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorem 1.2.10. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup čiji je rub klase C^1, te $p \in [1, +\infty\rangle$. Tada se preslikavanje* $\mathrm{tr} : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ *definirano s*

$$\mathrm{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}$$

može po neprekidnosti proširiti do linearnog neprekidnog preslikavanja u istoj oznaci $\mathrm{tr} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$. *Taj operator nazivamo operator traga.*

Najprije je potrebno pokazati sljedeću lemu, koja nam daje neprekidnost operatora traga na $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^N_+)$.

Lema 1.2.11. *Za $p \in [1, +\infty\rangle$ vrijedi nejednakost*

$$\| \mathrm{tr}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq p^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}, \quad u \in \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^N_+).$$

Dokaz. Neka je $u \in \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^N_+)$, tada vrijedi

$$|u(x', 0)|^p = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_N} |u(x', x_N)|^p dx_N. \tag{1.12}$$

Jednostavno se vidi da je

$$\frac{\partial}{\partial x_N} |u(x', x_N)|^p = p|u(x', x_N)|^{p-1} \operatorname{sign}(u(x', x_N)) \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N),$$

što kada uvrstimo u (1.12) daje

$$|u(x', 0)|^p \leq p \int_0^{+\infty} |u(x', x_N)|^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N. \tag{1.13}$$

Za $p, p' \in \langle 1, +\infty\rangle$ konjugirane eksponente te $x, y \in [0, +\infty\rangle$ Youngova nejednakost glasi

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}.$$

Ako uzmemo

$$x = \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N)\right|,$$

$$y = |u(x', x_N)|^{p-1},$$

iz (1.13) imamo

$$\begin{aligned}
|u(x', 0)|^p &\leq p \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N)\right|^p + \frac{1}{p'}|u(x', x_N)|^{p'(p-1)}\right) dx_N \\
&= \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N)\right|^p dx_N + (p-1)\int_0^{+\infty} |u(x', x_N)|^p dx_N.
\end{aligned}$$

Primijetimo da za $p = 1$ iz (1.13) direktno dobivamo gornju ocjenu. Integriranje po $\mathbb{R}^{N-1}$ sada daje ocjenu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', 0)|^p dx' &\leq (p-1)\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^p dx \\
&\leq (p-1)\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\, dx \\
&\leq p \int_{\mathbb{R}^N_+} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx,
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili nejednakost $\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^p \leq |\nabla u|^p$, te nejednakosti $1 \leq p$ i $p - 1 \leq p$. Time je pokazana tvrdnja teorema, to jest

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq p^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

□

Dokaz. (teorema 1.2.10)
Dovoljno je pokazati da je operator traga

$$\mathrm{tr} : (\mathcal{D}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \longrightarrow (L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)})$$

neprekidan. Po korolaru 1.2.9 je $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ gust u $W^{1,p}(\Omega)$ pa se tada operator traga može proširiti do linearnog i neprekidnog preslikavanja s $W^{1,p}(\Omega)$ u $L^p(\partial\Omega)$. Taj operator i dalje nazivamo operator traga te koristimo istu oznaku tr.

Slično kao u dokazu teorema 1.2.8 za $\bar{\Omega}$ postoji konačan otvoren pokrivač $\{U_0, U_1, ..., U_k\}$ takav da $\bar{U}_0 \subset \Omega$ te C^1 difeomorfizmi $\varphi_i : K(0,1) \longrightarrow U_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Koristimo particiju jedinice $\{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_k\}$ takvu da $\psi_i \in \mathcal{D}(U_i)$, $\psi_i \geq 0$ te $\sum\limits_{i=0}^{k} \psi_i = 1$ na $\bar{\Omega}$.

Neka je $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Označimo $u_i := \psi_i u$. Sada za $i = 1, 2, ..., k$ definiramo

$$v_i = \begin{cases} u_i \circ \varphi_i & \text{na } K(0,1)^+, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N_+ \backslash K(0,1)^+. \end{cases}$$

Za v_i vrijedi

$$\begin{aligned} \|v_i\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} = \int_{K(0,1)^+} |u_i \circ \varphi_i|^p dy &= \int_{U_i \cap \Omega} |\psi_i u|^p |\det \nabla \varphi_i^{-1}| dx \\ &\leq \|\det \nabla \varphi_i^{-1}\|_{L^\infty(U_i \cap \Omega)} \|\psi_i^p\|_{L^\infty(U_i \cap \Omega)} \|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sličnu ocjenu dobivamo i za $\nabla v_i = (\nabla u_i \circ \varphi_i) \cdot \nabla \varphi_i$. Zaključujemo da za svaki $i = 1, 2, ..., k$ postoji konstanta C_i neovisna o funkciji u takva da

$$\|v_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Kako je $v_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ iz leme 1.2.11 i ocjene (1.14) imamo

$$\|v_i(x', 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C_i p^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.15}$$

Označimo sada $\tilde{}$ proširenje nulom van skupa $S := \{y \in \mathbb{R}^{N-1} \;:\; |y| \leq 1\}$. Može se pokazati da se ekvivalentna norma $L^p(\partial\Omega)$ normi može dobiti preko lokalnih koordinata. Vrijedi

$$L^p(\partial\Omega) = \left\{ w : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \left((\psi_i w) \circ \varphi_i(\cdot, 0)\right)^{\sim} \in L^p(\mathbb{R}^{N-1}),\; i = 1, 2, ..., k \right\},$$

te je

$$w \mapsto \left(\sum_{i=1}^{k} \left\| \left((\psi_i w) \circ \varphi_i(\cdot, 0)\right)^{\sim} \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ekvivalentna norma standardnoj $L^p(\partial\Omega)$ normi. Sada iz definicije funkcije v_i i nejednakosti (1.15) slijedi da postoji $C = C(p, N, \Omega) > 0$ t.d.

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Dakle, operator traga je neprekidan.

$\square$

Napomenimo da operator traga $\mathrm{tr} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ nije surjektivan. Za $p = 2$ sliku operatora označavamo s $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ te je ona gusta u $L^2(\partial\Omega)$. Prostor $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ se može interpretirati kao razlomljeni Soboljevljev prostor, tj. prostor oblika $W^{m,p}(\Omega)$ gdje m nije nužno prirodan broj (vidi [1, Poglavlje 7]).

Po definiciji za funkciju $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ postoji niz $(u_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ takav da $u_n \longrightarrow u$ u $W^{1,p}(\Omega)$. Znamo $u_n|_{\partial\Omega} = 0$, to jest $\mathcal{D}(\Omega)$ funkcije imaju trivijalan trag na Ω. Sada iz neprekidnosti operatora traga slijedi da nužno $\mathrm{tr}(u) = 0$, pa smo pokazali jedan smjer sljedeće propozicije.

Propozicija 1.2.12. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup klase C^1 te $p \in [1, +\infty\rangle$. Tada funkcija $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pripada $W_0^{1,p}(\Omega)$ ako i samo ako* $\mathrm{tr}(u) = 0$.

Dokaz. Pokazano je u dokazu teorema 1.2.10 da je dovoljno provjeriti tvrdnju za $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Neka je $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ takva da $\mathrm{tr}(u) = 0$. Po korolaru 1.2.9 postoji niz $(u_n) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^N_+)$ takav da

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{u } W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+).$$

Jer je operator traga neprekidan nužno $\mathrm{tr}(u_n) \longrightarrow 0$ u $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$. Kako za $x_N \geq 0$ vrijedi

$$|u_n(x', x_N)| \leq |u_n(x', 0)| + \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', y) \right| dy, \qquad n \in \mathbb{N},$$

zbog konveksnosti preslikavanja $y \mapsto y^p$ na $\mathbb{R}^+$ imamo ocjenu

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u_n(x', x_N)|^p dx' \leq C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u_n(x', 0)|^p dx' + C x_N^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u_n| \, dx.$$

Puštanjem $n \longrightarrow +\infty$ dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', x_N)|^p dx' \leq C x_N^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u| \, dx. \tag{1.16}$$

Neka je $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ padajuća funkcija takva da je $\zeta = 1$ na $[0, 1]$, $\zeta = 0$ na $\mathbb{R}^+ \backslash [0, 2]$ te $0 \leq \zeta \leq 1$. Sada definiramo niz

$$w_n := (1 - \zeta_n) u,$$

pri čemu je $\zeta_n(x) := \zeta(n x_N)$ za $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$. Tada je

$$\partial_i w_n = (1 - \zeta_n) \partial_i u$$

za $i = 1, 2, ..., N - 1$, te

$$\partial_N w_n = (1 - \zeta_n) \partial_N u - n \zeta'(n \cdot) u.$$

Lako se provjeri da $w_n \longrightarrow u$ u $L^p(\mathbb{R}^N_+)$, još ćemo pokazati $\nabla w_n \longrightarrow \nabla u$ u $L^p(\mathbb{R}^N_+)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla w_n - \nabla u|^p dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^N_+} |\zeta_n \nabla_{x'} u|^p dx + C \int_{\mathbb{R}^N_+} |\zeta_n \partial_N u + n\zeta'(n\cdot)u|^p dx \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N_+} |\zeta_n \nabla u|^p dx + C_2 n^p \int_{\mathbb{R}^N_+} |\zeta'(n\cdot)u|^p dx.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Kako je $\zeta_n = 0$ za $x_N > \dfrac{2}{n}$ prvi član sume iz ocjene (1.17) teži k nuli kada $n \longrightarrow +\infty$. Drugi član ocjenjujemo pomoću (1.16):

$$\begin{aligned} n^p \int_{\mathbb{R}^N_+} |\zeta'(n\cdot)u|^p dx &\leq C n^p \int_0^{\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^p dx' dx_N \\ &\leq C n^p \left(\int_0^{\frac{2}{n}} x_N^{p-1} dx_N \right) \left(\int_0^{\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla u|^p dx \right) \\ &\leq C 2^p \int_0^{\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla u|^p dx \longrightarrow 0 \quad \text{kada } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Dakle $w_n \longrightarrow u$ u $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Kako je $w_n = 0$ za $0 < x_N < \frac{1}{n}$ može se izgladiti do funkcije $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ takve da $u_n \longrightarrow u$ u $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, iz čega slijedi $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

□

1.3 Slaba konvergencija

Prisjetimo se, topologija na prostoru X je familija podskupova od X koja sadrži prazan skup $\emptyset$ te je zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke. Elemente topologije nazivamo otvorenim skupovima, a topologiju na X označavamo τ_X.

Neka su X, Y topološki prostori, $f : X \longrightarrow Y$. Kažemo da je funkcija f *neprekidna u* $x \in X$ ako za svaki otvoreni skup $V \in \tau_Y$ takav da $f(x) \in V$ postoji otvoreni skup $U \in \tau_X$ takav da $x \in U$ te $f(U) \subseteq V$. Neprekidnost funkcije na općenitom topološkom prostoru se ne može okarakterizirati nizovnom neprekidnošću bez dodatnih pretpostavki, ali vrijedi da neprekidnost povlači nizovnu neprekidnost.

Sjetimo se da niz $(x_n) \subset X$ *konvergira k* $x \in X$ u topologiji τ_x ako za svaki $V \in \tau_X$ takav da $x \in V$ postoji $n_V \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi

$$n \geq n_V \qquad \Longrightarrow \qquad x_n \in V.$$

Za danu familiju topologija $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$ te funkcije $f_i : X \longrightarrow Y_i, i \in I$ može se pokazati egzistencija najmanje topologije na X u odnosu na koju su sva preslikavanja f_i, $i \in I$

neprekidna (vidi [4, Poglavlje 5] ili [3, Teorem 2.4.1]). Tu topologiju nazivamo *slabom topologijom na* X induciranom familijom $(f_i)_{i\in I}$. Pokazuje se da niz $(x_n) \subset X$ konvergira k $x \in X$ u slaboj topologiji induciranoj $(f_i)_{i\in I}$ ako i samo ako za svaki $i \in I$ $f_i(x_n)$ konvergira k $f_i(x)$ u topologiji τ_i.

Za naše potrebe će biti dovoljno proučavati topologije na normiranim prostorima. Slaba topologija na normiranom prostoru X je slaba topologija na X inducirana svim ograničenim funkcionalima $f \in X'$. U ovom radu ćemo slabu konvergenciju označavati '$\rightharpoonup$'. Kako je napomenuto ranije, imamo karakterizaciju

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall f \in X') \quad f(x_n) \longrightarrow f(x).$$

Općenito konvergencija norme povlači slabu konvergenciju, i to k istom limesu. Na normiranim prostorima se to direktno vidi iz dane karakterizacije slabe konvergencije te činjenice da su svi $f \in X'$ neprekidni u topologiji norme, pa posebno i nizovno neprekidni.

U Hilbertovim prostorima nam Rieszov teorem o reprezentaciji daje da $x_n \rightharpoonup x$ ako i samo ako za svaki $z \in X$ vrijedi $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$. Na primjer, pogledajmo prostor $L^2(\Omega)$. On je Hilbertov uz skalarni produkt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega uvdx.$$

Dakle, slaba konvergencija u $L^2(\Omega)$ je dana s

$$u_n \rightharpoonup u \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\forall v \in L^2(\Omega)\big) \quad \int_\Omega u_n vdx \longrightarrow \int_\Omega uvdx.$$

Možemo promatrati i slabu topologiju na dualnom prostoru X', gdje je X normiran prostor. Za $x \in X$ definiramo preslikavanje $\hat{x} : X' \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{x}(f) := f(x), \quad f \in X'.$$

Kako je f ograničen linearan funkcional na X vrijedi

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{X'}\|x\|_X,$$

iz čega zaključujemo $\hat{x} \in X''$. Definiramo *slabu* topologiju* na X' kao slabu topologiju na X' generiranu svim funkcionalima $\hat{x} \in X''$, $x \in X$. Niz $(f_n) \in X'$ će konvergirati k $f \in X'$ u slaboj* topologiji ako i samo ako $\hat{x}(f_n)$ konvergira k $\hat{x}(f)$, to jest ako i samo ako $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $x \in X$. U refleksivnim Banachovim prostorima vrijedi izomorfizam $X \cong X''$, pa se u takvim prostorima slaba i slaba* topologija podudaraju.

Za kraj navodimo teorem koji je dobro poznat u području funkcionalne analize (vidi [9, Teorem 3.15] ili [5, Teorem 3.16]).

Teorem 1.3.1. *(Banach-Alaoglu)*
Neka je X normiran prostor. Tada je zatvorena jedinična kugla

$$\{f \in X' \; : \; \|f\| \leq 1\}$$

slabo kompaktan skup.*

Sljedeća tvrdnja je jednostavna posljedica Banach-Alaoglu teorema i svojstva refleksivnosti, a može se pokazati da za normirane prostore vrijedi i obrat [5, Teorem 3.17]).

Korolar 1.3.2. *Neka je X refleksivan normiran prostor. Tada je zatvorena jedinična kugla*

$$\{x \in X \; : \; \|x\| \leq 1\}$$

slabo kompaktan skup.

Poglavlje 2

Apstraktni problemi

2.1 Konveksna minimizacija

U proučavanju egzistencije i jedinstvenosti rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je često korisno zapisati problem u slabom obliku, tj. svesti ga na sljedeći oblik:

Naći $u \in V$ takav da

$$a(u, v) = L(v), \quad v \in V, \tag{2.1}$$

gdje je V vektorski prostor, $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma te $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional. Forma $a(\cdot, \cdot)$ je bilinearna ako je linearna i u prvom i u drugom argumentu, drugim riječima ako su funkcije $a(\cdot, v)$ i $a(u, \cdot)$ linearne za sve fiksne $u, v \in V$.

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *realan normiran prostor. Kažemo da je bilinearna forma* $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

- *neprekidna ako postoji* $M > 0$ *takav da*

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\,\|v\|, \quad u, v \in V,$$

- *pozitivna ako vrijedi*

$$a(u, u) \geq 0, \quad u \in V,$$

- *pozitivno definitna ako vrijedi*

$$a(u, u) > 0, \quad u \in V, u \neq 0,$$

- *koercitivna ako postoji* $\alpha > 0$ *takav da*

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad u \in V,$$

- *simetrična ako vrijedi*
$$a(u, v) = a(v, u), \quad u, v \in V.$$

Napomenimo da su pozitivnost, pozitivna definitnost i simetričnost bilinearne forme dobro definirani pojmovi i za općeniti vektorski prostor V. Prisjetimo se definicije konveksnosti funkcije na vektorskom prostoru.

Definicija 2.1.2. *Neka je V vektorski prostor. Za funkciju $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kažemo da je konveksna ako za svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)f(u) + \lambda f(v), \quad u, v \in V.$$

Ako vrijedi stroga nejednakost za $u \neq v$, kažemo da je f strogo konveksna.

U ovom poglavlju ćemo pokazati nekoliko rezultata vezanih uz apstraktan problem (2.1), a u sljedećem poglavlju ćemo zapisati neke klasične rubne probleme u tom obliku i primijeniti dobivene rezultate. Najprije pokazujemo važnu karakterizaciju rješenja problema (2.1).

Teorem 2.1.3. *(Varijacijski princip)*
Neka je V vektorski prostor, $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ linearno preslikavanje, te $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma koja je simetrična i pozitivna. Definiramo preslikavanje $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ s

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)\,.$$

Za $u \in V$ je ekvivalentno:

(i) $a(u, v) = L(v), \quad v \in V,$

(ii) $J(u) \leq J(v), \quad v \in V.$

Dodatno, ako je $a(\cdot, \cdot)$ pozitivno definitna, rješenje problema (2.1) *(ako postoji) je jedinstveno.*

Dokaz. Najprije pokažimo smjer $(i) \implies (ii)$. Uočimo da zbog simetričnosti bilinearne forme vrijedi

$$\begin{aligned} a(u + v, u + v) &= a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) \\ &= a(u, u) + 2a(u, v) + a(v, v). \end{aligned}$$

Neka je $u \in V$ takav da vrijedi (i), te $v \in V$ proizvoljan. Jednostavnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} J(u+v) - J(u) &= \Big(\frac{1}{2}a(u+v, u+v) - L(u+v)\Big) - \Big(\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)\Big) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,v) + \frac{1}{2}a(v,v) - L(u) - L(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u) \\ &= \big(a(u,v) - L(v)\big) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq 0. \end{aligned}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili pretpostavku da je u rješenje (2.1) te da je $a(\cdot,\cdot)$ pozitivna forma. Dakle, za svaki $v \in V$ vrijedi $J(u) \leq J(u+v)$. Kako je V vektorski prostor ekvivalentno je da vrijedi $J(u) \leq J(v), v \in V$, što je upravo (ii).

Pokažimo sada drugi smjer. Pretpostavimo da $u \in V$ minimizira funkcional J. Neka su $t \in \mathbb{R}$ i $v \in V$ proizvoljni, računamo:

$$\begin{aligned} J(u+tv) - J(u) &= \frac{1}{2}a(u,u) + ta(u,v) + \frac{1}{2}t^2a(v,v) - L(u) - tL(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u) \\ &= ta(u,v) + \frac{1}{2}t^2a(v,v) - tL(v). \end{aligned}$$

Kako u minimizira J, za $t > 0$ vrijedi

$$a(u,v) + \frac{1}{2}ta(v,v) - L(v) = \frac{1}{t}\left(J(u+tv) - J(u)\right) \geq 0.$$

Puštanjem $t \longrightarrow 0^+$ dobivamo $a(u,v) - L(v) \geq 0$. Uzimanjem $t < 0$ se dobiva suprotna nejednakost pa zaključujemo

$$a(u,v) = L(v), \qquad v \in V,$$

čime smo pokazali ekvivalenciju uvjeta (i) i (ii).

Pretpostavimo sada da je preslikavanje $J(\cdot)$ strogo konveksno, te da su $u_1 \in V$ i $u_2 \in V$ dva različita minimizatora preslikavanja J na V. Tada vrijedi

$$J\Big(\frac{u_1+u_2}{2}\Big) < \frac{1}{2}\Big(J(u_1) + J(u_2)\Big) = \inf_{v \in V} J(v),$$

što je kontradikcija, dakle rješenje je jedinstveno. Sada je još preostalo pokazati da pozitivna definitnost bilinearne forme $a(\cdot,\cdot)$ povlači strogu konveksnost funkcionala J. L je linearna forma, pa je dovoljno pokazati strogu konveksnost kvadratne forme $a(v,v)$. Neka su $u, v \in V$ proizvoljni, te $\lambda \in [0,1]$. Lako se provjeri da vrijedi

$$\lambda(1-\lambda)a(u-v, u-v) + a(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v) = \lambda a(u,u) + (1-\lambda)a(v,v).$$

Naime,

$$\begin{aligned}a\Big(\lambda u+(1-\lambda)v,\lambda u+(1-\lambda)v\Big) &= a\Big(\lambda(u-v)+v,(\lambda-1)(u-v)+u\Big)\\ &= \lambda(\lambda-1)a(u-v,u-v)+a(v,(1-\lambda)(v-u))\\ &\qquad + a(\lambda u+(1-\lambda)v,u)\\ &= \lambda(\lambda-1)a(u-v,u-v)+\lambda a(u,u)\\ &\qquad + (1-\lambda)a(v,v).\end{aligned}$$

Sada tvrdnja slijedi direktno iz činjenice da za $\lambda\in(0,1)$ vrijedi $\lambda(1-\lambda)>0$ te da za $u\neq v$ imamo $a(u-v,u-v)>0$.

□

Ovim teoremom nismo pokazali egzistenciju rješenja (2.1), već samo da *ako postoji* tada je ono ujedno i rješenje problema minimizacije funkcionala J i obrnuto. Pokazat ćemo još odgovarajuću tvrdnju na konveksnim skupovima.

Propozicija 2.1.4. *Neka je $(V,\|\cdot\|)$ realan normiran prostor, $C\subseteq V$ neprazan, zatvoren i konveksan te $a(\cdot,\cdot)$ i $L(\cdot)$ kao u teoremu 2.1.3. Tada $u\in C$ minimizira funkcional*

$$J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-L(u)$$

na C ako i samo ako vrijedi

$$a(u,v-u)-L(v-u)\geq 0,\qquad v\in C. \tag{2.2}$$

.

Dokaz. Pretpostavimo da $u\in C$ minimizira funkcional J na C. Kako je C konveksan, za $t\in[0,1]$ je $u+t(v-u)\in C$, pa vrijedi nejednakost

$$J\Big(u+t(v-u)\Big)\geq J(u),\qquad t\in[0,1].$$

Sada slično kao i u dokazu teorema 2.1.3 zaključujemo da za $t>0$ vrijedi

$$a(u,v-u)+\frac{1}{2}ta(v-u,v-u)-L(v-u)=\frac{1}{t}\Big(J(u+t(v-u))-J(u)\Big)\geq 0.$$

Jer je C zatvoren možemo prijeći na limes kada $t\longrightarrow 0^+$ čime dobivamo upravo (2.2).

Pokažimo sada drugi smjer. Neka je $u\in C$ takav da vrijedi (2.2). Za proizvoljan $v\in C$ imamo

$$\begin{aligned}J(v)=J(v+u-u) &= \frac{1}{2}a(u+(v-u),u+(v-u))-L(u+(v-u))\\ &= J(u)+\frac{1}{2}a(v-u,v-u)+\Big(a(u,v-u)-L(v-u)\Big)\\ &\geq J(u),\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili (2.2) te pozitivnost bilinearne forme a. □

2.2 Direktna metoda varijacijskog računa

Promatramo problem minimizacije funkcionala $J(\cdot)$ na nekom dopustivom skupu funkcija X. Kako bi problem bio smislen, zahtijevamo da postoji $u \in X$ takav da $J(u) < +\infty$. Također očekujemo da vrijedi

$$\inf_{u \in X} J(u) > -\infty. \tag{2.3}$$

Glavna ideja direktne metode varijacijskog računa je uzeti minimizirajući niz $(u_n) \subset X$ (čije nam postojanje daje (2.3)) te probati pokazati da taj niz ima limes $\bar{u}$ u X. Tada ako možemo pokazati da vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} J(u_n) = J(\bar{u}), \tag{2.4}$$

direktno slijedi da funkcional J postiže minimum na X u $\bar{u}$:

$$J(\bar{u}) = \lim_{n \to \infty} J(u_n) = \inf_{u \in X} J(u). \tag{2.5}$$

Čak i ako postoji limes niza (u_n) u nekoj topologiji, nije trivijalno pokazati da vrijedi (2.4). Kasnije ćemo direktnom metodom pokazati dovoljne uvjete da bi funkcional postizao minimum u refleksivnim Banachovim prostorima.

Definicija 2.2.1. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normiran prostor, za funkciju $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kažemo da je*

- *koercitivna ako vrijedi*
$$\lim_{\|u\| \to +\infty} f(u) = +\infty,$$
- *poluneprekidna odozdo u $u \in V$ ako vrijedi*
$$f(u) \leq \liminf_{v \to u} f(v),$$
- *slabo poluneprekidna odozdo u $u \in V$ ako vrijedi*
$$f(u) \leq \liminf_{v \rightharpoonup u} f(v),$$

  gdje '$\rightharpoonup$' označava slabu konvergenciju.

Sljedeći koristan teorem navodimo bez dokaza (vidi [3, Teorem 3.3.3]).

Teorem 2.2.2. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normiran prostor, $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konveksna funkcija. Tada je f poluneprekidna odozdo ako i samo ako je slabo poluneprekidna odozdo.*

Primjer 2.2.3. *(Dirichletov integral)*
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup s glatkim rubom $\partial\Omega$ te $u_0 \in H^1(\Omega)$. Promatramo problem minimizacije funkcionala

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

na skupu svih $H^1(\Omega)$ funkcija takvih da su jednake u_0 na $\partial\Omega$. Taj skup kraće označavamo $u_0 + H_0^1(\Omega)$. Direktnom metodom ćemo pokazati da problem

$$\inf\left\{J(u) : u \in u_0 + H_0^1(\Omega)\right\} \tag{2.6}$$

ima jedinstveno rješenje. Funkcional J je očito nenegativan pa infimum (2.6) *postoji. Označimo ga μ. Kako je $u_0 \in H^1(\Omega)$ posebno je $\nabla u_0 \in L^2(\Omega)$ pa vrijedi $J(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty$. Sada iz činjenice da je $u_0 \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ slijedi*

$$0 \le \mu \le J(u_0) < +\infty.$$

Neka je $(u_n) \subset u_0 + H_0^1(\Omega)$ minimizirajući niz, to jest niz takav da

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \mu.$$

Posebno je $u_n - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, pa možemo iskoristiti Poincaréovu nejednakost za taj izraz. Sada računamo

$$\begin{aligned} \|u_n - u_0\|_{H^1(\Omega)} &\le C\|\nabla(u_n - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\sqrt{2J(u_n)} + C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

$(J(u_n))$ je konvergentan niz u $\mathbb{R}$ pa je posebno i ograničen, te kako je $u_0 \in H^1(\Omega)$ zaključujemo da je niz $(u_n - u_0)$ ograničen u $H_0^1(\Omega)$. Po korolaru 1.3.2 postoji podniz $(u_{n_k} - u_0)$ te $v \in H_0^1(\Omega)$ takvi da

$$u_{n_k} - u_0 \rightharpoonup v,$$

to jest

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 + v.$$

Označimo $\bar{u} = u_0 + v$. Očito je $\bar{u} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$, a još želimo pokazati da je minimizator funkcionala J. Vrijedi jednostavna ocjena

$$\begin{aligned} |\nabla u_{n_k}|^2 &= |\nabla(u_{n_k} - \bar{u}) + \nabla\bar{u}|^2 \\ &= |\nabla(u_{n_k} - \bar{u})|^2 + 2\nabla(u_{n_k} - \bar{u}) \cdot \nabla\bar{u} + |\nabla\bar{u}|^2 \\ &\ge 2\nabla(u_{n_k} - \bar{u}) \cdot \nabla\bar{u} + |\nabla\bar{u}|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Kako u_{n_k} slabo konvergira k $\bar{u}$ u $H^1(\Omega)$ posebno i ∇u_{n_k} slabo konvergira k $\nabla\bar{u}$ u $L^2(\Omega)$. To je ekvivalentno s tim da $\nabla u_{n_k} - \nabla\bar{u}$ slabo konvergira k nuli u $L^2(\Omega)$. Po definiciji slabe konvergencije u $L^2(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\Omega \nabla(u_{n_k} - \bar{u}) \cdot \nabla\bar{u} dx \longrightarrow 0 \quad \text{kada } k \longrightarrow +\infty.$$

Sada kada integriramo (2.8) *po Ω se na limesu jednostavno dobije*

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_{n_k}).$$

Zapravo smo pokazali da je funkcional J slabo odozdo poluneprekinut, iz čega direktno slijedi da je $\bar{u}$ minimizator:

$$\mu \leq J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \mu,$$

tj. $J(\bar{u}) = \mu$. Još nam je preostalo pokazati jedinstvenost, pa pretpostavimo da su u, v dva različita rješenja problema (2.6). *Tada je i $\frac{1}{2}(u+v) \in u_0 + H^1_0(\Omega)$, pa će jedinstvenost slijediti iz stroge konveksnosti funkcije $|\cdot|^2$:*

$$\begin{aligned}
\mu \leq J\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla v)\right|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(u) = \mu.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je $\mu < \mu$, što je očito kontradikcija. Zaključujemo da je rješenje problema (2.6) *jedinstveno.*

Primijetimo da u ocjeni (2.7) $J(u_n) \longrightarrow +\infty$ kada $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$. Kako u toj ocjeni nismo koristili pretpostavku da je u_n minimizirajući niz i ona vrijedi za proizvoljan niz u $u_0 + H^1(\Omega)$, zaključujemo da je funkcional J koercitivan. Još smo i pokazali da je konveksan i neprekidan odozdo. Pokazat ćemo direktnom metodom da su to dovoljne pretpostavke na funkcional kako bi postizao minimum u refleksivnom Banachovom prostoru.

Teorem 2.2.4. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ refleksivan Banachov prostor te $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konveksna, koercitivna i odozdo poluneprekidna. Tada postoji $u \in V$ takav da*

$$f(u) \leq f(v), \quad v \in V.$$

Dokaz. Neka je $(u_n) \subset V$ minimizirajući niz funkcije f, tj. niz takav da $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \inf_{v\in V} f(v)$. Tada postoje $M > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da su za $n \geq n_0$ članovi niza (u_n) sadržani u M-nivo skupu $\{v \in V : f(v) \leq M\}$. Taj skup je nužno ograničen; u suprotnom bi postojao niz $(v_n) \subset V$ takav da $\|v_n\| \longrightarrow +\infty$ i $f(v_n) \leq M$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je funkcija f koercitivna. Kako je V refleksivan, postoji slabo konvergentan podniz $u_{n_k} \rightharpoonup u \in V$. Funkcija je konveksna i poluneprekidna odozdo, pa je po teoremu 2.2.2 slabo poluneprekidna odozdo. Sada imamo niz nejednakosti

$$f(u) \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} f(u_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(u_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \inf_{v\in V} f(v).$$

□

2.3 Lax-Milgramova lema

Predstavit ćemo važan rezultat egzistencije rješenja problema oblika (2.1), a sljedeća dva poznata teorema će nam biti ključna u dokazivanju tvrdnje.

Teorem 2.3.1. *(Riesz)*
Neka je H Hilbertov prostor. Tada za svaki $F \in H'$ postoji jedinstveni $f \in H$ takav da

$$F(v) = \langle f, v\rangle, \quad v \in H.$$

Teorem 2.3.2. *(Banachov teorem o fiksnoj točki)*
Neka je (X, d) potpun metrički prostor te $f : X \longrightarrow X$ κ−kontrakcija, tj. postoji $\kappa < 1$ takav da

$$d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Tada f ima jedinstvenu fiksnu točku na X.

Dokaz teorema je konstruktivan, pokazuje se da niz

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

konvergira k fiksnoj točki za svaku početnu iteraciju x_0. Sada smo spremni za glavni rezultat.

Teorem 2.3.3. *(Lax-Milgramova lema)*
Neka je H Hilbertov prostor uz skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, gdje je $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ pripadna norma. Neka je $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma koja je neprekidna i koercitivna, te $L \in H'$. Tada postoji jedinstveni $u \in H$ takav da

$$a(u, v) = L(v), \quad v \in H.$$

Dokaz. Kako je $a(\cdot,\cdot)$ neprekidna bilinearna forma, za svaki $u \in H$ je $a(u,\cdot) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidan linearan funkcional. Tada nam Rieszov teorem o reprezentaciji za svaki $u \in H$ daje postojanje jedinstvenog $A(u) \in H$ takvog da

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle, \quad v \in H.$$

Po pretpostavci je $L \in H'$ pa opet po Rieszovom teoremu zaključujemo da postoji jedinstveni $f \in H$ takav da

$$L(v) = \langle f, v\rangle, \quad v \in H.$$

Sada je početni problem ekvivalentan problemu nalaženja $u \in H$ takvog da

$$\langle A(u), v\rangle = \langle f, v\rangle, \quad v \in H,$$

to jest $A(u) = f$. Navedimo neka svojstva preslikavanja $A : H \longrightarrow H$.

1. A je linearno preslikavanje (slijedi direktno iz bilinearnosti a).

2. A je neprekidno preslikavanje: za $v = A(u)$ iz neprekidnosti a slijedi

   $$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = a(u, A(u)) \leq M\|u\|\,\|A(u)\|,$$

   tj.

   $$\|A(u)\| \leq M\|u\|,$$

   dakle $A \in B(H)$.

3. Za $v = u$ iz koercitivnosti a slijedi

   $$\langle A(u), u\rangle = a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad u \in H.$$

Dalje možemo pisati $A(u) = Au$. Neka je $\lambda > 0$, želimo formulirati problem kao problem fiksne točke pa tražimo u takav da

$$f_\lambda(u) = u,$$

pri čemu je $f_\lambda(v) = v - \lambda(Av - f)$. Primijetimo da je taj problem ekvivalentan početnom te da ako je u fiksna točka za f_λ za neki $\lambda > 0$, tada je i fiksna točka za f_λ za svaki $\lambda > 0$. Dakle, da bi pokazali da problem $Au = f$ ima jedinstveno rješenje $u \in H$ dovoljno je pokazati da f_λ ima jedinstvenu fiksnu točku za neki $\lambda > 0$.

Provjeravamo uvjete Banachovog teorema o fiksnoj točki za f_λ. Neka su $v_1, v_2 \in H$, tada

$$f_\lambda(v_2) - f_\lambda(v_1) = (v_2 - v_1) - \lambda(Av_2 - Av_1).$$

Uz oznaku $v = v_2 - v_1$ računamo:

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(v_1) - f_\lambda(v_2)\|^2 &= \|v - \lambda A v\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\lambda\langle Av, v\rangle + \lambda^2\|Av\|^2. \end{aligned}$$

Ocjenjujemo pomoću 2) i 3):

$$\|f_\lambda(v_1) - f_\lambda(v_2)\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\lambda\alpha\|v\|^2 + \lambda^2 M^2\|v\|^2 = \kappa_\lambda^2\|v\|^2,$$

gdje je $\kappa_\lambda = \sqrt{1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2 M^2}$. Možemo odabrati $\tilde{\lambda} = \dfrac{\alpha}{M^2}$. Tada je $\kappa_{\tilde{\lambda}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{M^2}} < 1$, tj. $f_{\tilde{\lambda}}$ je $\kappa-$kontrakcija s konstantom $\kappa_{\tilde{\lambda}} < 1$.

□

Neka je H Hilbertov prostor, $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma koja je neprekidna i koercitivna, te $L \in H'$. Tada je funkcional $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ definiran s

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$$

neprekidan i koercitivan. Neprekidnost je jasna, a koercitivnost slijedi iz koercitivnosti bilinearne forme a i ograničenosti linearne forme L:

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\alpha\|v\|^2 - \|L\|\,\|v\| = \|v\|\left(\frac{1}{2}\alpha\|v\| - \|L\|\right).$$

Ako dodatno pretpostavimo da je a pozitivna bilinearna forma, J je konveksan funkcional (kao u dokazu teorema 2.1.3). Tada J zadovoljava pretpostavke teorema 2.2.4 pa postoji $u \in H$ u kojoj J postiže minimum na H. Po teoremu 2.1.3 u je ujedno i rješenje problema $a(u, v) = L(v),\ v \in V$.

S druge strane, u teoremu 2.2.4 je dovoljno imati refleksivan Banachov prostor pa će minimizacijski pristup biti bolji kada nemamo Hilbertov prostor (koji je uvijek refleksivan) ili bilinearna forma a nije simetrična.

Poglavlje 3

Primjeri klasičnih varijacijskih problema

U ovom poglavlju ćemo koristeći dosad dane rezultate pokazati egzistenciju i jedinstvenost slabog rješenja nekoliko standardnih rubnih problema. U nastavku rada pretpostavljamo da je Ω otvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^N$ klase C^1.

3.1 Dirichletov problem

Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, želimo naći rješenje $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ rubnog problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ \quad u &= g \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dakle, tražimo funkciju koja zadovoljava Poissonovu jednadžbu na Ω i rubni uvjet $u = g$ na $\partial\Omega$. Taj uvjet nazivamo Dirichletov rubni uvjet, a kada je $g = 0$ posebno ga nazivamo homogeni Dirichletov rubni uvjet.

Uz rješenje Dirichletovog problema vežemo sljedeći minimizacijski problem:

$$\min \{J(u) : u = g \text{ na } \partial\Omega\}, \tag{3.2}$$

pri čemu je

$$J(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right) dx \tag{3.3}$$

funkcional koji nazivamo *Dirichletov integral* ili *Dirichletova energija.* Malo kasnije ćemo dati poveznicu između Dirichletovog rubnog problema i problema minimizacije Dirichletovog funkcionala.

Pogledajmo najprije homogen Dirichletov problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Kada prvu jednadžbu pomnožimo s $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ te integriramo po Ω dobivamo

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx. \tag{3.5}$$

Ako pretpostavimo da je u dovoljno glatka funkcija možemo parcijalno integrirati (3.5). Rubni integral će biti jednak nuli jer je $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$ pa imamo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx. \tag{3.6}$$

Zbog gustoće $\mathcal{D}(\Omega)$ u $H_0^1(\Omega)$ jednakost (3.6) možemo po gustoći i neprekidnosti proširiti na $H_0^1(\Omega)$ čime dolazimo do standardne slabe formulacije Dirichletovog problema.

Definicija 3.1.1. *Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Kažemo da je $u \in H_0^1(\Omega)$ slabo rješenje homogenog Dirichletovog problema ako zadovoljava*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Primijetimo da ako je $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ klasično rješenje, to jest $u \in C^2(\bar{\Omega})$ zadovoljava (3.4), tada je u i slabo rješenje. Naime, kako su u i sve parcijalne derivacije od u neprekidne na $\bar{\Omega}$, posebno su ograničene iz čega slijedi $u \in H^1(\Omega)$. Pošto je $u = 0$ na rubu, iz propozicije 1.2.12 imamo $u \in H_0^1(\Omega)$. Sada iz gornjeg računa te činjenice da je $\mathcal{D}(\Omega)$ gusto u $H_0^1(\Omega)$ zaključujemo da je u slabo rješenje.

Može se pokazati i obrat; neka je $u \in C^2(\bar{\Omega})$ slabo rješenje homogenog Dirichletovog problema. Jer je u glatka funkcija iz $H_0^1(\Omega)$ vrijedi $u = 0$ na $\partial\Omega$. Kako je $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ posebno vrijedi

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

tj. vrijedi $-\Delta u = f$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Jer je u glatka poklapaju se klasične derivacije i distribucijske derivacije (do na derivacije drugog reda), dakle u zadovoljava $-\Delta u = f$ i u klasičnom smislu.

Teorem 3.1.2. *(Dirichletov varijacijski princip)*
Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Tada postoji jedinstveno slabo rješenje homogenog Dirichletovog problema koje je dano kao minimizator problema

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx \right\}. \tag{3.8}$$

Dokaz. Egzistenciju i jedinstvenost slabog rješenja pokazujemo preko Lax-Milgramove leme. Uzimamo $V = H_0^1(\Omega)$ što je Hilbertov prostor uz standardni H^1 skalarni produkt. Definiramo bilinearnu formu na $H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Iskoristimo Hölderovu nejednakost za $p = 2$:

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v| dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

dakle $a(\cdot,\cdot)$ je neprekidna bilinearna forma. Očito je simetrična, pokažimo još koercitivnost koristeći Poincaréovu nejednakost na $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (C^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= (C^2 + 1) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&= (C^2 + 1) a(u,u),
\end{aligned}$$

Dakle, $a(\cdot,\cdot)$ je koercitivna s konstantom $\frac{1}{C^2+1}$. Ostalo je pokazati da je linearan funkcional

$$L(v) := \int_\Omega f v dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega),$$

neprekidan. Preslikavanje $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ je dobro definirano zbog pretpostavke $f \in L^2(\Omega)$. Neprekidnost dobivamo iz sljedeće ocjene:

$$|L(v)| \leq \int_\Omega |f v| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Time je pokazano postojanje i jedinstvenost slabog rješenja homogenog Dirichletovog problema. Druga tvrdnja teorema je direktna posljedica teorema 2.1.3; $a(\cdot,\cdot)$ je simetrična i pozitivna. Uočimo da za $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\Omega \left| \nabla \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx - \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx.$$

Kada je $u_1 \neq u_2$ zadnji član je strogo manji od nula, dakle imamo strogu konveksnost. Kako je funkcional $v \mapsto \int_\Omega f v dx$ linearan, zaključujemo da je funkcional J strogo konveksan kao suma strogo konveksnog i linearnog funkcionala. Posebno je neprekidan kao suma neprekidnih. Nadalje, J je koercitivan:

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) \geq \|u\|_{H^1(\Omega)}\left(C\|u\|_{H^1(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Sada vidimo da smo egzistenciju i jedinstvenost mogli pokazati i preko teorema 2.2.4.

□

Pokazali smo da slabo rješenje postoji te da je ono ujedno i klasično rješenje ako je dovoljno glatko, pa se pitanje egzistencije i jedinstvenosti klasičnog rješenja svodi na pitanje regularnosti slabog rješenja. Napomenimo da dokaz u potpunosti prolazi za $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$, dakle teorem vrijedi i za $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Promotrimo sada nehomogen problem. Neka je $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tada postoji $G \in H^1(\Omega)$ takva da $g = \mathrm{tr}(G)$. Kažemo da je $u \in V := \left\{v \in H^1(\Omega) : \mathrm{tr}(v) = g \text{ na } \partial\Omega\right\}$ *slabo rješenje nehomogenog Dirichletovog problema* ako vrijedi

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Skup V je zatvoren, neprazan i konveksan podskup od $H^1(\Omega)$. Kako je $\mathrm{tr} : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ neprekidno linearno preslikavanje posebno vrijedi $V = G + H_0^1(\Omega)$.

Teorem 3.1.3. *Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Tada postoji jedinstveno slabo rješenje nehomogenog Dirichletovog problema te je ono dano kao minimizator problema*

$$\min_{u \in V}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx\right\}. \tag{3.10}$$

Dokaz. Najprije pokazujemo egzistenciju i jedinstvenost minimizacijskog problema (3.10). Definiramo funkcional $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sa

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx.$$

Kako bismo mogli primijeniti teorem 2.2.4 na $H^1(\Omega)$ funkcional J ćemo proširiti do funkcionala $\tilde{J} : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiranog kao

$$\tilde{J}(u) := \begin{cases} J(u), & u \in V, \\ +\infty, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada je problem (3.10) ekvivalentan problemu minimizacije funkcionala $\tilde{J}$ na $H^1(\Omega)$. On je konveksan i neprekidan, još je potrebno pokazati koercitivnost. Neka je $u \in V$. Tada je

$u = v + G$ za neki $v \in H_0^1(\Omega)$, pa imamo ocjenu

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}||\nabla v + \nabla G||^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(v+G)dx \\
&\geq \frac{1}{2}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\nabla G||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla G dx \\
&\qquad - ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)}||G||_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\nabla G||^2_{L^2(\Omega)} - ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}||\nabla G||_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad - C||f||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)}||G||_{L^2(\Omega)} \\
&= ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}\left(\frac{1}{2}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} - ||\nabla G||_{L^2(\Omega)} - C||f||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}||\nabla G||^2_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)}||G||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Izraz u zagradi u zadnjem retku je pozitivan za dovoljno velike $||\nabla v||_{L^2(\Omega)}$. Kako za $H_0^1(\Omega)$ funkcije vrijedi Poincaréova nejednakost $||v||_{H^1(\Omega)} \leq C||\nabla v||_{L^2(\Omega)}$, kada H^1 norma funkcije v teži beskonačnosti i L^2 norma funkcije ∇v teži beskonačnosti. Primijetimo još da su f i G fiksne funkcije. Sada konačno iz ocjene (3.11) vidimo da $J(u) \longrightarrow +\infty$ kada $||v||_{H^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$. Tada je i $\tilde{J}$ koercitivan, dakle postoji rješenje minimizacijskog problema (3.10).

Jedinstvenost je direktna posljedica činjenice da je funkcional $\int_\Omega |\nabla \cdot|^2 dx$ strogo konveksan, jer je tada i $J(\cdot)$ strogo konveksan. Za dva različita minimizatora $u_1, u_2 \in V$ zbog konveksnosti skupa V vrijedi $\frac{u_1+u_2}{2} \in V$ te imamo

$$\min_{u\in V} J(u) = \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) > J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right),$$

što je kontradikcija. Zaključujemo da je minimizator jedinstven. Pokažimo sada da je on ujedno i rješenje slabog nehomogenog Dirichletovog problema. Po propoziciji 2.1.4 je $u \in V$ minimizator funkcionala J ako i samo ako vrijedi

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx - \int_\Omega f(v-u)dx \geq 0, \qquad v \in V. \tag{3.12}$$

Primijetimo da je $v \in V$ ako i samo ako $v - u \in H_0^1(\Omega)$, dakle (3.12) je ekvivalentno s

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f v dx \geq 0, \qquad v \in H_0^1(\Omega),$$

iz čega kada uzmemo $-v$ umjesto v slijedi tvrdnja.

□

3.2 Neumannov problem

Neka je $f \in L^2(\Omega)$ te $g \in L^2(\partial\Omega)$. Neumannov problem je dan s

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0 u & = f \quad \text{na } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = g \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

gdje je $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ takva da vrijedi $a_0 \geq \alpha$ s.s. za neki $\alpha > 0$. Slaba formulacija ovog problema se izvodi analogno Dirichletovom homogenom slučaju te se svodi na nalaženje $u \in H^1(\Omega)$ t.d. vrijedi

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv) dx = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv dS, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{3.14}$$

Funkciju $u \in H^1(\Omega)$ koja zadovoljava (3.14) nazivamo *slabo rješenje Neumannovog problema*. Prvo ćemo pokazati da je slabo rješenje ujedno i klasično ako je $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Za $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ zbog pretpostavljene glatkoće možemo parcijalno integrirati (3.14) čime dobivamo

$$-\int_\Omega \Delta uv dx + \int_\Omega a_0 uv dx = \int_\Omega fv dx, \quad v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Kako je $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ te u glatka funkcija, $a_0 u$ je dobro definirana distribucija te vrijedi

$$-\Delta u + a_0 u = f \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

$-\Delta u + a_0 u - f$ je L^2 funkcija, pa zaključujemo

$$-\Delta u + a_0 u - f = 0 \quad \text{s.s. na } \Omega. \tag{3.15}$$

Slično za $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dobivamo

$$-\int_\Omega \Delta uv dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v dS + \int_\Omega a_0 uv dx = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv dS,$$

što se kada iskoristimo (3.15) ekvivalentno s

$$\int_{\partial\Omega} tr\left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) \mathrm{tr}(v) dS = 0, \quad v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Kako je operator traga neprekidan, gornja jednakost vrijedi za svaki $v \in H^1(\Omega)$. Sada iz činjenice da je slika traga $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ gusta u $L^2(\partial\Omega)$ i glatkoće $\frac{\partial u}{\partial n}$ nužno slijedi $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na $\partial\Omega$. Dakle, pitanje egzistencije klasičnog rješenja se svodi na pitanje regularnosti slabog rješenja.

Najprije promatramo homogen Neumannov problem, to jest pretpostavit ćemo $g = 0$.

Teorem 3.2.1. *Postoji jedinstveno slabo rješenje homogenog Neumannovog problema i ono je dano kao minimizator problema*

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a_0 u^2 \right) dx - \int_\Omega f u dx \right\}. \tag{3.16}$$

Dokaz. Da je rješenje (ako postoji) dano kao minimizator (3.16) slijedi direktno iz činjenice da je

$$a(u,v) := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv) dx$$

simetrična i pozitivna bilinearna forma; simetričnost je očita, a za proizvoljan $u \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a_0 u^2 \right) dx \geq \min\{1,\alpha\} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \geq 0.$$

Posebno, $a(\cdot,\cdot)$ je koercitivna s koeficijentom $\min\{1,\alpha\}$. Također je neprekidna:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left(|\nabla u \cdot \nabla v| + \|a_0\|_{L^\infty} |uv| \right) dx \\
&\leq \max\{1, \|a_0\|_{L^\infty}\} \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq 2 \max\{1, \|a_0\|_{L^\infty}\} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \qquad u, v \in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Linearan funkcional

$$L(v) := \int_\Omega f v dx$$

je neprekidan na $H^1(\Omega)$:

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Sada nam Lax-Milgramova lema daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja na $H^1(\Omega)$.

□

Vratimo se na nehomogeni Neumannov problem i odgovarajuću slabu formulaciju

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv) dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v dS, \qquad v \in H^1(\Omega). \tag{3.17}$$

Za bilinearnu formu $a(\cdot,\cdot)$ definiranu kao u prethodnom teoremu smo već pokazali svojstva koja zahtijeva Lax-Milgramova lema, još je potrebno pokazati neprekidnost linearnog operatora $L : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranog kao

$$L(v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v dS.$$

Kako je operator traga neprekidan s $H^1(\Omega)$ u $L^2(\partial\Omega)$, postoji $C > 0$ t.d. $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$, $v \in H^1(\Omega)$. Tada za $v \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Time je pokazana egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja $u \in H^1(\Omega)$ nehomogenog Neumannovog problema. Analogno kao i u prethodnom teoremu se pokazuje da je ono dano kao minimizator problema

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a_0u^2\right)dx - \int_\Omega fudx - \int_{\partial\Omega} gudS \right\}. \tag{3.18}$$

Za dobru postavljenost Neumannovog problema je bila važna pretpostavka $a_0(x) \geq \alpha > 0$ s.s. na Ω, jer inače odgovarajuća bilinearna forma nije koercitivna. Promotrimo sljedeći problem:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

pri čemu je $f \in L^2(\Omega)$. Sada je $a_0 = 0$ i time gubimo jedinstvenost; ako je u rješenje (3.19) tada je i $u + C$ rješenje, $C \in \mathbb{R}$. Kako bi problem postao koercitivan, uvodimo novi prostor

$$V := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega udx = 0 \right\}.$$

Neka je $(u_n) \subset V$ takav da $u_n \longrightarrow u$ u $H^1(\Omega)$, tada

$$\left| \int_\Omega u_n dx - \int_\Omega udx \right| \leq \int_\Omega |u_n - u|dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to +\infty,$$

to jest vrijedi

$$\int_\Omega u_n dx \longrightarrow \int_\Omega udx.$$

Kako za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $\int_\Omega u_n dx = 0$ nužno vrijedi $\int_\Omega udx = 0$, pa zaključujemo da je $u \in V$. Dakle, V je zatvoren podskup od $H^1(\Omega)$, pa je posebno i Hilbertov. Prisjetimo se Poincaré-Wirtinger nejednakosti: postoji konstanta $C > 0$ takva da

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Za $u \in V$ ta nejednakost glasi $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Sada je bilinearna forma

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx$$

koercitivna na V s konstantom $\frac{1}{C^2+1}$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C^2 + 1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (C^2 + 1)a(u, u).$$

Time je riješen problem egzistencije i jedinstvenosti rješenja slabe formulacije problema (3.19).

Teorem 3.2.2. *Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Tada postoji jedinstveni $u \in V$ takav da*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in V, \tag{3.20}$$

te je on dan kao minimizator problema

$$\min_{u \in V} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx \right\}. \tag{3.21}$$

Pretpostavimo sada da je u glatko rješenje (3.19), integracijom na Ω dobivamo

$$\int_\Omega f dx = -\int_\Omega \Delta u dx = -\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n dS = 0,$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili teorem o divergenciji. Zaključujemo da je uvjet $\int_\Omega f dx = 0$ nužan za egzistenciju klasičnog rješenja, a sada ćemo pokazati da je i dovoljan, te da je rješenje jedinstveno do na konstantu.

Teorem 3.2.3. *Neka je $f \in L^2(\Omega)$ takva da $\int_\Omega f dx = 0$, i neka je $u \in V$ regularno rješenje* (3.20)*. Tada je u rješenje problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \\ \int_\Omega u dx &= 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Sva druga klasična rješenja (3.19) *su oblika $u + C$, $C \in \mathbb{R}$. Obratno, ako je u klasično rješenje* (3.19)*, tada je $u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ rješenje problema* (3.20).

Dokaz. Primijetimo da za $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ vrijedi $v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v dx \in V$. Sada ako je $u \in V$ regularno rješenje (3.20) vrijedi

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f \left(v - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v dx \right) dx, \qquad v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),$$

tj. kada iskoristimo pretpostavku $\int_\Omega f dx = 0$ imamo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Sada se sličnim metodama kao i ranije dobije da u zadovoljava (3.22). Ako je $\tilde{u} \in V$ neko drugo klasično rješenje (3.19), tada vrijedi

$$\begin{cases} -\Delta(u-\tilde{u}) & = 0 \quad \text{na } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(u-\tilde{u}) & = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prvu jednakost pomožimo s $u - \tilde{u}$, integriramo po Ω i parcijalno integriramo:

$$\int_\Omega |\nabla(u-\tilde{u})|^2 dx = 0,$$

iz čega zaključujemo $u - \tilde{u} = C$, za neki $C \in \mathbb{R}$.

Obratno, ako je u klasično rješenje (3.19) tada se $u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ nalazi u V i zadovoljava (3.19). Množenjem prve jednadžbe s $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, integriranjem po Ω i parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_\Omega \nabla\left(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx\right) \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dS,$$

pa iz gustoće $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ u $H^1(\Omega)$ slijedi tvrdnja.

□

3.3 Mješoviti Dirichlet-Neumannov problem

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren, ograničen i povezan skup klase C^1, i neka je $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Pretpostavimo još da je Γ_0 pozitivne Lebesgueove mjere u $\mathbb{R}^{N-1}$. Sada zadajemo dva različita tipa rubnih uvjeta:

$$\begin{cases} -\Delta u & = f \quad \text{na } \Omega, \\ \quad u & = 0 \quad \text{na } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} & = g \quad \text{na } \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.23}$$

Na Γ_0 smo zadali homogeni Dirichletov rubni uvjet, a na Γ_1 Neumannov. Takav rubni uvjet nazivamo *Dirichlet-Neumannov rubni uvjet*. Pretpostavimo da je u glatko rješenje

(3.23). Ako pomnožimo prvu jednakost s $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ takvom da $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$ i integriramo po Ω, parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi dS.$$

Kako je φ jednaka nuli na Γ_0, to je ekvivalentno s

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx + \int_{\Gamma_1} g \varphi dS.$$

Neumannov rubni uvjet se implicitno nalazi u jednakosti kao rubni integral. Sada je prirodno definirati prostor

$$V := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \mathrm{tr}(u) = 0 \text{ na } \Gamma_0 \right\},$$

za kojeg se lako provjeri da je Hilbertov uz H^1 skalarni produkt. Kažemo da je $u \in V$ *slabo rješenje problema* (3.23) ako vrijedi

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_1} g v dS, \qquad v \in V. \tag{3.24}$$

Pokažimo sada da ako je slabo rješenje dovoljno glatko, ono je ujedno i klasično rješenje. Neka je $u \in V$ glatka funkcija koja zadovoljava (3.24). Uzimanjem $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$ se lako kao i ranije dobiva

$$-\Delta u = f \quad \text{ s.s. na } \Omega.$$

Kako se u nalazi u V i regularna je, zadovoljava homogeni Dirichletov rubni uvjet na Γ_0. Još treba pokazati da zadovoljava Neumannov rubni uvjet iz (3.23). Kada u (3.24) uzmemo da je $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ takva da $v|_{\Gamma_0} = 0$, parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \int_{\Gamma_1} g v dS, \qquad v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma_0} = 0. \tag{3.25}$$

Za $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ vrijedi $v|_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$. Ako pretpostavimo da je dio granice Γ_0 dovoljno gladak da skup $\{v|_{\Gamma_1} : v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma_0} = 0\}$ bude gust u $L^2(\Gamma_1)$, iz (3.25) slijedi

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{ na } \Gamma_1.$$

Dakle, uz određene pretpostavke na regularnost ruba domene su slabo i klasično rješenje ekvivalentni.

Teorem 3.3.1. *Neka su $f \in L^2(\Omega)$ i $g \in L^2(\Gamma_1)$. Tada postoji jedinstveno slabo rješenje problema* (3.23) *te je ono dano kao minimizator problema*

$$\min_{u \in V} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fudx - \int_{\Gamma_1} gudS \right\}. \tag{3.26}$$

Dokaz. Bilinearna forma

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

je simetrična i neprekidna na V. Kako je V zatvoren potprostor od $H^1(\Omega)$ te je trag funkcija iz V jednak nula na skupu pozitivne Lebesgueove mjere, zadovoljene su pretpostavke teorema 1.2.5. Tada postoji $C > 0$ takav da

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}, \quad v \in V,$$

iz čega kao i ranije slijedi koercitivnost. Posebno, $a(\cdot,\cdot)$ je pozitivno definitna. Kako je operator traga neprekidan s $H^1(\Omega)$ u $L^2(\partial\Omega)$ lako se provjeri da je linearna forma

$$L(v) = \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_1} gvdS$$

neprekidna.

□

Neumannovom rubnom uvjetu u (3.23) možemo dodati član $a_0 u$ gdje je a_0 definirana na $\partial\Omega$, tj. promatramo rubni uvjet oblika

$$a_0 u + \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{3.27}$$

Kada je $a_0 = 0$ dobivamo upravo Neumannov rubni uvjet, kada $a_0 \to +\infty$ vidimo da (3.27) teži homogenom Dirichletovom rubnom uvjetu, a uzimanjem različitih vrijednosti a_0 na različitim dijelovima granice možemo dobiti Dirichlet-Neumannove rubne uvjete. Dakle (3.27) u sebi sadrži oba rubna uvjeta, pa se često naziva *mješoviti Dirichlet-Neumannov rubni uvjet* (ili Robinov rubni uvjet).

Pretpostavimo da je $a_0 : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da za neki $\alpha > 0$ vrijedi $a_0 \geq \alpha$ s.s. na $\partial\Omega$. Promotrimo problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ a_0 u + \dfrac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Kako nemamo više Dirichletov rubni uvjet, dobar odabir prostora je $H^1(\Omega)$, a mješoviti rubni uvjet se pojavljuje implicitno u slaboj formulaciji. Tražimo $u \in H^1(\Omega)$ takav da

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} a_0 uvdS = \int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} gvdS, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{3.29}$$

Slaba formulacija (3.29) je ekvivalentna nalaženju minimizatora problema

$$\min_{u \in V} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} a_0 u^2 dS - \int_{\Omega} f u dx - \int_{\Gamma_1} g u dS \right\}. \tag{3.30}$$

Ekvivalencija slabog i klasičnog rješenja kada je funkcija dovoljno glatka se jednostavno pokazuje već korištenim metodama. Jedino je egzistencija upitna, tj. koercitivnost bilinearne forme

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} a_0 u v dS.$$

Kako smo na prostoru $H^1(\Omega)$ ne vrijedi Poincaréova nejednakost, ali slično kao i kod kvazikoercitivnog Neumannovog problema uvest ćemo novi prostor na kojem možemo primijeniti teorem 1.2.5:

$$V := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} u dS = 0 \right\}.$$

Očito za svaki $u \in H^1(\Omega)$ vrijedi $u - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u dS \in V$, te kako V zadovoljava pretpostavke teorema 1.2.5 vrijedi nejednakost

$$\left\| u - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u dS \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nejednakost $\int_{\partial\Omega} u dS \leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}$ nam daje

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2C^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2|\Omega||\partial\Omega|^{-1} \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq 2 \max \left\{ C^2, |\Omega||\partial\Omega|^{-1} \right\} \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Zbog pretpostavki na a_0 možemo napraviti ocjenu

$$a(u, u) \geq \min \{1, \alpha\} \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

te je sada lako pokazati koercitivnost:

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \max \left\{ C^2, |\Omega||\partial\Omega|^{-1} \right\} \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + 2 \max \left\{ C^2, |\Omega||\partial\Omega|^{-1} \right\} \right) \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{1 + 2 \max \left\{ C^2, |\Omega||\partial\Omega|^{-1} \right\}}{\min \{1, \alpha\}} a(u, u). \end{aligned}$$

3.4 Stokesov problem

Proučavat ćemo Stokesov sustav koji opisuje tok viskoznog inkompresibilnog fluida. Za danu volumnu gustoću $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ te koeficijent viskoznosti $\mu > 0$ tražimo brzinu toka $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ te tlak $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ takve da

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{na } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.31}$$

Uvjet $\operatorname{div} u = 0$ označava da fluid nije kompresibilan, tj. da nema promjene volumena. Taj uvjet uključujemo u prostor test-funkcija

$$\mathcal{V} := \left\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N) : \operatorname{div} \varphi = 0\right\}.$$

Kada pomnožimo (3.31) s $\varphi \in \mathcal{V}$ i integriramo po Ω dobivamo

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \mu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi dS - \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} p(\varphi \cdot n) dS = \int_\Omega f\varphi dx.$$

Kako je $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$ te $\operatorname{div} \varphi = 0$ imamo

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx, \qquad \varphi \in \mathcal{V}.$$

Slično kao i s $\mathcal{D}(\Omega)$ možemo uzeti zatvarač prostora $\mathcal{V}$ u H^1 normi za odabir prostora za slabu formulaciju. Pokazuje se da je taj prostor jednak prostoru

$$V = \left\{u \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^N) : \operatorname{div} u = 0\right\}$$

koji je Hilbertov uz H^1 skalarni produkt: neka je $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, imamo ocjenu

$$\|\operatorname{div}(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\|\sum_{i=1}^N \partial_i u_i\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega (\partial_i u_i)(\partial_j u_j) dx \le \int_\Omega \sum_{i=1}^N (\partial_i u_i)^2 dx \le \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Dakle $\operatorname{div} : H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\Omega)$ je neprekidan operator. Kako je V jednak jezgri operatora divergencije zaključujemo da je V zatvoren potprostor od $H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^N)$, pa je posebno Hilbertov. Želimo naći $u \in V$ takav da

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in V. \tag{3.32}$$

Takav u nazivamo *slabo rješenje Stokesovog problema*. Uočimo da se u slaboj formulaciji ne pojavljuje tlak, ali se njegova egzistencija može dobiti iz sljedećeg teorema (vidi [10, Lema 7] ili [2, Teorem 2.8]).

Teorem 3.4.1. *(De Rham)*
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ograničen i povezan skup klase C^1, te $F \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N) = (H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N))'$ takav da

$$\langle F, v \rangle = 0, \quad v \in V.$$

Tada postoji $p \in L^2(\Omega)$, jedinstven do na aditivnu konstantu, takav da $F = \nabla p$ (u smislu distribucija).

Neka je $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ glatko rješenje slabe Stokesove formulacije (3.32). Definiramo linearan funkcional

$$F(v) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f v dx, \quad v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Lako se provjeri da je F ograničen funkcional na $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Posebno $\langle F, v \rangle = 0$ za sve $v \in V$, pa po teoremu 3.4.1 postoji $p \in L^2(\Omega)$ takav da

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f v dx = \int_\Omega \nabla p v dx, \quad v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Sada nam nakon parcijalne integracije osnovna lema varijacijskog računa daje

$$-\mu \Delta u - f = \nabla p \quad \text{s.s. na } \Omega. \tag{3.33}$$

Ako dodatno pretpostavimo da je volumna gustoća f neprekidna na $\bar{\Omega}$, iz (3.33) zaključujemo $p \in C^1(\bar{\Omega})$. Kako smo pretpostavili da je $u \in V$ dovoljno glatka tada $\operatorname{div} u = 0$ i $u|_{\bar{\Omega}} = 0$ vrijede i u klasičnom smislu. Dakle, $(u, p) \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N) \times C^1(\bar{\Omega})$ je klasično rješenje Stokesovog problema (3.31).

Lako se provjere uvjeti Lax-Milgramove leme za slabu formulaciju kako bi se dobila egzistencija i jedninstvenost.

Teorem 3.4.2. *Neka je $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Tada postoji jedinstveno slabo rješenje $u \in V$ slabe formulacije Stokesovog problema* (3.32).

Direktniji pristup problemu je preko Helmholtzove dekompozicije, koji ćemo ukratko opisati. Sve tvrdnje se mogu naći u [7] i [2]. Uzmimo jednostavnosti radi $\mu = 1$. Označimo sa $V^\perp$ ortogonalni komplement od V u $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ s obzirom na skalarni produkt $\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle$. Pokazuje se da je operator divergencije izomorfizam sa $V^\perp$ u $L_0^2(\Omega)$, pri čemu je

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0 \right\}.$$

Za $f \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ definiramo $(-\Delta)^{-1} f$ kao rješenje problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{na } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{3.34}$$

Operator $(-\Delta)^{-1}$ nazivamo Greenov operator za Dirichletov homogeni problem. Vrijedi sljedeća karakterizacija:

$$V^\perp = \left\{(-\Delta)^{-1}\nabla q : q \in L^2_0(\Omega)\right\}. \tag{3.35}$$

Jer je $V = \mathrm{Ker}(\mathrm{div})$ zatvoren potprostor od $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ imamo dekompoziciju

$$H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N) = V \oplus V^\perp.$$

Znamo da sustav (3.34) ima jedinstveno rješenje $w \in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Uočimo da je $\mathrm{div}\, w \in L^2_0(\Omega)$. Jer je operator divergencije izomorfizam sa $V^\perp$ u $L^2_0(\Omega)$ postoji $v \in V^\perp$ takav da $\mathrm{div}\, w = \mathrm{div}\, v$. Po karakterizaciji $V^\perp$ postoji jedinstveni $p \in L^2_0(\Omega)$ takav da

$$v = (-\Delta)^{-1}\nabla p,$$

to jest

$$-\Delta v = \nabla p.$$

Sada se lako provjeri da je $(w - v, p)$ rješenje Stokesovog problema (3.31).

3.5 Nelinearan Laplaceov operator

U dosadašnjim primjerima smo proučavali Laplaceov operator i linearne eliptičke jednadžbe. Sada za $p \in [1, +\infty]$ definiramo nelinearno poopćenje Laplaceovog operatora definirano s

$$\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Taj operator nazivamo *p-Laplaceov* ili *nelinearan Laplaceov operator*. Primijetimo da vrijedi $\Delta_2 = \Delta$, to jest za $p = 2$ dobivamo upravo Laplaceov operator. Rješenja jednadžbe

$$\Delta_p u = 0 \tag{3.36}$$

nazivamo *p-harmonijskim funkcijama*. Mnogi rezultati iz klasične teorije Laplaceovog operatora vrijede i za p-harmonijske funkcije (vidi [8]).

Za $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup te $f \in L^\infty(\Omega)$ promatramo problem

$$\begin{cases} \Delta_p u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.37}$$

U proučavanju ovog problema ćemo koristiti teorem 2.2.4 koji vrijedi za refleksivne Banachove prostore, pa ćemo dalje pretpostaviti $p \in \langle 1, +\infty\rangle$; tada je prostor $W^{1,p}(\Omega)$ refleksivan.

Slučajevi $p = 1$ i $p = +\infty$ su značajno kompliciraniji. Slaba formulacija problema (3.37) se lako izvede, tražimo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ takav da

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.38}$$

Takav u nazivamo *slabo rješenje problema* (3.37).

Teorem 3.5.1. *Neka je* $f \in L^\infty(\Omega)$ *te* $p \in \langle 1, +\infty\rangle$. *Tada postoji jedinstven* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *koji zadovoljava slabu formulaciju* (3.38) *te je rješenje dano kao minimizator problema*

$$\min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u dx \right\}. \tag{3.39}$$

Dokaz. Najprije ćemo pokazati da je rješenje minimizacijskog problema (3.39) ujedno i rješenje slabe formulacije (3.38). Kako bilinearna forma $a(u, v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx$ nije simetrična ne možemo primijeniti teorem 2.1.3. Promatramo funkcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiran s

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u dx.$$

Neka je $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ rješenje (3.39), sada za svaki $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ i svaki $t > 0$ imamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{t}\Big(J(u + tv) - J(u)\Big) &= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla(u + tv)|^p dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - t \int_\Omega f v dx\right) \\ &= \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{|\nabla(u + tv)|^p - |\nabla u|^p}{t} dx - \int_\Omega f v dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Definiramo realnu funkciju realne varijable $h(t) := |\nabla(u + tv)|^p$. Ona je derivabilna i vrijedi

$$h'(t) = p|\nabla(u + tv)|^{p-2}(\nabla(u + tv)) \cdot \nabla v,$$

iz čega možemo zaključiti

$$\frac{|\nabla(u + tv)|^p - |\nabla u|^p}{t} = \frac{1}{t}(h(t) - h(0)) = \frac{1}{t} h'(s)(t - 0) = h'(s),$$

pri čemu je $s \in \langle 0, t\rangle$. To nam daje sljedeću ocjenu za $s \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{|\nabla(u + tv)|^p - |\nabla u|^p}{t}\right| &= p|\nabla(u + sv)|^{p-1}|\nabla v| \\ &\leq p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|. \end{aligned}$$

Neka je p' konjugirani gradijent od p. Tada je $p'(p - 1) = p$ te kako su u i v funkcije iz $W_0^{1,p}(\Omega)$ vrijedi $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$, to jest $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega)$. Dakle kada je

$t \in \langle 0, 1]$ desna strana gornje nejednakosti je $L^1(\Omega)$ funkcija koja ne ovisi o t, pa nam sada iz (3.40) Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji kada $t \longrightarrow 0^+$ daje

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f v dx \geq 0.$$

Kako je $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ proizvoljan, uzimanjem $-v$ umjesto v dobivamo suprotnu nejednakost, tj. vrijedi

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Jer je $W_0^{1,p}(\Omega)$ refleksivan Banachov prostor, treba još pokazati da je J konveksan, koercitivan i odozdo neprekidan funkcional da bismo mogli primijeniti teorem 2.2.4. Neka su $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tada za $\lambda \in [0, 1]$ imamo

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1-\lambda)v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\lambda \nabla u + (1-\lambda)\nabla v|^p\, dx - \int_\Omega f(\lambda u + (1-\lambda)v) dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p}\int_\Omega (1-\lambda)|\nabla v|^p dx - \int_\Omega f\lambda u dx - \int_\Omega f(1-\lambda) v dx \\ &= \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v), \end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjem koraku iskoristili konveksnost preslikavanja $x \rightarrow x^p$ na $\mathbb{R}^+$. Ono je i strogo konveksno, pa iz gornjeg računa vidimo da je i J strogo konveksan funkcional. Neka je sada $M > 0$ i pretpostavimo da za $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vrijedi $J(u) \leq M$, to jest

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u dx \leq M.$$

To nam daje ocjenu

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq p\int_\Omega |fu| dx + pM \leq p|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|f\|_\infty \|u\|_{L^p(\Omega)} + pM,$$

te kada iskoristimo Poincaréovu nejednakost vrijedi

$$\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leq pC|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|f\|_\infty + \frac{pM}{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Sada ili je $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$, ili $\frac{pM}{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}} < pM$, pa zaključujemo

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \max\left\{1, \left(pC|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|f\|_\infty + pM\right)^{\frac{1}{p-1}}\right\}.$$

Kako za $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vrijedi

$$||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} \leq (C+1)||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)},$$

dobili smo da je M-nivo skup $\left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J(u) \leq M\right\}$ ograničen, za svaki $M \in \mathbb{R}$. Tada je J nužno koercitivan; inače bi postojao neki $M > 0$ te niz (u_n) u $W_0^{1,p}(\Omega)$ takav da $||u_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ i $J(u_n) \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ što je kontradikcija s upravo pokazanim. Još je funkcional J neprekidan kao suma dva neprekidna funkcionala, dakle pokazali smo da postoji rješenje minimizacijskog problema (3.39). Posebno kako je J strogo konveksan, ono je jedinstveno.

□

3.6 Uvjeti transmisije u heterogenom mediju

Promatramo otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ koji je podijeljen na dva otvorena skupa Ω_1, Ω_2 sa zajedničkom glatkom granicom Σ tako da vrijedi

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma.$$

Ovdje Ω_1 i Ω_2 predstavljaju dva različita materijala s koeficijentima provođena k_1, odnosno k_2. Koeficijent provođenja na Ω definiramo kao funkciju

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{na } \Omega_1, \\ k_2 & \text{na } \Omega_2. \end{cases}$$

U daljnim razmatranjima će nam biti dovoljno da je k omeđena funkcija na Ω, pa ju ostavljamo nedefiniranu na Σ. Pretpostavimo da je rub domene $\partial\Omega$ učvršćen u zemlju, te s $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ označimo gustoću naboja. Iz teorije elektrostatike za danu potencijalnu funkciju imamo formulu za unutarnju energiju

$$\Phi(u) = \int_\Omega k|\nabla u|^2 dx.$$

Tada je ravnotežna potencijalna funkcija dana kao rješenje minimizacijskog problema

$$\min_{u|_{\partial\Omega}=0} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega k|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx\right\}.$$

Teorem 3.6.1. *Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Tada postoji jedinstveno rješenje $u \in H_0^1(\Omega)$ minimizacijskog problema*

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega k|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx\right\}. \tag{3.41}$$

Ono je ujedno i rješenje slabog problema nalaženja $u \in H_0^1(\Omega)$ takve da

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.42}$$

Dokaz. Primijenit ćemo teorem 2.2.4 na funkcional

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega k|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx.$$

On je konveksan kao suma konveksne i linearne funkcije te kako vrijede sljedeće ocjene je i neprekidan na $H_0^1(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega k|\nabla u|^2 dx\right| \leq ||k||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||k||_{L^\infty(\Omega)}||u||^2_{H^1(\Omega)},$$

$$\left|\int_\Omega f u dx\right| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{H^1(\Omega)}.$$

Za $u \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi niz nejednakosti

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{min\{k_1,k_2\}}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{min\{k_1,k_2\}}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} - C||f||_{L^2(\Omega)}||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \\ &= ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}\left(\frac{min\{k_1,k_2\}}{2}||\nabla u||_{L^2(\Omega)} - C||f||_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je pozitivan za funkcije s dovoljno velikom L^2 normom. Kada $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ tada iz gornje ocjene zaključujemo i $J(u) \longrightarrow +\infty$, pa je funkcional J koercitivan na $H_0^1(\Omega)$. Dakle, postoji minimizator problema (3.41). Jer je funkcional J posebno strogo konveksan kao suma strogo konveksne i linearne funkcije taj minimizator je jedinstven. Druga tvrdnja će jednostavno slijediti iz teorema 2.1.3, jer je bilinearna forma

$$a(u,v) = \int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v dx$$

simetrična i pozitivna.

$\square$

Pretpostavimo da je $u|_{\Omega_1} = u_1$ i $u|_{\Omega_2} = u_2$, te da je u glatka u smislu $u_1 \in C^2(\bar{\Omega}_1), u_2 \in C^2(\bar{\Omega}_2)$. Neka je u još i rješenje (3.42), to jest $u \in H_0^1(\Omega)$ i vrijedi

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.43}$$

Kako nismo pretpostavili glatkoću na zajedničkoj granici, uzimat ćemo test funkcije najprije na Ω_1, pa onda na Ω_2. Neka je $v \in \mathcal{D}(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega)$, tada imamo

$$k_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega_1} f v dx, \qquad v \in \mathcal{D}(\Omega_1),$$

to jest nakon parcijalne integracije

$$-k_1 \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v dx = \int_{\Omega_1} f v dx, \qquad v \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

Kao i do sada lako zaključujemo

$$-k_1 \Delta u_1 = f \quad \text{s.s. na } \Omega_1. \tag{3.44}$$

Analogno se dolazi do istog rezultata na Ω_2:

$$-k_2 \Delta u_2 = f \quad \text{s.s. na } \Omega_2. \tag{3.45}$$

Jer je $u \in H_0^1(\Omega)$, postoji niz $(u_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ takav da $u_n \longrightarrow u$ u $H^1(\Omega)$. Posebno onda vrijedi

$$u_n|_{\Omega_1} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1), \quad u_n|_{\Omega_2} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2).$$

Kako vrijedi

$$\|u_n|_{\Omega_1} - u|_{\Omega_1}\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \int_{\Omega_1} |u_n - u|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u_n - u|^2 dx = \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

te analogno za gradijente, posebno imamo

$$u_n|_{\Omega_1} \longrightarrow u_1 \text{ u } H^1(\Omega_1).$$

Znamo da je operator traga neprekidan s $H^1(\Omega)$ u $L^2(\Sigma)$, te kako su funkcije u_n glatke, za njih vrijedi $\mathrm{tr}(u_n) = u_n|_\Sigma$. Sve to nam daje

$$u_n|_\Sigma \longrightarrow \mathrm{tr}(u_1) \text{ u } L^2(\Sigma).$$

Sasvim analogno zaključujemo

$$u_n|_\Sigma \longrightarrow \mathrm{tr}(u_2) \text{ u } L^2(\Sigma),$$

to jest trag funkcije u je jednak s obje strane zajedničke granice Σ. Sada zbog početne pretpostavke na glatkoću funkcija u_1, u_2 možemo zaključiti da je funkcija u neprekidna na

Ω. Posebno, zbog pretpostavki na glatkoću te jer $u \in H_0^1(\Omega)$ imamo da je $u = 0$ na $\partial\Omega$. Sada se vratimo na (3.43) i uzmimo test funkciju $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pogledajmo član

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v dx = k_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v dx + k_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v dx.$$

Neka je n vanjska normala na Σ obzirom na Ω_1, tada parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v dx = -k_1 \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v dx + k_1 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} v dS \\ - k_2 \int_{\Omega_2} \Delta u_2 v dx - k_2 \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} v dS.\end{aligned}$$

Sada ako uzmemo u obzir (3.44) i (3.45) dobivamo

$$\int_\Sigma \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) v dx = 0, \qquad v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

iz čega slijedi

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}.$$

Skupimo sad dokazane tvrdnje za dovoljno glatku funkciju $u \in H_0^1(\Omega)$ koja zadovoljava (3.42):

$$\begin{cases} -k_1 \Delta u_1 &= f \qquad \text{na } \Omega_1, \\ -k_2 \Delta u_2 &= f \qquad \text{na } \Omega_2, \\ u_1 &= u_2 \quad\ \text{na } \Sigma, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \ \text{na } \Sigma, \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.46}$$

Može se pokazati da ako je u takav da $u_1 \in C^2(\bar{\Omega}_1), u_2 \in C^2(\bar{\Omega}_2)$ zadovoljava (3.46), tada je u ujedno i rješenje slabog problema (3.42). Jedina zahtjevna tvrdnja je da je $u \in H^1(\Omega)$, to jest da slaba derivacija postoji.

Bibliografija

[1] R. A. Adams i J. J. Fournier, *Sobolev Spaces*, London: Academic Press, 2003.

[2] L. C. Amrouche i V. Girault, *Partial Differential Equations*, Czechoslovak Mathematical Journal,vol. 44, issue 1, pp. 109-140, 1994.

[3] H. Attouch, G. Buttazzo i G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization*, MPS-SIAM series on optimization, 2005.

[4] D. Bakić, *Normirani prostori*, Matematički odsjek, PMF, 2017.

[5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[6] I. M. Gelfand i S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Inc., 1963.

[7] V. Girault i P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Series SCM., 1986.

[8] P. Lindqvist, *Notes on the p-Laplace equation*, 2006. (pristupljeno 8. rujna 2020.), `https://folk.ntnu.no/lqvist/p-laplace.pdf`.

[9] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[10] L. Tartar, *Topics in Non Linear Analysis*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1978.

Sažetak

U ovom radu se upoznajemo s osnovama teorije distribucija, Soboljevljevih prostora i varijacijskog računa u svrhu proučavanja slabih formulacija nekih klasičnih rubnih problema. Najprije motiviramo uvođenje distribucija te pokazujemo neka osnovna svojstva, a od posebne važnosti nam je pojam slabe derivacije. Pomoću njega definiramo Soboljevljeve prostore, za koje se pokazuje da su Banachovi. Zatim pokazujemo niz rezultata na Soboljevljevim prostorima od kojih se ističu Poincaréova nejednakost, operatori proširenja i teorem o tragu. Potom proučavamo teoriju varijacijskog računa na apstraktnim refleksivnim Banachovim prostorima. Predstavljamo direktnu metodu varijacijskog računa i dajemo generalni rezultat. Dokazujemo poznatu Lax-Milgramovu lemu, koja se često koristi u dokazima egzistencije slabog rješenja. Za kraj navodimo nekoliko rubnih problema od interesa i primjenjujemo dane rezultate.

Summary

In this thesis, we present the fundamentals of theory of distributions, Sobolev spaces and calculus of variations with the objective of studying weak formulations of some classical boundary value problems. Firstly, we motivate the introduction of distributions and show some basic properties, where the notion of weak derivation will be of particular importance. We use it to define Sobolev spaces, which we show to be Banach spaces. We then present a series of results in Sobolev spaces, of which the Poincaré inequality, the expansion operators, and the trace theorem bear the most significance. Next we study the theory of calculus of variations on abstract reflexive Banach spaces. We present the direct method of calculus of variations and give the general result. We prove the well-known Lax-Milgram lemma, which is often used in proofs of existence of a weak solution. Finally, we present some boundary value problems of interest and apply the mentioned results.

Životopis

Rođena sam 28. veljače 1997. godine u Zagrebu, gdje sam i pohađala Osnovnu školu Vrbani. Upisala sam XI. gimnaziju 2011. godine te nakon polaganja mature 2015. godine započela preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Na preddiplomskom studiju sam bila aktivan član studentske udruge PRIMUS, a akademske godine 2017./2018. sam obnašala dužnost predsjednice matematičkog ogranka Udruge. Stekla sam titulu univ. bacc. math. 2018. godine nakon čega sam upisala studij Primijenjene matematike. Tijekom prve godine diplomskog studija sam bila demonstratorica iz kolegija Metode matematičke fizike.