Kut, krug i kružnica u nastavi matematike

Šenjuk, Anja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anja Šenjuk

KUT, KRUG I KRUŽNICA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji, koja mi je bezuvjetno omogućila studiranje te svojom podrškom i razumijevanjem bila uz mene sve ove godine.
Hvala mojim prijateljima i kolegama koji su mi bili veliki oslonac tijekom godina studija i svima koji su pomogli pri izradi ovog rada svojim savjetima.
Posebna zahvala ide mentoru doc. dr. sc. Matiji Bašiću na strpljenju, stručnim savjetima i prekrasnoj suradnji tijekom izrade diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

Posao nastavnika je prilagoditi matematički sadržaj prije nego što ga se prezentira učenicima, što zahtjeva detaljnu analizu tog sadržaja i raznih pristupa tom sadržaju. Kroz ovaj rad želimo ilustrirati taj opsežan proces na jednom manjem dijelu matematike kroz usporedbu sadržaja kurikularnih dokumenata, udžbenika i nastavničku praksu.

U prvom poglavlju opisan je proces izgradnje matematičkog pojma i njegova konceptualizacija u svijesti učenika. Također, navedeni su različiti načini definiranja pojmova te osnovni zahtjevi koje definicija nekog matematičkog pojma mora zadovoljavati.
U drugom poglavlju dan je kratak opis geometrije kao aksiomatskog sustava čije temelje je postavio Euklid [1]. Objekti euklidske geometrije čine glavninu sadržaja koje iz geometrije učenici danas uče u nastavi matematike. Dan je pregled raznih definicija pojmova kut, krug i kružnica iz stručne literature, kao i iz školskih udžbenika. Navedene su poteškoće s kojima se učenici i nastavnici susreću u nastavi prilikom uvođenja pojmova kut, krug i kružnica. Dan je pregled ishoda iz kurikuluma kako bi dodatno naglasili postepenost u izgradnji matematičkog pojma te su navedene promjene u programu koje su uvedene u nastavu matematike cjelovitom kurikularnom reformom.
U trećem poglavlju naglasak je na četvrtoj etapi izgradnje matematičke teorije. Opisana je važnost poučaka i dokaza u nastavi matematike, poteškoće s kojima se učenici i nastavnici pritom susreću te su navedeni neki od osnovnih dokaza i dokaznih zadataka koje bi svaki učenik tijekom svog školovanja trebao savladati.
U zadnjem poglavlju prezentirano je istraživanje kojim su ispitana iskustva nastavnika prilikom obrade sadržaja vezanih uz krug i kružnicu u srednjoškolskoj nastavi matematike. Naglasak je stavljen na poteškoće s kojima se nastavnici susreću u praksi.

[1] Euklid (o. 340. g. pr. Kr. - o. 287. g. pr. Kr.) - starogrčki matematičar

Poglavlje 1

Matematički pojam

Matematika je znanost koja je izgrađena na zakonima i principima logike. U matematici se polazi od osnovnih pojmova koje ne defniramo i ne opisujemo, već ih smatramo intuitivno poznatima. Iz osnovnih se pojmova dalje defnicijama izgrađuju novi matematički pojmovi. Osnovni pojam u matematici ne mora biti isto što i osnovni pojam u nastavi matematike. Što je dob učenika niža, to je razlika izraženija. Budući da matematika kao znanost i matematika kao nastavni predmet trebaju biti u uskoj vezi, pravilno iskazivanje i razumijevanje matematičkih pojmova kod učenika u nastavnom procesu vrlo su važni i zahtijevaju od nastavnika matematike dobru pripremljenost. Pri poučavanju matematike treba voditi računa o psihološkom utemeljenju procesa učenja i usvajanja osnovnih matematičkih pojmova jer o tome ovisi metodičko oblikovanje nastavnog procesa. Što je kognitivna sposobnost učenika niža, to je razina metodičke prerade sadržaja veća.

1.1 Matematički pojam

Oblik mišljenja u kojem se bitna svojstva objekta koji se proučava opisuju riječima ili simbolima naziva se ***matematički pojam*** [10]. Proces formiranja nekoga pojma se odvija postepeno. Prema Kurniku [11] možemo ga opisati u tri faze. Prva faza je promatranje i opažanje. U ovoj najjednostavnijoj fazi spoznaje pojma promatraju se konkretni objekti i upoznaju se njihova konkretna svojstva povezana s pojmom. Osnovu ove faze čini osjetilna spoznaja. Druga faza je predodžba o pojmu. Glavni cilj ove faze je uočavanje općeg i zajedničkog elementima u promatranom skupu objekata. U trećoj fazi naglasak je na formiranju pojma, tj. izdvajanju bitnog općeg svojstva takvih objekata.

Nužan zahtjev koji treba zadovoljavati simbolički jezik pri izražavanju danog matematičkog pojma jest jednoznačnost. No, proces formiranja pojmova u nastavi matematike ne mora, a vrlo često i ne može biti precizan i strog kao isti proces u znanosti. Sve ovisi o uzrastu i predznanju učenika. Upravo iz tog razloga nastavnicima matematike je dopušten određen stupanj slobode i pojednostavljenja. Nastavnici imaju slobodu prilagoditi proces formiranja pojma ovisno o težini i važnosti za razvoj mišljenja učenika, ali pritom ne smiju narušiti ni jedno načelo nastave matematike. U osnovnoj školi taj se proces treba provoditi pažljivo i primjereno uzrastu. Kurnik [11] ističe kako proces formiranja pojmova u nižim razredima osnovne škole treba biti konkretno - induktivan. Tako usvajanje matematičkih pojmova u nižim razredima osnovne škole kreće od iskustva fizičkog predmeta i govornog jezika kojim se iskustvo opisuje. Zatim slijedi promatranje slika koje prikazuju iskustvo te učenje pisanih znakova koji opisuju iskustvo. Problem se javlja kad se učenik nalazi na stupnju u kojem počinje prijelaz s konkretnog na apstraktan način razmišljanja. U višim razredima proces formiranja novih pojmova možemo okarakterizirati kao apstraktno - deduktivan [11]. U srednjoj školi taj proces se često skraćuje zbog više kognitivne sposobnosti učenika, pa nije uvijek potrebna provedba svih faza i do definicije se dolazi brže. Neovisno o tome na kojoj razini se nalaze, dobro je da učenici aktivno sudjeluju pri uvođenju i definiranju matematičkih pojmova.

Prilikom uvođenja novih pojmova važno je da je učenicima poznato značenje svih pojmova koji ulaze u definiciju novog pojma. Kao što je ranije spomenuto, u matematici razlikujemo osnovne i izvedene pojmove. ***Osnovni matematički pojam*** jednostavni je pojam koji se ne definira. Neki od osnovnih matematičkih pojmova su: točka, pravac, ravnina, prostor, skup. ***Izvedeni matematički pojam*** je pojam čije se značenje opisuje nabrajanjem nužnih i dovoljnih svojstava pomoću osnovnih matematičkih pojmova ili/i pomoću ranije izvedenih matematičkih pojmova. Svaki pojam ima svoj sadržaj i opseg. Skup svih bitnih obilježja koja imaju svi objekti ili relacije obuhvaćeni tim pojmom naziva se ***sadržaj matematičkog pojma***, a skup svih pojedinačnih objekata ili relacija na koje se taj pojam može primijeniti naziva se ***opseg matematičkog pojma***.

Primjer 1.1.1. *Sadržaj i opseg pojma paralelogram [10]*
Sadržaj pojma: nasuprotne stranice su paralelne, nasuprotne stranice su sukladne, dijagonale se raspolavljaju, nasuprotni kutovi su sukladni, susjedni kutovi su suplementarni.
Opseg pojma: pravokutnik, romb, kvadrat.

Sadržaj pojma potpuno određuje njegov opseg i obrnuto, opseg pojma potpuno određuje njegov sadržaj. Između njih postoji obrnuta zavisnost pa zato što je bogatiji sadržaj pojma, to je manje objekata koji imaju sva ta svojstva i obrnuto. Pomoću opsega pojma možemo uvesti pojmove rod i vrsta, koji su posebno važni prilikom definiranja pojma. Ako je opseg pojma A sadržan u opsegu pojma B, onda kažemo da je pojam B ***rod*** u odnosu na pojam A, a pojam A ***vrsta*** u odnosu na pojam B.

1.2 Slika i definicija pojma

Način funkcioniranja ljudskog mozga često je u sukobu s logikom matematike. Precizno korištenje matematičkog jezika oduvijek je stvaralo ozbiljan problem u nastavi matematike. Pri učenju i poučavanju matematike pojavljuju se mnoge poteškoće vezane uz korištenje definicija. Učenici kreiraju vlastite predodžbe pri usvajanju novih informacija te se moraju suočiti sa strukturom matematike kako je zamišljena od strane profesionalnih matematičara. To stvara kognitivni konflikt koji je učenicima teško premostiti bez pomoći nastavnika.

Prema Tallu [20], matematika 60-ih godina prošlog stoljeća temeljila se na strukturalnom pristupu. Glavna pretpostavka ovakvog pristupa bila je da ispravno formuliranje matematičkih definicija i zaključaka može poboljšati učenje matematike. Usprkos korištenju ovakvog pristupa, poteškoće u matematici i dalje su postojale. Nakon detaljne analize, zaključeno je da poteškoće u nastavi nisu povezane s nedovoljnom mentalnom razvijenošću učenika, već su one prirodan ljudski fenomen koji se nalazi unutar svih nas.

Svaka osoba gradi svoj mentalni sklop predodžbi o konceptu na svoj jedinstven način. Tako je slučaj i u izgradnji matematičkih pojmova. Mnogi matematički pojmovi, prije nego se s njihovom formalnom definicijom susretemo u nastavi, u našem mentalnom sklopu dobivaju svoje značenje stečeno iz raznih iskustava u svakodnevnom životu. To značenje često može biti u kontradikciji s formalnom definicijom pojma. Jedan od primjera su pojam kruga i kružnice. Učenici prvih razreda na spomen pojma krug najčešće u svojoj svijesti pobuđuju mentalne slike vezane i uz krug i uz kružnicu, nesvjesni razlike tih dvaju pojmova. Ovakve predodžbe o pojmu kružnice imat će sve do četvrtog razreda, kada će im nastavnik zorno prikazati razliku između kruga kao geometrijskog lika čiju će unutrašnjost naglasiti bojom i kružnice kao njegove rubne crte.

Kako bi opisali sve procese koji se javljaju prilikom formiranja nekog pojma, Tall i Vinner [21] razlikuju sliku i definiciju pojma. ***Slika pojma*** opisuje ukupnu kognitivnu strukturu koja je povezana s pojmom uključujući mentalne slike, povezana svojstva i procese. Drugim riječima, sliku pojma čine sve asocijacije i ideje vezane uz taj pojam sadržane u našem umu. Slika pojma se gradi postepeno kroz razna iskustva. Nadograđuje se i mijenja kako se susrećemo s novim idejama i primjerima vezanim uz taj pojam, bilo u nastavi ili svakodnevnom životu. Ovisi o dobi i mentalnoj razini na kojoj se osoba u tom trenutku nalazi. S druge strane, ***definicija pojma*** je skup riječi koje koristimo kako bi odredili značenje tog pojma. Definicija pojma može biti formalna tj. prihvaćena od strane matematičke zajednice, a može biti i osobna, tj. skup riječi koje osoba koristi za vlastito tumačenje stvorene slike pojma. Tako nam definicija može biti dana kao činjenica ili je možemo sami konstruirati. Pritom moramo voditi računa da se osobna i formalna definicija ne nađu u sukobu, tj. da se kod stvaranja osobne definicije ne naruši načelo znanstvenosti matematike. Stoga je značajna uloga nastavnika u usmjeravanju procesa konstruiranja definicija.

U našem mentalnom sklopu postoji uska veza između slike i definicije pojma. Definicija svakog pojma stvara vlastitu sliku pojma, a vlastita slika pojma utječe na usvajanje definicije pojma. Učenicima nije dovoljno dati samo definiciju nekog matematičkog pojma. Potrebno je izgraditi čitavu sliku pojma kroz razne primjere počevši od onih iz svakodnevnog života pa do onih matematičkih. Vrlo je važno stvoriti dobre temelje slike nekog pojma, kako bi se ona mogla nadograđivati. U osnovnoj školi osobito je važna primjena načela zornosti prilikom stvaranja slike pojma. Ako učenici u nižim razredima osnovne škole pravilno i čvrsto izgrade sliku pojma, kasnije prilikom uvođenja definicija pojmova u nastavu matematike javljat će se manje poteškoća. Poteškoće se mogu javiti ako se tijekom procesa formiranja novih pojmova previše stavlja naglasak samo na sliku pojma. Time se previše potiče učenike da budu intuitivni i oni počinju zanemarivati preciznost koju zahtjeva matematika kao znanost. S druge strane, ako previše naglašavamo formalne definicije, učenici ne usvajaju pojmove s razumijevanjem i nisu u stanju povezati novi pojam s prethodno usvojenim pojmovima. Važno je naglasiti da slika i definicija pojma ne smiju biti u sukobu. Uloga nastavnika je da odabire metode rada koje smanjuju vjerojatnost da se javljaju poteškoće kod učenika prilikom formiranja novih pojmova. U procesu formiranja novih pojmova nužno je balansirati pobuđivanje intuicije kod učenika i preciznost i znanstvenost koju matematika zahtijeva. Bez konceptualnog razumijevanja učenje novog sadržaja postaje sve teže jer ne postoji mreža prethodno naučenih koncepata i vještina za koje novi sadržaj možemo vezati. Upravo iz tog razloga se postupci učenja mogu zaboraviti onoliko brzo koliko im je trebalo da se nauče.

1.3 Različiti načini definiranja

Početci logike vezani su uz razdoblje stare Grčke, a njenim utemeljiteljem smatra se Aristotel [1]. Tako i definicije sežu iz tog razdoblja. U filozofiji razlikujemo dvije vrste definicija: intenzionalne i ekstenzionalne. Intenzionalnim definicijama navodimo bitna obilježja pojma koji definiramo. Njima određujemo sadržaj pojma. Svako obilježje pojma koje ulazi u definiciju mora biti nužno, a sva obilježja zajedno dovoljna za jasno i precizno opisivanje pojma. Ekstenzionalne definicije nisu precizne matematičke. Pomoću njih navodimo sve što spada u opseg pojma. Prema pravilima tradicionalne logike, definicija se izriče tako da se označi najbliži rod kojemu je pojam što ga treba definirati logički podređen, a ujedno da se istakne ono posebno, specifično obilježje po kojem se taj pojam razlikuje od ostalih koji

[1] Aristotel (Stagira, 384. g. pr. Kr - Atena, 322. g. pr. Kr.) - starogrčki znanstvenik

pripadaju istom najbližem rodnom pojmu [23]. Najčešći način definiranja pojmova u geometriji je **pomoću najbližeg roda i razlike vrste**. Od svih rodova pojma izdvoji se onaj koji mu je najbliži i njegovom sadržaju pridoda jedno bitno obilježje koje pripada samo vrsti koja se definira, tzv. razlika vrste.

Primjer 1.3.1. ***Kružnica***
Skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne čvrste točke te ravnine naziva se kružnica.

Najbliži rod pojma kružnice iz prethodnog primjera je skup točaka u ravnini, a razliku vrste naglašavamo izrazom "jednako udaljenih od jedne čvrste točke".

Primjer 1.3.2. ***Tetiva kružnice***
Dužina koja spaja dvije točke na kružnici naziva se tetiva kružnice.

U prethodnom primjeru možemo primjetiti kako je najbliži rod tetive kružnice "dužina", a razlika vrste je bitno svojstvo "krajnje točke se nalaze na kružnici".

U nastavi matematike nerijetko koristimo i **genetičke definicije**. Genetičkim definicijama opisujemo način nastajanja objekta koji se definira. U nastavi se koriste u onim slučajevima kada učenici nemaju dovoljno predznanja za usvajanje matematičkih definicija, većinom je to u nižim razredima osnovne škole. Njihova upotreba u geometriji je korisna iz razloga što pomaže učenicima da vizualiziraju pojam koji se definira, a glavni nedostatak je nedovoljna preciznost.

Primjer 1.3.3. ***Kut***
Dio ravnine koji opiše polupravac vrtnjom oko svoje početne točke naziva se kut.

Genetička definicija pojma kut iz prethodnog primjera primjerena je učenicima četvrtih razreda osnovne škole. Nju isto tako možemo shvatiti pomoću roda i razlike vrste. Najbliži rod pojma kut je dio ravnine, a razlika vrste izraz "koji nastaje rotacijom polupravca".

Osnovni zahtjevi koje treba zadovoljavati definicija matematičkog pojma su: minimalnost sadržaja, prirodnost, prikladnost i primjenjivost. Preciznije rečeno, definicija mora biti primjerena definiranom pojmu, ni preuska, ni preširoka, mora razotkrivati bit pojma. Definicije s puno suvišnog sadržaja s jedne strane opterećuju pamćenje učenika, a s druge strane unose zbrku pri razlikovanju definicija od poučaka. Da se radi o definiciji možemo naznačiti korištenjem izraza "naziva se", "zove se" ili "kažemo". Definicija treba biti pregledna i sažeta. Važno je da definicija bude suvremena. Ne smije biti izražena slikovitim ili na neki drugi način dvosmislenim jezikom. Definicija ne smije biti cirkularna. Također, ne smije biti negativna, ako može biti pozitivna. Opseg pojma koji se definira ne smije biti prazan skup, tj. mora postojati bar jedan objekt kojeg definicija opisuje.

U sljedećim primjerima iskazane su definicije koje nisu u skladu s nekim od navedenih pravila:

Primjer 1.3.4. ***Okomiti pravci i pravi kut [10]***
Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se okomiti pravci.
Kut čiji su kraci međusobno okomiti naziva se pravi kut.

Ovo je primjer cirkularne definicije: okomiti pravci definiraju se pomoću pravog kuta, a pravi kut pomoću okomitih pravaca. Na taj način ni jedan pojam nije definiran. Okomiti pravci se zaista definiraju na gornji način, ali se tada pravi kut mora definirati pomoću susjednog kuta: Kut koji je jednak svome susjednom kutu naziva se pravi kut.

Primjer 1.3.5. ***Kružnica i središte kružnice***
Kružnica je skup svih točaka jednako udaljenih od središta kružnice.

Ovo je također primjer cirkularne definicije. Naime, kružnica je definirana pomoću pojma središte kružnice. To je pojam koji ne možemo definirati prije nego definiramo kružnicu, tj. definiramo ga pomoću kružnice. U ovom primjeru nedostaje i nužno obilježje da je to skup svih točaka ravnine. Ispravna definicija glasi: Skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne čvrste točke te ravnine naziva se kružnica. Tu čvrstu točku nazivamo središte kružnice.

Često se neki pojam može definirati na više načina. Važno je naglasiti da pritom sve definicije istog pojma moraju biti međusobno ekvivalentne. U takvim situacijama nameće se pitanje koju definiciju odabrati. Više o ovom ćemo reći u sljedećem poglavlju.

Pojam se u matematici izgrađuje postupno te zbog toga u kurikulumu imamo vertikale koje učvršćuju i dodatno razvijaju neki pojam. Mi ćemo to u nastavku rada analizirati za pojmove kut, krug i kružnica.

Poglavlje 2

Definicija kuta, kruga i kružnice

2.1 Osnove geometrije

Geometrija kakvu učenici uče u školama većim dijelom sadržana je od objekata euklidske geometrije. Temelji se na starogrčkim metodama. Proces uvođenja logike u geometriju započeo je Tales [1], a njenom razvoju najviše je pridonio Euklid. Takva geometrija je u skladu s našom intuitivnom predodžbom o prostoru. Upravo iz tog razloga se radi u školama, kako bi je učenici mogli doživjeti i razumijeti. Euklid je zaslužan za brojne ideje na kojima temeljimo geometriju, no još je važniji njegov doprinos u sakupljanju svih dotadašnjih znanja o matematici u djelo *Elementi*, koje je napisao u 13 knjiga. Njemu u čast takvu geometriju nazivamo *euklidska geometrija*. Svojim djelom Elementi, Euklid je utemeljio geometriju koju matematičari neće mijenjati sljedećih dvije tisuće godina pa često ni ne spominjemo pridjev ”euklidska”. Potpun skup aksioma te geometrije dao je Hilbert [2] krajem 19. - početkom 20. stoljeća i kao takvu koristimo je danas. Danas uz euklidsku, postoje i brojne druge vrste geometrije. Prve od njih otkrivene su početkom 19. stoljeća, no njima se u ovom radu nećemo baviti.

Postoji nekoliko sastavnica koje su potrebne za izgradnju matematičke teorije u aksiomatskom sustavu. Polazimo od navođenja osnovnih pojmova, koje smo već spomenuli u prethodnom poglavlju. Kako je već ranije spomenuto, postoje razlike u definiranju osnovnih pojmova geometrije u matematici i u školskoj matematici. Hilbert je u svom aksiomatskom zasnivanju geometrije kao osnovne pojmove uzeo točku, pravac i ravninu. Iz tih osnovnih pojmova dalje u geometriji definiramo ostale pojmove poput dužine, polupravca, kuta, kružnice, i dr. U osnovnoškolskoj geometriji, već u prvom razredu učenici kao osnovne pojmove uzimaju geometrijska tijela. Pojam geometrijskog tijela uvodi se na način

[1] Tales (Milet, o. 625. g. pr. Kr - o. 547. g. pr. Kr.) - starogrčki matematičar

[2] David Hilbert (Königsberg 1862. - Göttingen 1943.) - njemački matematičar

prepoznavanja u predmetima iz svakodnevnog života. Zatim kao strane tih geometrijskih tijela imenuju i prepoznaju geometrijske likove. Točku objašnjavaju kao mjesto gdje se sijeku crte, dok se u matematici točka uzima kao osnovni pojam i ne definira se. Tako je već u samim početcima matematičkog obrazovanja učenika vidljiva prilagodba procesa formiranja pojmova u geometriji vezana uz učenikovu dob i intelektualnu razvijenost. U trećem razredu se upoznaju s pojmom ravnine kao ravnom neomeđenom plohom te pojmom pravac koji usvajaju produljivanjem dužine preko njenih krajnjih točaka. Svi pojmovi iz geometrije koji se uvode u nastavu nižih razreda osnovne škole popraćeni su zornim primjerima.

Nakon navođenja osnovnih pojmova dolazimo do formuliranja aksioma. ***Aksiom*** je tvrdnja koja se smatra istinitom i ne dokazuje se. Euklid tako u svojoj prvoj knjizi Elemenata navodi pet aksioma ili postulata, kako ih on naziva. Prvi aksiom nam govori da kroz svake dvije različite točke ravnine možemo povući jedinstven pravac. Drugi aksiom govori da svaku dužinu možemo produžiti preko njenih krajnjih točaka. Da je moguće konstruirati kružnicu zadanu središtem i polumjerom govori treći aksiom. U četvrtom aksiomu stoji da su svi pravi kutovi sukladni. Za razliku od prva četiri Euklidova aksioma, peti aksiom o paralelama je poprilično kompliciran i kroz povijest mnogi matmatičari su smatrali da je to teorem te su ga pokušavali dokazati. Euklidov peti aksiom (aksiom o paralelama) govori da zadanom točkom izvan zadanog pravca prolazi točno jedan pravac paralelan danom pravcu.

Sljedećih dvije tisuće godina, matematičari su se trudili naći nova otkrića na području geometrije, samim time stvoreni su novi stavovi o tome kako bi aksiomatska izgradnja matematičke teorije trebala izgledati te se podigla razina preciznosti koju matematika kao znanost zahtijeva. Tako se javljaju brojne kritike Euklida. Kasniji matematičari smatraju kako Euklid nije bio dovoljno precizan. Zamjeraju mu nejasne definicije, poput definicije točke koju definira kao nešto što nema dio. Ovo jest intuitivna definicija, ali nam ne predstavlja jasno na koje objekte se ona odnosi. Sljedeća zamjerka odnosi se na definiranje pojmova šiljasti i tupi kut, koje definira kao manji i veći od pravog kuta, a pritom nigdje ne definira jasno što znače izrazi "manji od" i "veći od". Dakle, Euklid se koristi činjenicama koje su nam intuitivno jasne, ali nigdje u svome djelu nije postavio teorijsko utemeljenje za njihovo korištenje. Također, bez aksiomatskog opravdanja, koristi se raznim metodama prilikom dokazivanja propozicija i teorema. Na primjer, propozicija u kojoj navodi da ako su zadane dvije točke, moguće je konstruirati treću točku tako da trokut kojeg one tvore bude jednakostraničan. Postupak kojim se služi u dokazu je legitiman, ali "zdravo za gotovo" uzima činjenicu da će se dvije kružnice sijeći. Slično, u poučku SKS o sukladnosti trokuta, Euklid koristi metodu slaganja jednog trokuta pomoću drugoga kako bi dokazao da su navedeni elementi sukladni.

Euklid je svojim aksiomima predstavio samo načela koja je smatrao najbitnijima, a u dokazima se često pozivao na činjenice koje nije aksiomatski utemeljio. Tako se javila potreba za proširivanjem liste aksioma. Jedan od najzaslužniji za unapređenje te liste bio je već spomenuti njemački matematičar Hilbert. On se u svojim aksiomima držao Euklidove izvorne ideje uz minimalno korištenje intuitivnih i sugestivnih činjenica ili simboličkog jezika. Njegovo djelo pisano je stilom koji je razumljiv čak i učenicima srednjih škola, a njegovu aksiomatiku koristimo u geometriji danas.

Nakon što smo postavili temelje geometrije pomoću aksioma, slijedi definiranje novih pojmova. U nastavku ovog poglavlja reći ćemo više o definiranju novih pojmova te razlici u definicijama u nastavi matematike i u matematici kao znanosti. Kao posljednju etapu izgradnje matematičke teorije uzimamo izvođenje i dokazivanje teorema što ćemo opisati u sljedećem poglavlju.

2.2 Kut

Jedan od najvažnijih i najviše korištenih pojmova u geometriji je pojam kuta. U školskoj matematici, učenici se prvi put s pojmom kuta susreću u četvrtom razredu osnovne škole. Učenicima na toj razini nije moguće ponuditi suvremenu i strogu definiciju kakvu koriste matematičari. Tako se pojam kuta nadograđuje i razvija prema uzrastu učenika. Pogledajmo najprije kako se pojam kuta definira u stručnoj literaturi.

Kao primjer precizne i formalne matematike, uzet ćemo definiciju kuta koju Hilbert iznosi u svojoj knjizi [7].

Primjer 2.2.1. ***Definicija pojma kut [7]***
Neka je α proizvoljna ravnina te neka su h i k dva različita polupravca, u toj ravnini, koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istome pravcu. Par što ga tvore ta dva polupravca nazivamo kut i predstavljamo ga simbolom $\angle(h,k)$ ili $\angle(k,h)$. Točku O nazivamo vrh, a polupravce h,k krakovima promatranog kuta.

Definicija kuta dana u prethodnom primjeru bliska je definicijama koje se nalaze u školskim udžbenicima. Nju ćemo uzeti kao službenu matematičku definiciju pojma kut. Za definiranje pojma kut potrebno je poznavati pojmove poput ravnine, poluravnine, pravca i polupravca. Ravninu i pravac Hilbert uzima kao osnovne pojmove koje ne definira, a definicije poluravnine i polupravca uzima kao posljedice aksioma uređaja tj. poretka. Što nije primjer kad definiramo te pojmove u nastavi matematike.

S druge strane, Pavković i Veljan u [17] kut definiraju pomoću klasa ekvivalencije. No, definirajmo najprije pojmove koji će nam biti potrebni za razumijevanje definicije kuta navedenih autora.

Dužina je jedan od najkorištenijih pojmova u geometriji. Definiramo ju kao skup svih točaka pravca omeđen dvjema različitim točkama (uključujući i te dvije točke). Svaka dužina okarakterizirana je svojom duljinom. Neka je M ravnina, funkciju $d : M \times M \longrightarrow R$ za koju vrijedi:

- $d(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \in M$;
- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- $d(A, B) = d(B, A) \quad \forall A, B \in M$;
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad \forall A, B, C \in M$ i pritom znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $C \in \overline{AB}$;
- za svaki polupravac (Ou) s vrhom u O i za svaki realan broj $x < 0$ postoji (jedinstvena) točka T na tom polupravcu takva da je $d(O, T) = x$

zovemo funkcijom udaljenosti [17]. Broj $d(A, B)$ zovemo duljinom dužine $\overline{AB}$ ili udaljenost između točaka A i B. Oznaka za dužinu čije krajnje točke su A i B je $\overline{AB}$, a za duljinu dužine $|AB|$. Definirajmo još pojam izometrije kao preslikavanje koje "čuva udaljenost". Neka je dano preslikavanje $f : M \longrightarrow M$. Kažemo da je f izometrija ravnine ako vrijedi: $d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in M$.

Pogledajmo sada u sljedećem primjeru kako Pavković i Veljan definiraju kut.

Primjer 2.2.2. ***Definicija pojma kut [17]***
*Uređenom paru (Ox, Oy) polupravaca sa zajedničkim vrhom, koji ne leže na istom pravcu pridružimo pripadni **otvoreni kutni isječak** dobiven kao presjek poluravnine P_x koja sadrži Oy omeđene pravcem Ox i poluravnine P_y koja sadrži Ox omeđene pravcem Oy. **Zatvoreni kutni isječak** se dobiva kao presjek zatvorenih poluravnina (zatvorena poluravnina je unija poluravnine s pripradnim graničnim pravcem).*
*Dva para (Ox, Oy) i $(O'x', O'y')$ polupravaca se nazivaju **kongruentni** (a katkada i jednakima), ako postoji izometrija f ravnine M takva da je $f(Ox) = O'x'$ i $f(Oy) = O'y'$.*
*Lako se vidi da je ova kongruencija relacija ekvivalencije, pa se pripadne klase ekvivalencije zovu **neorijentirani kutovi**. Klasa koja sadrži par (Ox, Oy) označava se sa $\sphericalangle xOy$.*

Pavković i Veljan odabiru ovaj način definiranja kuta, kako bi se napravila priprema za uvođenje mjere kuta. Mjeru neorijentiranih kuteva definiraju kao strogo rastuću funkciju $\phi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, gdje je $\mathcal{K}$ skup svih neorijentiranih kutova, za koju vrijedi:

$$\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

za sve α i β za koje je suma definirana. Vidimo kako za domenu funkcije uzimaju skup svih neorijentiranih kutova kao klase ekvivalencije. Iz tog razloga kut definiraju kao klase ekvivalencije, a ne kao dio ravnine. Naime, ono što autori u prethodnom primjeru nazivaju kutni isječak mogli bismo nazvati kut, a ono što nazivaju kut mogli bismo nazvati klasa ekvivalencije. Uz tako odabranu terminologiju, intuitivno bismo željeli reći da su kongruentni, tj. sukladni kutovi oni koji imaju istu mjeru. Međutim, to bi bilo pogrešno jer tada ne bismo znali kako definirati mjeru kuta. Takva definicija bi bila cirkularna, što je nedopustivo. Stoga, mjeru kuta definiramo pomoću skupa svih neorijentiranih kutova kao klasa ekvivalencije, a da bismo definirali te klase ekvivalencije prvo definiramo kongruenciju pomoću izometrije kako je navedeno u prethodnom primjeru.

Pogledajmo sada kako izgledaju definicije pojma kut iz školskih udžbenika. Kao što je već spomenuto, učenici se u nastavi matematike prvi puta s pojmom kuta susreću u četvrtom razredu osnovne škole. U četvrtom razredu učenici pojam kuta definiraju koristeći genetičku definiciju prikazanu u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.3. ***Definicija pojma kut [14]***
Neka su a i b polupravci sa zajedničkom početnom točkom V. Možemo zamisliti da polupravac a pri vrtnji ostavlja tragove sve dok se ne poklopi s polupravcem b. Svi ti tragovi čine dio ravnine koji se zove kut. Oznaka: (a,b).

Kako učenici ne bi samo zamišljali taj postupak, u nastavi se može izvesti zanimljiva aktivnost prilikom definiranja pojma kut.

Primjer 2.2.4. ***Aktivnost prilikom definiranja pojma kut (4. razred)***
Učenici u svoje bilježnice nacrtaju proizvoljan polupravac a. Prekriju dani polupravac a prozirnim papirom, precrtaju ga i dobiveni polupravac označe s b , ubodu vrh šestara u početnu točku polupravca a i rotiraju prozirni papir oko vrha šestara. S papirom se okretao i polupravac b oko početne točke i došao u neki novi položaj. Sada polupravci a i b omeđuju dio ravnine i taj dio ravnine naziva se kut. Početnu točku nazivamo vrh kuta, a polupravce krakovi kuta.

Koji god pristup nastavnik odabrao, učenik treba shvaćati kut kao dio ravnine omeđen polupravcima te crtati, imenovati i označavati vrh i krakove kuta. Nakon što su naučili kako kut nastaje, odnosno kako ga nacrtati, uče o vrstama kuta. Počinju s pojmom pravog kuta.

Primjer 2.2.5. ***Aktivnost prilikom definiranja pojma pravi kut (4. razred)***
Prisjetimo se definicije pravog kuta iz primjera 1.3.4. Pravi kut definiramo kao kut koji je jednak svome susjednom kutu, a okomite pravce pomoću pravog kuta. Ovaj primjer zorno prikazuje danu definiciju pravog kuta. Naime, svaki učenik dobiva list papira kvadratnog oblika, taj papir trebaju presavinuti kako je prikazano na slici 2.1. Nastavnik zadaje uputu da se promotre kutovi i "crte" dobivene na papiru prilikom presavijanja. Implicitnim korištenjem simetrije kvadrata konstruirali smo pravi kut i na taj način učenicima približili pojam pravog kuta. Zanimljivo je da učenici prepoznaju pravi kut, bez dane definicije i bez korištenja šestara prilikom konstrukcije. Također, ono što vidimo zorno je da smo puni kut podijelili na četiri sukladna kuta te da su svi pravi.

Slika 2.1: Presavijanje papira

Zatim slijedi crtanje pravog kuta koje se može izvesti pomoću dva trokuta ili ravnala i trokuta. Sada kad su učenici upoznati s pojmom pravi kut, uvode se dva nova pojma: šiljasti i tupi kut.

Primjer 2.2.6. ***Aktivnost prilikom definiranja pojmova šiljasti i tupi kut (4. razred)***
Učenici najprije međusobno uspoređuju zadane kutove, različite od pravog, npr. pomoću prozirnog papira na koji precrtaju jedan kut, a potom njime prekriju drugi tako da im se početna točka i jedan krak poklapaju. Nakon toga kutove na isti način uspoređuju s pravim kutom. Tako dolaze do definicija da se kut koji je manji od pravog kuta zove šiljasti, a onaj koji je veći od pravog kuta zove tupi kut.

Vidimo kako se u nižim razredima osnovne škole navedeni geometrijski pojmovi zapravo ne definiraju, već se opisuju i prepoznaju kroz razne primjere iz okoline. U višim se razredima ovi pojmovi ponovno opisuju, ali sada se to čini na manje zoran način, uz pomoć definicija koje počinju sličiti na uobičajene, znanstvene definicije.

Za izgradnju definicije u petom razredu važno je poznavanje pojmova pravca i poluravnine. Za razliku od Hilberta, u nastavi se pravac i poluravnina definiraju u nižim razredima, a ne uzimaju kao osnovni pojam i posljedica aksioma uređaja. Jedan od načina na koji učenici petih razreda mogu definirati pojam kuta prikazan je u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.7. ***Definicija pojma kut [14]***
Neka su AB i AC dva dana pravca. Promatrajmo po jednu poluravninu što ih određuju ti pravci. Presjek poluravnina je kut. Oznaka: $\sphericalangle BAC$.

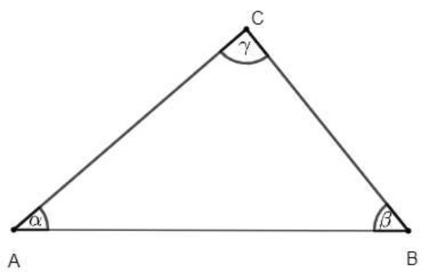
Ipak u većini udžbenika za peti razred pojam kuta se definira kao u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.8. ***Definicija pojma kut [2]***
Dio ravnine omeđen dvama polupravcima koji imaju zajedničku početnu točku naziva se kut. Zajednička početna točka naziva se vrh kuta, a polupravci krakovi kuta.

Manjkavost definicije iz prethodnog primjera jest da nije jasno na koji od dva dijela ravnine se definicija odnosi. U udžbeniku [19] u definiciji kuta spominje se uz riječ "dio ravnine" pojam "podskup", spominjanje ovog pojma u petom razredu nije primjereno uzrastu učenika pa je takva definicija neprimjerena.

U šestom razredu radi se zbroj mjera kutova u trokutu, no prije toga uvode se oznake kutova u trokutu. U sljedećem primjeru prikazano je na koji način.

Primjer 2.2.9. ***Označavanje kutova u trokutu [8]***
Trokut $\triangle ABC$ *ima tri unutarnja kuta. To su kutovi* $\sphericalangle CAB, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA$. *Budući da je svakom vrhu pridružen točno jedan unutarnji kut, kraće pišemo:* $\sphericalangle A = \sphericalangle CAB$, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle C = \sphericalangle BCA$. *Uobičajeno je veličine kutova* $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ *i* $\sphericalangle C$ *označavati malim grčkim slovima* α *(alfa),* β *(beta),* γ *(gama). Kao što je prikazano na slici 2.2.*



Slika 2.2: Označavanje kutova u trokutu

Učenici prvih razreda srednjih škola upoznaju se s pojmovima skup, relacija, uređeni par, klasa ekvivalencije. Iz tog razloga u prvom razredu srednje škole mogli bismo kut definirati na način iz sljedećeg primjera, koji je sličan definiciji iz primjera 2.2.2.

Primjer 2.2.10. ***Definicija pojma kut [14]***
Neka je S skup svih polupravaca ravnine s vrhom O. U skupu $S \times S$ definira se relacija $\approx$: uređeni par (x_1, x_2) je u relaciji $\approx$ s uređenim parom (y_1, y_2) ako postoji rotacija f koja polupravac x_1 preslikava na x_2 i y_1 na y_2. $\approx$ je relacija ekvivalencije. Klasa svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca naziva se kut s vrhom u točki O. Oznaka: $\sphericalangle x_1 O x_2$ (predstavnik kuta).

Međutim, kako smo već naveli da se takva definicija koristi kako bi se uvela mjera kuta, a mjera kuta se u nastavi matematike ne definira pomoću funkcije kao u stručnoj literaturi. Ova definicija se većinom ne koristi u prvom razredu srednje škole jer je za većinu učenika preapstraktna i nerazumljiva.

U nastavi matematike mjeru kuta definiramo kao pozitivan broj između $0°$ i $360°$. Međutim, u složenijim primjerima trigonometrije susrećemo se s problemima gdje kut ima mjeru veću od $360°$ ili je ona negativna. Iz tog razloga u trećem razredu srednje škole uvodi se pojam orijentiranog kuta, a definira se na način prikazan u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.11. ***Definicija orijentiranog kuta [6]***
Kut je uređen par (p,q) dviju zraka koje imaju isti početak V. Označavamo ga s $\sphericalangle pVq$. Točku V nazivamo vrh, zraku p nazivamo prvi krak (ili početni krak), a zraku q drugi krak (ili završni krak) kuta $\sphericalangle pVq$.

Nakon ovakve definicije kuta, pojam mjere kuta se proširuje i na orijentirane kutove. Mjera kuta u nastavi najčešće se izražava u kutnim stupnjevima, minutama i sekundama. Osim u stupnjevima, mjera kutova može se izraziti i u radijanima. Puni kut ima mjeru $360°$, odnosno 2π radijana. Kako kut obilježavamo kružnim lukom među polupravcima koji čine krakove tog kuta, duljina kružnog luka i mjera pripadnog kuta su proporcionalne veličine. Označimo li puni kut kružnim lukom, on će ispasti kružnica, a njezina duljina je njezin opseg. Dakle, vrijedi omjer:

$$l : O = \alpha : 2\pi,$$

gdje je l duljina kružnog luka, O opseg kružnice, α mjera pripadnog kuta te 2π koji označava mjeru punog kuta u radijanima. Iz toga slijedi: $l : \alpha = 2r\pi : 2\pi$ pa se formula za mjeru kuta u radijanima određuje kao omjer kružnog luka l i duljine polumjera luka r:

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Želimo li pretvoriti stupnjeve u radijane ili obrnuto, dovoljno je postaviti odgovarajući omjer. Mjeri punog kuta $360°$ odgovara radijanska mjera 2π, pa tako i zadanoj mjeri kuta u stupnjevima odgovara mjera tog kuta u radijanima.

Tada imamo omjer: $\alpha^\circ : 360^\circ = \alpha\ rad : 2\pi$, tj. $\alpha^\circ : 180^\circ = \alpha\ rad : \pi$. Iz čega slijedi:

$$\alpha\ rad = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\pi,$$

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\ rad}{\pi}180^\circ.$$

U upotrebi je također i mjerna jedinica grad. Mjera punog kuta iznosi 400 grada.

2.3 Poteškoće u nastavi prilikom uvođenja pojma kut

Poseban odjeljak posvetit ćemo poteškoćama u nastavi s kojima se učenici i nastavnici susreću prilikom uvođenja pojma kut. Važno je obratiti pažnju na poteškoće u nastavi jer je upravo to segment nastave u kojem uloga nastavnika najviše dolazi do izražaja, a to je podrška i pomoć učenicima pri svladavanju tih poteškoća.

Pojam kuta u matematici poseban je po tome što kod njega nailazimo na velik broj raznih definicija. U sljedećem primjeru navest ćemo neke od njih.

Primjer 2.3.1. ***Definicije pojma kut [23]***

a) *Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*

b) *Kut je dio ravnine između dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*

c) *Sustav od dvije zrake g_A i h_A koje izlaze iz iste točke A nazivamo kutom $\sphericalangle(g_A, h_A)$. A zovemo vrhom kuta, a zrake g_A i h_A njegovim krakovima.*

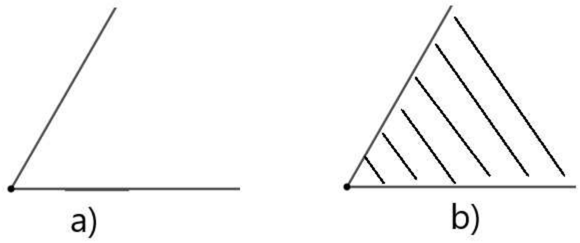
d) *Dva polupravca x, y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je trojka (x, y, π) koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci.*

e) *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pritom opisuje lik koji zovemo luk.*

f) *Neka su A, B, C bilo koje tri dane nekolinearne točke prostora. Presjek (zajednički dio) poluravnina π_1 i π_2 zovemo kutom i označujemo ga s $\sphericalangle BAC$ ili $\sphericalangle CAB$.*

g) *Uređen par polupravaca (x_1, x_2) s vrhom u točki O označavamo sa $\sphericalangle x_1 O x_2$ i nazivamo kutom u točki O.*

Ovim primjerom prikazana je raznovrsnost kod definiraja pojma kut. U većini literature uz definicije stoje i slike pojmova koji se definiraju. Ukoliko želimo precizno definirati neku matematičku teoriju, moramo je temeljiti na već izgrađenim aksiomima i definicijama, a ne se pozivati na intuiciju i podrazumijevanje da su neke stvari očite sa slike kao što je to činio Euklid. Usporedimo li definicije a) i b) iz prethodnog primjera i njihove slikovne prikaze na slici 2.3 vidimo razliku da u definiciji pod a) kutom se naziva unija dva polupravca sa zajedničkom početnom točkom, a pod b) dio ravnine između njih. U slučaju da uzmemo definiciju kuta pod a), tada b) smatramo definicijom unutrašnjosti kuta.



Slika 2.3: Slike uz definicije pod a) i b) iz prethodnog primjera

Promotrimo li definiciju kuta pod d) nameće se pitanje koji od dva dijela ravnine uzimamo. Ako uzmemo onaj dio manji od 180°, kao što to mnogi uzimaju, dovodi se u pitanje postojanje izbočenog kuta. Ono što je također nejasno u ovoj definiciji jest kako ravnina može biti podijeljena na dva dijela. Objašnjenje koje nije ispravno prilikom izgradnje formalne definicije jest: "Očito je sa slike.". Tako ovaj problem možemo usporediti s Jordanovim [3] teoremom koji kaže da zatvorena krivulja dijeli ravninu na dva dijela. Iako nam se ovaj teorem čini intuitivno jasan, poprilično ga je teško dokazati. Ono što se može pokazati kao još jedna od nejasnoća prilikom korištenja raznih definicija su oznake kuta. Naime, pogledamo li definiciju pod f) vidimo da isti dio ravnine označavamo sa BAC i CAB. Ovdje se radi o neorijentiranim kutovima. Međutim, postoje i orijentirani kutovi kojima je točno određeno koji je krak prvi, a koji drugi i izabrana je jedna od dviju mogućih rotacija od prvoga kraka prema drugome. Takvi kutovi uvode se u srednjoškolskoj nastavi matematike. Naime, intuitivno rečeno, mjerom kuta iskazujemo koliki put "prijeđe" jedan krak kuta prilikom rotacije oko svoje početne točke, kako bi se podudario s drugim krakom. Ovaj opis povezan je s definicijom pod e). Pritom ako je rotacija u smjeru obrnutom kazaljke na satu, nju smatramo rotacijom u pozitivnom smjeru, a mjera kuta dobivenog vrtnjom u pozitivnom smjeru je pozitivna. S druge strane, ako je rotacija u smjeru kretanja kazaljke na satu, onda je ona u negativnom smjeru te uzimamo da je mjera kuta negativna. U ovom

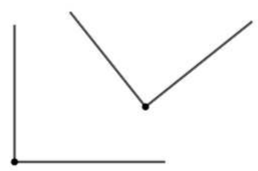
[3]Camille Jordan (Lyon. 1838. - Pariz 1922.) - francuski matematičar

slučaju, poštujemo li dogovorom određen pozitivan smjer rotacije, oznake iz primjera f) ne označavaju isti kut.

Nakon mnogo različitih primjera definicija kuta, nameće se pitanje koju definiciju odabrati. Iako o odabiru definicije uvelike ovisi stav i sklonost nastavnika, Šporer [23] ističe nekoliko stvari koje je potrebno uzeti u obzir prilikom odabira definicije. Prva od njih je stručnost definicije, jer gotovo svaka ima svoje dobre i loše osobine. Zatim, pedagoško - didaktička osobitost, jer definicija mora biti prilagođena dobi i razini učenika. Pri tom je jasno da definicija ni na jednom nivou, ma koliko pojednostavljena bila, ne smije biti pogrešna, ne smije dati netočnu predodžbu o pojmu koji definiramo i ne smije biti u sukobu s matematikom kao znanošću. Može biti samo nepotpuna i nedovoljno precizna.

Svaki nastavnik kao matematičar mora biti upoznat s raznim načinima definiranja nekog pojma kao i eventualnim poteškoćama koje se prilikom formiranja definicija mogu javiti kod učenika. Razlog više je to što se u udžbenicima nalazi ograničen broj definicija i objašnjenja o pojmovima, a nigdje nisu navedene poteškoće koje se mogu javiti kod učenika. Kako bi učenici tijekom školovanja mogli napredovati u svojoj konceptualizaciji pojma kut vrlo je važna uloga nastavnika. Ono što učenicima često stvara problem su razlika između statične i dinamične definicije pojma kuta. Taj problem javlja se na prijelazu učenika iz četvrtog u peti razred. Dinamična definicija je ona koja se odnosi na rotaciju, tj. način nastajanja kuta, a statična je povezana s euklidskim pristupom geometriji i definira kut kao takav. Kako se ove dvije definicije nalaze u sukobu, nije moguće naći njihovo objedinjenje. Uz korištenje dinamične definicije, nastavnici mogu zornim primjerima popratiti nastajanje kuta, korištenjem programa dinamičke geometrije, demonstracijama pomoću škara, kazaljki sata, položaja ruku i sl.

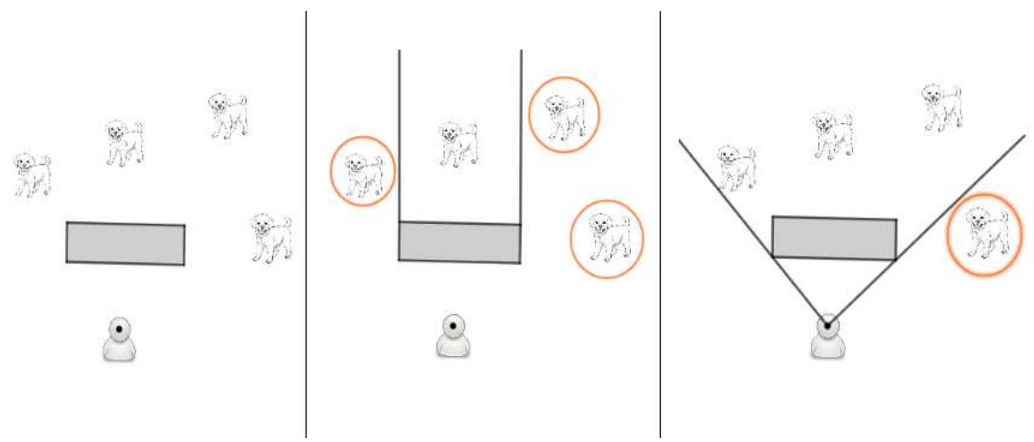
Sljedeća situacija koja učenicima može predstavljati problem je povezana s našim vidnim poljem. Naime, kut se u ”stvarnom” prostoru pojavljuje između dva beskonačna smjera, koja na papiru označavamo dvama polupravcima koji su tada našem oku ograničeni područjem papira. Vezano uz to, učenici ponekad pogrešno shvaćaju da veličina kuta ovisi o duljini prikazanih dijelova krakova na papiru ili pak o duljini, tj. veličini malog kružnog luka koji koristimo kako bi označili kut. Također, zbog ovog načina označavanja kuta malim kružnim lukom, mnogi učenici misle da je kut samo taj mali označen dio, a ne čitav dio ravnine između dva polupravca. Često ne raspoznaju ispruženi kut, ne primjećuju njegove krakove, a to je povezano sa statičkom definicijom. Naime, ako je kut definiran kao dio ravnine, onda je ispruženi kut isto što i poluravnina, pa nema vrh. Preciznije rečeno, svaka točka pravca može predstavljati vrh tog kuta. Slične poteškoće javljaju se i kod punog kuta. Tada je puni kut čitava ravnina i svaka točka ravnine može biti vrh punog kuta. Problem stvara i konstrukcija okomice, kao i pravog kuta, ako mu kraci ne odgovaraju marginama papira. Na sljedećoj slici prikazana je situacija u kojoj učenici imaju problem s raspoznavanjem pravog kuta u različitim položajima.



Slika 2.4: Pravi kut u različitim položajima

Još jedan problem učenicima predstavlja koncept kuta u stvarnom životu. U sljedećem primjeru prikazana je jedna situacija u kojoj se javljaju poteškoće kod učenika.

Primjer 2.3.2. ***Koncept kuta u stvarnom životu***
Zadamo li učenicima zadatak da na prvoj prikazanoj slici zaokruže koje psiće vide ako stoje na poziciji ispred zida kako je nacrtano, velik broj učenika će zadatak riješit kako je prikazano na drugoj slici. To ukazuje na problem da nisu svjesni koncepta kuta u svakodnevnom životu i da bi odgovor trebao biti kako je prikazano na trećoj slici, tj. da vide samo jednog psića.



Stoga je vrlo važno da se nastavnici u nastavi služe primjerima iz svakodnevnog života, kako bi učenici pravilno formirali pojam kuta u svojoj svijesti i shvaćanju te ga kasnije mogli nadograđivati.

Pravovremenim naglašavanjem razlika između pojmova koji učenicima stvaraju poteškoće, poput dužine i njene duljine, nastavnik podržava učenika u preciznom izražavanju i izgradnji ispravnih slika tih pojmova. S druge strane, možemo uočiti da se nastavnik nekad u inzistiranju na preciznom izražavanju može naći u drugom ekstremu, pa tada učenik prihvaća da mora paziti na terminologiju jer tako traži nastavnik umjesto da mu razlikovanje koncepata bude prirodno.

2.4 Krug i kružnica

Izgradnja pojmova krug i kružnica u nastavi matematike nije toliko kompleksna kao izgradnja pojma kut. Razlog tome je što su nam pojmovi kruga i kružnice intuitivno lakši za shvatiti nego pojam kuta. Postoje tri različita načina na koje možemo uvoditi pojmove krug i kružnica.

Prvi je da definiramo krug, tj. stvorimo predodžbu o pojmu kruga, a kružnicu shvaćamo kao njegov rub. Taj način se koristi u nižim razredima osnovne škole. Učenici pojam kruga upoznaju vrlo rano, već u prvom razredu osnovne škole. Sliku o pojmu krug stvaraju promatrajući predmete iz okoline poput sata, CD-a, prometnih znakova i sl. Tako u svojem shvaćanju pojam kruga prepoznaju kao stranu geometrijskog lika koji se zove valjak. Stranicu geometrijskog lika shvaćaju kao crtu koja omeđuje taj lik. Prepoznaju da je krug omeđen zakrivljenom crtom, ali je još ne nazivaju kružnica. Nadalje, u trećem razredu usvajaju pojam ravnine te proširuju svoje znanje o geometrijskim likovima tako što ih shvaćaju kao dio ravnine. Time proširuju sliku i definiciju pojma krug, tj. krug je dio ravnine. Prema "novom" kurikulumu u četvrtom razredu učenici uče razlikovati pojmove krug i kružnica. Korištenjem šestara stvaraju sliku o pojmu kružnica. Kružnica je trag šestara na papiru. Ono što može stvoriti nejasnoće je zašto kružnica dijeli ravninu na dva dijela i zašto je jedan od tih dijelova ograničen. Nastavnici ovaj problem rješavaju demonstracijama pomoću šestara i promatranjem ilustracija na kojima je unutrašnjost kruga obojena. Tako učenici uočavaju razliku između pojmova krug i kružnica.

Drugi način je najčešće korišten u nastavi matematike u višim razredima osnovne škole. U petom razredu učenici pojam kruga i kružnice upotpunjuju definicijama. Iako su se tijekom nižih razreda najprije upoznali s pojmom kruga, a zatim s pojmom kružnice, u petom razredu prvo definiraju kružnicu, a zatim pomoću nje definiraju krug. Tako pojam kružnice definiramo kao skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne fiksne točke, a pojam kruga kao dio ravnine omeđen kružnicom. Ova definicija je dobra za korištenje u nastavi matematike jer nije potrebno definirati funkciju udaljenosti, već je dovoljno poznavati pojam sukladnih dužina. Pojam sukladnost učenici upoznaju u petom razredu osnovne škole. Intuitivno, kažemo da su podskupovi A i B ravnine sukladni ako se skupa A može "nanijeti" na B. Upravo iz tog razloga se sukladnost u nastavi matematike često miješa s jednakošću. Matematički precizno, sukladnost definiramo preko izometrije. Najprije uvodimo izometriju kao preslikavanje koje čuva udaljenosti tj. dužine preslikava u sukladne dužine, a zatim kažemo da su likovi sukladni ako je jedan izometrična slika drugog. Dakle, dva skupa $A, B \subseteq M$ su sukladna, ako postoji izometrija $f : M \longrightarrow M$ takva da je $B = f(A)$. Definicija kružnice izrečena na ovaj način je matematički precizna i njenim korištenjem u nastavi ne narušava se načelo znanstvenosti nastave matematike. S druge strane, definicija kruga nije precizna, jer kao i u prethodnom odjeljku nije lako teorijski utemeljiti da zatvorena krivulja dijeli ravninu na dva dijela. U [3] nailazimo na pojmove otvoren i zatvoren krug, koji se ne pojavljuju u školskoj matematici.

Primjer 2.4.1. ***Otvoreni i zatvoreni krug [3]***
Krug *je skup svih točaka ravnine ograničen kružnicom. Ako kružnica pripada krugu, kažemo da je krug zatvoren; ako točke kružnice ne pripadaju krugu kažemo da je krug zatvoren.*
Otvoreni krug *je skup svih točaka ravnine koje su unutar kružnice, a* ***zatvoreni krug*** *je skup svih točaka ravnine koje pripadaju kružnici ili su unutar nje.*

Primjetimo kako se u školskoj matematici pod pojmom krug podrazumijeva zatvoreni krug.

Treći način definiranja kruga i kružnice je pomoću funkcije udaljenosti koju smo definirali u prethodnom odjeljku. U sljedećem primjeru prikazano je kako krug i kružnicu definiraju Pavković i Veljan u [17].

Primjer 2.4.2. ***Definicija kruga i kružnice [17]***
Neka je $O \in M$ bilo koja točka ravnine M, a $r > 0$ realni broj. Kružnica $k(O, r)$ sa središtem (ili centrom) O i polumjerom (ili radijusom) r je skup svih točaka T ravnine M takvih da je $|OT| = r$, tj. $k(O, r) = \{T \in M \quad : \quad |OT| = r\}$. Krug s centrom O i radijusom r, u oznaci $K(O, r)$, je skup $\{T \in M \quad : \quad d(O, T) \leq r\}$.

Kroz primjere u nastavku vidjet ćemo koje načine definiranja pojmova krug i kružnica autori koriste u školskim udžbenicima. Također, s kojim se još pojmovima i primjerima učenici susreću i tako nadograđuju koncept pojmova krug i kružnica.

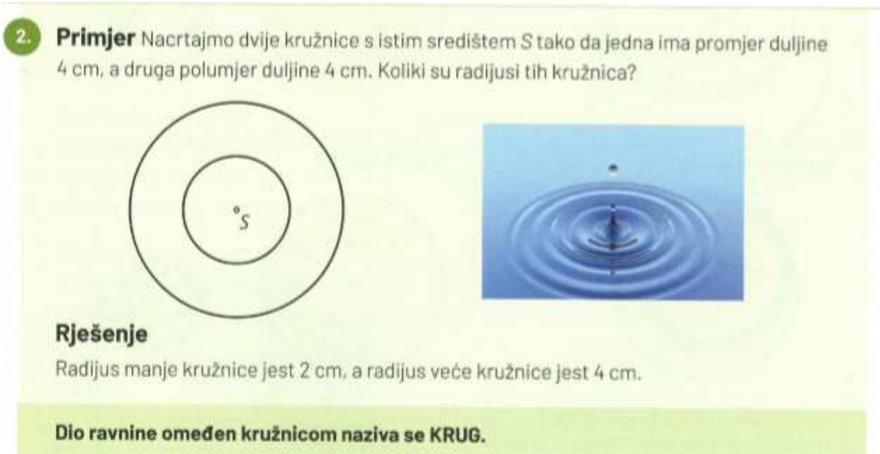
Primjer 2.4.3. ***Definicija kružnice u 5. razredu***
Većina udžbenika za peti razred kružnicu definira kao skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od zadane točke S. Točku S nazivamo središte kružnice, a u nekim udžbenicima se javlja naziv centar kružnice. U udžbeniku [19] kružnica sa središtem u točki S se definira kao zatvorena crta u ravnini čije su sve točke jednako udaljene od S.

Primjer 2.4.4. ***Definicije polumjera, tetive i promjera u 5. razredu [22]***
Dužina koja spaja središte kružnice s nekom točkom kružnice naziva se polumjer. Svi

polumjeri zadane kružnice jednake su duljine. Ta se duljina naziva radijus.
Dužina koja spaja bilo koje dvije točke kružnice naziva se tetiva.
Tetiva koja sadržava središte kružnice naziva se promjer. Svi promjeri zadane kružnice jednake su duljine. Ta se duljina naziva dijametar.

Uočimo da autori iz prošlog primjera naglašavaju kako polumjer označava dužinu, a radijus duljinu te dužine, kao što je i promjer dužina, a dijametar duljina dužine. Ta razlika nije naglašena u svim udžbenicima iz razloga što se ne slažu svi matematičari s ovime. Dio matematičara radijus i polumjer smatra sinonimima, jedina je razlika što je polumjer hrvatska riječ. To je slučaj u udžbenicima za srednje škole [5], [15].

Primjer 2.4.5. ***Definicija kruga u 5. razredu***
Najjednostavnije rečeno: Krug je dio ravnine omeđen kružnicom. Ova definicija koristi se u većini udžbenika za peti razred.
Međutim, u udžbeniku [4] stoji: "Krug je skup svih točaka ravnine koje su od središta kružnice udaljene za najviše njezin polumjer. Krug je dio ravnine omeđen kružnicom. Kružnica je dio kruga.". Vidimo kako se radi o ekvivalentnim definicijama, što je u redu. U ovom slučaju je važno da nastavnik naglasi koju definiciju će učenici koristiti kao "glavnu", a koje će smatrati njezinim posljedicama, tj. svojevrsnim poučcima.
Još jedan primjer prikazan je na slici 2.5 iz udžbenika rađenog prema "novom" kurikulumu [22]. U ovom primjeru autori ponovno stvaraju razliku između pojmova polumjer i radijus kružnice. Nagkašavanje ove razlike, koja nije dogovorena u struci, dovodi do zbunjivanja i mogućih poteškoća kod učenika. Također, ispod primjera je dana definicija kruga.



Slika 2.5: Uvođenje pojma krug iz [22]

U srednjoj školi definicije kruga i kružnice rade se na treći opisan način. Ono što čini glavnu razliku od prethodnih definicija jest da se pojam kruga ne definira koristeći pojam kružnice. U sljedećem primjeru prikazano je kako se navedeni pojmovi definiraju u srednjoj školi.

Primjer 2.4.6. ***Definicija kruga i kružnice [5]***
Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su od zadane točke S udaljene za istu udaljenost r. S se naziva središte (centar) kružnice, a r je polumjer (radijus) kružnice. Kružnicu označavamo s $k(S, r)$.
Krug je skup svih točaka ravnine čija je udaljenost od točke S manja ili jednaka r. S je središte kruga, a r je polumjer kruga. Krug označavamo s $K(S, r)$.

Definicije iz prethodnog primjera, slične su onima iz stručne literature, razlika je u korištenju simbola. U nastavi matematike, vezano uz pojmove krug i kružnica, učenici se susreću i s pojmovima kružni luk, kružni isječak, kružni odsječak, tangenta i sekanta. U sljedećem primjeru prikazano je kako se definiraju navedeni pojmovi.

Primjer 2.4.7. ***Definicije kružnog luka, kružnog isječka i odsječka, tangente i sekante [15]***
Kružni luk je dio kružnice omeđen dvjema točkama na kružnici.
Kružni isječak je dio kruga omeđen s dva polumjera i pripadajućim kružnim lukom.
Kružni odsječak je dio kruga omeđen tetivom i pripadajućim kružnim lukom.
Pravac koji dira kružnicu u jednoj točki naziva se tangenta kružnice.
Pravac koji siječe kružnicu u dvije točke naziva se sekanta kružnice.

U [5] nalazimo malo drugačiju definiciju kružnog isječka. Autori opisuju da kut s vrhom u središtu kruga isijeca od njega dio koji nazivamo kružni isječak. Također, kod definicije tangente iz prethodnog primjera autori koriste riječ ”dira”, naglasimo kako bi bilo preciznije reči ”siječe u jednoj točki”.

Učenici se u nastavi matematike susreću i s pojmovima koji povezuju kut i kružnicu, to su središnji i obodni kut. U sljedećem primjeru prikazane su definicije ovih pojmova.

Primjer 2.4.8. ***Definicije obodnog i središnjeg kuta [15]***
Obodni kut je kut kojem je vrh na kružnici, a kraci sijeku tu kružnicu.
Središnji kut je kut kojem je vrh u središtu kružnice.

Još jedan od pojmova u geometriji koji povezuju kut i kružnicu je tetivni četverokut. Tetivni četverokut često se javlja u natjecateljskim problemima. Definiramo ga kao četverokut kojem se može opisati kružnica, a njegovo glavno svojstvo koje izričemo u obliku teorema jest da zbroj mjera njegovih nasuprotnih kutova iznosi 180°.

U nastavi matematike učenici se također bave i konceptima duljine kružnice, površine kruga i broja π. U ovom radu nećemo ulaziti u analizu ovih koncepata. Spomenimo samo kako je broj π jedna od najzahvalnijih tema za široku obradu u nastavi matematike. Svi učenici trebaju znati osnovno značenje broja π, da je taj broj omjer opsega i dijametra svakog kruga. U tom smislu dobro je učenicima zadati zadatak da istraže povijest broja π bilo PowerPoint prezentacijom, bilo izradom postera.

2.5 Razvoj kurikuluma

U obrazovnom sustavu Republike Hrvatske vrijeme je izmjena kurikuluma. U siječnju 2019. odlukom MZO Republike Hrvatske donešen je Kurikulum za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. On se primjenjuje za učenike 1. i 5. razreda osnovne škole i 1. razreda gimnazije od školske godine 2019./2020., za učenike 2., 3., 6. i 7. razreda osnovne škole, 2. i 3. razreda gimnazije od školske godine 2020./2021., a za učenike 4. i 8. razreda osnovne škole i 4. razreda gimnazije od školske godine 2021./2022.

Kurikulumski pristup usmjeren na odgojno-obrazovne ishode učenja započeo je Nacionalnim okvirnim kurikulumom. Time su stvoreni temelji za osmišljavanje i provođenje cjelovitih promjena u odgojno-obrazovnome sustavu na nacionalnoj razini. U njemu su određena očekivana učenička postignuća za odgojno-obrazovna područja po ciklusima. Prvi, drugi, treći i četvrti razred razred osnovne škole prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu pripadaju prvom ciklusu. Drugi ciklus čine peti i šesti razred osnovne škole, a treći ciklus sedmi i osmi razred osnovne škole. Četvrti ciklus odnosi se na prvi i drugi razred srednjih strukovnih i umjetničkih škola, dok u gimnazijama obuhvaća sva četiri razreda. Matematičke domene u kojima su opisana očekivana učenička postignuća iz područja geometrije su: Oblik i prostor te Mjerenje. *(Nacionalni kurikulum za osnovnoškolski odgoj i obrazovanje)*

Do početka primjene Kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, nastava matematike se u osnovnim školama izvodi prema Nastavnom planu i programu za osnovnu školu koji se odnosi na predmet Matematika iz 2006., a u srednjim školama prema Nastavnom planu i programu za stjecanje školske spreme u programima jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije koji se odnosi na predmet Matematika iz 1994. te Nastavnom planu i programu prirodoslovne gimnazije koji se odnosi na predmet Matematika iz 2003.

U Nastavnom planu i programu za osnovnu školu koji se odnosi na predmet Matematika iz 2006. navedeni su nazivi tema koji se obrađuju po razredima. Za svaku od tema napisani su ključni pojmovi te očekivana obrazovna postignuća učenika. U programima za srednje škole i gimnazije iz 1994. i 2003. navedene su zadaće po razredima, tj. očekivana obrazovna postignuća učenika te sadržaj po cjelinama i temama unutar tih cjelina. Značajne promjene u odnosu na "stare programe" vidljive su "novom programu" iz 2019. godine. Odgojno-obrazovni ishodi Kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika iz 2019. opisani su sljedećim elementima: odgojno-obrazovni ishod, razrada ishoda, odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti "dobar" na kraju razreda, sadržaji te preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda.

Podsjetimo kako je važno da se pojam izgrađuje postepeno kroz obrazovanje. Glavna uloga kurikuluma je postaviti vertikalno povezivanje za izgradnju pojma. U nastavku ovog odjeljka opisat ćemo kako se pojmovi kuta, kruga i kružnice izgrađuju kroz tu vertikalu.

C. OBLIK I PROSTOR			
1. RAZRED	2. RAZRED	3. RAZRED	4. RAZRED
MAT OŠ C.1.1. Izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okružju.	MAT OŠ C.2.1. Opisuje i crta dužine.	MAT OŠ C.3.1. Opisuje i crta točku, dužinu, polupravac i pravac te njihove odnose.	MAT OŠ C.4.1. Određuje i crta kut.
MAT OŠ C.1.2. Crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte.	MAT OŠ C.2.2. Povezuje poznate geometrijske objekte.	MAT OŠ C.3.2. Prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima.	MAT OŠ C.4.2. Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut.
MAT OŠ C.1.3. Prepoznaje i ističe točke.		MAT OŠ C.3.3. Služi se šestarom u crtanju i konstruiranju	MAT OŠ C.4.3. Opisuje i konstruira krug i njegove elemente.
			MAT OŠ C.4.4. Crta i konstruira geometrijske likove.
			MAT OŠ C.4.5. Povezuje sve poznate geometrijske oblike.

Slika 2.6: Ishodi vezani uz geometriju u nižim razredima osnovne škole [16]

U prvom razredu se učenici susreću s pojmom kruga kao geometrijskim likom, prepoznajući ga na objektima iz okoline. Zatim u trećem razredu počinju koristiti šestar. Ono što učenici u trećem razredu trebaju znati je crtati kružnicu šestarom, prenositi dužinu te razlikovati krug i kružnicu (prema "starom" kurikulumu). Novost uvedena kurikulumom iz 2019. je da se obrada pojma krug pomaknula iz trećeg u četvrti razred osnovne škole. U četvrtom razredu prvi puta se susreću s pojmom kuta. Opisuju pojam kuta, analiziraju i uspoređuju vrste kutova od šiljastog do tupog.

U višim razredima osnovne škole učenici nadograđuju znanje o pojmovima kut, krug i kružnica. Na ovoj razini učenici izgrađene slike o navedenim pojmovima povezuju s njihovim definicijama. Slika 2.7 prikazuje ishode vezane uz geometriju u višim razredima osnovne škole prema "novom" kurikulumu.

C. OBLIK I PROSTOR			
5. RAZRED	6. RAZRED	7. RAZRED	8. RAZRED
MAT OŠ C.5.1. Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose.	MAT OŠ C.6.1. Konstruira kut i njegovu simetralu.	MAT OŠ C.7.1. Crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva.	MAT OŠ C.8.1. Skicira prikaz uspravnoga geometrijskog tijela u ravnini.
MAT OŠ C.5.2. Opisuje i crta /konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima.	MAT OŠ C.6.2. Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose.	MAT OŠ C.7.2. Crta, zbraja i oduzima vektore.	MAT OŠ C.8.2. Analizira i izrađuje modele i mreže uspravnih geometrijskih tijela.
MAT OŠ C.5.3. Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini.	MAT OŠ C.6.3. Konstruira četverokute, analizira njihova svojstva i odnose.	MAT OŠ C.7.3. Translatira skupove točaka u ravnini.	MAT OŠ C.8.3. Primjenjuje Talesov poučak.
			MAT OŠ C.8.4. Prikazuje međusobne odnose dviju kružnica u ravnini.

Slika 2.7: Ishodi vezani uz geometriju u višim razredima osnovne škole [16]

Tako u petom razredu učenici proširuju znanje o skupovima točaka u ravnini: točkama, pravcima, polupravcima, dužinama, kutovima. Služeći se geometrijskim priborom, matematičkim jezikom proučavaju, opisuju, definiraju, skiciraju, crtaju i označavaju navedene skupove točaka u ravnini i njihove međusobne odnose. Susreću se s pojmovima sukladnost dužina i kutova. Mjere i crtaju kutove pomoću kutomjera. Prema "novom" kurikulumu mjere kutova izražavaju u kutnim stupnjevima, minutama i sekundama. Klasificiraju kutove od šiljastoga do punoga. Prepoznaju i crtaju susjedne i vršne kutove, a prema "novom" kurikulumu kutovi uz presječnicu usporednih pravaca, kutovi s usporednim i okomitim kracima prebačeni su iz sadržaja šestog razreda u peti razred. Također, učenici petih razreda proširuju svoje znanje o krugu i kružnici. Definiraju i konstruiraju kružnicu i krug te opisuju njihove elemente (polumjer, promjer, tetiva). Opisuju i crtaju dijelove kruga (kružni isječak, kružni odsječak, kružni vijenac).

U šestom razredu se proširuje priča o kutovima. Uči se postupak prenošenja kutova te simetrala kuta. Konstruiraju se kutovi od $30°, 45°, 60°, 90°, 120°$. Također, učenici se susreću sa zbrojem unutarnjih kutova u trokutu, a time i prvim dokazom nekog poučka u nastavi matematike. U sedmom razredu jedno je poglavlje posvećeno krugu i kružnici, ali ovaj put numeričkim vrijednostima tih objekata, tj. opsegu i površini. Velika promjena u odnosu na "stari" kurikulum je da se u osnovnoj školi više neće obrađivati obodni i središnji kut kružnice, kao ni poučci vezani uz njih, koji su spadali u sadržaj sedmog razreda. O ovoj temi učenici će učiti u srednjoj školi. Još jedna promjena u "novom" kurikulumu je da učenici osmog razreda uče o međusobnom položaju kružnica u ravnini, što se prema "starom" programu radi u sedmom razredu. Učenici će razlikovati međusobne odnose kružnica u ravnini te istraživati odnose polumjera kružnica i udaljenosti njihovih središta i sukladno tome donositi zaključke. Također, bavit će se i pojmovima koncentrične kružnice i kružnog vijenca.

U srednjoj školi se radi usustavljivanje sadržaja iz osnovnoškolske geometrije s time da se neki dijelovi geometrije nadograđuju. "Novi" kurikulum donio je velike promjene u sadržaju kroz razrede. Učenici srednjih škola s geometrijskim sadržajem susreću se u prvom i drugom razredu i to ovisno o programu kojeg pohađaju, tj. broju nastavnih sati matematike godišnje. Na slici 2.8 prikazani su odgojno-obrazovni ishodi za učenike srednje škole vezani uz sadržaj koji se odnosi na geometriju. Navedeni ishodi su iz "novog" kurikuluma iz 2019., a navedene domene su: C - Oblik i prostor i D - Mjerenje.

C. OBLIK I PROSTOR / D. MJERENJE	
1. RAZRED	2. RAZRED
MAT SŠ C.1.1. Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.	MAT SŠ C.2.3. MAT SŠ D.2.1. Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.
MAT SŠ C.1.2. MAT SŠ D.1.2. Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta	MAT SŠ C.2.4. MAT SŠ D.2.2. Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu.
MAT SŠ D.1.3. Primjenjuje trigonometrijske omjere.	MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3. Analizira položaj pravaca i ravnina u prostoru i računa udaljenost.
	MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4. Računa volumen i oplošje geometrijskih tijela.

Slika 2.8: Ishodi vezani uz geometriju u srednjoj školi [16]

Novosti u kurikulumu iz 2019. godine su prebacivanje sadržaja o krugu i kružnici iz prvog u drugi razred srednje škole. Tako će se učenici drugih razreda srednje škole prvi put susresti s pojmovima obodni i središnji kut, što je dosad ulazilo u sadržaj sedmog razreda. Sadržaj koji se obrađuje u cjelini ”Krug i kružnica” ovisi o programu kojeg učenici pohađaju, tj. broju nastavnih sati matematike godišnje. Slika 2.9 prikazuje usporedbu sadržaja vezanog uz ishode MAT SŠ C.2.3. i MAT SŠ D.2.1. ovisno o broju nastavnih sati matematike godišnje.

Ishod: MAT SŠ C.2.3. / MAT SŠ. D.2.1. Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.				
Program (broj nastavnih sati matematike godišnje)	Razrada ishoda	Odgojno – obrazovni ishodi na razini usvojenosti „dobar" na kraju razreda	Sadržaj	Preporuka za ostvarivanje odgojno – obrazovnog ishoda
105	Primjenjuje poučak o obodnome i središnjemu središnjem kutu pri dokazu Talesova poučka. Konstruira tangentu na kružnicu. S pomoću proporcionalnosti izvodi formule za duljinu kružnoga luka i površinu kružnoga isječka. Povezuje duljinu kružnoga luka s radijanskom mjerom kuta.	Prepoznaje elemente kružnice i kruga, prikazuje ih u ravnini i konstruira tangentu na kružnicu.	Kružnica i krug. Kružni luk i kružni isječak. Poučak o obodnome i središnjemu kutu. Prošireni sadržaj: Površina kružnoga odsječka.	Otkrivati i obrazlagati formule.
140	Primjenjuje poučak o obodnome i središnjemu kutu pri dokazu Talesova poučka. Konstruira tangentu na kružnicu. S pomoću proporcionalnosti izvodi formule za duljinu kružnoga luka, površinu kružnoga isječka i površinu kružnoga odsječka. Povezuje duljinu kružnoga luka s radijanskom mjerom kuta.	Opisuje elemente kružnice i kruga, prikazuje ih u ravnini i konstruira tangentu na kružnicu.	Kružnica i krug. Kružni luk, kružni isječak i odsječak. Poučak o obodnome i središnjemu kutu. Radijanska mjera kuta.	Otkrivati i obrazložiti formule.
175 i 210	Opisuje elemente kružnice i kruga te ih prikazuje u ravnini. Konstruira tangentu na kružnicu. Primjenjuje poučak o obodnome i središnjemu kutu pri dokazu Talesova poučka. S pomoću proporcionalnosti izvodi formule za duljinu kružnoga luka, površinu kružnoga isječka i površinu kružnoga odsječka. Povezuje duljinu kružnoga luka s radijanskom mjerom kuta.	Iz zadanih elemenata računa elemente kružnice i kruga te konstruira tangentu na kružnicu.	Kružnica i krug. Kružni luk, kružni isječak i odsječak. Poučak o obodnom i središnjem kutu. Radijanska mjera kuta.	Otkrivati, obrazlagati i dokazivati formule

Slika 2.9: Krug i kružnica kroz različite programe u 2. razredu [16]

Pogledamo li razradu ishoda, ona je jednaka u programima sa 105 i 140 nastavnih sati matematike godišnje te u programima sa 175 i 210 nastavnih sati matematike godišnje. Ono u čemu postoji razlika su odgojno obrazovni ishodi na razini usvojenosti ”dobar” na kraju razreda. Učenici u programima 105 nastavnih sati matematike godišnje moraju na kraju razreda znati prepoznati elemente kružnice i kruga, učenici u programima 140 nastavnih sati matematike godišnje opisati elemente kružnice i kruga, a učenici u programima 175 i 210 nastavnih sati matematike godišnje iz zadanih elemenata računati elemente kružnice i kruga. Učenici u svim programima moraju znati konstruirati tangentu na kružnicu, iako se opis tog postupka ne nalazi u svim udžbenicima. U programima sa 105 nastavnih sati matematike godišnje površina kružnog odsječka ulazi u prošireni sadržaj, dok se u ostalim programima obrađuje u redovnom sadržaju. Učenici u programima sa 105 i 140 nastavnih sati matematike godišnje moraju otkrivati i znati obrazlagati formule iz cjeline "Krug i kružnica", dok ih učenici u programima sa 175 i 210 nastavnih sati matematike godišnje moraju znati i dokazati.

U nastavnoj cjelini "Krug i kružnica" učenici ponavljaju osnovne pojmove vezane uz krug i kružnicu te formule za opseg i površinu kruga. Kao što je već spomenuto, uče o obodnom i središnjem kutu kružnice i tako se prvi puta u svom matematičkom obrazovanju susreću s ispreplitanjem pojmova kuta, kruga i kružnice. Računaju duljinu luka kružnice i površinu kružnog isječka. Prema "novom" kurikulumu računaju i površinu kružnog odsječka. U "novom" kurikulumu stavlja se naglasak na dokazivanje, o čemu ćemo više u sljedećem poglavlju. U ovoj cjelini učenici uče i dokazuju nekoliko važnih poučaka u nastavi geometrije i njihove obrate. To su: poučak o obodnom i središnjem kutu i njegov obrat, već spomenuti Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice i njegov obrat te poučak o tangenti kružnice. Dokaze nekih od njih predstavit ćemo u nastavku rada.

Poglavlje 3

Uloga dokaza u nastavi matematike

3.1 Poučak i dokaz

U četvrtoj etapi izgradnje matematičke teorije ističe se izvođenje i dokazivanje teorema. U školskoj matematici koristi se naziv *poučak*, pa ćemo u nastavku ovog rada upotrebljavati taj izraz. Matematička izjava čija se istinitost utvrđuje dokazom naziva se ***teorem*** ili ***poučak*** [9]. Jedan od najpoznatijih poučaka u geometriji naveden je u sljedećem primjeru.

Primjer 3.1.1. ***Talesov poučak***
Svaki obodni kut nad promjerom kružnice pravi je kut.

U formulaciji poučka razlikujemo dva dijela: *pretpostavku poučka* koju označavamo sa P i *tvrdnju poučka* koju označavamo sa Q. Pretpostavka P je jedna ili više izjava koje se smatraju istinitim, a tvrdnja Q je izjava koju treba dokazati [9]. Učenici često imaju problema kod razlikovanja pretpostavke i tvrdnje poučka. Zato je dobro da se učenicima ukaže na činjenicu da je lakše izdvojiti pretpostavku i tvrdnju u poučku ako se poučak formulira rečenicom oblika *"Ako ..., onda ..."*. Nastavnik bi u nastavi trebao poticati učenike na preformulaciju poučka u taj oblik kako bi oni mogli bolje provesti kritičku analizu poučka, tj. jasno razlikovati pretpostavku i tvrdnju te razumijeti njihovu ulogu u gradnji poučka. Za ilustraciju ovog postupka poslužit ćemo se prethodnim primjerom. Primjećujemo da poučak iz prethodnog primjera nije formuliran rečenicom oblika *"Ako ..., onda ..."*. Njegov zapis u tom obliku glasi: *Ako je dani kut obodni kut nad promjerom kružnice, onda je taj kut pravi kut.* Sad iz ove formulacije poučka možemo lako razlikovati da je pretpostavka poučka: *"Dani kut je obodni kut nad promjerom kružnice."*, a tvrdnja poučka: *"Dani kut je pravi kut."* . Zamijene li se u poučku međusobno pretpostavka i tvrdnja, dobiva se izjava koja se naziva *obrat poučka* [9]. Nastavna praksa pokazuje da učenici, osim poteškoća pri razlikovanju pretpostavke i tvrdnje u poučku, imaju dosta poteškoća i kada je riječ o obratu poučka i njegovom formuliranju. No, prešućivanje obrata svakako nije dobro za razvoj mišljenja učenika.

Primjer 3.1.2. ***Obrat Talesovog poučka***
Ako je $\angle ACB$ pravi kut, onda je on obodni kut kružnice nad promjerom $\overline{AB}$.

Još jedan od važnih postupaka za razvoj mišljenja kod učenika je dokazivanje poučaka. Konačan niz tvrdnji, pri čemu je svaka tvrdnja izvedena logično iz prethodnih tvrdnji ili korištenjem poučaka čija je istinitost već utvrđena naziva se ***dokaz poučka*** [9].

3.2 Važnost dokaza u nastavi matematike

Kako je obrada poučaka važan dio nastave matematike ona zahtijeva posebnu pozornost svakog nastavnika matematike. Potrebno je uložiti dodatan napor za svladavanje poteškoća i pravilno usmjeravanje mišljenja učenika prilikom obrade poučaka u nastavi. Pravilna obrada tog pojma omogućuje brži razvoj matematičkog mišljenja učenika i bolje razumijevanje same matematike. Iako mnogi učenici ne shvaćaju razloge dokazivanja i rijetko kad vide potrebu za dokazivanjem, mišljenje je da se u školama trebaju učiti dokazi jer se tako uči rasuđivati i zaključivati, a to je upravo jedan od glavnih zadataka nastave matematike. Kurnik [12] naglašava kako je važno da nastavnik u pravom trenutku otkrije učenicima potrebu dokazivanja poučaka, upozna ih s načinima dokazivanja, jer matematičko obrazovanje učenika nije potpuno ako tijekom školovanja nisu upoznali i shvatili dokaze nekoliko standardnih poučaka. Učenici se u školama ne bave dokazivanjem kako bi otkrili nove matematičke rezultate. Razlozi za poučavanje dokaza i dokazivanja u školama polaze od očekivanja da učenici steknu iskustva u razmišljanju sličnima onima matematičara.

Jedna od glavnih zadaća nastave matematike je razvoj matematičkog mišljenja. Ono se u nastavi pojavljuje u različitim oblicima, od neformalnih obrazloženja do formalnih deduktivnih zaključaka. Koju vrstu zaključivanja ćemo koristiti i poticati kod učenja, ovisi o dobi i mentalnoj razini na kojoj se učenik nalazi. Kurnik [13] ističe da iako je matematika deduktivna znanost, školska matematika ne izgrađuje se ni na jednoj razini nastave kao strog deduktivni sustav, već ostaje u okvirima modela. Ovo osobito vrijedi za nastavu matematike u osnovnoj školi, gdje se učenike najčešće ne upoznaje s dokazima poučaka.
Bez obzira na specifični izgled koji svaki dokaz ima, učenici mogu koristiti razne načine zaključivanja kako bi povezali prethodno naučene pojmove, proširili svoja razmišljanja, razvili upotrebu matematičkog jezika te potaknuli daljnja promišljanja. Formalno zaključivanje temeljimo na razumijevanju u kojem identificiramo zajedničke elemente kroz niz opažaja i shvaćanja, zatim te zajedničke elemente povezujemo s prethodno doživljenim situacijama. Ovaj oblik zaključivanja posebno je važan u geometriji. Kada učenici povezuju novo gradivo sa svojim već postojećim znanjem, veća je vjerojatnost da će brže i bolje

razumjeti i upamtiti novu informaciju. Stoga je kod učenja geometrijskih sadržaja važno primjenjivati načelo postupnosti. Preusmjeravanje na zaključivanje i razumijevanje u nastavnom planu i programu povećava razinu shvaćanja i potiče razmišljanje kod učenika.

Već smo naglasili kolika je važna uloga nastavnika u ovom procesu. No, nastavnik nije ovdje da učenicima ”servira” gotove definicije, iskaze i dokaze poučaka. Njegova uloga je da usmjerava učenike u procesu formiranja novih pojmova, kao i iskazivanja poučaka. Potiče ih davanjem uputa i postavljanjem potpitanja kako bi došli do pravilnih zaključaka. Tako i kod dokazivanja poučaka. Jedan od najefikasnijih načina provođenja dokaza u nastavi je pomoću vođenih vježbi. Također je korisno i zanimljivo pritom koristiti digitalne sadržaje, pogotovo u geometriji. Jedan od dobrih načina provođenja dokaza u geometriji je priprema vođenih vježbi u programu dinamične geometrije. Odgovaranjem na razna pitanja, vođeni slikama i apletima učenici samostalno dolaze do zaključaka potrebnih za provođenje dokaza. Samim time, jasnije shvaćaju dokaz te mogu efikasnije primjeniti dokazane poučke u zadatcima. Ukoliko se pritom jave neke poteškoće, uloga nastavnika je da učenicima pomogne otkloniti poteškoće davanjem smjernica. Poteškoće se ne otklanjaju na način da nastavnik preuzme odgovornost, a učenik samo pasivno promatra. Unatoč tome, što dokazi u nastavi znaju učenicima stvarati probleme, nije dobro da ih nastavnik zbog toga izbjegava.

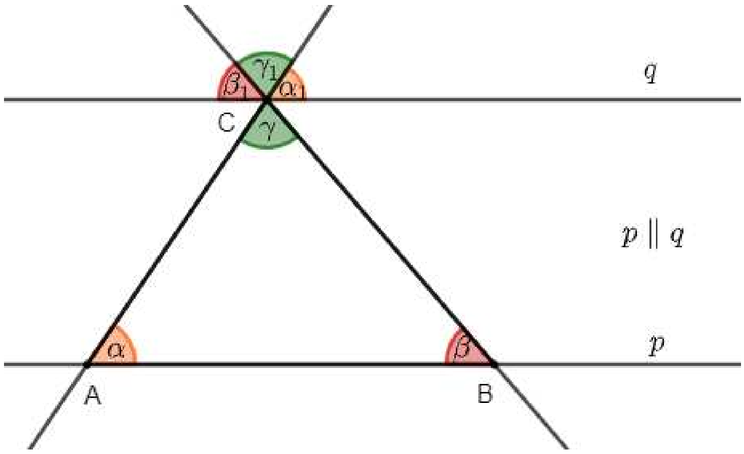
3.3 Primjeri dokaza iz geometrije u nastavi matematike

Jedan od prvih dokaza nekog poučka s kojim se učenici u nastavi susreću je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta. U sljedećem primjeru prikazane su dvije metode iz udžbenika [1] pomoću kojih učenici mogu istražiti svojstvo unutarnjih kutova u trokutu, a zatim vođeni dobivenim zaključcima iskazati poučak.

Primjer 3.3.1. ***Aktivnosti otkrivanja zbroja unutarnjih kutova trokuta [1]***
Prva metoda je izrezivanjem kutova trokuta škarama. Učenici trebaju nacrtati neki trokut na papiru te njegove unutarnje kutove obojati u različite boje. Zatim trebaju izrezati trokut i razrezati ga na tri dijela tako da svaki dio sadrži po jedan unutarnji kut trokuta. Tako razrezane kutove trebaju složiti jednog do drugog tako da imaju zajednički vrh. Primjećuju da su dobili ispruženi kut čija je mjera $180°$. *Iz toga zaključuju da je zbroj unutarnjih kutova u trokutu* $180°$.
Druga metoda je pomoću računalnog programa dinamičke geometrije. Nacrta se neki trokut, izmjere se veličine njegovih unutarnjih kutova i izračuna se njihov zbroj. Zatim se mijenja položaj vrhova trokuta i zaključuje se da zbroj unutarnjih kutova trokuta ne ovisi o duljinama stranica trokuta. Na kraju se iskazuje pravilo o zbroju unutarnjih kutova trokuta.

Koju god metodu nastavnici odabrali, nakon iskazivanja poučka učenici ga trebaju dokazati. Iako ovo pravilo nema čvrstu matematičku formu poučka i dokaza jer se radi o 6. razredu, njegovo provođenje u nastavi važno je za razvoj mišljenja i zaključivanja kod učenika. U sljedećem primjeru prikazan je dokaz poučka o zbroju unutarnjih kutova trokut iz udženika [1]. Bilo bi dobro da ga učenici provode samostalno uz podršku nastavnika.

Primjer 3.3.2. ***Dokaz poučka o zbroju unutarnjih kutova trokuta [1]***
Nacrtajmo $\triangle ABC$, pa kroz vrh C trokuta $\triangle ABC$ povucimo pravac q usporedan s pravcem AB, tj. pravcem p. Uočimo da su tada pravci AC i BC presječnice usporednih pravaca p i q. Uočimo na slici 3.1 tri para kutova jednakih veličina. Kutovi α i α_1 su jednaki, kao i kutovi β i β_1, jer su to jednaki kutovi uz presječnicu, a kutovi γ i γ_1 su jednaki kao vršni kutovi. Kutovi α_1, β_1 i γ_1 čine ispruženi kut. Dakle, iz $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ i činjenice $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180°$, slijedi zaključak.

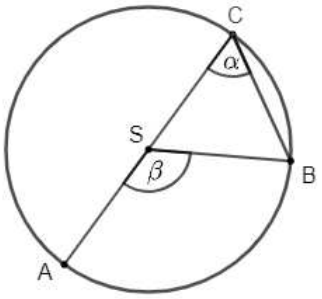


Slika 3.1: Zbroj unutarnjih kutova u trokutu

U sljedećem primjeru prikazan je jedan od važnih dokaza iz srednjoškolske nastave geometrije.

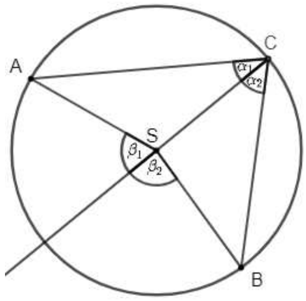
Primjer 3.3.3. ***Poučak o obodnom i središnjem kutu [15]***
Središnji kut nad nekim kružnim lukom dva je puta veći od obodnog kuta nad istim kružnim lukom.

Dokaz: *Označimo mjeru obodnog kuta sa α, a središnjeg kuta sa β.*
Promotrimo tri slučaja ovisno o položaju središta kružnice.
Prvi slučaj: ***Središte kružnice nalazi se na kraku obodnog kuta***



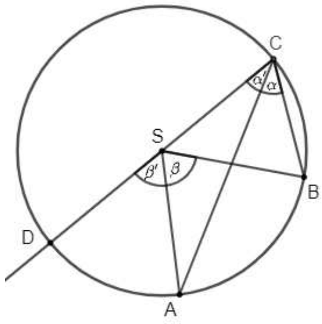
Trokut $\triangle SBC$ je jednakokračni pa kut $\angle SBC$ također iznosi α. Kut β je vanjski kut ovog trokuta pa vrijedi $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Drugi način da ovo pokažemo jest preko zbroja mjera kutova u trokutu $\triangle SBC$. Vrijedi $\angle CSB = 180° - 2\alpha$, a također i $\angle CSB + \beta = 180°$, jer su $\angle CSB$ i β sukuti. Slijedi $\beta = 2\alpha$.

Drugi slučaj: ***Središte kružnice nalazi se unutar obodnog kuta***



Povučemo polupravac kroz točku C i točku S. Dobivamo dva obodna kuta α i α_1 koja imaju zajednički krak sa središnjim kutom (β_1 i β_2). Sad imamo uvjete kao u prvom slučaju: $\beta_1 = 2\alpha_1$ i $\beta_2 = 2\alpha_2$. Kako je $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ i $\beta = \beta_1 + \beta_2$, dobivamo $\beta = 2\alpha$.

Treći slučaj: ***Središte kružnice nalazi se izvan obodnog kuta***

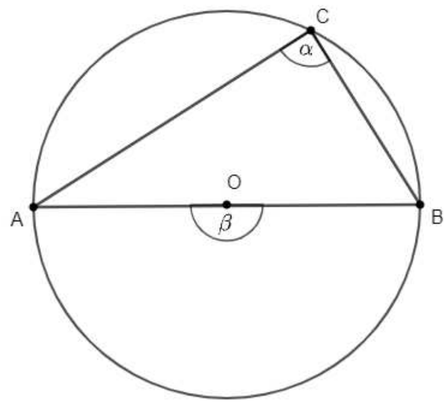


Povučemo polupravac kroz točku C i točku S. On siječe kružnicu u točki D. Promatramo kružni luk $\widehat{DB}$. Njegov pripadni središnji kut je $\angle DSB = \beta' + \beta$, a obodni kut je $\angle DCB = \alpha' + \alpha$. Iz prvog slučaja znamo da je $\angle DSB = 2\angle DCB$. Kutovi β' i α' su obodni i središnji kutovi nad kružnim lukom $\widehat{DA}$ i za njih vrijedi $\beta' = 2\alpha'$. Iz ovoga slijedi $\beta = \angle DSB - \beta' = 2\angle DCB - 2\alpha' = 2\alpha + 2\alpha' - 2\alpha' = 2\alpha$.

U većini srednjoškolskih udžbenika prvo se radi poučak o obodnom i središnjem kutu, a zatim se kao poseban slučaj ovog poučka radi Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice. Na kolegiju Elementarna geometrija prvo se radi Talesov teorem o obodnom kutu nad promjerom kružnice, a zatim se on poopćuje i dobiva se teorem o obodnom i središnjem kutu. Redoslijed obrade sadržaja ovisi o nastavniku. Nastavnik odlučuje hoće li u ovom slučaju koristiti metodu specijalizacije ili generalizacije. Ako nastavnik odluči koristiti metodu specijalizacije, tj. prvo obradi poučak o obodnom i središnjem kutu, a zatim se kao poseban slučaj ovog poučka radi Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice, onda Talesov poučak dokazuje na način prikazan u sljedećem primjeru. U primjerima u nastavku mjeru obodnog kuta označit ćemo sa α, a središnjeg kuta sa β.

Primjer 3.3.4. ***Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice [18]***
Ako je $\overline{AB}$ dijametar kružnice i ako je $C \neq A, B$ točka na njoj, onda je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom u vrhu C.

Dokaz pomoću poučka o obodnom i središnjem kutu:

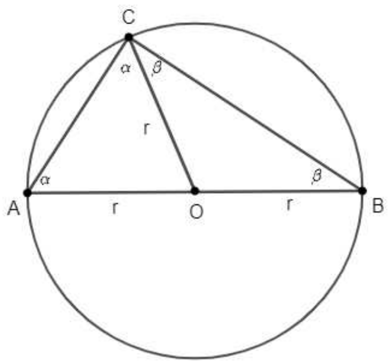


Prema poučku o obodnom i središnjem kutu je $\beta = 2\alpha$, a kako je $\beta = 180°$, to je $\alpha = 90°$.

Ako nastavnik ipak odluči prvo obraditi Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice, a zatim metodom generalizacije doći do poučka o obodnom i središnjem kutu, onda Talesov poučak dokazuje na način prikazan u sljedećem primjeru, bez korištenja poučka o obodnom i središnjem kutu u dokazu.

Primjer 3.3.5. ***Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice [3]***
Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, tada je $\sphericalangle ACB$ pravi.

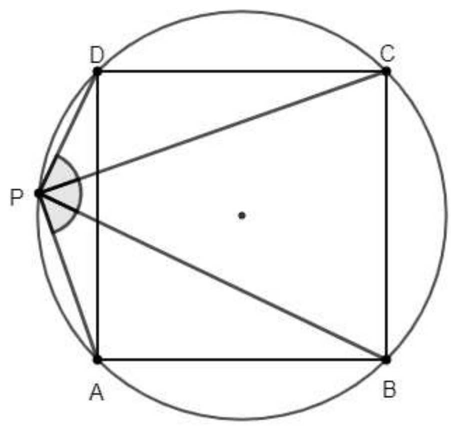
Dokaz bez poučka o obodnom i središnjem kutu:
Neka je O središte kružnice promjera $\overline{AB}$. Neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Kako je $\triangle AOC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$, to je $\sphericalangle AOC = \alpha$, a kako je $\triangle BOC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$, to je $\sphericalangle BOC = \beta$. Slijedi $\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta$. Konačno, iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ slijedi $2\gamma = 180°$ i konačno $\gamma = 90°$.



U sljedeća dva primjera pokazat ćemo dokazne zadatake s kojim se učenici susreću u srednjoj školi. Ovi naizgled zahtjevni zadatci, vrlo se lako dokažu primjenjujući poučak o obodnom kutu i zaključcima veznim uz njega. Sve što učenici trebaju jest pažljivo pročitati zadatak, odrediti što im je u zadatku zadano, a što se od njih traži da dokažu, nacrtati pravilnu skicu te povezati već naučene pojmove, poučke i njihove posljedice.

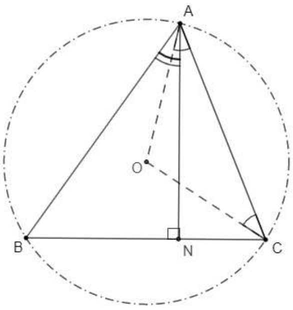
Primjer 3.3.6. ***U kružnicu je upisan kvadrat*** $ABCD$***. Neka je*** P ***točka onog luka*** $\widehat{AD}$ ***na kojemu ne leže točke*** B ***i*** C***. Dokaži da polupravci*** PB ***i*** PC ***dijele dijele kut*** $\measuredangle APD$ ***na tri jednaka dijela. [18]***

Rješenje: *Budući da je* $ABCD$ *kvadrat, lukovi* $\widehat{AB}$*,* $\widehat{BC}$ *i* $\widehat{CD}$ *su jednakih duljina. Lukovi jednakih duljina (iste kružnice) određuju jednake središnje kutove, pa samim time i jednake obodne kutove. Tada* $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPD$*, jer su to redom obodni kutovi nad navedenim lukovima.*



Primjer 3.3.7. ***Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\measuredangle BAN = \measuredangle CAO$. (Školsko natjecanje iz matematike 2015., 2. razred srednje škole)***

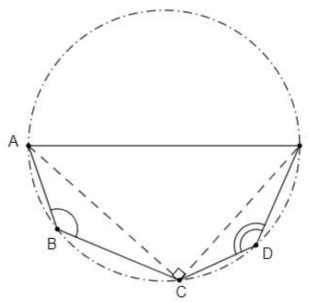
Rješenje: *Trokut AOC je jednakokračan (jer je $|AO| = |CO|$), pa je $\measuredangle CAO = \measuredangle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle AOC)$. Budući da je $\measuredangle ABC$ obodni kut nad središnjim kutom $\measuredangle AOC$ vrijedi $\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC = 2\measuredangle ABN$. Slijedi da je $\measuredangle CAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\measuredangle ABN) = 90^\circ - \measuredangle ABN$. S druge strane, trokut ABN je pravokutan, pa je $\measuredangle BAN = 90^\circ - \measuredangle ABN$, odnosno $\measuredangle BAN = \measuredangle CAO$.*



U sljedećem primjeru pokazat ćemo zadatak s natjecanja u kojem učenici samo trebaju uočiti tetivni četverokut, što im nerijetko predstavlja problem.

Primjer 3.3.8. ***Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredi $\measuredangle ABC + \measuredangle CDE$. (Školsko natjecanje iz matematike 2016., 2. razred srednje škole)***

Rješenje: *Četverokut $ABCE$ je tetivan pa je $\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle AEC$. Slično, četverokut $ACDE$ je tetivan pa je $\measuredangle CDE = 180^\circ - \measuredangle CAE$. Prema Talesovom poučku je trokut ACE pravokutan, pa vrijedi $\measuredangle CAE + \measuredangle AEC = 90^\circ$. Sada zbrajanjem dobivamo $\measuredangle ABC + \measuredangle CDE = 180^\circ - \measuredangle AEC + 180^\circ - \measuredangle CAE = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.*



Poglavlje 4

Nastavnička praksa

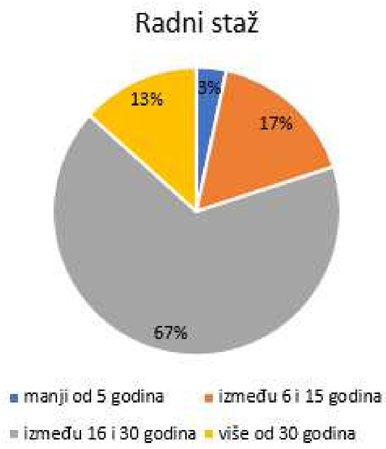
U ovom poglavlju bit će predstavljeno istraživanje kojim su ispitana različita iskustva i prakse kojima se sadržaji vezani uz krug i kružnicu obrađuju u srednjoškolskoj nastavi matematike. Anketni upitnik podijeljen je putem e-maila s profesorima mentorima koji provode metodičku praksu u srednjim školama te putem grupe "Nastavnici matematike" na društvenoj mreži Facebook. Pitanja se odnose na obradu sadržaja iz nastavne cjeline "Krug i kružnica" koja se prema "starom" programu izvodi u 1. razredu srednje škole, a prema "novom" kurikulumu u 2. razredu srednje škole.

Ciljevi istraživanja

Glavni cilj istraživanja je upoznati i opisati praksu nastavnika kako bi se ta praksa mogla usporediti s analizom kurikuluma i udžbenika u prethodnim poglavljima. Istraživačka pitanja su: analizirati u kojoj mjeri nastavnici koriste udžbenik prilikom obrade sadržaja vezanih uz krug i kružnicu, utvrditi koriste li još neke izvore prilikom pripreme za nastavni sat, koje sadržaje uključuju u obradu nastavne cjeline "Krug i kružnica", koliko detaljno obrađuju te sadržaje i na kraju, susreću li se s kakvim poteškoćama kod učenika prilikom obrade tih sadržaja.

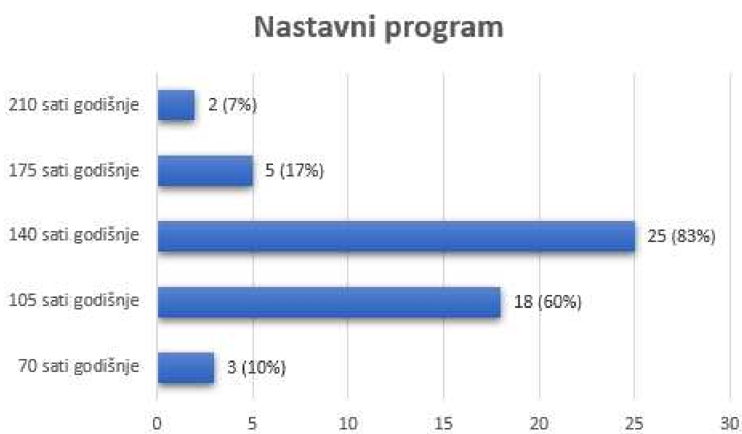
Uzorak ispitanika

U istraživanju je sudjelovalo 30 ispitanika, od kojih 29 žena i 1 muškarac. Prema završenoj stručnoj spremi ispitanika, njih 87% su profesori matematike sa završenim sveučilišnim studijem, 10% diplomirani inženjeri matematike te 3% profesora matematike i fizike što prikazuje lijevi grafikon na slici 4.1. Na desnom grafikonu na slici 4.1 prikazana je podijela ispitanika prema duljini njihovog radnog staža. Najviše ispitanika, njih 67% ima radni staž između 16 i 30 godina, a samo njih 3% ima radni staž manji od 5 godina.



Slika 4.1: Uzorak ispitanika prema završenoj stručnoj spremi i duljini radnog staža

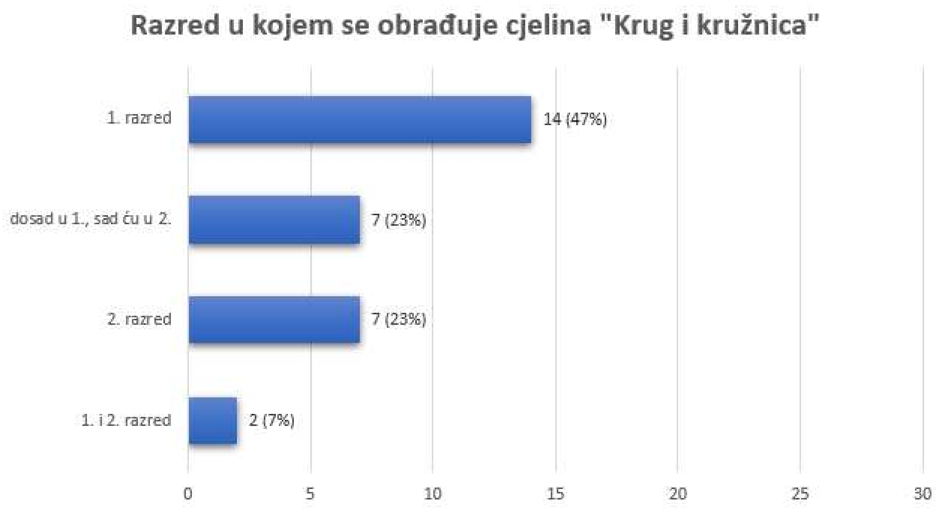
Grafikon na slici 4.2 pokazuje podjelu ispitanika ovisno o programu u kojem izvode nastavu matematike. Najmanje ispitanika, njih 7%, izvodi nastavu u programima koji imaju 210 sati matematike godišnje, a najviše njih, čak 83% ispitanika u programima koji imaju 140 sati matematike godišnje.



Slika 4.2: Uzorak ispitanika prema nastavnom programu u kojem izvode nastavu matematike

Rezultati istraživanja

Rezultati pokazuju kako nešto više od 50% ispitanika u nastavi koristi udžbenike nakladnika Element. Tako su Elementovi udžbenici autora Dakić, B. i Elezović, N. najviše zastupljeni u programima sa 140 sati nastave matematike godišnje, a udžbenici autorice Varošanec, S. u programima s manje sati nastave matematike godišnje. Donošenjem "novog" kurikuluma, velik broj nastavnika od nastavne godine 2019./2020. i 2020./2021. prelazi s Elementovih udžbenika na udžbenike nakladnika Školska knjiga iz 2019. napisane od strane grupe autora. Tek manji broj ispitanika u nastavi koristi udžbenike nakladnika Profil.
Iako promjena sadržaja prema "novom" kurikulumu, vezanih uz krug i kružnicu u programu, za srednje škole se provodi tek od nastavne godine 2020./2021., prikupljeni su raznoliki odgovori na pitanje: "U kojem razredu obrađujete cjelinu Krug i kružnica?". Rezultati su prikazani na grafikonu na slici 4.3. Najviše ispitanika navedenu nastavnu cjelinu obrađuje u 1. razredu, a dio njih odgovorio je da to ovisi o kurikulumu. Tek manji broj ispitanika zbog nedostatka vremena ovu nastavnu cjelinu obrađuje u 2. razredu.



Slika 4.3: Smještaj cjeline "Krug i kružnica" u program srednje škole

Sljedeće pitanje u anketnom upitniku bilo je vezano uz broj nastavnih sati utrošenih na sadržaje iz nastavne cjeline "Krug i kružnica". Najveći postotak ispitanik, njih 33.3% utroši 10 do 14 nastavnih sati, dok najmanje, njih 6.7% utroši više od 20 nastavnih sati na sadržaje iz cjeline "Krug i kružnica".

Slika 4.4: Broj utrošenih nastavnih sati na sadržaje iz cjeline "Krug i kružnica"

Sljedeći blok pitanja u anketi odnosio se na zastupljenost udžbenika i ostalih materijala i izvora prilikom pripreme za nastavni sat. Čak 93.3% ispitanika prilikom pripreme koristi odabrani udžbenik, dok 20% njih izrađuje vlastite listiće, koristi GeoGebru, uratke drugih kolega ili učeničke prezentacije. Grafički prikaz odgovora nalazi se na slici 4.5.

Slika 4.5: Materijali korišteni prilikom pripreme za nastavni sat

Na nastavnom satu, 60% ispitanika uglavnom slijedi strukturu pojedine teme iz udžbenika. Na pitanje o predviđanju slijeda tema tijekom školske godine prema njihovom slijedu u udžbeniku, 10% ispitanika nikad ne predviđa slijed tema tijekom školske godine prema njihovom slijedu u udžbeniku, 36.7% njih uglavnom predviđa taj slijed, a najmanje njih 5.5% uvijek predviđa slijed tema prema udžbeniku.
Svi ispitanici, njih 100% u nastavnoj cjelini ”Krug i kružnica” koriste definicije, teoreme i aksiome iz odabranog udžbenika, 50% ispitanika koristi definicije i teoreme iz drugih udžbenika. Također, 16.7% ispitanika posluži se definicijama i teoremima iz stručnih časopisa, dok 13.3% kao izvor koristi internet.
Također, svi ispitanici, njih 100% u nastavnoj cjelini ”Krug i kružnica” koriste matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika, 36.7% ispitanika koristi matematički jezik i simbole iz drugih udžbenika, 13.3% ispitanika za to koristi stručne časopise, te isti postotak ispitanika, njih 13.3% kao izvor koristi internet.
Gradički prikaz na slici 4.6 prikazuje da najveći postotak ispitanika motivaciju prilikom uvoda u novu temu unutar cjeline ”Krug i kružnica”, njih 73.3% smišlja samostalno.

Slika 4.6: Materijali korišteni prilikom smišljanja motivacije za uvod u novu temu

U nastavnoj cjelini ”Krug i kružnica”, 96.7% ispitanika koristi zadatke iz odabranog udžbenika, njih 76.7% posluži se drugim udžbenicima, 53.3% ispitanika samostalno smišlja zadatke, 40% ispitanika kao izvor zadataka koristi internet,a njih 6.7% zadatke uzima iz stručnih časopisa.
Više od 50% svih ispitanika u cjelinu ”Krug i kružnica” uključuje sljedeće naslove: Krug i kružnica - definicije osnovnih pojmova, Opseg kruga, Površina kruga, Duljina kružnog luka, Površina kružnog isječka, Kružni odsječak, Obodni i središnji kut, Tangenta na kružnicu, Tetivni četverokut, Tangencijalni četverokut. Oko 30% ispitanika, uz navedene

naslove obrađuju još i kut između tetive i tangente. Nije primjećena poveznica između odabira sadržaja za obradu unutar cjeline i programa u kojem se nastava izvodi. Tek malen postotak ispitanika iz sadržaja izbacuje Kružni odsječak i Tangentu na kružnicu. Većina ispitanika naslove obrađuje navedenim redoslijedom, njih tek 15% izmijeni redoslijed i najčešće je to obrada teme Obodni i središni kut pri početku cjeline. U nekoliko odgovora ispitanika iz programa s manje sati nastavnih matematike godišnje navedeno je da ne obrađuju Tetivni i tangencijalni četverokut.
Konstrukciju tangente na kružnicu obrađuje 67.9% ispitanika, iako je u "novom" kurikulumu navedeno kako bi ovim ishodom trebali ovladati učenici svih programa. Tek 50% ispitanika u sadržaj nastavne cjeline "Krug i kružnica" uključuje obradu radijanske mjere kuta. Od dodatnih sadržaja, najviše ispitanika, njih 78.6% u ovu nastavnu cjelinu uključuje povijesne crtice o broju π. Problem kvadrature kruga svojim učenicima spominje 35.7% ispitanika, a zanimljivo je da je to slučaj i u programu koji ima 70 sati nastave matematike godišnje. Tek 7.1% ispitanika učenicima predstavlja sadržaj vezan uz potenciju točke s obzirom na kružnicu i to u programima koji imaju više sati matematike godišnje.

Važnost učenja poučaka u nastavi i njihovo dokazivanje već je navedena. No, u praksi dolazi do razilaženja s teorijskim pretpostavkama. Grafikon na slici 4.7 prikazuje koje poučke ispitanici obrađuju i dokazuju unutar cjeline "Krug i kružnica". Gotovo svi ispitanici obrađuju i dokazuju poučak o obodnom i središnjem kutu te Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice. Njihovim obratima bavi se nešto manji postotak ispitanika. Najmanji postotak ispitanika u nastavu uključuje Ptolomejev poučak i poučak o kutu tetive i tangente.

Slika 4.7: Poučci koji se obrađuju i dokazuju unutar cjeline "Krug i kružnica"

Grafikon na slici 4.8 pokazuje na koje načine ispitanici dokazuju poučke u nastavi. Najveći postotak ispitanika, njih čak 60% učenicima samo napiše dokaz na ploču uz pojašnjenja. Značajno je primjetiti da 30% ispitanika ne traži od učenika da samostalno dokazuju, a čak niti ne prezentiraju dokaze, unatoč važnosti dokazivanja poučaka za razvoj učenikovog zaključivanja i mišljenja. Možemo nagađati smatraju li nastavnici da je deduktivno zaključivanje i pisanje dokaza presloženo za njihove učenike.

Slika 4.8: Načini na koje se dokazuju poučci unutar cjeline "Krug i kružnica"

Iz prethodnog grafikona vidimo kako je korištenje digitalnih sadržaja zastupljeno kod dokaza poučaka unutar cjeline "Krug i kružnica". Najveći broj ispitanika, kad je riječ o sadržaju vezanom uz geometriju, u nastavi koristi GeoGebru. Njome se služe za vizualizaciju i prikaz pojmova vezanih uz krug i kružnicu, motivacijske primjere, vođene vježbe, istraživanje i otkrivanje poučaka te za ponavljanje i domaću zadaću. Neki ispitanici koriste Sketchpad. Također, koristi se Edutorij kao izvor motivacijskih primjera te razni videozapisi. Sve je popularnija upotreba kvizova u nastavi. Koriste se za ponavljanje pojmova i definicija na početku ili na kraju sata, a najpopularniji alati za izradu kvizova, među ispitanicima, su Kahoot i Wizer.me. Također, mjesto Powerpoint prezentacija u nastavi zamijenile su interaktivne prezentacije izrađene na platformama poput Desmosa i h5p.

Posljednje pitanje u anketnom upitniku bilo je vezano uz poteškoće s kojima se nastavnici susreću kod učenika prilikom obrade sadržaja vezanih uz nastavnu cjelinu "Krug i kružnica" te načine na koje rješavaju navedene poteškoće. Prvi problem je vezan uz pojmove. Učenici često ne razlikuju ili miješaju pojmove krug i kružnica, kružni isječak i kružni odsječak, tetiva i tangenta. Također, problem se javlja kod povezivanja definicija, formula i poučaka. Ponekad učenici miješaju formule za opseg i površinu kruga. Ovi problemi su povezani s površnim pristupom učenika, a u nekim slučajevima i nastavnika. Većinu pojmova, definicija i formula učenici nauče napamet, bez razumijevanja, a nastavnici ne posvete dovoljno vremena formiranju pojmova kod učenika i to još od osnovne škole. Vezano uz to, problem je loše predznanje učenika, a samim time i razumijevanje sadržaja. Ispitanici su naveli nedostatak razumijevanja pri čitanju zadataka kao opći problem koji se manifestira i pri obradi pojmova. Nameće se pitanje je li to uistinu tako ili je to samo prebacivanje odgovornosti na učenike? Učenici većinom nauče samo šablonske zadatke, pa se javljaju poteškoće prilikom računanja složenijih površina i duljina lukova te primjene u stereometriji i zadatcima koji zahtjevaju modeliranje. Tada se nastavnici trude prikazati različite strategije rješavanja zadataka i potiču vršnjačko učenje. Ono što je već naglašeno kao problem su dokazi u nastavi. Rezultati istraživanja pokazuju kako velik broj ispitanika učenicima samo napiše dokaz na ploču te se većina njih ne bavi obratima poučaka u nastavi. To sve stvara probleme učenicima. Imaju poteškoće s iskazivanjem poučaka, obratima, dokazima, pa na kraju i primjenom poučaka u zadatcima. Rješenje ovog problema ističu nastavnici je osvijesiti učenike o razlikovanju pretpostavke poučka, tj. što je poznato u zadatku i tvrdnje poučka, tj. što trebaju dokazati u zadatku. Također, pomaže i korištenje analogije, tj. povezivanje sadržaja s već poznatim. Velik broj ispitanika kao problem naveo je nedostatak vremena. Navode kako je ovo zadnja cjelina koju obrađuju u 1. razredu te ne uspijevaju kvalitetno obraditi sadržaje ni provjeriti znanje učenika. Ovaj problem navode ispitanici koji nastavu održavaju u programima sa 140 nastavnih sati matematike godišnje. Tako dio njih se tim sadržajima ponovo posvećuje u 2. razredu. Kako se ovi sadržaji prema "novom" kurikulumu obrađuju tijekom 2. razreda srednje škole, postoji vjerojatnost kako će se riješiti problem s nedostatkom vremena, a samim time će možda i nastavnici moći posvetiti više pažnje na rješavanje poteškoća vezanih uz ove sadržaje te promijeniti površni pristup. Dio ispitanika navodi kako ne primjećuje nikakve poteškoće. Nema poveznice između ovog odgovora i programa u kojem se izvodi nastava matematike. Mogući razlozi su izbjegavanje sadržaja kod kojih bi se mogli pojaviti problemi, kao i dokazivanja poučaka.

Diskusija i zaključak istraživanja

Rezultati istraživanja pokazuju kako se najveći broj ispitanika drži odabranog udžbenika prilikom pripreme sadržaja za nastavni sat. Također, većina nastavnika koristi definicije, poučke i matematički jezik iz odabranog udžbenika kako ne bi zbunili učenike. Uz odabrani udžbenik, prisutno je korištenje udžbenika drugih autora, interneta te u manjoj mjeri stručnih časopisa. Mogući razlog korištenja drugih izvora i materijala jest inovativnost u idejama koju možda ne nalazimo u odabranim udžbenicima. Udžbenici su dosta ograničeni informacijama i sadržajem. Sadrže samo ono najvažnije iz svake jedinice, nigdje nisu naglašene poteškoće s kojima se učenici mogu susresti. Također, moguće da nastavnici zadatke iz udžbenika ostavljaju učenicima za zadaću, a za sat koriste slične zadatke iz drugih izvora. Na internetu su dostupni razni digitalni sadržaji koji mogu poslužiti u nastavi. Velik broj ispitanika u nastavu geometrije uključuje digitalne sadržaje i to izrađene pomoću GeoGebre. Ispitanici uglavnom obrađuju sadržaje redoslijedom navedenim u odabranom udžbeniku. Pogledamo li broj sati koje nastavnici utroše na obradu sadržaja iz cjeline "Krug i kružnica" nije utvrđena pravilnost ni veza između programa u kojima se nastava izvodi, tj. broja nastavnih sati matematike godišnje i broja utrošenih nastavnih sati na sadržaje iz cjeline "Krug i kružnica". Možemo zaključiti kako se sadržaji iz cjeline "Krug i kružnica" ne obrađuju s previše dodatnih sadržaja, a jedan od razloga je i nedostatak vremena. Prema ishodima iz kurikuluma, učenici u svim programima moraju znati konstruirati tangentu na kružnicu, iako se opis tog postupka ne nalazi u svim udžbenicima. Također, nisu svi ispitanici odgovorili da obrađuju konstrukciju tangente na kružnicu. Iznenađujuć je podatak da u programima s više sati matematike godišnje, tek manje od 10% ispitanika obrađuje potenciju točke s obzirom na kružnicu.

Glavne poteškoće koje se javljaju kod učenika prilikom obrade sadržaja iz ove nastavne cjeline, vezani su uz nerazumijevanje i miješanje pojmova što je posljedica površnog pristupa te problem s dokazivanjem poučaka i dokaznim zadatcima što je posljedica načina na koji se učenicima predstavlja dokaz. Primjeri poučaka i dokaza koje smatramo prikladnima za ovu cjelinu opisani su u 3. poglavlju ovog rada. Zabrinjavajuća je činjenica da velik broj nastavnika izbjegava obradu poučaka i njihovo dokazivanje u nastavi, jer pritom žele izbjeći mogućnost pojave poteškoća. Time smanjuju interakciju učenika s dokazima, jer bez učenja dokaza u nastavi učenici ne razvijaju logičko zaključivanje u mjeri u kojoj je to poželjno. Velik dio ispitanika kao problem naveo je nedostatak vremena, što kao posljedicu ima površnu obradu sadržaja i neprovjeravanje znanja učenika. Primjetimo kako smo u drugom poglavlju ovog rada, koristeći raznu literaturu, naveli puno više poteškoća koje se mogu javiti u nastavi nego što su to naveli ispitanici anketnog upitnika. Mogući razlog tome je ograničeni doseg odabrane metode kojom smo prikupili podatke. S druge strane, moguće da ispitanici nisu dovoljno upoznati s poteškoćama koje se mogu javiti, izbjegavaju ih izbacivanjem tog sadržaja ili ih jednostavno zanemaruju.

Nakon opsežne analize procesa definiranja pojmova kut, krug i kružnica u nastavi matematike te usporedbe sadržaja kurikularnih dokumenata, udžbenika i anketom dobivenog uvida u nastavničku praksu, postavlja se pitanje što sve to skupa znači za nastavnike? Možemo zaključiti kako kod nastavnika još uvijek nisu osvještene sve suptilnosti. Nastavnici se jako oslanjaju na udžbenike, a u njima nisu naglašene te suptilnosti kao ni poteškoće koje se mogu javiti kod učenika. Prilikom pripreme za nastavu, nastavnici u teoriji žele jako puno toga pokazati učenicima, no prilikom realizacije tih ideja javlja se problem s nedostakom vremena. Kako uz geometriju postoje i druge važne teme u kurikulumu, nastavnici su primorani donijeti odluku što izbaciti iz nastavnog sadržaja. Moj osobni stav je kako se pritom ne bi trebali izbacivati poučci i dokazi. Učenicima bi bilo od koristi znati barem osnovne poučke i dokaze prikazane u ovom radu.

Prilog 1: Anketni upitnik

Nastavnička iskustva

Poštovani/a,

upitnik koji se nalazi pred Vama ispituje različita iskustva i prakse kojima se sadržaji vezani uz krug i kružnicu obrađuju u srednjoškolskoj nastavi matematike. Pitanja se odnose na obradu sadržaja iz nastavne cjeline "Krug i kružnica" koja se po starom programu izvodi u 1. razredu srednje škole, a po novom kurikulumu u 2. razredu srednje škole.

Istraživanje se provodi u svrhu izrade diplomskog rada Anje Šenjuk, studentice na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu pod mentorstvom Doc. dr. sc. Matije Bašića.

Sudjelovanje u ovom istraživanju je dobrovoljno i anonimno. Ispunjavanje upitika traje u prosjeku 10 minuta.
Unaprijed Vam zahvaljujemo na Vašoj suradnji!

Spol

- ○ Ž
- ○ M

Stručna sprema

- ○ profesor matematike (završen sveučilišni studij)
- ○ učitelj matematike (završena pedagoška akademija do 1980.)
- ○ učitelj razredne nastave s pojačanim predmetom matematika
- ○ diplomirani inženjer matematike
- ○ Ostalo: ____

Radni staž

- ◯ manji od 5 godina
- ◯ između 6 i 15 godina
- ◯ između 16 i 30 godina
- ◯ više od 30 godina

Nastavu matematike izvodim u programima koji imaju

- ☐ 105 sati godišnje
- ☐ 140 sati godišnje
- ☐ 175 sati godišnje
- ☐ 210 sati godišnje
- ☐ Ostalo: ____________________

Koje udžbenike koristite u nastavi? (Navedite autore, naziv, nakladnika, godinu izdanja)

Vaš odgovor

U kojem razredu obrađujete cjelinu "Krug i kružnica"?

Vaš odgovor

Koliko nastavnih sati utrošite na sadržaje iz nastavne cjeline "Krug i kružnica"?

Vaš odgovor

Prilikom pripreme za nastavni sat iz cjeline "Krug i kružnica" koristim

- [ ] odabrani udžbenik
- [ ] druge udžbenike
- [ ] uratke drugih kolega
- [ ] ideje iz stručnih časopisa
- [ ] sadržaje s interneta
- [ ] Ostalo:

Na nastavnom satu slijedim strukturu pojedine teme iz udžbenika.

	1	2	3	4	5	
nikad	○	○	○	○	○	uvijek

Tijekom školske godine predviđam slijed nastavnih tema točno prema njihovom slijedu u udžbeniku.

	1	2	3	4	5	
nikad	○	○	○	○	○	uvijek

U nastavnoj cjelini "Krug i kružnica" koristim definicije, teoreme i aksiome iz

- [ ] odabranog udžbenika
- [ ] drugih udžbenika
- [ ] stručnih časopisa
- [ ] s interneta
- [ ] Ostalo: ______

U nastavnoj cjelini "Krug i kružnica" matematički jezik i simbole koristim iz

- [ ] odabranog udžbenika
- [ ] drugih udžbenika
- [ ] stručnih časopisa
- [ ] s interneta
- [ ] Ostalo: ______

Za motivaciju prilikom uvoda u novu temu unutar cjeline "Krug i kružnica" koristim sadržaje iz

- [ ] odabranog udžbenika
- [ ] drugih udžbenika
- [ ] stručnih časopisa
- [ ] s interneta
- [ ] smišljam sam/a
- [ ] Ostalo: ______

U nastavnoj cjelini "Krug i kružnica" koristim zadatake iz

- [ ] odabranog udžbenika
- [ ] drugih udžbenika
- [ ] stručnih časopisa
- [ ] s interneta
- [ ] smišljam sam/a
- [ ] Ostalo: ______

Upišite kojim redoslijedom obrađujete podnaslove unutar cjeline "Krug i kružnica". Podnaslovi su pobrojani na slici ispod. Ukoliko neki podnaslov ne uključujete u nastavu, njegov broj izostavite.

Vaš odgovor

Podnaslovi u cjelini "Krug i kružnica" :

1. Krug i kružnica - definicije osnovnih pojmova
2. Opseg kruga
3. Površina kruga
4. Duljina kružnog luka
5. Površina kružnog isječka
6. Kružni odsječak
7. Obodni i središnji kut
8. Tangenta na kružnicu
9. Tetivni četverokut
10. Tangencijalni četverokut
11. Kut između tetive i tangente

Označite sadržaje koje uključujete u nastavu prikom obrade nastavne cjeline "Krug i kružnica"

- [ ] konstrukcija tangente
- [ ] potencija točke s obzirom na kružnicu
- [ ] povijesne crtice o broju pi
- [ ] problem kvadrature kruga
- [ ] radijanska mjera kuta

Označite koje poučke obrađujete i dokazujete u nastavnoj cjelini "Krug i kružnica"

- [ ] Poučak o obodnom i središnjem kutu
- [ ] Obrat poučka o obodnom i središnjem kutu
- [ ] Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice
- [ ] Obrat Talesovog poučka o obodnom kutu nad promjerom kružnice
- [ ] Poučak o tangenti kružnice
- [ ] Poučak o tetivnom četverokutu
- [ ] Poučak o tangencijalnom četverokutu
- [ ] Ptolomejev poučak
- [ ] Poučak o kutu tetive i tangente
- [ ] Ostalo: ____

Na koji način dokazujete poučke u nastavi?

- [ ] Puštam učenike da samostalno dokazuju.
- [ ] Pripremim učenicima vođenu vježbu kroz koju dolaze do zaključaka koji su potrebni za dokaz.
- [ ] Napišem dokaz na ploču uz pojašnjenja.
- [ ] Koristim digitalne sadržaje (geogebru, video i sl.) kako bi učenicima približio/la dokaz.
- [ ] Ne radim dokaze.
- [ ] Ostalo:

Koristite li prilikom obrade nastavne cjeline "Krug i kružnica" digitalnu tehnologiju? Ako da, navedite koju i kako.

Vaš odgovor

Koje poteškoće ste primjetili kod učenika prilikom obrade sadržaja vezanih uz nastavnu cjelinu "Krug i kružnica" te kako rješavate te poteškoće?

Vaš odgovor

Podnesi

Bibliografija

[1] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo i N. Zvelf, *Matematka 6, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u šestom razredu osnovne škole, 1. dio*, Školska knjiga, 2014.

[2] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić i N. Zvelf, *Matematka 5, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u petom razredu osnovne škole, 2. dio*, Školska knjiga, 2015.

[3] M. Bombardelli i D. Ilišević, *Elementarna geometrija, skripta*, 2007.

[4] Ž. Bošnjak, B. Čulina i G. Paić, *Matematički izazovi 5, udžbenik iz matematike za peti razred, prvi dio*, Alfa, 2008.

[5] B. Dakić i N. Elezović, *Matematka 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije, 2. dio*, Element, 2008.

[6] ______, *Matematka 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije i tehničkih škola, 1. dio*, Element, 2014.

[7] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, La Salle, 1950.

[8] B. Jagodić, N. Sarapa i R. Svedrec, *Matematka 6, udžbenik za 6. razred osnovne škole*, Školska knjiga, 2003.

[9] Z. Kurnik, *Poučak ili teorem*, Matematika i škola (2000), br. 8, 101–105.

[10] ______, *Matematički pojam*, Matematika i škola (2001), br. 11, 8–16.

[11] ______, *Metodika uvođenja novih pojmova*, Matematika i škola (2001), br. 12, 55–59.

[12] ______, *Jezik u nastavi matematike*, Matematika i škola (2006), br. 33, 99–105.

[13] ______, *Dedukcija*, Matematika i škola (2009), br. 51, 5–11.

[14] ———, *Terminološki problemi u nastavi matematike*, Matematika i škola (2010), br. 55, 195–199.

[15] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić i Ž. Dijanić, *Matematka 2, udžbenik u 2. razredu srednje škole (5 sati tjedno), 2. dio*, Školska knjiga, 2019.

[16] Narodne novine, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`, 2019.

[17] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1992.

[18] ———, *Matematka 1, udžbenik za 1. razred gimnazije i srednjih škola*, Školska knjiga, 2001.

[19] M. Polonijo, *MATEMATIKA 5, udžbenik za peti razred osnovne škole*, Školska knjiga, 1995.

[20] D. Tall, *Concept Image and Concept Definition*, Senior Secondary Mathematics Education (1988), 37–41.

[21] D. Tall i S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics (1981), br. 12, 151–169.

[22] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, *Matematka 5, udžbenik za peti razred osnovne škole, 2. svezak*, PROFIL Klett, 2019.

[23] Z. Šporer, *O definicijama u matematici*, Matematika 1 (1987), 5–11.

Sažetak

U ovom radu prikazan je složen proces izgradnje matematičke teorije vezane uz pojmove kut, krug i kružnica u nastavi matematike. Opisana je njegova postupnost i naglašena važnost prilagodbe sadržaja i izgleda definicije uzrastu učenika u nastavi, bez da se pritom naruše osnovna načela koje matematika kao znanost zahtjeva. Naglasak je stavljen na poteškoće s kojima se susreću učenici i nastavnici u nastavi prilikom uvođenja pojmova kut, krug i kružnica te važnost uloge nastavnika pri otklanjanju tih poteškoća. Sukladno provedenom istraživanju navedeni su mogući razlozi pojave poteškoća prilikom obrade sadržaja vezanih uz krug i kružnicu u srednjoškolskoj nastavi matematike.

Summary

This thesis presents a complex process of building mathematical theory related to the terms of an angle, a circle and a disk in teaching mathematics. We describe that the process is gradual and emphasize the importance of adapting the content and formulating the definition according to the students' age, without violating the basic principles required by mathematics as a science. The emphasis is on difficulties that students encounter when introduced to the concept of an angle, a circle and a disk and moreover the importance of the role of a teacher in eliminating these difficulties. Based on the conducted research, we show possible reasons for the occurrence of the difficulties when studying topics related with a circle and a disk in high school mathematics.

Životopis

Moje ime je Anja Šenjuk, rođena sam 24. veljače 1996. godine u Varaždinu. Završila sam Osnovnu školu Ivana Kukuljevića Sakcinskog u Ivancu. Srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u Srednjoj školi Ivanec - smjer: opća gimnazija. Od 2014. godine studentica sam Matematičkog odsjeka na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2018. godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike nastavničkog smjera na istom odsjeku. Od rujna 2020. radim u Osnovnoj školi Sveta Klara kao nastavnica matematike.